arXiv:2305.03590v1 [math.DS] 5 May 2023

阿诺索夫齐性空间中极大平坦圆柱及其全纯单值的联合等分布

MICHAEL CHOW 和 ELIJAH FROMM

摘要。 设 G 是一个连通半单实代数群，且$P < G$ 是一个具有朗兰兹分解 $P = MAN$ 的极小抛物子群。设 $\Gamma < G$ 是一个相对于 阿诺索夫的扎里斯基稠密子群 P。由于 Γ 是阿诺索夫的， Γ 的本原元素共轭类集合与 $\Gamma\backslash G/M$中（正向定向的）极大平坦圆柱集合一一对应。我们描述极大平坦圆柱及其全纯单值在其周长趋于无穷时的联合等分布。此结果可视为秩一情形下马古利斯–穆罕默迪–奥对闭测地线及其全纯单值的联合等分布结果的阿诺索夫类比 [MMO14]。

目录

1. 引言 12. 正则方向的有效闭合引理 123. 几何测度 164. 阿诺索夫子群与极大平坦圆柱 215. 近似圆柱形极大平坦的计数 266. 关于 ψ-周长的联合等分布 407. 关于类范数排序的联合等分布 47附录 A. 关于 κ_{v} 与 I 50参考文献 53

1. 引言

1.1. 背景与设定。 设 G 为一个连通半单实代数群。设 $P < G$ 为一个极小抛物子群，其 Langlands 分解为 $P = MAN$，其中 N 是 P 的幺幂根基， $A = \exp \mathfrak{a}$ 是一个极大实分裂环面，而 M 是 P 中与 A 对易的一个极大紧子群。设 $\Gamma < \mathsf{G}$ 为一个无挠离散子群。本文研究 $\Gamma\backslash G/M$ 中非平凡闭 A 轨道的等分布，或者等价地，研究 $\Gamma\backslash G$ 中非平凡闭 AM 轨道的等分布，以及当 Γ 是关于 P 的一个无挠 Zariski 稠密 Anosov 子群时，这些轨道的全纯单值。

令 $\mathcal{F} := G/P$ 表示福斯滕伯格边界，令 $\mathcal{F}^{(2)}$ 表示 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 中唯一的开 G-轨道。若 $\Gamma < G$ 是扎里斯基稠密离散子群，且 Γ 是有限生成的格罗莫夫双曲群，并存在一个 Γ-等变连续嵌入，将 Γ 的 Gromov 边界 $\partial\Gamma$ 映入 $\mathcal{F}$，满足对于 $\partial\Gamma$ 中任意两个不同点的像 x、$y \in \mathcal{F}$，都有 $(x, y) \in \mathcal{F}^{(2)}$，则称 $\Gamma < G$ 关于 P 是阿诺索夫的。阿诺索夫子群的概念（关于 G 的任意抛物子群）最初由 Labourie [Lab06] 针对曲面群引入，之后 Guichard–Wienhard [GW12] 将其推广到格罗莫夫双曲群（参见 [KLP17, GGKW17, Wie18]）。本文中，所有阿诺索夫子群均关于 P 是阿诺索夫的。阿诺索夫子群被视为扎里斯基稠密凸共紧子群的自然高秩推广，因为当秩$(G) = 1$时，这两个概念相同。

设 $\Gamma < G$ 为一个无挠 Zariski 稠密 Anosov 子群。设 $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ 为与 N 相关联的正韦尔室，并令 $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$。令 $\psi_\Gamma : \mathfrak{a}^+ \to \{-\infty\} \cup [0, \infty)$ 表示由 Quint 引入的 Γ的增长指标函数 [Qui02a] (定义 3.8)。函数 ψ_Γ 是秩一情形下临界指数在高秩情形中的推广。我们固定一个相切形式 $\psi \in \mathfrak{a}^*$，即，

$$\psi : \mathfrak{a} \to \mathbb{R} \text{ linear}, \psi \geq \psi_\Gamma, \psi(\mathsf{v}) = \psi_\Gamma(\mathsf{v}) = 1 \text{ for some } \mathsf{v} \in \operatorname{int} \mathfrak{a}^+, \quad (1.1)$$

其中，内部 $\mathfrak{a}^+$ 表示 $\mathfrak{a}^+$的内部。这类切形式的空间同胚于 $\mathbb{R}^{\operatorname{rank}(G)-1}$。除相乘常数外，存在唯一的$(\Gamma, \psi)$-共形测度，定义在 $\mathcal{F}$ 上，且必然支集于 Λ 的极限集 Γ，如 Lee–Oh 所示 [LO20b，定理 1。3]，[LO22，定理 1。2]。因此，除相乘常数外，存在唯一的鲍恩–马古利斯–沙利文（BMS）测度

$$\mathsf{m}_\psi$$

关于 $\Gamma\backslash G/M$ 与.....相关的 ψ （定义3.19）。当秩$(G) \geq 2$，$\mathsf{m}\psi$ 是一个无限测度（参见 [Sam15，定理 3。5]，另请参见 [LO20b，推论 4。9]）。利用 Hopf参数化$\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a} \cong G/M$ （定义3.16），$\mathsf{m}\psi$ 的支集为

$$\Omega := \operatorname{supp} \mathsf{m}_\psi = \Gamma\backslash(\Lambda^{(2)} \times \mathfrak{a}) \subset \Gamma\backslash(\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}) \cong \Gamma\backslash G/M,$$

其中 $\Lambda^{(2)} : = (\Lambda \times \Lambda) \cap \mathcal{F}^{(2)}$ （定义 3.19）。

对于任意闭合的 AM-轨道 $C = \Gamma g AM \subset \Gamma\backslash G/M$，其周期群$g^{-1}\Gamma g \cap AM$ 要么是平凡群，要么同构于 $\mathbb{Z}$；后一种情况下，C 是一个极大平坦圆柱；

$$C \cong (g^{-1}\Gamma g \cap AM)\backslash AM/M \cong \mathbb{R}^{\operatorname{rank}(G)-1} \times \mathbb{S}^1.$$

我们强调，闭的 AM 轨道是圆柱，这是阿诺索夫子群的一个特征。例如，如果 $\Delta < G$ 是无挠格，那么在 $\Delta\backslash G$ 中存在一个闭的 AM 轨道，其周期群同构于

$\mathbb{Z}^{\operatorname{rank}(G)}$，因此闭的 AM-轨道是一个紧致环面 [PR72，定理 2。8]。

当 $g^{-1}\Gamma g \cap (\operatorname{int} A^+)M \neq \emptyset$ 时，其中 $\operatorname{int} A^+$ 表示 A^+ 的内部，我们称 $\Gamma gAM \subset \Gamma\backslash G/M$ 为正向定向的极大平坦圆柱。令$[\Gamma]$ 表示 Γ 中的共轭类集合，并令

$$[\Gamma_{\mathrm{prim}}] := \{[\gamma] \in [\Gamma] : \gamma \in \Gamma \text{ primitive}\}.$$

所有正向定向的极大平坦圆柱的集合与 $[\Gamma_{\mathrm{prim}}]$一一对应。还要指出，正向定向的极大平坦圆柱恰好是包含于 Ω中的极大平坦圆柱（引理 4.14）。在本引言的其余部分，除非另有说明，所有极大平坦圆柱均为正向定向的。记 $\mathcal{C}_\Gamma$ 为所有极大平坦圆柱组成的集合：

$$\mathcal{C}_\Gamma := \{C \subset \Omega : C \text{ is a maximal flat cylinder}\}.$$

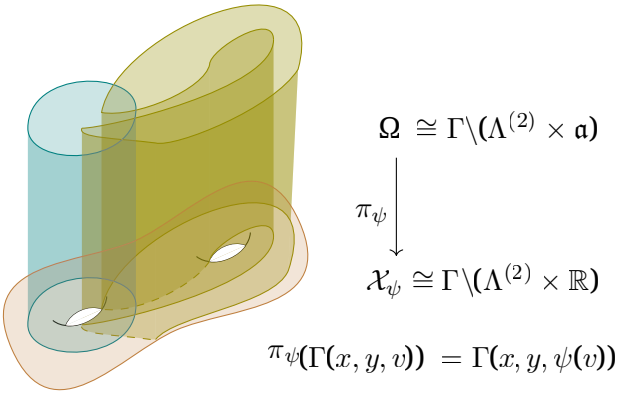


图 1 – 向量丛 π_ψ 中的极大平坦圆柱：$\Omega \to \mathcal{X}_\psi$。图中，$\mathcal{X}_\psi$ 被描绘为所示闭曲面的单位切丛。

由于 Γ 是阿诺索夫且无挠的，$\gamma \in \Gamma$ 的每个非平凡元素都是双曲型的，也就是说，与某个 $\exp(\lambda(\gamma))m \in (\operatorname{int} A^+)M$ 共轭。该元素

$$\lambda(\gamma) \in \operatorname{int} \mathfrak{a}^+$$

是唯一的，称为 γ 的若尔当投影，而 $m \in M$ 属于唯一的共轭类

$$h_\gamma := [m] \in [M]$$

称为 γ 的 *holonomy* 。如果 $C \in \mathcal{C}_\Gamma$ 对应于 $[\gamma] \in [\Gamma_{\mathrm{prim}}]$，那么我们定义 C 的 ψ-周长和 *holonomy* 为

$$\ell_\psi(C) := \psi(\lambda(\gamma)) \in (0, \infty) \quad \text{and} \quad h_C := h_\gamma \in [M],$$

分别（关于 4.3-周长的正性），请参见定理。

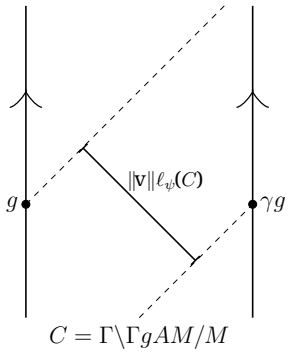


图 2 – 将一个闭合的 A-轨道平铺展开后的示意图。左右边界相互识别，使得 g 与 γg 相互识别。ψ-周长可从 $\ker\psi$ 超平面所截切片的宽度中看出。

我们给出 ψ-周长的几何描述。如前所述，每个极大平坦圆柱都包含在 Ω 中。阿诺索夫子群的另一个特征是，Ω 同胚于一个紧致度量空间 $\mathcal{X}_\psi$ 上的平凡 $\ker\psi$-向量丛，且该空间配备了一个有限测度 $m_{\mathcal{X}_\psi}$，满足

$$d\mathsf{m}_\psi\big|_\Omega = dm_{\mathcal{X}_\psi}\, du, \tag{1.2}$$

对于某个勒贝格测度 du 在 $\ker\psi$ (详情请见第 4.2 小节)。任意ψ-极大平坦圆柱的周长等于其交曲线的长度，该交曲线位于 $\mathcal{X}_\psi$ (图 1)。更准确地说，$\mathcal{X}_\psi$ 配备了平移流，极大平坦圆柱与 $\mathcal{X}_\psi$ 的交曲线是平移流的一条周期轨道（引理 4.18）。另一种解释见图 2 。

1.2. 主要结果陈述。 本文的主要结果是，当极大平坦圆柱的ψ周长趋于无穷时，这些圆柱及其全纯单值呈联合等分布。对于 $T > 0$，令 $\mathcal{C}_\psi(T)$表示所有 ψ周长不超过 T的极大平坦圆柱所构成的集合：

$$\mathcal{C}_\psi(T) := \{C \in \mathcal{C}_\Gamma : \ell_\psi(C) \le T\}.$$

我们注意到 $\mathcal{C}_\psi(T)$ 始终是一个有限集（见引理 6.1）。为了表述联合等分布结论，记 V_C 为由 AM上的哈尔测度诱导的最大平坦圆柱 C上的体积测度。令 $\mathrm{C_c}(\Gamma\backslash G/M)$表示 $\Gamma\backslash G/M$ 上的连续紧支集函数集合，并令 $\mathrm{Cl}(M)$ 表示 M上的连续实值类函数集合。对于$T > 0$，我们在 μ_T 与 η_T 的乘积上定义 Radon 测度 $\Gamma\backslash G/M$ 和

$[M]$如下。对于 $T>0$, $f\in$C$_c$(Γ$\backslash G/M$) 和 $\varphi\in$Cl(M)，令

$$\mu_T(f\otimes\varphi):=\sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T)}V_C(f)\varphi(h_C);$$

$$\eta_T(f\otimes\varphi):=\sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T)}\frac{V_C(f)}{\ell_\psi(C)}\varphi(h_C).$$

设 $M_\Gamma<M$ 表示由 Γ中所有元素的全纯单值生成的闭子群。则 M_Γ 是 M 的正规子群，且包含 M [GR07，推论 110] 的单位连通分支， M_Γ 因此特别地， M在 M 不连通时， M_Γ 在 M 中未必等于 （例如见第 1.7小节）。下面陈述我们的主要定理，描述极大平坦圆柱及其全纯单值的联合等分布。

定理 1.3 (联合等分布)。设 $\Gamma<G$ 是一个扎里斯基稠密的阿诺索夫子群。对于任意切形式 $\psi\in\mathfrak{a}^*$，以及任意 $f\in C_c(\Gamma\backslash G/M)$ 和$\varphi\in\mathrm{Cl}(M)$，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mu_T(f\otimes\varphi)}{e^T}=\frac{1}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\mathsf{m}_\psi(f)\int_{M_\Gamma}\varphi\,dm_\Gamma;$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\eta_T(f\otimes\varphi)}{e^T/T}=\frac{1}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\mathsf{m}_\psi(f)\int_{M_\Gamma}\varphi\,dm_\Gamma,$$

其中 m_Γ 表示 M_Γ上的 ***Haar*** 概率测度。

我们注意到，根据（1.2 ），定理1.3ψ 右端与mψ 的归一化无关。由定理1.3 我们还得到以下全纯单值的等分布结果。 $\geq$ 2由于m是一个无限测度（当秩G） $\geq$ 2时），这并非定理1.3的直接推论。

推论 1.4 （全纯单值的等分布）。沿用定理*1.3*中的记号，我们有

$$\sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T)}\varphi(h_C)\sim\frac{e^T}{T}\int_{M_\Gamma}\varphi\,dm_\Gamma\quad as\ T\to\infty.$$

注1.5。由定理1.3可知， Γ 的全纯单值集合在 M_Γ中稠密，即

$$M_\Gamma=\overline{\{m\in M:\exists C\in\mathcal{C}_\Gamma\text{ such that }h_C=[m]\}}.$$

注记 1.6。 令 $\mathcal{L}$ 表示 Γ的极限锥，即包含所有 $\gamma\in\Gamma$的若尔当投影的最小闭锥。定理 1.3 和推论 1.4 可以通过利用以下事实推广到在 $\psi\in\mathfrak{a}^*$上为正的线性形式 $\mathcal{L}\setminus\{0\}$: $\delta_\psi\psi$ 与 ψ_Γ 在某个 $\delta_\psi>0$ 处相切，该点称为ψ-临界指数 （属于 Γ ） （参见定理4.3）。在此背景下，我们的定理意味着 ψ-临界指数等于 ψ-拓扑熵，即:

$$\delta_\psi = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \#\{\gamma \in \Gamma : \psi(\mu(\gamma)) \le t\}$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \#\{[\gamma] \in [\Gamma_{\mathrm{prim}}] : \psi(\lambda(\gamma)) \le t\}, \quad (1.7)$$

<escape>其中 μ： $G \to \mathfrak{a}^+$ 表示 Cartan 投影（定义 3.8）。此外，推论1.4 立即推出</escape>

$$\#\mathcal{C}_\psi(T) = \#\{[\gamma] \in [\Gamma_{\mathrm{prim}}] : \psi(\lambda(\gamma)) \le t\} \sim \frac{e^{\delta_\psi T}}{\delta_\psi T}, \quad (1.8)$$

其中，对于 $f_1, f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$，我们记作

$$f_1 \sim f_2 \iff \lim_{T\to\infty} \frac{f_1(T)}{f_2(T)} = 1.$$

上述（1.7）和（1.8）由 Sambarino [Sam14b，定理 7。8]，[Sam14a，推论 4。4] 在 Γ是闭连通负曲率黎曼流形的基本群时得以证明；鉴于 [Car21，附录 A],Sambarino 的工作可推广到 Anosov 子群。我们还提及 [BCKM22，推论 11。1] 这是一个类似于（1.8）的计数结果，适用于 带尖点的 Anosov 表示。

1.3. **关于类范数函数的联合等分布**。 我们的证明还使我们能够在第 7 节证明类似的结果，其中 $\mathcal{C}_\Gamma$ 按照一个类范数函数进行排序。设 $\mathsf{N} : \mathfrak{a}^+ \to \mathbb{R}$ 是一个 类范数 函数，即 N 是二阶连续可微的（除原点外），凸的，一次齐次的，并且在 $\mathcal{L} \setminus \{0\}$上为正。例如， L^p范数对于 $1 \le p < \infty$而言是类范数。函数 N 在 $\mathcal{C}_\Gamma$上确定了一种排序：

$$\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T) := \{C \in \mathcal{C}_\Gamma : \mathsf{N}(\lambda(\gamma_C)) \le T\}.$$

我们将 N-临界指数定义为

$$\delta_{\mathsf{N}} := \max_{\mathsf{N}(w)=1} \psi_\Gamma(w) > 0. \quad (1.9)$$

为简便起见，我们这里只陈述相对于 N 的全纯单值等分布。

推论 1.10 (关于 N 的全纯单值等分布. 存在一个常数 $0 < c_{\mathsf{N}} \le 1$，使得对于任意 $\varphi \in \mathrm{Cl}(M)$，我们有

$$\sum_{C\in\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T)} \varphi(h_C) \sim c_{\mathsf{N}} \frac{e^{\delta_{\mathsf{N}} T}}{\delta_{\mathsf{N}} T} \int_{M_\Gamma} \varphi \, dm_\Gamma \quad as\ T \to \infty.$$

此外， $c_{\mathsf{N}} = 1$ 当且仅当 N 在 v 处的海森矩阵恒等于零，其中 v 是使(1.9)中的最大值达到的唯一向量。

1.4. 与秩一情形的比较。 当 $\operatorname{rank}(G) = 1$ 时，阿诺索夫子群与扎里斯基稠密凸余紧子群一致。将 Γ 的临界指数记为 δ，将 $\Gamma\backslash G/M$ 中长度不超过 T 的闭测地线集合记为

$$\mathcal{G}_\Gamma(T) := \{\text{primitive closed geodesics of length at most } T\}.$$

然后使用表 1 中的对应关系，并注意到 M 在G 为秩一且中心无关时是连通的，在这些情况下，推论 1.4 表明，对所有$\varphi \in \mathrm{Cl}(M)$，我们有

$$\sum_{C\in\mathcal{G}_\Gamma(T)} \varphi(h_C) \sim \frac{e^{\delta T}}{\delta T}\int_M \varphi\, dm \quad \text{as } T\to\infty.$$

这是 [MMO14 定理 1 的一个特例。4]。

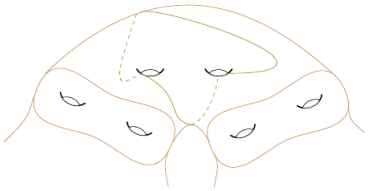
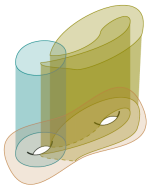
秩一	高秩
凸余紧群	阿诺索夫群
本原闭测地线 C	正向定向的极大平坦圆柱 C
$\delta\times$（C的长度）	ψ- C的周长
C 的 holonomy	C的 holonomy
有限 BMS 测度	与 ψ 相关的无限 BMS 测度
	

表1 – 秩一情形与高秩情形之间的对应表。

对于秩一群，当 Γ 是余紧格时，$\mathcal{G}_\Gamma(T)$ 的渐近式由马古利斯[Mar04] [1] 证明；当 Γ 是非余紧格时，由 Gangolli–Warner [GW80] 证明；当 Γ 是几何有限时，由 Roblin [Rob03] 证明。闭测地线的等分布则由马古利斯 [Mar04] 和 Bowen [Bow72a, Bow72b]分别在 Γ 是余紧格时独立研究，并由 Roblin [Rob03]在 Γ 是几何有限时研究。Parry–Pollicott [PP86] 证明了当 Γ 是 $\mathrm{SO}(n,1)^\circ$ 中的余紧格时，全纯单值的等分布。对于一般的秩一群，当 Γ 是格时，Sarnak–Wakayama [SW99] 证明了全纯单值的等分布；当 Γ 是扎里斯基稠密的几何有限子群时，Margulis–Mohammadi–Oh [MMO14] 证明了联合等分布。Oh–Pan [OP19]针对凸余紧秩的阿贝尔覆盖获得了一项联合等分布结果。

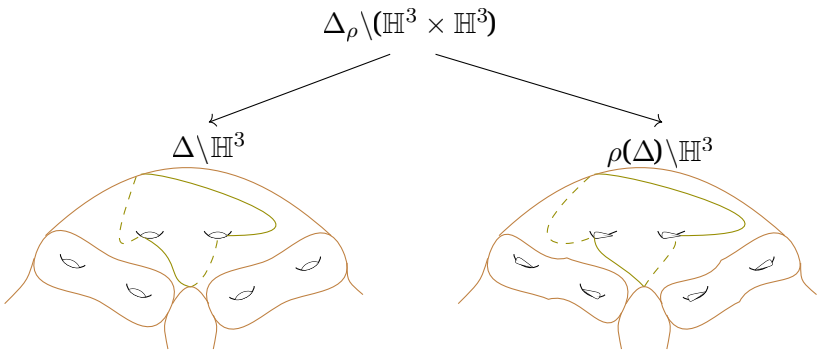
1. [Mar04] 包含马古利斯此前未发表的1970年论文。参见 [Par05] 以了解评述。

一个群；在这种情况下，BMS测度是无限的，这与 [MMO14]不同。 [MMO14] 中的一项关键技术是利用标架流的混合 [Win15], ，而这项技术可追溯至马古利斯在其1970年博士论文中关于负曲率紧流形上闭测地线的计数与等分布的研究。对于 Γ 凸余紧情形，Chow–Sarkar [CS22], 证明了这种混合具有指数收敛速度；对于 Γ 具有抛物元素的几何有限情形，Li–Pan–Sarkar [LPS23]也证明了这一点。在这些情形下，全纯单值的分布可以确定到一个指数级误差项（参见 [MMO14，定理12]）。

1.5. **高秩情形下的一些相关结果**。 对于高秩李群的余紧格，我们提及 Spatzier 的博士论文 [Spa83] ，其中他描述了当极大平坦周期环面的正则单射半径趋于无穷时，其总体积的指数增长率，以及 Dang–Li 最近关于这些极大平坦周期环面的计数与等分布的研究成果 [DL22] 。

1.6. 例：凸共紧子群的自拼接。对于$G = \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C} \times \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C}$，所有阿诺索夫子群都可表示为凸共紧自拼接；正如 Kim–Oh[KO22, KO23a, KO23b]所示，这些自拼接在刚性研究中有有趣的应用。设 $\Delta < \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C}$ 是一个扎里斯基稠密的凸余紧子群，且 $\rho\colon \Delta \to \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C}$ 是一个凸余紧的离散忠实表示。那么， Δ 经由 ρ 得到的自拼接 Δ_ρ 定义为 Δ 通过 ρ嵌入到 G 中的对角嵌入，即,

$$\Delta_\rho := \{(\gamma, \rho(\gamma)) \in \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C} \times \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C} : \gamma \in \Delta\} < \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C} \times \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C}.$$



注意， Δ_ρ在$\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C} \times \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C}$中扎里斯基稠密，当且仅当 ρ不能扩张为 $\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{C}$ 的一个自同构，因此是共轭（参见 [KO22，引理 4。1]）。

对于本原 $[\gamma] \in [\Delta]$，令 C_γ 表示$\Delta\backslash\mathbb{H}^3$ 中与 $[\gamma] \in [\Delta]$ 相对应的 $\ell(C_\gamma)$ 表示 C_γ的长度。在此情形下， $M_{\Delta_\rho} = M \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 并且我们有如下与[MMO14定理 1 类似的结果。3]。

推论 1.11 (凸余紧群的全纯单值刚性)。令 $\Delta < \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ 为一个扎里斯基稠密的凸余紧子群，其临界指数为δ_Δ。令 Δ_ρ 为通过凸余紧离散忠实表示 $\rho : \Delta \to \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ 得到的 Δ 的自联结。将全纯单值与角度对相对应。若 ρ 无法延拓至 $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$，则对于任意 $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ 和任意 $0 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$，我们有

$$\#\{C_\gamma : \ell(C_\gamma) \le T \text{ and } h_{(\gamma,\rho(\gamma))} \in (\theta_1,\theta_2)\times(\theta_3,\theta_4)\} \sim \frac{(\theta_2-\theta_1)(\theta_4-\theta_3)e^{\delta_\Delta T}}{(2\pi)^2\delta_\Delta T} \qquad as\ T\to\infty.$$

我们注意到，当 ρ 延拓到 $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$时，全纯单值的集合包含于 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 的对角线中，因此甚至不在 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$中稠密。表示 ρ 不延拓，当且仅当全纯单值集合$\{h_{(\gamma,\rho(\gamma))} \in \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 : \ell(C_\gamma) \le T\}$ 在 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 中等分布，当 $T\to\infty$趋于 1.11时。因此，推论 1.11 可以视为关于凸余紧子群的全纯单值刚性结论。

1.7. 例：曲面群的 Hitchin 表示。设 $\rho : \Gamma_0 \to \mathrm{PSL}_d\mathbb{R}$ 是一个*Hitchin* 表示，也就是说，Γ_0 是一个亏格至少为 2 的闭定向曲面的基本群，并且 ρ 可以连续变形为 $\rho_d\circ\rho_0$，其中 $\rho_0 : \Gamma_0 \to \mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ 是某个离散忠实表示，而 $\rho_d : \mathrm{PSL}_2\mathbb{R} \to \mathrm{PSL}_d\mathbb{R}$ 表示在共轭意义下唯一的不可约表示。假设 $\Gamma = \rho(\Gamma_0) < \mathrm{PSL}_d\mathbb{R}$ 是扎里斯基稠密的。

对于 $G = \mathrm{PSL}_d\mathbb{R}$, $\mathfrak{a} \cong \{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_i t_i = 0\}$。我们选取 $\mathfrak{a}^+ = \{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d : t_1 \ge \cdots \ge t_d, \sum_i t_i = 0\}$。对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$，令 $\alpha_i \in \mathfrak{a}^*$ 表示由以下给出的简单根

$$\alpha_i(t_1, \ldots, t_d) = t_i - t_{i+1}.$$

作者：Potrie–Sambarino [PS17，定理 B]，α_i 是一个切形式。根据 Labourie[Lab06，定理 1。5]，

$$M_\Gamma = \{e\}.$$

将 $\gamma \in \Gamma$ 的特征值记为 $\lambda_1(\gamma) > \cdots > \lambda_d(\gamma) > 0$，并将对应于 $[\gamma]$ 的极大平坦圆柱记为 $C(\gamma)$。

推论 1.12. 令 $\Gamma < \mathrm{PSL}_d\mathbb{R}$ 为一个 *Hitchin* 表示的扎里斯基稠密像。令 $i \in \{1, \ldots, d-1\}$。那么，对于任意紧支连续函数 $f : \Gamma\backslash\mathrm{PSL}_d\mathbb{R}/M \to \mathbb{R}$，当 $T\to\infty$ 时，我们有

$$e^{-T} \sum_{\substack{[\gamma]\in[\Gamma] \\ \lambda_i(\gamma)-\lambda_{i+1}(\gamma)\le T}} \frac{1}{\lambda_i(\gamma)-\lambda_{i+1}(\gamma)} V_{C(\gamma)}(f) \to \frac{1}{|m_{\chi_{\alpha_i}}|}\mathsf{m}_{\alpha_i}(f).$$

1.8. **定理 1.3 的证明概要**。 我们的证明思路与 [MMO14]中的证明类似。然而，在我们的高秩情形下，需要谨慎处理因 A的高维性质、BMS 测度无限以及 A-作用不具备强混合性而产生的技术障碍。更具体地说，令 $g_0 \in G$ 和 $\varepsilon > 0$。以 ε为中心的 g_0 -流盒定义为

$$\mathfrak{B}(g_0, \varepsilon) := g_0(N_\varepsilon^+ N \cap N_\varepsilon N^+ AM) M_\varepsilon A_\varepsilon,$$

其中 N^+ 是与 N 相对的 horospherical 子群，且下标为 ε 的子群表示该子群中恒等式的 ε 邻域。

令 Θ 为 M_Γ的一个共轭不变博雷尔子集。只需了解.....的渐近式行为。

$$\mu_T(\tilde{\mathcal{B}}(g_0, \varepsilon) \otimes \Theta),$$

˜其中 $\mathcal{B}(g_0, \varepsilon)$ 表示 $\mathfrak{B}(g_0, \varepsilon)$ 在投影 $G \to \Gamma\backslash G/M$下的像。令 $\mathcal{L}$ 表示 极限锥 属于 Γ （定义 3.2），并令

$$\mathcal{L}_T^+ := \{\exp(w) : w \in \mathcal{L}, \psi(w) \le T\}.$$

˜引理 6.3 将 $\mu_T(\mathcal{B}(g_0, \varepsilon) \otimes \Theta)$ 与集合中 Γ 的元素个数联系起来

$$\mathcal{W}_T(g_0, \varepsilon, \Theta) := \{gamg^{-1} : g \in \mathcal{B}(g_0, \varepsilon), am \in \mathcal{L}_T^+ \Theta\}.$$

因此，我们接下来考虑集合

$$\mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \Theta) := \mathcal{B}(g_0, \varepsilon)\mathcal{L}_T^+ \Theta \mathcal{B}(g_0, \varepsilon)^{-1},$$

这可以被视为对 $\mathcal{W}_T(g_0, \varepsilon, \Theta)$ 的一种加厚。我们可以利用引理 2.7（一个针对正则方向的有效闭合引理），将 $\#(\Gamma \cap \mathcal{W}_T(g_0, \varepsilon, \Theta))$ 的渐近行为与 $\#(\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \Theta))$ 的渐近行为联系起来。引理 2.7 表明，如果 $\gamma \in \Gamma$ 对应于 $\Gamma\backslash G$ 中的一个 AM-轨道，并且该轨道沿着某个 $\exp(w)m \in AM$ 几乎闭合，其中 $w \in \mathfrak{a}$ 是正则方向上的一个充分大的向量，那么就存在一个邻近的闭合 AM-轨道，其周期约为 $\exp(w)m$。我们可以应用引理 2.7，因为 Γ 是阿诺索夫的，这意味着其极限锥 $\mathcal{L}$ 包含于 $\mathfrak{a}^+$ 的内部。

当 $\operatorname{rank}(G) = 1$且 BMS测度有限时，Margulis–Mohammadi– Oh [MMO14] 证明，利用 A-作用在 $\Gamma\backslash G$上的强混合，可以得到 $\#(\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \Theta))$ 的渐近行为。当 G 具有更高的秩，因此 m_ψ 为无穷时， A-作用在 $\Gamma\backslash G$上并非强混合。作为强混合的替代，我们有 Chow–Sarkar [CS23] 和 Edwards–Lee–Oh [ELO22b],所证明的单参数对角流 $\exp(t\mathrm{v})$ 的局部混合，其中 v 如 (1.1) 所示。事实上，他们的局部混合定理适用于更一般的单参数族 $\exp(t\mathrm{v} + \sqrt{t}u)$，其中 $u \in \ker \psi$。我们的证明需要这一更精细的版本，以及与之相配的一个一致性陈述。令 $C_c(\Gamma\backslash G)$ 表示 $\Gamma\backslash G$ 上连续紧支撑函数的集合，并令 ρ 表示关于 $\mathfrak{a}^+$ 的正根半和。

定理 1.13 (局部混合，[CS23，定理 1.3]，[ELO22b，定理 3.4])。存在 $\kappa_{\mathsf{v}} > 0$ 使得对任意 $u \in \ker \psi$ 以及对任意 $\phi_1, \phi_2 \in C_{\mathrm{c}}(\Gamma\backslash G)$，我们有

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{\operatorname{rank}(G)-1}{2}} e^{(2\rho-\psi)(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u)} \int_{\Gamma\backslash G} \phi_1(x\exp(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u))\phi_2(x)\,dx = \frac{\kappa_{\mathsf{v}} e^{-I(u)}}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} m_\psi^{\mathrm{BR}}|_{ZN^+}(\phi_1)\cdot m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}|_{ZN}(\phi_2),$$

其中，dx 表示 $\Gamma\backslash G$ 上的右 G 不变测度，$I\colon \ker\psi \to \mathbb{R}$ 由 $I(\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle_* - \frac{\langle\cdot,\mathsf{v}\rangle_*\langle\cdot,\mathsf{v}\rangle_*}{\langle\mathsf{v},\mathsf{v}\rangle_*}$ 在 $\mathfrak{a}$ 上的某个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 定义，m_ψ^{BR} 和 $m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}$ 表示与 ψ 相关的*Burger–Roblin*测度，而 $\mathfrak{Z}_\Gamma$ 表示 m_ψ 的 A-遍历分量构成的有限集。

此外，存在常数 η_{v} 和 T_{v}，使得对于所有 $\phi_1, \phi_2 \in C_{\mathrm{c}}(\Gamma\backslash G)$，都存在常数 $D_{\mathsf{v}}(\phi_1,\phi_2)$，它关于 ϕ_1 和 ϕ_2 连续依赖，并且对于所有 $(t,u) \in (T_{\mathsf{v}},\infty) \times \ker\psi$，使得 $t\mathsf{v}+\sqrt{t}u \in \mathcal{L}$，我们有

$$\left| t^{\frac{\operatorname{rank}(G)-1}{2}} e^{(2\rho-\psi)(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u)} \int_{\Gamma\backslash G} \phi_1(x\exp(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u))\phi_2(x)\,dx \right| \le D_{\mathsf{v}}(\phi_1,\phi_2) e^{-\eta_{\mathsf{v}} I(u)}. \quad (1.14)$$

由于 $\mathcal{L}_T^+$ 具有高维特性，我们需要证明，对某个紧函数族 ϕ_1 和 ϕ_2，在 $\mathcal{L}_T^+$ 上积分后，定理1.13 中的误差项 $E(\phi_1,\phi_2,t,u)$ 不会影响渐近式。我们利用（1.14）对 $|E(\phi_1,\phi_2,t,u)|$ 进行估计，并证明

$$\int_{a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathcal{L}_T^+} e^t E(\phi_1,\phi_2,t,u)\,dt\,du = o(e^T),$$

其中，若 $o(f) = g$ 满足 $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，则记为 $\lim_{T\to\infty} \frac{f(T)}{g(T)} = 1$。经过一些技术性论证并应用定理1.13，我们得到命题5.12，它给出了 Γ 在 S_T 的乘积子集 $= \Xi_1\mathcal{L}_T^+\Theta\Xi_2\colon$ N^+AMN 中的元素个数的渐近式。由命题5.12，我们推得渐近式

$$\#\Gamma\cap\mathcal{V}_T(g_0,\varepsilon,\Theta) = \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^T \left(\frac{\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon)\otimes\Theta)}{b_{\mathsf{r}}(\varepsilon)}(1+O(\varepsilon)) + o_T(1) \right),$$

其中 $[M:M_\Gamma]$ 表示 M_Γ 在 M 中的指标，$b_{\mathsf{r}}(\varepsilon)$ 表示欧几里得 ε 维 r 球的体积，m_ψ 表示此处与 ψ 在 $\Gamma\backslash G$ 上相关联的 BMS测度（命题 5.24）。这一渐近式是推导 μ_T 的渐近式所需的输入。利用 μ_T 的渐近式，我们推导出 η_T 的渐近式，并由此通过在定理 1.4 中仔细选择函数 f，得到推论 1.3。

结构安排。 第 2节首先固定本文中将始终使用的李群 G 相关的记号。在小节 2.1中，我们定义 ε-流盒。在小节 2.2中，我们陈述并证明一个适用于正则方向的有效闭合引理（引理 2.7）。

在第3节中，我们回顾与一般的扎里斯基稠密离散子群 $\Gamma < G$相关的几何对象和几何测度。特别是，我们在第3.1小节中回顾极限集和极限锥，在第 Γ 小节3.2中讨论其全纯群，并在第3.5小节中回顾 BMS 测度和 BR 测度的构造。我们还在第3.6小节中回顾 BR 测度的乘积结构。

在第4节中，我们将讨论范围限定于阿诺索夫子群。在第4.1小节中，我们回顾 BMS 测度和 BR 测度的遍历分解；在第4.2小节中，我们回顾 BMS 测度支集的向量丛结构。在第4.3小节中，我们回顾所需的局部混合定理。极大平坦圆柱将在第4.4小节中引入并讨论。

在第 5.1小节中，我们利用局部混合证明命题 5.12，该命题给出了 Γ 在乘积子集 $S_T := \Xi_1 \mathcal{L}_T^{+} \Theta \Xi_2$中的元素数量的一个渐近式，其中 N^+AMN。在第 5.2小节中，我们利用命题 5.12推导出 $\#\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \Theta)$ (命题 5.24) 的一个渐近式。

在第 6 节中，我们将展示如何利用 $\#\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \Theta)$ 的渐近式˜推导出 $\mu_T(\mathcal{B}(g_0, \varepsilon) \otimes \Theta)$ 的渐近式（命题 6.11），并证明主要的联合等分布结果定理 6.12 及其推论。在第 7 节中，我们将展示如何修改上述论证，以证明关于类范数函数的联合等分布（定理 7.3）。

致谢。 作者谨向他们的导师 Hee Oh 致以诚挚的谢意，感谢她将他们引入这一问题，并在问题研究及本文撰写准备过程中给予了许多极具帮助的讨论。

2. 正则方向的有效闭合引理

设 G 为一个连通半单实代数群，其单位元为 $e \in G$。固定 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个 Cartan对合，并令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 为分别对应于特征值 $+1$ 和 -1 的相关特征空间分解。令 $K < G$ 为其李代数为 $\mathfrak{k}$ 的极大紧子群。令 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ 为一个极大阿贝尔子代数，并选取一个闭正韦尔室 $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$。令 $A = \exp \mathfrak{a}$、 $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$，并对所有 $w \in \mathfrak{a}$，记 $a_w = \exp(w)$。定义 $M := C_K(A)$，并通过以下方式定义收缩和扩张的 *horosphere* 子群。

$$N := N^- := \left\{ n \in G : \lim_{t \to \infty} a_{-tw} n a_{tw} = e \text{ for all } w \in \operatorname{int} \mathfrak{a}^+ \right\};$$
$$N^+ := \left\{ h \in G : \lim_{t \to \infty} a_{tw} h a_{-tw} = e \text{ for all } w \in \operatorname{int} \mathfrak{a}^+ \right\},$$

分别，其李代数为 $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}^- := \log N$和 $\mathfrak{n}^+ := \log N^+$。令

$$P := P^- := MAN \text{ and } P^+ := MAN^+.$$

那么， P 和 P^+ 是相对的极小抛物子群。令

$$\mathcal{F} := G/P \cong K/M$$

记 G的富斯滕堡边界为，其中同构 $G/P \cong K/M$由 Iwasawa 分解 $G \cong K \times A \times N$ 给出。

令 $W := N_K(A)/M$ 表示 Weyl群。令 $w_0 \in K$ 为 W 中该元素的一个代表元，使得 $\mathrm{Ad}_{w_0}(\mathfrak{a}^+) = -\mathfrak{a}^+$。

定义 2.1 （对合反演）。 映射 $\mathsf{i} : \mathfrak{a}^+ \to \mathfrak{a}^+$ 定义为 $\mathsf{i}(v) := -\mathrm{Ad}_{w_0}(v)$，称为对合反演。

对于所有 $g \in G$，令

$$g^+ := gP \in \mathcal{F}; \qquad g^- := gw_0P \in \mathcal{F}. \tag{2.2}$$

固定一个左 G-不变且右 K-不变的黎曼度量 d 于 G，并分别用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$ 表示其任意切空间上的相应内积和范数。黎曼度量还在 G $\mathfrak{a}$上诱导出一个内积和范数，它们在 W 作用下保持不变，我们分别记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$。利用 $\mathfrak{a}$ 上的内积，我们将 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathbb{R}^{\mathrm{rank}(G)}$ 等同，并赋予其勒贝格测度，该测度在 A上诱导出一个哈尔测度。固定 $\mathfrak{n}^{\pm}$上的 Ad_M-不变度量 $\| \cdot \|$。对于$\varepsilon > 0$，我们用以下符号表示若干 ε-邻域:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &:= \{g \in G : d_G(e, g) < \varepsilon\}; & G_\varepsilon(g_0) &:= g_0 G_\varepsilon; \\ N_\varepsilon &:= \{n_x := \exp x : x \in \mathfrak{n}, \|x\| < \varepsilon\}; & A_\varepsilon &:= A \cap G_\varepsilon; \\ N_\varepsilon^+ &:= \{h_x := \exp x : x \in \mathfrak{n}^+, \|x\| < \varepsilon\}; & M_\varepsilon &:= M \cap G_\varepsilon. \end{aligned}$$

全文中，若 f_1， f_2 是关于 $\varepsilon > 0$ 和 $T > 0$的函数，则我们使用大-O 记号表示

$$f_1 = O(f_2) \iff \limsup_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ T \to \infty}} \left| \frac{f_1(\varepsilon, T)}{f_2(\varepsilon, T)} \right| < \infty. \tag{2.3}$$

2.1. **流盒**。 在本小节中，我们按照 [Mar04]和 [MMO14]定义流盒。我们将在针对正则方向的有效闭合引理（引理 2.7）中使用流盒来描述 AM 在 $\Gamma\backslash G$中的近乎闭合轨道。

为说明流盒的定义，我们首先回顾乘积映射 $N \times N^+ \times A \times M \to G$ 和 $N^+ \times N \times A \times M \to G$是到 $e \in G$ 的 Zariski 开邻域上的微分同胚。因此，我们有以下引理。

引理 2.4. 令 $\varepsilon > 0$ 充分小。对于任意 $0 < \varepsilon_1$、 $\varepsilon_2 < \varepsilon$、 $h \in N_{\varepsilon_1}^+$和 $n \in N_{\varepsilon_2}$，存在唯一的 $h_1 \in N^+$、 $n_1 \in N$、$a \in A$和 $m \in M$，使得 $hn = n_1 h_1 a m$。此外，$h_1 \in N^+_{O(\varepsilon_1)}$、$n_1 \in N_{O(\varepsilon_2)}$、 $a \in A_{O(\varepsilon)}$以及$m \in M_{O(\varepsilon)}$。交换 N 与 N^+的角色后，相应的结论同样成立。

定义 2.5 （ε流盒，位于 g_0）。 给定 $g_0 \in G$ 和 $\varepsilon > 0$， ε流盒，位于 g_0，定义为

$$\mathfrak{B}(g_0, \varepsilon) := g_0(N_\varepsilon^+ N \cap N_\varepsilon N^+ AM) M_\varepsilon A_\varepsilon = g_0 \mathcal{B}(e, \varepsilon).$$

所有 ε-流盒构成了 G 上拓扑的一个基。下一个引理记录了流盒的一些基本性质。

引理 2.6. 令 $g_0 \in G$ 且 $\varepsilon > 0$。

(1) 对任意 $g \in \mathfrak{B}(g_0, \varepsilon)$， $\{w \in \mathfrak{a} : g \exp(w) \in \mathfrak{B}(g_0, \varepsilon)\}$ 是半径为 ε 的欧几里得球。*(2)* $\mathfrak{B}(g_0, \varepsilon) e^{\pm} = g_0 N_\varepsilon^{\pm} e^{\pm}$ （其中 $e^{\pm}$ 由 *(2.2)* 定义）。 *(3)* 对充分小的 $\varepsilon > 0$，以下结论成立。对任意 $h \in N_\varepsilon^+$和 $n \in N_\varepsilon$，$hN \cap nN^+AM$ 由单个元素 $g \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ 构成。此外，由引理 *2.4*，

$$\mathfrak{B}(g_0, \varepsilon) = g_0(N_\varepsilon^+ N_{O(\varepsilon)} \cap N_\varepsilon N_{O(\varepsilon)}^+ A_{O(\varepsilon)} M_{O(\varepsilon)}) M_\varepsilon A_\varepsilon.$$

2.2. **正则方向的有效闭合引理**。 令 $\mathfrak{a}^*$ 表示 $\mathfrak{a}$ 上实线性形式的空间。令 $\Phi \subset \mathfrak{a}^*$ 表示 $\mathfrak{a}$ 的限制根系，并令 $\Phi^+ \subset \Phi$ 表示与 $\mathfrak{a}^+$ 对应的正根集合。若方向 $w \in \mathfrak{a}$ 满足以下条件，则称其为正则的

$$\forall \alpha \in \Phi^+, \alpha(w) \neq 0.$$

引理 2.7 是关于正则方向的有效闭合引理，它改编自 [MMO14，引理 3。1] 稍后我们将能够在阿诺索夫情形中使用它。证明类似于 [MMO14，引理 3。1],但为完整起见，我们将其包含在此处。对于 g_1， $g_2 \in G$我们记

$$g_1 \sim_{O(\varepsilon)} g_2 \iff d(g_1, g_2) = O(\varepsilon)$$

并且我们对 G 的子群及其李代数使用相同的记号，具体含义由上下文确定。

引理 2.7 （正则方向的有效闭合引理）。 存在$T_0 > 0$，其仅取决于 G，使得以下结论成立。设 $\varepsilon > 0$ 充分小且 $g_0 \in G$。假设存在 g_1、 $g_2 \in \mathfrak{B}$（g_0、 ε） 以及$\gamma \in G$， 使得

$$g_1 \tilde{a}_\gamma \tilde{m}_\gamma = \gamma g_2 \tag{2.8}$$

对于某些 $\tilde{m}_\gamma \in M$ 和 $\tilde{a}_\gamma \in A$， 且#+#+#+#+

$$T := \min_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(\log \tilde{a}_\gamma) \geq T_0. \tag{2.9}$$

那么存在 $g \in \mathfrak{B}(g_0, \varepsilon + O(\varepsilon e^{-T}))$、 $a_\gamma \in A$和 $m_\gamma \in M$，使得

$$\gamma = g a_\gamma m_\gamma g^{-1}.$$

此外， $a_\gamma \sim_{O(\varepsilon)} \tilde{a}_\gamma$ 和 $m_\gamma \sim_{O(\varepsilon)} \tilde{m}_\gamma$。

证明。令 $\varepsilon>0$ 充分小，使得证明中每次使用引理 2.4和引理 2.6(3)时都成立。由引理 2.6(3)，我们有

$$g_1 = g_0h_1n_1a_1m_1 \quad \text{and} \quad g_2 = g_0n_2h_2a_2m_2$$

对于某个 $h_1 \in N_\varepsilon^+$， $n_1 \in N_{O(\varepsilon)}$， $a_1 \in A_\varepsilon$， $m_1 \in M_\varepsilon$， $n_2 \in N_\varepsilon$， $h_2 \in N_{O(\varepsilon)}$， $a_3 \in A_{O(\varepsilon)}$ 并且 $m_3 \in M_{O(\varepsilon)}$。引理 2.6(3) 还告诉我们 $h_1N \cap n_2N^+AM = \{g_3\}$，其中 $g_3 \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ 以及

$$g_3 = h_1n_3 = n_2h_3a_3m_3$$

对于某些 $n_3 \in N_{O(\varepsilon)}$， $h_3 \in N_{O(\varepsilon)}^+$ 、 $a_3 \in A_{O(\varepsilon)}$ 和 $m_3 \in M_{O(\varepsilon)}$。设 $g_4 = g_0g_3 \in \mathfrak{B}(g_0, \varepsilon)$。于是

$$g_1 = g_4n_4a_1m_1 \quad \text{and} \quad g_2 = g_4h_4a_4m_4,$$

其中 $n_4 = n_3^{-1}n_1 \in N_{O(\varepsilon)}$、 $h_4 = (a_3m_3)^{-1}h_3^{-1}h_2(a_3m_3) \in N_{O(\varepsilon)}^+$， $a_4 = a_3^{-1}a_2 \in A_{O(\varepsilon)}$ 和 $m_4 = m_3^{-1}m_2 \in M_{O(\varepsilon)}$。

假设（2.8）变为 $g_4n_4a_1m_1\tilde{a}_\gamma\tilde{m}_\gamma = \gamma g_4h_4a_4m_4$。那么

$$g_4^{-1}\gamma g_4 = n_4a'_\gamma m'_\gamma(h_4)^{-1} = a'_\gamma m'_\gamma n_5(h_4)^{-1},$$

其中 $a'_\gamma = \tilde{a}_\gamma a_1a_4^{-1} \sim_{O(\varepsilon)} \tilde{a}_\gamma$、 $m'_\gamma = m_1\tilde{m}_\gamma m_4^{-1} \sim_{O(\varepsilon)} \tilde{m}_\gamma$ 和 $n_5 = (a'_\gamma m'_\gamma)^{-1}n_4(a'_\gamma m'_\gamma) \in N_{O(\varepsilon e^{-T})}$，因为 $\min_{\alpha\in\Phi^+}\alpha(\log\tilde{a}_\gamma) = T$。

利用引理 2.4，我们将 $n_5(h_4)^{-1} = a_5m_5h_5n_6$ 写作某个 $h_5 \in N_{O(\varepsilon)}^+$， $n_6 \in N_{O(\varepsilon e^{-T})}$ 、 $a_5 \in A_{O(\varepsilon)}$ 和 $m_5 \in M_{O(\varepsilon)}$。那么

$$g_4^{-1}\gamma g_4 = a'_\gamma m'_\gamma a_5m_5h_5n_6 = h_6a''_\gamma m''_\gamma n_6,$$

其中 $a''_\gamma = a'_\gamma a_5 \sim_{O(\varepsilon)} a'_\gamma \sim_{O(\varepsilon)} \tilde{a}_\gamma$， $m''_\gamma = m'_\gamma m_5 \sim_{O(\varepsilon)} \tilde{m}_\gamma$ 和 $h_6 = (a''_\gamma m''_\gamma)n_5(a''_\gamma m''_\gamma)^{-1} \in N_{O(\varepsilon e^{-T})}^+$，因为 $T = \min_{\alpha\in\Phi^+}\alpha(\log\tilde{a}_\gamma)$。

要完成证明，只需证明

$$h_6a''_\gamma m''_\gamma n_6 \in (h_xn_y)a''_\gamma A_{O(\varepsilon)}m''_\gamma M_{O(\varepsilon)}(h_xn_y)^{-1}$$

对于某个 $h_x \in N_{O(\varepsilon e^{-T})}^+$ 和 $n_y \in N_{O(\varepsilon e^{-T})}$，因为接下来取 $g = g_4h_xn_y$。

对于每个 $h_x \in N_\varepsilon^+$，存在唯一的元素 $h_{\beta(x)} \in N_{O(\varepsilon)}^+$，使得

$$(n_6)h_x \in h_{\beta(x)}N_{O(\varepsilon e^{-T})}A_\varepsilon M_\varepsilon. \tag{2.10}$$

此外，由于乘积映射 $N^+ \times N \times A \times M \to G$ 是到其像上的微分同胚， β : $\mathfrak{n}^+ \to \mathfrak{n}^+$ 是一个光滑函数。考虑映射

$$f : N_\varepsilon^+ \to N_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-T})}$$

定义如下:

$$h_x \mapsto h_x(a''_\gamma m''_\gamma)(h_{\beta(x)})^{-1}(a''_\gamma m''_\gamma)^{-1} = h_xh_{\mathrm{Ad}_{a''_\gamma m''_\gamma}(\beta(x))}.$$

假设 T_0 足够大， $a''_\gamma \sim_{O(\varepsilon)} \tilde{a}_\gamma$ 且假设（2.9）意味着 $\|Df - I\|_{op} < 1$ 在 N_ε^+ 上逐点成立。于是 f 是单射，因此是一个

到其像上的微分同胚。由于 f 是到其像上的微分同胚，因此存在 $h_x \in N_O^+$（εe^{-T}）使得

$$h_x(a''_\gamma m''_\gamma)(h_{\beta(x)})^{-1}(a''_\gamma m''_\gamma)^{-1} = h_6.$$

回顾（2.10），我们将 $(h_{\beta(x)})^{-1}n_6 = a_6 m_6 n_7 h_x^{-1}$写为某些 $a_6 \in A_\varepsilon$、$m \in M_\varepsilon$ 和 $n_7 \in N_{O(\varepsilon e^{-T})}$。然后

$$h_6 a''_\gamma m''_\gamma n_6 = h_x(a''_\gamma m''_\gamma)(h_{\beta(x)})^{-1}n_6 = h_x(a'''_\gamma m'''_\gamma)n_7 h_x^{-1},$$

其中 $a'''_\gamma = a''_\gamma a_6$ 和 $m'''_\gamma = m''_\gamma m_6$。通过与上述类似的推理，存在 $n_y \in N_{O(\varepsilon e^{-T})}$ 使得 $n_7 = (a'''_\gamma m'''_\gamma)^{-1} n_y (a'''_\gamma m'''_\gamma) n_y^{-1}$，证明至此完成。■

3. 几何测度

以下设 $\Gamma < G$ 为 Zariski 稠密离散子群。

3.1. 极限集与极限锥。 回顾一下，$\mathcal{F} := G/P \cong K/M$。令 $m_{\mathcal{F}}$表示 $\mathcal{F}$ 上唯一的 K-不变概率测度。

定义 3.1（极限集）。 Γ 的极限集 $\Lambda \subset \mathcal{F}$ 定义为

$$\Lambda := \{\xi \in \mathcal{F} : \exists \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma, (\gamma_n)_* m_{\mathcal{F}} \xrightarrow{n\to\infty} \delta_\xi\},$$

其中 δ_ξ 表示位于 ξ处的狄拉克测度。极限集是 Γ-不变子集 $\mathcal{F}$ [Ben97] 和 Λ 在 $\mathcal{F}$ [Ben97，第 3 节中扎里斯基稠密的唯一非空闭6]。

如果元素 $\gamma \in G$ 是<双曲型，则称其为

$$\gamma = g \exp \lambda(\gamma) m g^{-1}$$

对于某些 $g \in G$, $\lambda(\gamma) \in \operatorname{int} \mathfrak{a}^+$ 和 $m \in M$。在这种情况下，

$$\lambda(\gamma) \in \operatorname{int} \mathfrak{a}^+$$

是唯一的，称为 γ 的若尔当投影，而 m 属于唯一的共轭类

$$h_\gamma = [m] \in [M]$$

称为*holonomy* 的 γ。此外，g^+ 和 g^- 由（2.2）定义，分别是 的唯一吸引不动点和排斥不动点 γ。此外，若$\gamma \in \Gamma$，则 g^+，$g^- \in \Lambda$。

定义 3.2（极限锥）。群极限锥 $\mathcal{L} \subset \mathfrak{a}^+$ 是 Γ 中包含所有双曲型元素的若尔当投影的最小闭锥 Γ[Ben97，第 4 和第 4 节。3]。我们将 $\mathcal{L}$ 的内部记为int $\mathcal{L}$。

注3.3。回顾对合反演i （定义2.1）。我们有λ（g^{-1}） =i（λ（g）） 因此， $\mathcal{L}$ = i（$\mathcal{L}$）。

定理 3.4 (Ben97)。 极限锥 $\mathcal{L}$ 是凸的，且 内部 $\mathcal{L} \neq \emptyset$。

3.2. **全纯群**。令 M° 表示 M 的单位连通分支。那么 P 的单位连通分支是 $P^\circ = M^\circ AN$。

定义 3.5（Γ 的全纯群）。 Γ 的全纯群 是由 Γ 中所有全纯单值生成的闭子群 $M_\Gamma < M$，即

$$M_\Gamma := \overline{\langle \{m : \exists \gamma \in \Gamma \text{ such that } h_\gamma = [m]\} \rangle}.$$

根据 [GR07，推论 1。10]， M_Γ 是 M 的一个正规子群，且包含 M°，因此特别地， M_Γ 在 M中的指数有限。

根据 [GR07]，，我们对 M_Γ有另一种刻画。令

$$\mathcal{F}^\circ := G/P^\circ.$$

固定一个 Γ-极小子集 $\Lambda_0 \subset \mathcal{F}^\circ$。则

$$M_\Gamma = \{m \in M : \Lambda_0 m = \Lambda_0\} < M. \tag{3.6}$$

另请参见 [BQ14，命题 4。9] 有关.....的另一种刻画 M_Γ。

3.3. **布塞曼函数**。伊瓦萨瓦余循环 $\sigma\colon G \times \mathcal{F} \to \mathfrak{a}$ 是一个映射，它为每个 $(g, kM) \in G \times \mathcal{F}$ 指定唯一的元素 $\sigma(g, kM) \in \mathfrak{a}$，使得 $gk \in Ka_{\sigma(g,\xi)}N$。它满足余循环关系 $\sigma(g_1 g_2, \xi) = \sigma(g_1, g_2\xi) + \sigma(g_2, \xi)$，对所有 $g_1, g_2 \in G$ 和 $\xi \in \mathcal{F}$ 均成立。

定义 3.7（布塞曼函数）。 $\mathfrak{a}$值布塞曼函数 $\beta : \mathcal{F} \times G \times G \to \mathfrak{a}$ 定义为

$$\beta_\xi(g_1, g_2) := \sigma(g_1^{-1}, \xi) - \sigma(g_2^{-1}, \xi)$$

对于所有 g_1， $g_2 \in G$ 和 $\xi \in \mathcal{F}$。伊瓦萨瓦余循环的性质意味着布塞曼函数满足

(1) $\beta_\xi(e, g) = -\sigma(g^{-1}, \xi)$; (2) $\beta_{g\xi}(gg_1, gg_2) = \beta_\xi(g_1, g_2)$; (3) $\beta_\xi(g_1, g_2) = \beta_\xi(g_1, g) + \beta_\xi(g, g_2)$

对于所有 $g, g_1, g_2 \in G$ 和 $\xi \in \mathcal{F}$。

<escape>3.4. **共形测度**。 在本小节中，我们回顾有关 Γ- 共形测度的相关事实。Patterson [Pat76] 和 Sullivan [Sul79]是最早在秩一群中引入 Γ-共形测度的学者。他们的工作后来由 Albuquerque [Alb99] 和 Quint [Qui02b]推广至高阶群。作为对秩一情形下临界指数概念的推广，Quint 引入了 Γ [Qui02a] 中的增长指标函数。</escape>

对于 $g \in G$，令 $\mu(g)$ 表示 g 的 *Cartan* 投影，即， $\mu(g) \in \mathfrak{a}^+$是 $\mathfrak{a}^+$ 中满足 $g \in K\exp(\mu(g))K$ 的唯一元素。我们注意到，对于所有 $g \in G$， $\mu(g^{-1}) = \mathrm{i}(\mu(g))$。

定义 3.8（增长指标函数）。 Γ 的增长指标函数$\psi_\Gamma\colon \mathfrak{a}^+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是如下定义的 1 次齐次函数。

$$\psi_\Gamma(w) := \|w\| \inf_{\text{open cones } \mathfrak{C} \ni w} \tau_{\mathfrak{C}} \qquad \text{for all } w \in \mathfrak{a}^+,$$

其中， $\tau_{\mathfrak{C}}$ 是$t \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma \text{的} \mu(\gamma) \in \mathfrak{C}} e^{-t\|\mu(\gamma)\|}$的收敛横坐标。

我们注意到 $\psi_\Gamma \circ \mathsf{i} = \psi_\Gamma$。

定理 3.9 (Qui02a，定理 4.2.2)。增长指标函数是凹函数、上半连续，并满足 $\psi_\Gamma|_{\mathfrak{a}^+\setminus\mathcal{L}} = -\infty$， $\psi_\Gamma|_{\mathcal{L}} \geq 0$，以及$\psi_\Gamma|_{\operatorname{int}\mathcal{L}} > 0$。

定义 3.10 （共形测度）。给定一个闭子群 $\Delta < G$，若博雷尔概率测度 ν 定义在 $\mathcal{F}$ 上，则称其为 Δ-共形测度，如果存在 $\psi \in \mathfrak{a}^*$，使得对任意 $\gamma \in \Delta$ 和 $\xi \in \mathcal{F}$，

$$\frac{d\gamma_*\nu}{d\nu}(\xi) = e^{\psi(\beta_\xi(e,\gamma))},$$

其中，对任意博雷尔子集 $Q \subset \mathcal{F}$， $\gamma_*\nu(Q) := \nu(\gamma^{-1}Q)$。在这种情况下，我们称$\nu$ 为一个（Δ， ψ）-共形测度。

测度 $m_{\mathcal{F}}$是一个共形测度。更准确地说，令 $\rho \in \mathfrak{a}^*$ 表示 $\mathfrak{a}^+$的正根之半和，

$$\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha. \tag{3.11}$$

我们有如下引理。

引理 3.12 (Qui06，命题 3.3)。测度 $m_{\mathcal{F}}$ 是一个 $(G,\ 2\rho)$-共形测度。

关于 Γ-共形测度存在性的以下定理归功于 Quint。若线性形式 $\psi \in \mathfrak{a}^*$ 满足以下条件，则称其为切形式

$$\psi \geq \psi_\Gamma \text{ and } \psi(\mathsf{v}) = \psi_\Gamma(\mathsf{v}) \text{ for some } \mathsf{v} \in \operatorname{int}\mathfrak{a}^+ \cap \mathcal{L}. \tag{3.13}$$

注意，若 $\psi \in \mathfrak{a}^*$ 是一个切形式，则 $\psi \circ \mathsf{i}$ 也是一个切形式。

定理 3.14 (Qui02b，定理 8.1 和 8.4)。设 $\psi \in \mathfrak{a}^*$。

(1) 若存在一个(Γ, ψ)-共形测度，则 $\psi \geq \psi_\Gamma$。*(2)* 若 ψ 是一个切形式，则存在一个(Γ, ψ)-共形测度ν_ψ，其支集位于 Λ。

3.5. **几何测度**。在本小节中，我们回顾Bowen–Margulis–Sullivan测度和Burger–Roblin测度的定义。

我们首先回顾 G/M 的Hopf参数化，它将用于定义这些测度。 $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 中存在唯一的开 G轨道，其定义如下：

$$\mathcal{F}^{(2)} := G\cdot(e^+, e^-) = (\mathcal{F}\times\mathcal{F}) \setminus \bigcup_{wM\notin W\setminus\{w_0M\}} G\cdot(e^+, we^+), \tag{3.15}$$

其中，Weyl群 W 和元素 $w_0 \in K$ 已在第2节中定义。若$(x,\ y) \in \mathcal{F}^{(2)}$，则称 x 和 y 处于一般位置。

定义 $\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$ 上的左 G作用如下：

$$g\cdot(x, y, v) := (gx, gy, v + \beta_x(g^{-1}, e)) = (gx, gy, v + \sigma(g, x))$$

对于所有 $g \in G$ 以及 $(x,\ y,\ v) \in \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$。注意，$\mathsf{Stab}_G(e^+,\ e^-,\ 0) = M$。

定义 3.16（Hopf参数化）。*Hopf*参数化是一个左G-等变微分同胚 $G/M \to \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$，定义为

$$gM \mapsto (g^+, g^-, \beta_{g^+}(e,g)) = (g^+, g^-, \sigma(g, e^+)).$$

在本节 3的其余部分，我们固定一个

$$\text{tangent form } \psi \in \mathfrak{a}^*. \tag{3.17}$$

回顾一下， $\psi \circ \mathsf{i}$ 也是一个切形式。利用定理 3.14，我们固定

$$(\Gamma, \psi)\text{-and } (\Gamma, \psi \circ \mathsf{i})\text{-conformal measures } \nu_\psi \text{ and } \nu_{\psi\circ\mathsf{i}}, \tag{3.18}$$

分别。令

$$\Lambda^{(2)} := (\Lambda \times \Lambda) \cap \mathcal{F}^{(2)}$$

并令 dw 表示 $\mathfrak{a}$上的勒贝格测度。

定义 3.19（鲍恩–马古利斯–沙利文测度）。 利用 Hopf 参数化，(ν_ψ,$\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}$)-鲍恩–马古利斯–沙利文（*BMS*）测度 $\mathsf{m}^\psi := m^{\mathrm{BMS}}_{\nu_\psi, \nu_{\psi\circ\mathsf{i}}}$由 $G/M \cong \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$ 定义为

$$dm^{\mathrm{BMS}}_{\nu_\psi,\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}}(gM) := e^{\psi\left(\beta_{g^+}(e,g)\right)+(\psi\circ\mathsf{i})\left(\beta_{g^-}(e,g)\right)}\, d\nu_\psi(g^+)\, d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}(g^-)\, dw. \tag{3.20}$$

从（3.20）可清楚看出，m^ψ 的支集为

$$\operatorname{supp} \mathsf{m}_\psi = \Lambda^{(2)} \times \mathfrak{a}. \tag{3.21}$$

BMS测度是左 Γ不变且右 A不变的，因此它下降为 $\Gamma\backslash G/M$ 上的测度；再利用M 上的 Haar 概率测度进行提升，我们还可在 $\Gamma\backslash G$上得到一个测度。稍微滥用一下记号，我们也将此测度称为 BMS测度，并同样记作 m^ψ ，其定义域由上下文确定。这些定义域上的 BMS测度的支集为

$$\tilde{\Omega} := \{\Gamma g : g^\pm \in \Lambda\} \subset \Gamma\backslash G; \qquad \Omega := \tilde{\Omega}/M \subset \Gamma\backslash G/M. \tag{3.22}$$

定义 3.23（Burger–Roblin测度）。 遵循 [ELO20第 3],节中的论述，($m_{\mathcal{F}}$, ν_ψ)-和 ($\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}, m_{\mathcal{F}}$)-*Burger–Roblin*（*BR*）测度

$$m^{\mathrm{BR}}_\psi := m^{\mathrm{BR}}_{m_{\mathcal{F}},\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}} \text{ and } m^{\mathrm{BR}_\star}_\psi := m^{\mathrm{BR}_*}_{\nu_\psi,m_{\mathcal{F}}},$$

分别以与 m^ψ 类似的方式定义在 G/M 上：

$$dm^{\mathrm{BR}}_{m_{\mathcal{F}},\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}}(gM) := e^{2\rho\left(\beta_{g^+}(e,g)\right)+(\psi\circ\mathsf{i})\left(\beta_{g^-}(e,g)\right)}\, dm_{\mathcal{F}}(g^+)\, d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}(g^-)\, dw; \tag{3.24}$$

$$dm^{\mathrm{BR}_*}_{\nu_\psi,m_{\mathcal{F}}}(gM) := e^{\psi\left(\beta_{g^+}(e,g)\right)+2\rho\left(\beta_{g^-}(e,g)\right)}\, d\nu_\psi(g^+)\, dm_{\mathcal{F}}(g^-)\, dw. \tag{3.25}$$

那么， m^{BR}_ψ是左 Γ不变且右 N^+不变的测度，而 $m^{\mathrm{BR}_\star}_\psi$是左 Γ不变且右 N不变的测度；它们在 $\Gamma\backslash G/M$、 $\Gamma\backslash G$ 和 G 上诱导出测度，我们仍使用相同的名称和记号。 $\Gamma\backslash G$ 上的BR测度的支集为

$$\mathcal{E} := \operatorname{supp} m^{\mathrm{BR}}_\psi = \{\Gamma g : g^- \in \Lambda\}; \quad \mathcal{E}_* := \operatorname{supp} m^{\mathrm{BR}_\star}_\psi = \{\Gamma g : g^+ \in \Lambda\}.$$

定义 3.26。 我们所使用的右哈尔测度 dg 在 G 上可写为

$$dg = e^{2\rho\left(\beta_{g^+}(e,g)+\beta_{g^-}(e,g)\right)}\, dm_{\mathcal{F}}(g^+)\, dm_{\mathcal{F}}(g^-)\, dw\, dm,$$

其中， dm 是 M [ELO20 第 3]节中的概率哈尔测度。

3.6. **BR测度的乘积结构**。 在本小节中，我们回顾BR测度的一种乘积结构（详见 [ELO20，第4节。3] ），并定义一些相关测度，这些测度将在第5节中发挥作用。我们沿用(3.17)和(3.18)中的记号。

令 dm 表示 M 上的概率哈尔测度。我们利用共形测度的 M-不变提升来定义 $K \cong \mathcal{F} \times M$ 上的测度 $\tilde{\nu}_\psi$ 和 $\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}$ ，方法如下：

$$d\nu_\psi^K(k) := d\nu_\psi(k^+)\, dm; \qquad d\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}^K(k) := d\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}(k^-)\, dm. \tag{3.27}$$

以下引理给出了 m_ψ^{BR} 和 $m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}$ 在 KAN 坐标下的分解。

引理 3.28 (ELO20，引理 4.9)。 对于所有 k_1， $k_2 \in K$， w_1， $w_2 \in \mathfrak{a}$， $h \in N^+$以及 $n \in N$，我们有

$$dm_\psi^{\mathrm{BR}}(k_1 \exp(w_1) h) = e^{-\psi(w_1)}\, d\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}^K(k_1)\, dw_1\, dh;$$
$$dm_\psi^{\mathrm{BR}_\star}(k_2 \exp(w_2) n) = e^{\psi(w_2)}\, d\nu_\psi^K(k_2)\, dw_2\, dn,$$

其中， dh 和 dn 分别是 N^+ 和 N上的某些哈尔测度。

注3.29。回忆一下，乘积映射 $M\times A\times N\times N^+ \to MANN^+$， $A\times N^+\times M\times N \to AN^+MN$和 $N^+\times M\times A\times N \to G$是到 G的扎里斯基开子集上的同胚。采用引理3.28中的记号，我们有如下分解

$$dg = dm\, dw\, dn\, dh = dw\, dh\, dm\, dn = e^{2\rho(w)}\, dh\, dw\, dm\, dn. \tag{3.30}$$

对于 $g \in G$，我们在 $\mathcal{F}$ 上定义测度 ν_ψ^g 和$\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}^g$ 如下

$$d\nu_\psi^g(\xi) := e^{\psi(\beta_{g\xi}(e,g))}\, d\nu_\psi(g\xi); \quad d\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}^g(\xi) := e^{(\psi\circ \mathrm{i})(\beta_{g\xi}(e,g))}\, d\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}(g\xi). \tag{3.31}$$

注意，ν_ψ^g和$\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}^g$分别是$(g^{-1}\Gamma g, \psi)$-共形测度和$(g^{-1}\Gamma g, \psi\circ \mathrm{i})$-共形测度。

此外，将 N^+与 $N^+e^+ \subset \mathcal{F}$等同，对于所有 $g \in G$，我们在 N^+ 上定义测度$\tilde{\nu}_\psi^g$ 和$\tilde{\nu}_\psi^g|_B$ 如下

$$d\tilde{\nu}_\psi^g(h) := e^{\psi(\beta_{h^+}(e,h))}\, d\nu_\psi^g(h^+); \qquad d\tilde{\nu}_\psi^g|_B(h) := \mathbb{1}_B(h) d\tilde{\nu}_\psi^g(h), \tag{3.32}$$

其中 B 是 G 的可测子集。

对所有 $g \in G$，将 NM与 $Ne^- \times M \subset \mathcal{F} \times M$等同起来，我们还将测度 $\tilde{\nu}_{\psi\circ \mathrm{i}}^g$ 和 $\tilde{\nu}_{\psi\circ \mathrm{i}}^g|_B$ 定义在 NM 上，使得

$$d\tilde{\nu}_{\psi\circ \mathrm{i}}^g(nm) := e^{(\psi\circ \mathrm{i})(\beta_{n^-}(e,n))}\, d\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}^g(n^-)\, dm; \tag{3.33}$$
$$d\tilde{\nu}_{\psi\circ \mathrm{i}}^g|_B(nm) := \mathbb{1}_B(nm) d\tilde{\nu}_{\psi\circ \mathrm{i}}^g(nm). \tag{3.34}$$

4. 阿诺索夫子群与极大平坦圆柱

Anosov 性质（相对于 G 中的任意抛物子群）最初由 Labourie [Lab06] 为曲面群引入，随后由 Guichard–Wienhard [GW12] 推广至格罗莫夫双曲群（参见 [KLP17，GGKW17，Wie18]）。对于相对于 P 的扎里斯基稠密 Anosov 子群，[GW12 的推论 416]给出了 Anosov 性质的一个等价刻画，我们将其作为本文中所采用的 Anosov 定义。

定义 4.1（阿诺索夫子群）。设 $\Gamma < G$ 为一个 Zariski 稠密离散子群。若 Γ 是阿诺索夫 子群，即它是一个有限生成的 Gromov 双曲群，并且存在一个连续的 Γ-等变连续嵌入，将 Γ 的 Gromov 边界嵌入到 $\mathcal{F}$ 中，使得对于 Gromov 边界上的任意两个不同点，它们在 $\mathcal{F}$ 中的像处于一般位置，则称 Γ 为阿诺索夫 子群。

在本文余下部分，设 Γ 为一个无挠 Zariski 稠密 Anosov 子群。由定义 4.1 可知

$$\Lambda^{(2)} := (\Lambda \times \Lambda) \cap \mathcal{F}^{(2)} = \{(x, y) \in \Lambda \times \Lambda : x \neq y\}. \tag{4.2}$$

以下定理由 [Qui03，命题 3.2 以及定理 4.7]在 Γ 为 Schottky 子群时证明。一般而言，定理 4.3 由[GW12，引理 3.1]，[Sam14a，推论 3.12、3.13 和 4.9] 以及 [Sam15，定理 4.20]，结合 [BCLS15] 利用 Plücker 表示得到（另见[PS17，命题 4.6 和 4.11]）。

定理 4.3. 以下结论成立。

(1) Γ 中的每个非平凡元素都是双曲型。*(2)* Γ 的极限锥包含于内 $\mathfrak{a}^+ \cup \{0\}$。*(3)* 在内 $\mathcal{L}$上，ψ_Γ 是解析且严格凹的，但从原点射出的射线上除外。*(4)* 如果 $\psi \in \mathfrak{a}^*$ 在 $v \in$ 内 $\mathfrak{a}^+ \cap \mathcal{L}$处与 ψ_Γ 相切，那么 $v \in$ 内 $\mathcal{L}$，且 ψ 在 $\mathcal{L} \setminus \{0\}$上为正。*(5)* 如果 $\psi \in \mathfrak{a}^*$ 在 $\mathcal{L} \setminus \{0\}$上为正，那么 $\delta_\psi \psi$ 在某个$v \in$ 内 $\mathcal{L}$处与 ψ_Γ 相切，其中 $\delta_\psi > 0$ 是 ψ的临界指数，即 ψ-庞加莱级数 $t \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-t\psi(\mu(\gamma))}$的收敛横坐标。

注记 4.4. 除了要求 $v \in$ 属于 $\mathcal{L}$之外，定理 4.3(5)如 Kim–Minsky–Oh 所示，对任意扎里斯基稠密的离散子群均成立[KMO21，第 2]节。

在本文其余部分，我们固定一些记号。取一个在归一化方向 $\mathsf{v} \in$ 属于 $\mathcal{L}$处与 ψ_Γ 相切的线性形式 ψ，即

$$\psi \in \mathfrak{a}^*,\ \psi \geq \psi_\Gamma,\ \mathsf{v} \in \operatorname{int} \mathcal{L} \text{ and } \psi(\mathsf{v}) = \psi_\Gamma(\mathsf{v}) = 1.$$

根据定理4.3，对于每个切形式 ψ，由定理3.14可知存在唯一的此类v，我们固定

$$(\Gamma, \psi)\text{-and } (\Gamma, \psi \circ \mathrm{i})\text{-conformal measures } \nu_\psi \text{ and } \nu_{\psi \circ \mathrm{i}},$$

分别。我们注意到ν_ψ和$\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}$根据 [LO22定理12],是唯一的，但本文并不需要用到这一唯一性。令m_ψ，m_ψ^{BR}，$m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}$分别表示($\nu_\psi$，$\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}$)-BMS测度、($m_{\mathcal{F}}$，$\nu_\psi$)-BR测度和($\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}$，$m_{\mathcal{F}}$)-BR测度，其定义见第3.5小节。我们将使用第3.5小节中的相关记号。

4.1. **m_ψ的遍历分解，m_ψ^{BR}以及$m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}$。**在本小节中，我们回顾由 Lee–Oh A所给出的 N、N^+和m_ψ、m_ψ^{BR}以及$m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}$的遍历分解，分别对应于 [LO20a，定理 1。1]。

回顾一下，P° 表示 P中恒等式的单位连通分支。将 $\Gamma\backslash G$ 的 P°-极小子集构成的集合记为 $\mathfrak{Y}_\Gamma$。每个 $Y \in \mathfrak{Y}_\Gamma$ 都满足$Y = (Y \cap \Omega)N$。将 $\Gamma\backslash G$ 的所有 P°-极小˜子集与Ω的交集构成的集合记为 $\mathfrak{Z}_\Gamma$，即，

$$\mathfrak{Z}_\Gamma := \{Y \cap \tilde{\Omega} : Y \in \mathfrak{Y}_\Gamma\}. \tag{4.5}$$

定理 4.6 (LO20a，定理 1.1)。考虑测度 m_ψ，m_ψ^{BR}和$m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}$在 $\Gamma\backslash G$。我们有

(1) A-遍历分解

$$\mathsf{m}_\psi = \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} \mathsf{m}_\psi|_Z = \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} \mathsf{m}_\psi|_Z;$$

(2) N-遍历分解 $m_\psi^{\mathrm{BR}_\star} = \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}|_{ZN}$；*(3)* N^+-遍历分解 $m_\psi^{\mathrm{BR}} = \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} m_\psi^{\mathrm{BR}}|_{ZN^+}$。

4.2. **支集 Ω 的 m_ψ 作为一个向量丛。**关于本小节，读者可参阅 [LO20b，第 4] 节以及 [Car21，附录 A]以了解更多细节。映射 π_ψ：$\Lambda^{(2)} \times \mathfrak{a} \to \Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}$ 定义如下

$$\pi_\psi(x, y, w) := (x, y, \psi(w)) \quad \text{for all } (x, y, w) \in \Lambda^{(2)} \times \mathfrak{a}$$

是一个典型纤维为 $\ker\psi$ 的向量丛。注意，Γ 通过 Hopf参数化在 $\Lambda^{(2)} \times \mathfrak{a}$ 上作用于左侧。还需注意，Γ 在 $\Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}$ 上通过以下方式作用于左侧

$$\gamma \cdot (x, y, t) := (\gamma x, \gamma y, t + \psi(\beta_x(\gamma^{-1}, e)))$$

对所有 $\gamma \in \Gamma$，$(x,\ y,\ t) \in \Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}$。

定理 4.7 ([Car21，命题 A。1]，另见 [CS23，定理 4。15])。左 Γ-作用在 $\Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}$ 上是适当不连续且余紧的。

Let

$$\mathcal{X}_\psi := \Gamma\backslash(\Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}).$$

根据定理 4.7，$\mathcal{X}_\psi$ 是一个紧Hausdorff拓扑空间。映射π_ψ 是 Γ-等变的，并下降为映射 $\pi_\psi : \Omega \to \mathcal{X}_\psi$，它实际上是一个平凡的 核 ψ-向量丛。我们嵌入

$$\mathcal{X}_\psi \cong \mathcal{X}_\psi \times \{0\} \subset \mathcal{X}_\psi \times \ker\psi \cong \Omega. \tag{4.8}$$

定义 $\Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}$ 上的局部有限博雷尔测度 $m_{\Lambda^{(2)}\times\mathbb{R}}$，使得

$$dm_{\Lambda^{(2)}\times\mathbb{R}}(\xi,\eta,t) := e^{\psi(\beta_\xi(e,g))+\psi(\mathrm{i}(\beta_\eta(e,g)))}\, d\nu_\psi(\xi)\, d\nu_{\psi\circ\mathrm{i}}(\eta)\, dt,$$

其中，$g \in G$ 是满足 $g^+ = \xi$ 和 $g^- = \eta$ 的任意元素，dt 表示 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度。注意，$m_{\Lambda^{(2)}\times\mathbb{R}}$ 是左 Γ-不变的，因此 $m_{\Lambda^{(2)}\times\mathbb{R}}$可下降为 $\mathcal{X}_\psi$上的有限测度$m_{\mathcal{X}_\psi}$。我们有

$$d\mathsf{m}_\psi\big|_\Omega = dm_{\mathcal{X}_\psi}\, du, \tag{4.9}$$

其中，du 表示 $\ker\psi$ 上满足 $dw = dt\, du$的勒贝格测度；其中，$w = t\mathsf{v} + u$、$u \in \ker\psi$，dw 和 dt 分别是 $\mathfrak{a}$和$\mathbb{R}$上的勒贝格测度。

集合 $\Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}$ 还配备了一个自然流 Φ_t： $\Lambda^{(2)} \times \mathbb{R} \to \Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}$，定义如下

$$\Phi_t(x,y,s) := (x,y,s+t)$$

对所有 $(x,y,s) \in \Lambda^{(2)} \times \mathbb{R}$。流 Φ 下降为 $\mathcal{X}_\psi$ 上的一个流，我们称之为平移流，也记作 Φ。

4.3. **局部混合**。我们回顾一下 $\Gamma\backslash G$ 上的哈尔测度的局部混合定理，该定理将在第 5 节中使用。令 dx 表示由 G- 不变测度，其定义在 $\Gamma\backslash G$ 上，并由 G 上的哈尔测度诱导。给定 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 上的一个内积 $\mathfrak{a}$，令 $I\colon \ker\psi \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$I(u) := \langle u,u\rangle_* - \frac{\langle u,\mathsf{v}\rangle_*^2}{\langle \mathsf{v},\mathsf{v}\rangle_*} \text{ for all } u \in \ker\psi. \tag{4.10}$$

定理 4.11 ([CS23，定理 1。3], [ELO22b，定理 3。4])。存在$\kappa_\mathsf{v} > 0$ 以及 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 上的一个内积 $\mathfrak{a}$，使得对任意 $u \in \ker\psi$ 和 ϕ_1，$\phi_2 \in C_c(\Gamma\backslash G)$，都有

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{\operatorname{rank}(G)-1}{2}} e^{(2\rho-\psi)(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u)} \int_{\Gamma\backslash G} \phi_1(x\exp(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u))\phi_2(x)\, dx$$
$$= \frac{\kappa_\mathsf{v} e^{-I(u)}}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} m_\psi^{\mathrm{BR}}\big|_{ZN^+}(\phi_1)\cdot m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}\big|_{ZN}(\phi_2),$$

其中 ρ 由 (3.11)给出，而 $\mathfrak{Z}_\Gamma$ 由 (4.5)给出。

此外，存在正常数 η_v 和 T_v，使得对于所有 ϕ_1、$\phi_2 \in C_c(\Gamma\backslash G)$，存在常数 $D_\mathsf{v}(\phi_1、\phi_2)$，其关于 ϕ_1 和 ϕ_2 连续变化，使得对于所有 $(t、u) \in (T_\mathsf{v}、\infty) \times$ 核 ψ，满足 $t\mathsf{v} + \sqrt{t}u \in \mathcal{L}$，我们有

$$\left| t^{\frac{\operatorname{rank}(G)-1}{2}} e^{(2\rho-\psi)(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u)} \int_{\Gamma\backslash G} \phi_1(x\exp(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u))\phi_2(x)\, dx \right|$$
$$\le D_\mathsf{v}(\phi_1,\phi_2) e^{-\eta_\mathsf{v} I(u)}.$$

4.4. **极大平坦圆柱**。

定义 4.12（极大平坦圆柱）。设 $C = \Gamma gAM \subset \Gamma\backslash G/M$ 是一个闭 AM-轨道。若其稳定子 $g^{-1}\Gamma g \cap AM$ 是非平凡的，则称 C 是非平凡的。若 C 是极大平坦圆柱，则

$$g^{-1}\Gamma g \cap AM \cong \mathbb{Z}. \tag{4.13}$$

如果除（4.13）之外，我们还有

$$g^{-1}\Gamma g \cap \operatorname{int}(A^+)M \neq \{e\},$$

那么我们称 C 为 正向定向。

用 $\mathcal{C}_\Gamma$ 表示所有正向定向的极大平坦圆柱的集合:

$$\mathcal{C}_\Gamma := \{C \subset \Gamma\backslash G/M : C \text{ 是一个正向定向的极大平坦圆柱}\}.$$

令 Γ_{prim} 表示 Γ 的本原元素集合，并令 $[\Gamma_{\text{prim}}]$ 表示 Γ在 Γ_{prim}中的共轭类集合。以下引理证明了定义 4.12的合理性，并说明了为什么在后续章节中，我们只考虑正向定向的极大平坦圆柱，而不考虑所有极大平坦圆柱。

引理 4.14. 设 $C = \Gamma gAM \subset \Gamma\backslash G/M$ 是 $\Gamma\backslash G/M$ 中一个非平凡的闭 AM-轨道。则以下结论成立。

(1) $g^{-1}\Gamma g \cap AM$ 中 C 的稳定子同构于 $\mathbb{Z}$。因此， C 是一个极大平坦圆柱，且与 $\mathbb{S}^1 \times \ker\psi$同胚。*(2)* 若 C 不是正向定向的，则 C 与Ω不相交。*(3)* 若 C 是正向定向的，则 C 包含于Ω中。*(4)* 若 C 是正向定向的，则半群 $\Gamma \cap gA^+Mg^{-1}$ 由单个元素$\gamma_{C,g}$生成。特别地，该半群由单个元素$\exp(v_C)$ 生成，该元素仅依赖于 C，并满足 $\lambda(\gamma_{C,g}) = v_C$。*(5)* 该映射在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 与 $[\Gamma_{\text{prim}}]$之间构成一个双射。

$$(g^{-1}\Gamma g \cap \operatorname{int}(A^+)M)/M \cong \{a \in \operatorname{int}(A^+) : \Gamma gM = \Gamma gaM\}$$

$$C \mapsto \{\gamma_{C,g} : C = \Gamma gAM\}$$

证明。对于 (1)，反设 $g^{-1}\Gamma g \cap AM$ 包含两个元素 $g^{-1}\gamma_i g = a_{w_i}m_i,\quad i = 1, 2$ 它们不能由 $g^{-1}\Gamma g \cap AM$中的单个元素生成。由于 A 和 M 可交换，因此有

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = gm_1m_2m_1^{-1}m_2^{-1}g^{-1} \in \Gamma.$$

由于 Γ 是离散且无挠的，因此 $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$必为恒等式。由此可得， Γ 包含一个与 $\mathbb{Z}^2$同构的子群，这不可能，因为 Γ 是双曲群。

（或者，我们注意到 w_1 和 w_2 不可能互为有理数倍，$\gamma_1^j\gamma_2^k \in ga_{jw_1+kw_2}Mg^{-1}$对于 $j,\ k \in \mathbb{Z}$，因此 $\{\lambda(\gamma_1^j\gamma_2^k)$:

$j,\ k\in\mathbb{Z}\}$ 包含任意接近 $\mathfrak{a}^+$的一面墙的方向，这与$\mathcal{L}\subset \operatorname{int}\mathfrak{a}^+$矛盾。）

因此， $g^{-1}\Gamma g\cap AM\cong\mathbb{Z}$ 和

$$C\cong(g^{-1}\Gamma g\cap AM)\backslash AM/M\cong\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^{\operatorname{rank}(G)}\cong\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^{\operatorname{rank}(G)-1}.$$

我们着重介绍一种更有启发性的方式，将 C 视为圆柱 $\mathbb{S}^1\times\ker\ \psi$。注意，在向量丛同构 $\Omega\ \cong\ \mathcal{X}_\psi\times\ker\psi$下， $C=\Gamma gAM$ 可识别为

$$\{\Gamma(g^+,g^-,t):t\in\mathbb{R}\}\times\ker\psi.$$

由于 C 是闭的，因此 $\{\Gamma(g^+,g^-,t):\ t\in\mathbb{R}\}$也是闭的。由于流 Φ 由紧空间上的一个$\mathbb{R}$-作用给出（例如，紧曲面单位切丛上的测地流，而非曲面本身上的测地流），因此闭的 Φ-轨道 $\{\Gamma(g^+,g^-,t):\ t\in\mathbb{R}\}$ 同胚于 $\mathbb{S}^1$。

对于(2) 和(3)，我们有$\Omega\cong\ \Gamma\backslash(\Lambda^{(2)}\times\mathfrak{a})$ (3.22)，并且根据 Hopf参数化（定义3.16）， $C=\Gamma gAM$ 可识别为

$$\{\Gamma(g^+,g^-,v):v\in\mathfrak{a}\}.$$

那么， C 包含于Ω当且仅当 $g^+\in\Lambda$。如果 C 是正向定向的，那么存在 $\gamma\in g\operatorname{int}(A^+)Mg^{-1}$，且 g^+ 是γ 的吸引不动点，因此 $g^+\in\Lambda$。另一方面，如果 C 不是正向定向的，那么存在魏尔元 w 在 $W\setminus\{M,w_0M\}$ 中的一个代表元，使得存在 $\gamma\in gw\operatorname{int}(A^+)Mw^{-1}g^{-1}$。那么， γ的吸引不动点为$(gw)^+\in\Lambda$。于是 $g^+\notin\Lambda$；否则，根据(4.2)，$(g^+,(gw)^+)\in\Lambda^{(2)}\subset\mathcal{F}^{(2)}$，这与 $\mathcal{F}^{(2)}$ 的定义(3.15)矛盾。

现在(4) 可直接由定义得到。对于(5)，映射的满射性$C\mapsto\{\gamma_{C,g}:\ C=\Gamma gAM\}$显然成立，而单射性则可由以下事实推出：$N_G(A^+M)=AM$。■

根据引理 4.14(4)、(5)，对于每个 $C\in\mathcal{C}_\Gamma$，我们固定一个

$$\gamma_C\in\{\gamma_{C,g}:C=\Gamma gAM\}\tag{4.15}$$

并将 C 的 ψ周长定义为

$$\ell_\psi(C):=\psi(\lambda(\gamma_C))\tag{4.16}$$

根据定理4.3，它为正。令 $m_{C,\ g}\in M$ 为满足 $\gamma_{C,\ g}=g\exp(\lambda(\gamma_C))m_{C,\ g}g^{-1}$的唯一元素。集合

$$h_C:=\{m_{C,g}:g\in G\}\in[M]$$

是一个共轭类，称为 C的$holonomy$ 。

注记4.17。对于所有极大平坦圆柱， ψ-周长这一概念无法同时得到良好定义。事实上，考虑一个极大平坦圆 $C=\Gamma gAM$ 柱，使得其生成元 am 以及 $(am)^{-1}$ 均不 $g^{-1}\Gamma g\cap AM\cong\mathbb{Z}$ 属于(内部 $A^+)M$。由于定理4.3 仅保证 ψ 在 $\mathcal{L}\setminus\{0\}$上为正，要定义 ψ-周长，我们需要从 a和 a^{-1} 中提取出一个 $\mathcal{L}$内蕴元素。自然的候选是 Jordan

两个生成元 γ或 γ^{-1}在 $\Gamma\cap gAMg^{-1}$中的投影。然而，当G 为高秩时，对合反演 i 可能非平凡，且

$$\psi(\lambda(\gamma^{-1})) = \psi(\mathsf{i}(\lambda(\gamma))) \neq \psi(\lambda(\gamma))$$

一般而言。

下一个引理给出了 ψ-周长的几何描述。

引理 4.18. 该映射

$$C = \Gamma gAM \in \mathcal{C}_\Gamma \to \pi_\psi(C) = \{\Gamma(g^+, g^-, t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{X}_\psi$$

是正向定向的极大平坦圆柱集合与平移流的周期轨道集合之间的一个双射 Φ 在 $\mathcal{X}_\psi$上。利用 $\mathcal{X}_\psi$ 在 Ω (4.8)中的嵌入， $C = \Gamma gAM \in \mathcal{C}_\Gamma$ 与 $\mathcal{X}_\psi$的交集就是相应的周期轨道 $^{\pi}\psi(C)$ ，它属于平移流，而 ψ的周长是 C 的周期$^{\pi}\psi(C)$。

证明。 注意到， Φ-轨道 $\{\Gamma(g^+, g^-, t)$: $t \in \mathbb{R}\}$ 是周期轨道，当且仅当存在 $\gamma \in \Gamma$ 使得 x 和 y 是某个 $\gamma \in \Gamma$的不动点。根据引理 4.14(3) 的证明中相同的推理， x 和 y 必定分别是 γ 的吸引不动点和排斥不动点，由此建立了平移流的周期轨道集合与 Γ中的共轭类集合之间的双射。鉴于引理 4.14(5)，这就建立了所需的双射。

对于最后一个断言，令 $C = \Gamma gAM \in \mathcal{C}_\Gamma$。利用 $\mathcal{X}_\psi$在 Ω (4.8中的嵌入，我们有

$$C \cap (\mathcal{X}_\psi \times \{0\}) = \{\Gamma(g^+, g^-, t) : t \in \mathbb{R}\} \times \{0\}$$

以及 $\{\Gamma(g^+, g^-, t)$ 的周期: $t \in \mathbb{R}\}$ 恰好是

$$\psi(\beta_{g^+}(\gamma_{C,g}^{-1}, e)) = \psi(\lambda(\gamma_{C,g})) = \ell_\psi(C).$$

■

在本文其余部分中，我们将只考虑正向定向的极大平坦圆柱，并省略“正向定向”这一表述。

5. 近似圆柱形极大平坦的计数

本节的主要结果是命题 5.24。命题5.24 可视为以下数量的渐近式：在 Γ 中对应于极大平坦圆柱、穿过并返回到 $\Gamma\backslash G/M$ 中给定流盒的元素个数；这些元素是几乎正向定向的极大平坦圆柱，其ψ-周长至多为 T （命题 5.24）。在第 6 节中，我们将命题 5.24 与以下数量联系起来：周长至多为 ψ 的极大平坦圆柱˜，其周长至多为 T 且穿过 $\mathcal{B}(g_0, \varepsilon)$ ；为此，我们应用正则方向的有效闭合引理（引理 2.7），并证明主要的联合等分布结果定理 6.12。

回顾一下，我们已固定一个切形式 ψ，它在归一化方向 $\mathsf{v} \in \operatorname{int}\mathcal{L}$ 处与 ψ_Γ 相切，也就是说，

$$\psi \in \mathfrak{a}^*,\ \psi \geq \psi_\Gamma,\ \mathsf{v} \in \operatorname{int}\mathcal{L} \text{ and } \psi(\mathsf{v}) = \psi_\Gamma(\mathsf{v}) = 1.$$

我们固定一个锥

$$\mathfrak{C} \subset \mathcal{L} \text{ with } \mathsf{v} \in \operatorname{int}\mathfrak{C}.$$

对于 $T > 0$，令

$$\mathfrak{C}_T := \{\exp(w) : w \in \mathfrak{C}, \psi(w) \leq T\}$$

它是 $\mathcal{L}_\Gamma$ 的一个有界子集，因为 $\mathfrak{C} \subset \mathcal{L}$ 和 $\psi > 0$ 位于 $\mathcal{L} \setminus \{0\}$ 上。

回顾流盒的定义（定义 2.5）。令 $g_0 \in G$，T，$\varepsilon > 0$，以及 Θ 为 M 的一个博雷尔子集。记

$$\mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta) := \mathcal{B}(g_0, \varepsilon)\mathfrak{C}_T\Theta\mathcal{B}(g_0, \varepsilon)^{-1} = g_0\mathcal{V}_T(e, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)g_0^{-1}. \tag{5.1}$$

每个 $\gamma \in \Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)$ 都对应于 G 中的一族 AM-轨道，这些轨道经过流盒 $\mathcal{B}(g_0, \varepsilon)$，随后经由 $\mathfrak{C}_T\Theta$ 中的一个元素平移后经过 $\gamma\mathcal{B}(g_0, \varepsilon)$。从这个意义上说，$\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)$ 的元素对应于近似圆柱形极大平坦。本节中，我们证明 $\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)$ 中元素数量的一个渐近式（命题 5.24）。

5.1. 在 N^+AMN-坐标中计数。在本小节中，我们将证明 Γ 中某种形式的 N^+AMN 乘积子集所含元素数量的一个渐近式。在本小节中，我们固定有界博雷尔集 $\Xi_1 \subset N^+$、$\Xi_2 \subset N$ 和 $\Theta \subset M$。对于 $T > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，我们记

$$S_T := S_T(\Xi_1, \Xi_2, \mathfrak{C}, \Theta) := \Xi_1\mathfrak{C}_T\Theta\Xi_2. \tag{5.2}$$

令 $g_0 \in G$。我们利用哈尔测度的局部混合（定理 4.11），证明了 $\#(\Gamma \cap g_0 S_T g_0^{-1})$ 的一个渐近式（命题 5.12），这是证明命题5.24的主要依据。

给定 G 的一个有界博雷尔子集 B，定义计数函数 $F_B : G \times G \to \mathbb{N}$ 为

$$F_B(g, h) := \sum_{\gamma \in \Gamma} 1_B(g^{-1}\gamma h) = \#(g^{-1}\Gamma h \cap B) = \#(\Gamma h \cap gB).$$

函数 F_B 关于两个变量均为 Γ-不变，因此可下降为定义在 $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$ 上的函数，我们仍记作 F_B。注意

$$F_{S_T}(e, e) = \#(\Gamma \cap S_T).$$

对于 F_1，$F_2 \colon \Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}$，令

$$\langle F_1, F_2 \rangle := \int_{\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G} F_1(x_1, x_2)F_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

当积分有意义时，其中 dx_1, dx_2 均为 $\Gamma\backslash G$ 上的哈尔测度。

对于 $\varepsilon > 0$，我们记

$$S^-_{T,\varepsilon} := \bigcap_{g_1,g_2\in G_\varepsilon} g_1 S_T g_2; \qquad S^+_{T,\varepsilon} := \bigcup_{g_1,g_2\in G_\varepsilon} g_1 S_T g_2.$$

集合 $S^{\pm}_{T,\varepsilon}$ 可用于近似 $\#(\Gamma \cap S_T)$，如下引理所示。对于小于 Γ 的单射半径的 $\varepsilon > 0$，我们固定一个非负函数 $\psi_\varepsilon \in C^\infty(G)$，满足 $\operatorname{supp}\psi_\varepsilon \subset G_\varepsilon$ 和 $\int_G \psi_\varepsilon\, dg = 1$。令 $\Psi_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$ 定义为 $\Psi_\varepsilon(\Gamma g) := \sum_{\gamma\in\Gamma} \psi_\varepsilon(\gamma g)$，对所有 $g \in G$ 均成立。

引理 5.3。对于任意 $T > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，有

$$\langle F_{S^-_{T,\varepsilon}}, \Psi_\varepsilon \otimes \Psi_\varepsilon\rangle \le F_T(e,e) \le \langle F_{S^+_{T,\varepsilon}}, \Psi_\varepsilon \otimes \Psi_\varepsilon\rangle.$$

我们的目标现在是估计 $\langle F_{S^{\pm}_{T,\varepsilon}}, \Psi_\varepsilon \otimes \Psi_\varepsilon\rangle$。我们先给出引理 5.4、5.5、5.7和 5.8，这些计算涉及一般的有界博雷尔子集 $\langle F_B, \Psi_1 \otimes \Psi_2\rangle$ B 中的 G。

标准的折叠与展开论证给出以下引理。

引理 5.4. 对于 G 中的任意有界博雷尔子集 B，以及所有 Ψ_1、$\Psi_2 \in \mathrm{C_c}(\Gamma\backslash G)$，有

$$\langle F_B, \Psi_1 \otimes \Psi_2\rangle = \int_B \langle \Psi_1, g\Psi_2\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)}\, dg,$$

其中 $g\Psi_2(x) := \Psi_2(xg)$。

鉴于引理 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中的矩阵系数5.4，现在我们将矩阵系数改写为便于运用局部混合（定理4.11）的形式。为方便起见，记

$$\mathsf{r} := \operatorname{rank}(G) \text{ and } a_w := \exp(w) \text{ for } w \in \mathfrak{a}.$$

引理 5.5. 对于 G 中的任意有界博雷尔子集 B，以及所有 Ψ_1、$\Psi_2 \in \mathrm{C_c}(\Gamma\backslash G)$，有

$$\begin{aligned}&\langle F_B, \Psi_1 \otimes \Psi_2\rangle \\ &= \frac{\kappa_{\mathsf{v}}}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \int_{h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}mn\in B} e^t e^{-I(u)} \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} m^{\mathrm{BR}_\star}_\psi\big|_{ZN}(h\Psi_1) m^{\mathrm{BR}}_\psi\big|_{ZN^+}(mn\Psi_2) \\ &\qquad + e^t E(t,u,h,mn)\, dt\, du\, dh\, dm\, dn,\end{aligned}$$

其中 $h \in N^+$、$m \in M$、$n \in N$、$t \in \mathbb{R}$、$u \in$核 ψ，且

$$\begin{aligned}E(t,u,h,mn) &= t^{\frac{\mathsf{r}-1}{2}} e^{2\rho(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u)-t} \int_{\Gamma\backslash G} \Psi_1(xh)\Psi_2(xa_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}mn)\, dx \\ &\quad - \frac{\kappa_{\mathsf{v}} e^{-I(u)}}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} m^{\mathrm{BR}_\star}_\psi\big|_{ZN}(h\Psi_1) m^{\mathrm{BR}}_\psi\big|_{ZN^+}(mn\Psi_2) \quad (5.6)\end{aligned}$$

是定理4.11 中的相应误差项（注意 $\psi(t\mathsf{v} + \sqrt{t}u) = t$）。

证明。 根据引理5.4，我们有

$$\langle F_B, \Psi_1 \otimes \Psi_2 \rangle = \int_B \int_{\Gamma\backslash G} \Psi_1(x)\Psi_2(xg)\, dx\, dg.$$

利用乘积映射 $N^+ \times M \times A \times N \to G$ 是到 G 的稠密开子集上的微分同胚这一事实，我们写作 $g = h^{-1}\exp(w)mn \in N^+MAN$，因此 $dg = e^{2\rho(w)}\, dh\, dw\, dm\, dn$。于是

$$\begin{aligned}
&\int_B \int_{\Gamma\backslash G} \Psi_1(x)\Psi_2(xg)\, dx\, dg \\
&= \int_{h^{-1}\exp(w)mn\in B} \int_{\Gamma\backslash G} \Psi_1(x)\Psi_2(xh^{-1}a_w mn) e^{2\rho(w)}\, dx\, dh\, dw\, dm\, dn \\
&= \int_{h^{-1}a_w mn\in B} e^{2\rho(w)} \int_{\Gamma\backslash G} \Psi_1(xh)\Psi_2(xa_w mn)\, dx\, dw\, dh\, dm\, dn.
\end{aligned}$$

我们写作 $w = t\mathsf{v} + \sqrt{t}u,^{-}$ 其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $u \in \ker\psi$。回忆$\mathsf{r} := \text{秩}(G)$。于是 $dw = t^{\frac{r-1}{2}}\, dt\, d\overline{u},$ 其中 dt 是 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度，且 du 是$\ker\psi$ 上来自小节4.2的勒贝格测度。于是

$$\begin{aligned}
&\int_{h^{-1}a_w mn\in B} e^{2\rho(w)} \int_{\Gamma\backslash G} \Psi_1(xh)\Psi_2(xa_w mn)\, dx\, dw\, dh\, dm\, dn \\
&= \int_{h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u} mn\in B} t^{\frac{r-1}{2}} e^{2\rho(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u)} \int_{\Gamma\backslash G} \Psi_1(xh)\Psi_2(xa_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u} mn) \\
&\qquad\qquad dx\, dt\, du\, dh\, dm\, dn \\
&= \frac{\kappa_{\mathsf{v}}}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \int_{h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u} mn\in B} e^t e^{-I(u)} \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}\big|_{ZN}(h\Psi_1) m_\psi^{\mathrm{BR}}\big|_{ZN^+}(mn\Psi_2) \\
&\qquad\qquad + e^t E(t,u,h,mn)\, dt\, du\, dh\, dm\, dn.
\end{aligned}$$

■

现在我们将讨论限定于 $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_\varepsilon$ 属于引理5.5的情形。令$E_\varepsilon(t,u,h,mn)$ 表示式(5.6中的相应误差项，并记

$$Q_{B,\varepsilon} := \langle F_B, \Psi_\varepsilon \otimes \Psi_\varepsilon \rangle - \int_{h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u} mn\in B} e^t E_\varepsilon(t,u,h,mn)\, dt\, du\, dh\, dm\, dn.$$

在下一个引理中，我们使用伊瓦萨瓦分解，将引理 5.5 中出现的 BR 测度分解为一种形式，这将有助于证明命题 5.12。

˜回顾 $\mathfrak{Z}_\Gamma$ （参见（4.5））。对于 $Z \in \mathfrak{Z}_\Gamma$，令 Z 表示 Z 在 G中的原像，即

$$\tilde{Z} := \{g \in G : \Gamma g \in Z\}.$$

引理 5.7. 令 $\varepsilon > 0$ 足够小。令 $Z \in \mathfrak{Z}_\Gamma$、 $h \in N^+$、$m \in M$ 和 $n \in N$。那么我们有

$$m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}\big|_{ZN}(h\Psi_\varepsilon) m_\psi^{\mathrm{BR}}\big|_{ZN^+}(mn\Psi_\varepsilon)$$

$$= \int_{KAN\times KAN^+} \psi_\varepsilon(k_1 a_{w_1} n_1 h)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1)\psi_\varepsilon(k_2 a_{w_2} h_1 mn)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2) \cdot e^{\psi(w_1-w_2)}\, d\nu_\psi^K(k_1)\, dw_1\, dn_1\, d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}^K(k_2)\, dw_2\, dh_1,$$

其中 ν_ψ^K 和 $\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}^K$ 定义为 (3.27)。

证明。对于 $g_1,\ g_2 \in G$，记 $g_1 = k_1 a_{w_1} n_1 \in KAN$ 和 $g_2 = k_2 a_{w_2} h_1 \in KAN^+$。利用引理 3.28，我们有

$$\begin{aligned}
&m_\psi^{\mathrm{BR}_\star}\big|_{ZN}(h\Psi_\varepsilon) m_\psi^{\mathrm{BR}}\big|_{ZN^+}(mn\Psi_\varepsilon)\\
&= \int_{G\times G} \psi_\varepsilon(g_1 h)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(g_1)\psi_\varepsilon(g_2 mn)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(g_2)\, dm_\psi^{\mathrm{BR}_\star}(g_1)\, dm_\psi^{\mathrm{BR}}(g_2)\\
&= \int_{KAN\times KAN^+} \psi_\varepsilon(k_1 a_{w_1} n_1 h)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1 a_{w_1} n_1)\psi_\varepsilon(k_2 a_{w_2} h_1 mn)\\
&\qquad \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2 a_{w_2} h_1) e^{\psi(w_1-w_2)}\, d\nu_\psi^K(k_1)\, dw_1\, dn_1\, d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}^K(k_2)\, dw_2\, dh_1\\
&= \int_{KAN\times KAN^+} \psi_\varepsilon(k_1 a_{w_1} n_1 h)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1)\psi_\varepsilon(k_2 a_{w_2} h_1 mn)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2)\\
&\qquad \cdot e^{\psi(w_1-w_2)}\, d\nu_\psi^K(k_1)\, dw_1\, dn_1\, d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}^K(k_2)\, dw_2\, dh_1.
\end{aligned}$$

■

为陈述下一个引理，定义一些记号将对我们有所帮助。我们定义 $f_B\colon N^+ \times MN \to \mathbb{R}$ 如下

$$f_B(h, mn) := \frac{\kappa_{\mathsf{v}}}{|m\chi_\psi|} \int_{h^{-1} m a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u} n \in B} e^t e^{-I(u)}\, dt\, du.$$

Let

$$\tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma := \{\tilde{Z} : Z \in \mathfrak{Z}_\Gamma\}.$$

定义自然投影映射

$$\begin{aligned}
H_1 &: MANN^+ \to M,\\
I_1 &: MANN^+ \to \mathfrak{a},\\
J_1 &: MANN^+ \to N^+,\\
I_2 &: AN^+MN \to \mathfrak{a},\\
J_2 &: AN^+MN \to MN.
\end{aligned}$$

对于每个 $kM \in K/M \cong \mathcal{F}$，固定一个代表元 $k^* \in K$。在下一个引理中，我们使用这些投影和变量替换，通过对 G_ε 进行积分来表示 $Q_{B,\ \varepsilon}$。

引理 5.8. 对于任意有界博雷尔子集 B *of* G，我们有

$$\begin{aligned}
Q_{B,\varepsilon} = \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma} \int_{(K/M)\times K} \int_{G_\varepsilon\times G_\varepsilon} & f_B(J_1((k_1^*)^{-1}g'), J_2(k_2^{-1}g''))\\
&\cdot \psi_\varepsilon(g')\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1}g'))\psi_\varepsilon(g'')\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2)
\end{aligned}$$

$$\cdot\, e^{\psi(I_1((k_1^*)^{-1}g')-I_2(k_2^{-1}g''))}\, dg'\, dg''\, d\nu_\psi(k_1^+)\, d\nu^K_{\psi\circ\mathsf{i}}(k_2).$$

证明. 根据引理 5.5和引理 5.7，我们有

$$\begin{aligned} Q_{B,\varepsilon} = \frac{\kappa_{\mathsf{v}}}{|m\chi_\psi|} \sum_{Z\in\Im_\Gamma} \int_{KAN\times KAN^+} \int_{h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}mn\in B} & e^t e^{-I(u)} \psi_\varepsilon(k_1 a_{w_1} n_1 h) \\ & \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1)\psi_\varepsilon(k_2 a_{w_2} h_1 mn)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2) e^{\psi(w_1-w_2)} \\ & d\nu^K_\psi(k_1)\, dw_1\, dn_1\, d\nu^K_{\psi\circ\mathsf{i}}(k_2)\, dw_2\, dh_1\, dt\, du\, dh\, dm\, dn. \end{aligned}$$

设 $m_1 \in M$ 使得 $k_1 = k_1^* m_1$。设 $g_3 = m_1 a_{w_1} n_1 h$ 且 $g_4 = a_{w_2} h_1 mn$。那么我们有 $dg_3 = dm_1\, dw_1\, dn_1\, dh$ 且 $dg_4 = dw_2\, dh_2\, dm\, dn$ 如第 3.5 小节所述。利用这些变量替换，我们得到

$$\begin{aligned} Q_{B,\varepsilon} &= \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\Im}_\Gamma} \int_{(K/M)\times K} \int_{G\times G} f_B(J_1(g_3), J_2(g_4))\psi_\varepsilon(k_1^* g_3)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1(g_3)) \\ &\quad \cdot \psi_\varepsilon(k_2 g_4)\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2) e^{\psi(I_1(g_3)-I_2(g_4))}\, dg_3\, dg_4\, d\nu_\psi(k_1^+)\, d\nu^K_{\psi\circ\mathsf{i}}(k_2) \\ &= \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\Im}_\Gamma} \int_{(K/M)\times K} \int_{G_\varepsilon\times G_\varepsilon} f_B(J_1((k_1^*)^{-1}g'), J_2(k_2^{-1}g'')) \\ &\cdot \psi_\varepsilon(g')\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1}g'))\psi_\varepsilon(g'')\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2) \\ &\qquad \cdot e^{\psi(I_1((k_1^*)^{-1}g')-I_2(k_2^{-1}g''))}\, dg'\, dg''\, d\nu_\psi(k_1^+)\, d\nu^K_{\psi\circ\mathsf{i}}(k_2), \end{aligned}$$

其中 $g' = k_1^* g_3$ 和 $g'' = k_2 g_4$。 ■

现在我们具体取 $B = S^\pm_{T,\varepsilon}$ 并估计 $Q_{S^\pm_{T,\varepsilon,\varepsilon}}$。根据引理 5.8，为了估计 $Q_{S^\pm_{T\varepsilon,,\varepsilon}}$，我们需要证明，对于对 $Q_{S^\pm_{T\varepsilon,,\varepsilon}}$ 有贡献的 $k \in K$，kG_ε 在投影 H_1, I_1, J_1, I_2, J_2 下的像，与 k 的像十分接近。这是可行的，因为 $\Xi_1 \subset N^+$ 和 $\Xi_2 \subset N$ 有界。

引理 5.9。固定有界集合 $U_1 \subset N^+$ 和 $U_2 \subset N$。对于充分小的 $\varepsilon > 0$，以下结论成立。若 $g_1 \in G$ 满足 $g_1^{-1} = manh \in MANN^+$ 且 $g_1^+ \in U_1^+$，则

$$g_1^{-1}G_\varepsilon \subset mM_{O(\varepsilon)}aA_{O(\varepsilon)}nN_{O(\varepsilon)}hN^+_{O(\varepsilon)}.$$

如果 $g_2 \in K$ 满足 $g_2^{-1} = ahmn \in AN^+MN$ 且 $g_2^- \in U_2^-$，那么

$$g_2^{-1}G_\varepsilon \subset aA_{O(\varepsilon)}hN^+_{O(\varepsilon)}mM_{O(\varepsilon)}nN_{O(\varepsilon)}.$$

证明。我们证明第一个结论；第二个结论的证明类似。乘积映射 $M\times A\times N\times N^+ \to G$ 是一个微分同胚，将其映到包含恒等式的开集上。特别地，

$$G_\varepsilon \subset M_{O(\varepsilon)}A_{O(\varepsilon)}N_{O(\varepsilon)}N^+_{O(\varepsilon)}.$$

设 $g_\varepsilon \in G_\varepsilon$ 满足 $g_\varepsilon = m_1 a_1 n_1 h_1 \in M_{O(\varepsilon)} A_{O(\varepsilon)} N_{O(\varepsilon)} N^+_{O\,\varepsilon()}$。根据假设，$h^{-1}$ 是有界集 U_1 中的一个元素，并且

$$\begin{aligned} g_1^{-1} g_\varepsilon &= manhm_1 a_1 n_1 h_1 \\ &= mm_1 aa_1((m_1a_1)^{-1} n(m_1a_1))((m_1a_1)^{-1} h(m_1a_1))n_1 h_1 \\ &= mm_1 m_2 aa_1 a_2((m_2a_2)^{-1}(m_1a_1)^{-1} n(m_1a_1)(m_2a_2))n_2 h_2 h_1, \end{aligned}$$

其中 $((m_1a_1)^{-1}h(m_1a_1))n_1 = m_2a_2n_2h_2$，我们注意到，假设 h 有界且 $n_1 \in N_{O(\varepsilon)}$，意味着 $m_2 \in M_{O(\varepsilon)}$、$a_2 \in A_{O(\varepsilon)}$ 和 $h_2 \in hN^+_{O\,(\varepsilon)}$。■

我们还需要以下引理，它指出可以用 N^+AMN 的乘积子集来界定集合 $S^{\pm}_{T\,,\,\varepsilon}$，并使其逼近 S_T。

引理 5.10. 假设 $\nu_\psi(\partial\Xi_1^+)$、$\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}(\partial(\Xi_2^{-1})^-)$ 和 $\int_{\partial\Theta} dm$ 都为0。对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，存在博雷尔集 $\mathfrak{C}'_{T,\,\varepsilon} \subset \mathfrak{C}_T$、$\Xi'_{1,\,\varepsilon} \subset \Xi_1$、$\Xi'_{2,\,\varepsilon} \subset \Xi_2$ 和 $\Theta'_\varepsilon \subset \Theta$，使得

$$N^+_{O(\varepsilon)} \Xi'_{1,\varepsilon} \mathfrak{C}'_{T,\varepsilon} M_{O(\varepsilon)} \Theta'_\varepsilon \Xi'_{2,\varepsilon} N_{O(\varepsilon)} \subset S^-_{T,\varepsilon},$$

其中，$\mathfrak{C}'_{T,\varepsilon}$ 的一个 $O(\varepsilon)$ 邻域包含 $\mathfrak{C}_T$ 和 $\nu_\psi((\Xi'_{1,\varepsilon})^+) \to \nu_\psi(\Xi_1^+)$,$\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}((\Xi'_{2,\varepsilon})^-) \to \nu_{\psi\circ \mathrm{i}}(\Xi_2^-)$ 以及 $\int_{\Theta'_\varepsilon} dm \to \int_\Theta dm$，其中 $\varepsilon \to 0$。

类似地，存在博雷尔集 $\mathfrak{C}''_{T,\varepsilon} \supset \mathfrak{C}_T$, $\Xi''_{1,\varepsilon} \supset \Xi_1$, $\Xi''_{2,\varepsilon} \supset \Xi_2$ 和 $\Theta''_\varepsilon \supset \Theta$，使得

$$N^+_{O(\varepsilon)} \Xi''_{1,\varepsilon} \mathfrak{C}''_{T,\varepsilon} M_{O(\varepsilon)} \Theta''_\varepsilon \Xi''_{2,\varepsilon} N_{O(\varepsilon)} \supset S^+_{T,\varepsilon},$$

其中，$\mathfrak{C}_T$ 的一个 $O(\varepsilon)$ 邻域包含 $\mathfrak{C}''_{T,\varepsilon}$ 和 $\nu_\psi((\Xi''_{1,\varepsilon})^+) \to \nu_\psi(\Xi_1^+)$,$\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}((\Xi''_{2,\varepsilon})^-) \to \nu_{\psi\circ \mathrm{i}}(\Xi_2^-)$ 以及 $\int_{\Theta''_\varepsilon} dm \to \int_\Theta dm$，其中 $\varepsilon \to 0$。

证明。鉴于关于边界的假设，我们可以假设 Ξ_1，Ξ_2和 Θ 均为开子集。采用与引理5.9中类似的推理，我们可以得出，对于所有 g_1，$g_2 \in G_\varepsilon$ 以及所有 $g = hamn \in N^+MAN$满足 h 且n有界的情形，我们有

$$g_1 g g_2 \in N^+_{O(\varepsilon)} h A_{O(\varepsilon)} a M_{O(\varepsilon)} mn N_{O(\varepsilon)}.$$

然后我们可以将 $\mathfrak{C}'_{T,\varepsilon}$ 取为 $\mathfrak{C}_T$ 与 $\mathfrak{C}_T$外部的闭 $O(\varepsilon)$-邻域的补集的交集。类似地，对 $\Xi'_{1,\varepsilon} \subset \Xi_1$、$\Xi''_{2,\varepsilon} \subset \Xi_2$ 和 $\Theta'_\varepsilon \subset \Theta$ 也可如此处理。显然，这些集合具有所需的性质。

该引理第二个断言的证明类似。■

我们将使用以下渐近记号。对于f_1，f_2的实值函数，我们记作

$$f_1 \sim f_2 \iff \lim_{T\to\infty} \frac{f_1(T)}{f_2(T)} = 1.$$

对于 ε的实值函数 f，我们记作

$$f = o_\varepsilon(1) \iff \lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = 0. \tag{5.11}$$

我们利用局部混合（定理 4.11）证明了关于$\#(\Gamma \cap g_0 S_T g_0^{-1})$ 在 $g_0 \in G$上的渐近式。

命题 5.12. 设 $g_0 \in G$。假设 $\nu_\psi(\partial\Xi_1^+)$、$\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}(\partial(\Xi_2^{-1})^-)$ 和$\int_{\partial\Theta} dm$ 全都为0。则

$$\#(\Gamma \cap g_0 S_T g_0^{-1}) \sim \frac{[M : M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^T \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\Im}_\Gamma} \tilde{\nu}_\psi^{g_0}|_{g_0^{-1}\tilde{Z}N}(\Xi_1)\tilde{\nu}_{\psi\circ\mathsf{i}}^{g_0}|_{g_0^{-1}\tilde{Z}N^+}(\Xi_2^{-1}\Theta^{-1}), \tag{5.13}$$

其中 $\tilde{\nu}_\psi^{g_0}|_{g_0^{-1}\tilde{Z}N}$ 和 $\tilde{\nu}_{\psi\circ\mathsf{i}}^{g_0}|_{g_0^{-1}\tilde{Z}N^+}$ 由 (3.32) 和 (3.34)定义。

注记 5.14. (5.13) 右端不依赖于 $\mathfrak{C}$ 的选取，只要 $\mathsf{v} \in \operatorname{int}\mathfrak{C}$ 即可。这反映了 ψ_Γ 在 $\{w \in \mathcal{L} : \psi(w) = T\}$ 上的最大值出现在 v 方向上这一事实。

证明。只需证明该定理对 $g_0 = e$成立。对于一般的 $g_0 \in G$，我们对 $g_0\Gamma g_0^{-1}$应用相同的论证，并在全文中将ν_ψ 和 $\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}$ 替换为 $\nu_\psi^{g_0}$和 $\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}^{g_0}$(3.31)。

由引理 5.4、5.5、5.7和 5.8，可得

$$\begin{aligned}&\langle F_{S_{T,\varepsilon}^\pm}, \Psi_\varepsilon \otimes \Psi_\varepsilon\rangle\\ &= Q_{S_{T,\varepsilon}^\pm,\varepsilon} + \int_{h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}mn\in S_{T,\varepsilon}^\pm} e^t E_\varepsilon(t,u,h,mn)\,dt\,du\,dh\,dm\,dn\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}Q_{S_{T,\varepsilon}^\pm,\varepsilon} = \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\Im}_\Gamma} \int_{(K/M)\times K} \int_{G_\varepsilon\times G_\varepsilon} & f_{S_{T,\varepsilon}^\pm}(J_1((k_1^*)^{-1}g'), J_2(k_2^{-1}g''))\\ &\cdot \psi_\varepsilon(g')\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1}g'))\psi_\varepsilon(g'')\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2)\\ &\cdot e^{\psi(I_1((k_1^*)^{-1}g')-I_2(k_2^{-1}g''))}\,dg'\,dg''\,d\nu_\psi(k_1^+)\,d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}^K(k_2).\end{aligned}$$

现在我们分两步证明。

步骤 1： 我们用 S_T 来估计 $Q_{S_T^\pm}$、ε、ε。

回顾第 4.1 小节，ZN 是 $\Gamma\backslash G$ 的一个 P°-极小子集。利用 $\Gamma\backslash G$ 的 P°-极小子集与 G/P° 的 Γ-极小˜子集之间的对应关系，我们有 $ZN = \{x \in G :$ 对于某个 Γ-极小子集 $\Lambda_1 \subset G/P^\circ$，$xP^\circ \in \Lambda_1\}$。回顾 Γ 的全纯群 M_Γ（定义 3.5）。固定 $k_1 M \in \Lambda$，由（3.6），存在 $m' \in M$ 使得 $\{m \in M :\ k_1^* m P^\circ \in \Lambda_1\} = M_\Gamma m'$。于是

$$\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1}g')) = \mathbb{1}_{M_\Gamma m'}(H_1((k_1^*)^{-1}g')).$$

由于 $M^\circ < M_\Gamma$，如果 ε 足够小，那么 $\mathbb{1}_{M_\Gamma m'}(H_1((k_1^*)^{-1}g'))$ 在 G_ε 上为常数。

由引理5.9 和引理5.10 可得

$$\psi(I_1((k_1^*)^{-1}g')) = \psi(I_1((k_1^*)^{-1})) + O(\varepsilon);$$
$$\psi(I_2(k_2^{-1}g'')) = \psi(I_2(k_2^{-1})) + O(\varepsilon)$$

and

$$J_1((k_1^*)^{-1}g')^{-1} \in N^+_{O(\varepsilon)} J_1((k_1^*)^{-1})^{-1};$$
$$J_2(k_2^{-1}g'') \in M_{O(\varepsilon)} J_2(k_2^{-1}) N_{O(\varepsilon)}.$$

<escape>我们首先证明 $Q_{S^-_{T,\varepsilon}}$ 的一个下界。设 $\mathfrak{C}'_{T,\varepsilon} \subset \mathfrak{C}_T$，$\Xi'_{1,\varepsilon} \subset \Xi_1$，$\Xi''_{2,\varepsilon} \subset \Xi_2$ 以及 $\Theta'_\varepsilon \subset \Theta$ 如引理 5.10 中所述。为方便起见，令</escape>

$$S'_{T,\varepsilon} := \Xi'_{1,\varepsilon} \mathfrak{C}'_{T,\varepsilon} \Theta'_\varepsilon \Xi'_{2,\varepsilon}.$$

那么对于所有 $g', g'' \in G_\varepsilon$，我们有

$$f_{S^-_{T,\varepsilon}}(J_1((k_1^*)^{-1}g'), J_2(k_2^{-1}g'')) \geq f_{S'_{T,\varepsilon}}(J_1((k_1^*)^{-1}), J_2(k_2^{-1})).$$

由此可得的是

$$\begin{aligned} Q_{S^-_{T,\varepsilon},\varepsilon} \geq \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma} \int_{(K/M)\times K} & f_{S'_{T,\varepsilon}}(J_1((k_1^*)^{-1}), J_2(k_2^{-1})) \mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1})) \\ & \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2)(1+O(\varepsilon)) e^{\psi(I_1((k_1^*)^{-1}) - I_2(k_2^{-1}))}\, d\nu_\psi(k_1^+)\, d\nu^K_{\psi\circ\mathsf{i}}(k_2). \end{aligned} \tag{5.15}$$

利用引理 5.10，我们观察到

$$\begin{aligned} &\int_{(K/M)\times K} (f_{S_T} - f_{S_T^-})(J_1((k_1^*)^{-1}), J_2(k_2^{-1}))\, d\nu_\psi(k_1^+)\, d\nu^K_{\psi\circ\mathsf{i}}(k_2) \\ &= O\Bigg(e^T \int_{(K/M)\times K} \mathbb{1}_{\Xi_1\setminus\Xi^-_{1,\varepsilon}}(J_1((k_1^*)^{-1})^{-1}) \\ &\qquad\qquad + \mathbb{1}_{\Theta\Xi_2\setminus\Theta_\varepsilon\Xi^-_{2,\varepsilon}}(J_2(k_2^{-1}))\, d\nu_\psi(k_1^+)\, d\nu^K_{\psi\circ\mathsf{i}}(k_2) \Bigg) \\ &= e^T O\left(\nu_\psi\left(\Xi_1^+ \setminus (\Xi^-_{1,\varepsilon})^+\right) + \nu_{\psi\circ\mathsf{i}}\left((\Xi_2^{-1})^- \setminus ((\Xi^-_{2,\varepsilon})^{-1})^-\right) + m\left(\Theta \setminus \Theta^-_\varepsilon\right)\right) \\ &= e^T o_\varepsilon(1), \end{aligned} \tag{5.16}$$

其中 o_ε 符号由（5.11）定义。结合（5.15）和（5.16）可得

$$\begin{aligned} Q_{S^-_{T,\varepsilon},\varepsilon} \geq e^T o_\varepsilon(1) + \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma} \int_{(K/M)\times K} & (1+O(\varepsilon)) f_{S_T}(J_1((k_1^*)^{-1}), J_2(k_2^{-1})) \\ & \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1})) \mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2) e^{\psi(I_1((k_1^*)^{-1}) - I_2(k_2^{-1}))}\, d\nu_\psi(k_1^+)\, d\nu^K_{\psi\circ\mathsf{i}}(k_2). \end{aligned}$$

类似的论证表明

$$Q_{S^+_{T,\varepsilon},\varepsilon} \leq e^T o_\varepsilon(1) + \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma} \int_{(K/M)\times K} (1+O(\varepsilon)) f_{S_T}(J_1((k_1^*)^{-1}), J_2(k_2^{-1}))$$

$$\cdot \mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1}))\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2)e^{\psi(I_1((k_1^*)^{-1})-I_2(k_2^{-1}))}\,d\nu_\psi(k_1^+)\,d\nu^K_{\psi\circ \mathrm{i}}(k_2)$$

因此我们得出结论:

$$Q_{S^\pm_{T,\varepsilon},\varepsilon} = e^T o_\varepsilon(1) + \sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma}\int_{(K/M)\times K}(1+O(\varepsilon))f_{S_T}(J_1((k_1^*)^{-1}),J_2(k_2^{-1}))$$

$$\cdot \mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1}))\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2)e^{\psi(I_1((k_1^*)^{-1})-I_2(k_2^{-1}))}\,d\nu_\psi(k_1^+)\,d\nu^K_{\psi\circ \mathrm{i}}(k_2).$$

步骤 2: 通过适当地分解 k_1^* 和 k_2，并应用引理5.17中的渐近式，我们即可得出结论。

考虑满足 $(k_1^*)^{-1} = ma_w nh^{-1} \in MANN^+$，的 $k_1 \in K$，我们有

$$\begin{aligned} J_1((k_1^*)^{-1}))^{-1} &= h;\\ h^+ &= k_1 M;\\ k_1^* H_1((k_1^*)^{-1}) &= hn^{-1}a_{-w};\\ I_1((k_1^*)^{-1}) &= w = \beta_{h^+}(e,h)\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\int_{(J_1((k_1^*)^{-1}))^{-1}\in\Xi_1}\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(k_1^* H_1((k_1^*)^{-1}))e^{\psi(I_1((k_1^*)^{-1}))}\,d\nu_\psi(k_1^+)\\ &= \int_{h\in\Xi_1}\mathbb{1}_{\tilde{Z}N}(h)e^{\psi(\beta_{h^+}(e,h))}\,d\nu_\psi(h^+) = \tilde{\nu}_\psi|_{\tilde{Z}N}(\Xi_1).\end{aligned}$$

类似地，考虑满足 $k_2^{-1} = a_w hm^{-1}n^{-1} \in AN^+MN$，的 $k_2^{-1} \in K$，我们有

$$\begin{aligned} J_2(k_2^{-1}) &= m^{-1}n^{-1} \in MN;\\ k_2^- &= n^-;\\ I_2(k_2^{-1}) &= w = -i(\beta_{n^-}(e,n))\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{\substack{k_2\in K\\ J_2(k_2^{-1})\in\Theta\Xi_2}}\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(k_2)e^{-\psi(I_2(k_2^{-1}))}d\nu^K_{\psi\circ \mathrm{i}}(k_2)\\ &= \int_{nm\in\Xi_2^{-1}\Theta^{-1}}\mathbb{1}_{\tilde{Z}N^+}(nm)e^{(\psi\circ \mathrm{i})(\beta_{n^-}(e,n))}\,d\nu_{\psi\circ \mathrm{i}}(n^-)\,dm\\ &= \tilde{\nu}_{\psi\circ \mathrm{i}}|_{\tilde{Z}N^+}(\Xi_2^{-1}\Theta^{-1}).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\langle F_{S^\pm_{T,\varepsilon}},\Psi_\varepsilon\otimes\Psi_\varepsilon\rangle\\ &= (1+O(\varepsilon))\frac{\kappa_{\mathsf{v}}}{|m\mathcal{X}_\psi|}\int_{a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathfrak{C}_T}e^t e^{-I(u)}\,dt\,du\\ &\qquad\cdot\sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma}\tilde{\nu}_\psi|_{\tilde{Z}N}(\Xi_1)\tilde{\nu}_{\psi\circ \mathrm{i}}|_{\tilde{Z}N^+}(\Xi_2^{-1}\Theta^{-1})\end{aligned}$$

$$+\int_{h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}mn\in S^{\pm}_{T,\varepsilon}} e^{t}E_{\varepsilon}(t,u,h,mn)\,dt\,du\,dh\,dm\,dn+e^{T}o_{\varepsilon}(1).$$

利用引理 5.17 和引理 5.3，取 $T\to\infty$，然后取 $\varepsilon\to 0$，我们得出

$$\#(\Gamma\cap S_T)\sim e^{T}\frac{\kappa_{\mathsf{v}}}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{\ker\psi}e^{-I(u)}\,du\sum_{\tilde{Z}\in\tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma}\tilde{\nu}_{\psi}|_{\tilde{Z}N}(\Xi_1)\tilde{\nu}_{\psi\circ\mathfrak{i}}|_{\tilde{Z}N^{+}}(\Xi_2^{-1}\Theta^{-1})$$

并且我们注意到$\kappa_{\mathsf{v}}\int_{核\,\psi}e^{-I(u)}\,du=[M:\ M_\Gamma]$ 根据命题A.1。 ■

引理 5.17. 我们有

$$\lim_{T\to\infty}e^{-T}\int_{a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathfrak{C}_T}e^{t}e^{-I(u)}\,dt\,du=\int_{\ker\psi}e^{-I(u)}\,du \tag{5.18}$$

且对所有充分小的 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{T\to\infty}e^{-T}\int_{h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}mn\in S^{\pm}_{T,\varepsilon}}e^{t}E_{\varepsilon}(t,u,h,mn)\,dt\,du\,dh\,dm\,dn=0. \tag{5.19}$$

证明。 首先，我们证明（5.18）。对于 $u\in$ 核 ψ 和 $T>0$，令

$$R_T(u)=\{t>0:a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathfrak{C}_T\}=\{0<t\le T:t\mathsf{v}+\sqrt{t}u\in\mathfrak{C}\}.$$

于是我们有

$$e^{-T}\int_{a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathfrak{C}_T}e^{t}e^{-I(u)}\,dt\,du=\int_{\ker\psi}e^{-I(u)}e^{-T}\int_{R_T(u)}e^{t}\,dt\,du.$$

注意到 $e^{-I(u)}e^{-T}\int_{R_T(u)}e^{t}\,dt\le e^{-I(u)}$ 并且根据 $I(u)$ (4.10) 的定义，$e^{-I(u)}\in L^1(\ker\psi)$。于是，根据勒贝格控制收敛定理,

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}e^{-T}\int_{a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathfrak{C}_T}e^{t}e^{-I(u)}\,dt\,du\\&=\int_{\ker\psi}e^{-I(u)}\lim_{T\to\infty}e^{-T}\int_{R_T(u)}e^{t}\,dt\,du=\int_{\ker\psi}e^{-I(u)}\,du,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式利用了以下观察：对于固定的 u，当 $t\le T$ 足够大时，$t\in R_T(u)$ 恒成立。

现在我们证明（5.19）。由于 $\Xi_1\subset N^{+}$ 和 $\Xi_2\subset N$ 有界，根据定理 4.11，存在正数常量 η_{v}、D_{v} 和 T_{v} 使得

$$|E_{\varepsilon}(t,u,h,mn)|\le D_{\mathsf{v}}e^{-\eta_{\mathsf{v}}I(u)}$$

对于所有满足 $h^{-1}a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}mn\in S^{\pm}_{T,\varepsilon}$ 的 $(t,u)\in(T_{\mathsf{v}},\infty)\times\ker\psi_{\mathsf{v}}$ and h,mn。然后，利用与之前类似的推理以及对于固定的 $u\in\ker\psi$，$\lim_{t\to\infty}E_{\varepsilon}(t,u,h,mn)=0$ 这一事实，可得 (5.19)。 ■

5.2. 在 $\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)\mathfrak{C}_T\Theta\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)^{-1}$ 中的计数。本小节中，我们建立 $\mathcal{V}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)$ (5.1) 与 $g_0 S_T(N_\varepsilon^+,N_\varepsilon^{-1},\mathfrak{C},\Theta)g_0^{-1}$(5.2) 之间的关系，随后应用命题 5.12，得到 $\#(\Gamma\cap\mathcal{V}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta))$ 的渐近式（命题 5.24）。

对于博雷尔映射 $f_1:\Gamma\backslash G/M\to\mathbb{R}$, $f_2:M\to\mathbb{R}$ 以及博雷尔集 $B_1\subset\Gamma\backslash G/M$ 和 $B_2\subset M$，我们定义

$$\mathsf{m}_\psi(f_1\otimes f_2):=\left(\int_X f_1\,d\mathsf{m}_\psi\right)\left(\int_M f_2\,dm\right);$$
$$\mathsf{m}_\psi(B_1\otimes B_2):=\mathsf{m}_\psi(\mathbb{1}_{B_1}\otimes\mathbb{1}_{B_2}).$$

将 $\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)$ 投影到 $\Gamma\backslash G/M$ 上的投影记为

$$\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon):=\Gamma\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)M\subset\Gamma\backslash G/M.$$

回忆一下，$\mathsf{r}=\mathsf{r}(G)$。令 $b_{\mathsf{r}}(\varepsilon)$ 表示半径为 ε 的欧几里得 r 维球的体积。对于 $\mathsf{m}_\psi(\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)\otimes\Theta)$，有如下公式。

引理 5.20。对于任意 $g_0\in G$, $\varepsilon>0$ 以及 M 的博雷尔子集 Θ，有

$$\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon)\otimes\Theta)=(1+O(\varepsilon))b_{\mathsf{r}}(\varepsilon)\tilde{\nu}_\psi^{g_0}(N_\varepsilon^+)\tilde{\nu}_{\psi\circ\mathsf{i}}^{g_0}(N_\varepsilon\Theta),$$

其中，$\tilde{\nu}_\psi^{g_0}$ 和 $\tilde{\nu}_{\psi\circ\mathsf{i}}^{g_0}$ 由以下公式定义：(3.32) 和 (3.33)。

证明。我们假设 $g_0=e$。一般的 $g_0\in G$ 的证明类似。由引理 2.6(2) 和 (3)，我们有 $\mathcal{B}(e,\varepsilon)e^+=N_\varepsilon^+e^+$, $\mathcal{B}(e,\varepsilon)e^-=N_\varepsilon e^-$，并且 $\mathcal{B}(e,\varepsilon)M\subset G/M\cong\mathcal{F}^{(2)}\times\mathfrak{a}$ 在 $\mathcal{F}^{(2)}$ 上的投影为 $N_\varepsilon^+e^+\times N_\varepsilon e^-$。固定 $g\in\mathcal{B}(e,\varepsilon)$，并记 $w=\beta_{g^+}(e,g)$、$g=h_1n_1a_1m_1\in N_\varepsilon^+NA_\varepsilon M_\varepsilon$ 和 $g=n_2h_2a_2m_2\in N_\varepsilon N^+A_{O(\varepsilon)}M_{O(\varepsilon)}$。利用 (3.20) 以及布塞曼函数的性质（定义 3.7），由下列计算立即可得该引理：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{m}_\psi(\mathcal{B}(e,\varepsilon)M)\\
&=\int_{g\in\mathcal{B}(e,\varepsilon)}e^{\psi\left(\beta_{g^+}(e,g)\right)+(\psi\circ\mathsf{i})\left(\beta_{g^-}(e,g)\right)}\,d\nu_\psi(g^+)\,d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}(g^-)\,dw\\
&=\int_{g\in\mathcal{B}(e,\varepsilon)}e^{\psi\left(\beta_{h_1^+}(e,h_1a_1)\right)+(\psi\circ\mathsf{i})\left(\beta_{(n_2)^-}(e,n_2a_2)\right)}\,d\nu_\psi(h_1^+)\,d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}(n_2^-)\,dw\\
&=\int_{g\in\mathcal{B}(e,\varepsilon)}e^{\psi\left(\beta_{h_1^+}(e,h_1)+\log(a_1)\right)+(\psi\circ\mathsf{i})\left(\beta_{n_2^-}(e,n_2)-\mathsf{i}(\log(a_2))\right)}\\
&\qquad\qquad d\nu_\psi(h_1^+)\,d\nu_{\psi\circ\mathsf{i}}(n_2^-)\,dw\\
&=\int_{g\in\mathcal{B}(e,\varepsilon)}e^{\psi(\log(a_1)-\log(a_2))}\,d\tilde{\nu}_\psi^{g_0}(h_1)\,d\tilde{\nu}_{\psi\circ\mathsf{i}}^{g_0}(n_2M)\,dw\\
&=(1+O(\varepsilon))b_{\mathsf{r}}(\varepsilon)\tilde{\nu}_\psi^{g_0}(N_\varepsilon^+)\tilde{\nu}_{\psi\circ\mathsf{i}}^{g_0}(N_\varepsilon M).
\end{aligned}$$

■

下一个引理将 $\mathcal{V}_T(e,\ \varepsilon,\ \mathfrak{C},\ \Theta)$ 与 $S_T(N_\varepsilon^+,\ N_\varepsilon^{-1},\ \mathfrak{C},\ \Theta)$ 联系起来。为陈述该引理，我们固定一个常数 $C>0$，使得

$$a_{-w}N_\varepsilon a_w \subset N_{\varepsilon e^{-C\psi(w)}} \text{ and } a_w N_\varepsilon^+ a_{-w} \subset N^+_{\varepsilon e^{-C\psi(w)}} \text{ for all } w\in\mathcal{L}. \quad (5.21)$$

这是可行的，因为 $\mathcal{L}\subset \operatorname{int}\mathfrak{a}^+$。

引理 5.22。对于所有 $T>T'>1$ 和充分小的 $\varepsilon>0$,

$$S_T(N_\varepsilon^+,N_\varepsilon^{-1},\mathfrak{C},\Theta)\subset \mathcal{V}_T(e,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)$$

并且我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}_T(e,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\setminus\mathcal{V}_{T'}(e,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\\ &\subset S_{T+O(\varepsilon)}(N^+_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT'})},(N_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT'})})^{-1},\hat{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)},\hat{\Theta}_{O(\varepsilon)})\\ &\quad\setminus S_{T'-O(\varepsilon)}(N^+_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT'})},(N_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT'})})^{-1},\hat{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)},\hat{\Theta}_{O(\varepsilon)}),\end{aligned}$$

其中 $\hat{}\ \Theta_\varepsilon := \bigcup_{m_1,m_2\in M_\varepsilon} m_1\Theta m_2$ 且 $\hat{}\ \mathfrak{C}_\varepsilon$ 是 $\mathfrak{a}$中包含所有 $T>T'>1$对应的 $\mathfrak{C}_T\setminus\mathfrak{C}_{T'}$ 的 ε-邻域的最小闭锥。

证明。由于 $N_\varepsilon^\pm\subset\mathcal{B}(e,\ \varepsilon)$，根据定义，第一个包含关系显然成立。

对于第二个包含关系，考虑

$$g\in\mathcal{V}_T(e,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\setminus\mathcal{V}_{T'}(e,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta).$$

存在 $g_1,\ g_2\in\mathcal{B}(e,\ \varepsilon)$，$a\in\mathfrak{C}_T\setminus\mathfrak{C}_{T'}$ 以及 $m\in\Theta$ 使得 $g=g_1mag_2^{-1}$。由引理 2.6(3)，我们有 $g_1=h_1n_1m_1a_1\in N_\varepsilon^+N_{O(\varepsilon)}M_\varepsilon A_\varepsilon$ 且 $g_2=n_2h_2m_2a_2\in N_\varepsilon N^+_{O\ (\varepsilon)}M_{O(\varepsilon)}A_{O(\varepsilon)}$。于是

$$g=h_1n_1m_1a_1ma(m_2a_2)^{-1}h_2^{-1}n_2^{-1}.$$

令 $a'=aa_1a_2^{-1}$，$m'=m_1mm_2^{-1}$以及 $n_3=(m'a')^{-1}n_1m'a'$。于是 $a'\in(\hat{}\,\mathfrak{C}_{O(\varepsilon)})_{T+O(\varepsilon)}\setminus(\hat{}\,\mathfrak{C}_{O(\varepsilon)})_{T'-O(\varepsilon)}$，$n_3\in N_{O(\varepsilon e^{-CT'})}$ 以及 $g=h_1m'a'n_3h_2^{-1}n_2^{-1}$。采用我们对常数 C 在（5.21）中的选取，由引理 2.4，可得

$$n_3h_2^{-1}=m_3a_3h_4n_4\in M_{O(\varepsilon)}A_{O(\varepsilon)}N^+_{O(\varepsilon)}N_{O(\varepsilon e^{-CT'})}.$$

Then

$$g=h_1m'a'm_3a_3h_4n_4n_2^{-1}=h_5m''a''n_5,$$

其中 $a''=a'a_3$, $m''=m'm_3$, $h_5=h_1(m''a'')h_4(m''a'')^{-1}$ 和 $n_5=n_4n_2^{-1}$。注意，$a''\in(\hat{}\,\mathfrak{C}_{O(\varepsilon)})_{T+O(\varepsilon)}\setminus(\hat{}\,\mathfrak{C}_{O(\varepsilon)})_{T'-O(\varepsilon)}$，$m''\in\hat{}\,\Theta_{O(\varepsilon)}$, $h_5\in N^+_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT'})}$ 和 $n_5\in N_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT'})}$，由此完成证明。■

为陈述下一个命题，我们将使用以下渐近记号。对于关于 ε 和 T 的实值函数 f，我们记作

$$f=o_T(1)\iff\lim_{T\to\infty}f(\varepsilon,T)=0 \quad (5.23)$$

回忆一下全纯群 M_Γ 的 Γ （定义3.5）。根据引理5.22和命题 5.12，我们得到 $\Gamma\cap\mathcal{V}_T$（$g_0,\ \varepsilon,\ \mathfrak{C},\ \Theta$）中的元素个数的如下渐近式。

命题 5.24. 设 $g_0 \in G$ 和 $\Theta \subset M_\Gamma$ 为满足 $\int_{\partial\Theta} dm = 0$ 的博雷尔集。对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\#(\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)) = \frac{[M : M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^T \left(\frac{\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(g_0, \varepsilon) \otimes \Theta)}{b_{\mathsf{r}}(\varepsilon)} (1 + O(\varepsilon)) + o_T(1) \right).$$

证明。同样，我们给出一个关于 $g_0 = e$ 的证明，一般情形的证明类似。注意，$\partial N_\varepsilon^\pm$是 $\mathcal{F}$的真$\nu_\psi(\partial N_\varepsilon^+) = \nu_{\psi \circ \mathsf{i}}(\partial N_\varepsilon) = 0$ 由 [KO23c] 得出（对于情形 [ELO22a] 已证明此结论） $\psi = \psi \circ \mathsf{i}_\circ$ ）

根据引理 5.22和命题 5.12，我们有

$$\#(\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)) \geq \frac{[M : M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^T \left(\sum_{\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma} \tilde{\nu}_\psi|_{\tilde{Z}N}(N_\varepsilon^+) \tilde{\nu}_{\psi \circ \mathsf{i}}|_{\tilde{Z}N^+}(N_\varepsilon \Theta^{-1}) + o_T(1) \right). \quad (5.25)$$

我们断言，对于充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$\sum_{\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma} \tilde{\nu}_\psi|_{\tilde{Z}N}(N_\varepsilon^+) \tilde{\nu}_{\psi \circ \mathsf{i}}|_{\tilde{Z}N^+}(N_\varepsilon \Theta^{-1}) = \tilde{\nu}_\psi(N_\varepsilon^+) \tilde{\nu}_{\psi \circ \mathsf{i}}(N_\varepsilon \Theta). \quad (5.26)$$

为了解这一断言为何成立，注意到

$$\tilde{\nu}_\psi(N_\varepsilon^+) = \sum_{\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma} \tilde{\nu}_\psi|_{\tilde{Z}N}(N_\varepsilon^+) \text{ and } \tilde{\nu}_{\psi \circ \mathsf{i}}(N_\varepsilon \Theta) = \sum_{\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma} \tilde{\nu}_{\psi \circ \mathsf{i}}|_{\tilde{Z}N^+}(N_\varepsilon \Theta^{-1}),$$

˜在第二个等号中，我们用到了如下事实：对于每个 $\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma$，$ZN$ 都是右 M_Γ- 不变的。若 $e^+ \notin \Lambda$ 或 $e^- \notin \Lambda$，则当 ε 充分小时，要么对所有 $\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma$ 都有 $N_\varepsilon^+ \cap \tilde{Z}N = \emptyset$，要么对所有 $\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma$ 都有 $N_\varepsilon \cap \tilde{Z}N^+ = \emptyset$，此时结论显然成立，因为等式两边都为 0。否则，$e^+$，$e^- \in \Lambda$，因此当 ε 充分小时，$N_\varepsilon^\pm \cap \Lambda \subset \tilde{Z}$ 对某个单一的 $\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\Gamma$ 成立，故结论得证。

结合式（5.25）和式（5.26），并利用引理 5.20，我们得到

$$\#(\Gamma \cap (\mathcal{V}_T(e, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta))) \geq \frac{[M : M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^T \left(\frac{\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(e, \varepsilon) \otimes \Theta)}{b_{\mathsf{r}}(\varepsilon)} (1 + O(\varepsilon)) + o_T(1) \right).$$

还需证明反向不等式。由引理5.22，我们知道$\mathcal{V}_T(e, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta) \setminus \mathcal{V}_{T/2}(e, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)$ 包含于

$$S_{T+O(\varepsilon)}(N^+_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT/2})}, (N^-_{\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT/2})})^{-1}, \hat{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)}, \hat{\Theta}_{O(\varepsilon)})$$

and

$$\mathcal{V}_{T/2}(e, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta) \subset S_{T/2+O(\varepsilon)}(N^+_{O(\varepsilon)}, (N_{O(\varepsilon)})^{-1}, \hat{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)}, \hat{\Theta}_{O(\varepsilon)}).$$

假设 ε 足够小，使得 $M_{O(\varepsilon)} \subset M^\circ \subset M_\Gamma$，则通过与上文类似的推理可得

$$\begin{aligned}
&\#(\Gamma \cap \mathcal{V}_T(e,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)) - \#(\Gamma \cap \mathcal{V}_{T/2}(e,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)) \\
&\le \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^{(T+O(\varepsilon))} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(e,\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT/2})) \otimes \hat{\Theta}_{O(\varepsilon)})}{b_{\mathsf{r}}(\varepsilon+O(\varepsilon e^{-CT/2}))}(1+O(\varepsilon+\varepsilon e^{-CT/2})) + o_T(1) \right);
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
&\#(\Gamma \cap \mathcal{V}_{T/2}(e,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)) \\
&\le \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^{(T/2+O(\varepsilon))} \left(\frac{\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(e,O(\varepsilon)) \otimes \hat{\Theta}_{O(\varepsilon)})}{b_{\mathsf{r}}(O(\varepsilon))}(1+O(\varepsilon)) + o_T(1) \right).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

结合（5.27）和（5.28），并令 T 足够大，即可得到所需的不等式。■

6. 关于 ψ-周长的联合等分布

<escape>在本节中，我们将证明本文的主要定理，即定理 1.3，以及推论 1.4。事实上，我们在此证明的结果略微更为一般，因为我们允许仅考虑其对应的若尔当投影 C $\lambda(\gamma_C)$ 位于固定锥 $\mathfrak{C} \subset \mathcal{L}$内的极大平坦圆柱，其中$\gamma_C$ 与式（4.15）中的定义相同。</escape>

如第5节所述，在本节中我们固定

$$\psi \in \mathfrak{a}^* \text{ tangent to } \psi_\Gamma \text{ at } \mathsf{v} \in \operatorname{int} \mathcal{L} \text{ with } \psi(\mathsf{v}) = \psi_\Gamma(\mathsf{v}) = 1$$

并且我们固定了

$$\operatorname{cone} \mathfrak{C} \subset \mathcal{L} \text{ with } \mathsf{v} \in \operatorname{int} \mathfrak{C}.$$

6.1. 预备引理。在本小节中，我们固定

— g_0，其中 $\Gamma g_0 M \in \operatorname{supp} \mathsf{m}_\psi$；— $\varepsilon > 0$ 如命题 5.24中所述，充分小；— 一个共轭不变 Borel 集 $\Theta \subset M_\Gamma$（定义 3.5）。

对于 $T > 0$，我们定义

$$\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta) = \{gamg^{-1} : g \in \mathcal{B}(g_0,\varepsilon), am \in \mathfrak{C}_T\Theta\}.$$

回顾一下，$\mathcal{C}_\Gamma$ 是$\Gamma\backslash G/M$中所有（正向定向的）极大平坦圆柱构成的集合。对于 $C \in \mathcal{C}_\Gamma$，取一个提升 $C \subset G/M$。其稳定子 $\Gamma_{\tilde{C}}$由˜ $[\gamma_C]$中的某个元素生成，并且 C可与 $\Gamma_{\tilde{C}}\backslash C$等同。令

$$I(C) := \{\Gamma_{\tilde{C}}\sigma \in \Gamma_{\tilde{C}}\backslash\Gamma : (\sigma\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)M) \cap \tilde{C} \neq \emptyset\}.$$

˜注意，#$I(C)$ 与 C 的选择无关。

对于 $T>0$，令 $\mathcal{C}_\psi(T)$ 表示所有以下极大平坦圆柱的集合，其ψ周长不超过（ T:

$$\mathcal{C}_\psi(T) := \{C \in \mathcal{C}_\Gamma : \ell_\psi(C) \le T\}.$$

我们还将考虑具有相应若尔当投影 λ（γ_C）且位于锥 $\mathfrak{C}$ 中的极大平坦圆柱 C 集合:

$$\mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C}) = \{C \in \mathcal{C}_\psi(T) : \lambda(\gamma_C) \in \mathfrak{C}\}.$$

引理 6.1. *(1)* 对于任意 $T>0$，集合 $\mathcal{C}_\psi(T)$ 是有限的。

(2) For any $C=\Gamma gAM \in \mathcal{C}_\Gamma$, $I(C)$ *is finite.*

证明。由于 Γ的离散性，对于任意 $g_0 \in G$ 和 $\varepsilon>0$，$\mathcal{W}_T$($g_0,\varepsilon,\mathcal{L},M$)中的 Γ 只有有限多个元素。另一方面，

$$\begin{aligned}\#\Gamma\cap\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathcal{L},M) &= \#\{\gamma = ga_w m g^{-1} : g\in\mathcal{B}(g_0,\varepsilon),\ \psi(w)\le T\}\\ &= \#\{\tilde{C} : \tilde{C}\cap\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)M\neq\emptyset,\ \ell_\psi(\Gamma\backslash\Gamma\tilde{C})<T\}\\ &= \sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T)} \#I(C).\end{aligned}$$

由此，(2) 立即得出，并且我们看到

$$\#\{C\in\mathcal{C}_\psi(T) : C\cap\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon)\neq\emptyset\}<\infty.$$

于是，(1) 利用每个极大平坦圆柱都与嵌入的紧集 $\mathcal{X}_\psi \subset\Omega$（小节 4.2）相交这一事实，即可得到。■

将 V_C 表示为由 A 上的哈尔测度诱导的 C 上的测度。令 Cl(M) 表示 M 上连续实值类函数的集合，并令 $[M]$ 表示 M 中共轭类的集合。对于每个 $T>0$，我们定义 $\Gamma\backslash G/M\times[M]$ 上的一个 Radon 测度 $\mu_{\mathfrak{C},\,T}$，如下所示。对于 $T>0$、$f\in$C$_c$($\Gamma\backslash G/M$) 和 $\varphi\in$ Cl(M)，令

$$\mu_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi) := \sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C})} V_C(f)\varphi(h_C),$$

$$\mu_T(f\otimes\varphi) := \mu_{\mathcal{L},T}(f\otimes\varphi) = \sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T)} V_C(f)\varphi(h_C).$$

我们记录 [MMO14第5]节中的若干经过适当调整的引理。引理6.2 和引理 6.3 将$\mu_{\mathfrak{C},\,T}$测度与 $\mathcal{B}(g_0,\ \varepsilon)\otimes$ [Θ]中元素的数量联系起来。 $\Gamma\cap\mathcal{W}_T(g_0,\ \varepsilon,\ \mathfrak{C},$ Θ)证明与 [MMO14], 中的证明类似，但为求完整起见，我们在此给出证明。

引理 6.2。

(1) 对于任意 $C\in\mathcal{C}_\Gamma$，我们有

$$V_C(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon)) = b_{\mathfrak{r}}(\varepsilon)\cdot\#I(C).$$

(2) 对于任意 $T > 0$ 和，我们有

$$\mu_{\mathfrak{C},T}(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon)\otimes[\Theta]) = b_{\mathfrak{r}}(\varepsilon)\cdot\sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C})}\#I(C)\cdot 1_{[\Theta]}(h_C).$$

证明。根据 $\mu_{\mathfrak{C},T}$ 的定义，(2) 可由 (1)推出。令$C = \Gamma gAM$，并选取 $C = gAM$。于是我们有

$$\begin{aligned} V_C(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon)) &= \int_{\mathfrak{a}\ \bmod \lambda(\gamma_C)} 1_{\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon)}(\Gamma g\exp(w)M)\ dw \\ &= \sum_{[\sigma]\in\Gamma_{\tilde{C}}\backslash\Gamma}\int_{\mathfrak{a}\ \bmod \lambda(\gamma_C)} 1_{[\sigma]\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)}(g\exp(w)M)\ dw \\ &= b_{\mathfrak{r}}(\varepsilon)\cdot\#I(C), \end{aligned}$$

其中 dw 表示 $\mathfrak{a}$上的勒贝格测度，积分取遍 $\mathfrak{a}$ 上的一个基本区域，该区域对应于 $\mathbb{Z}$作用，其由 $\lambda(\gamma_C)$ 平移给出。最后一个等式用到了引理 2.6(1)。 ■

回顾一下， Γ_{prim} 表示 Γ的本原元素集合。

引理 6.3。对于所有充分大的 T，我们有

$$\mu_{\mathfrak{C},T}(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon)\otimes[\Theta]) = b_{\mathfrak{r}}(\varepsilon)\cdot\#(\Gamma_{\mathrm{prim}}\cap\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)).$$

证明。令 $C = \Gamma gAM \in \mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C})$ 并且不失一般性，假设˜满足 $C = gAM$。由引理 6.2(1)，只需证明

$$\#I(C)\cdot 1_{[\Theta]}(h_C) = \#([\gamma_C]\cap\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)). \tag{6.4}$$

若 $h_C \notin [\Theta]$，则 (6.4) 显然成立。我们假设 $h_C \in [\Theta]$。若 $\Gamma_{\tilde{C}}\sigma \in I(C)$，则 $\sigma^{-1}g \in \mathcal{B}(g_0,\varepsilon)AM$ 且

$$\sigma^{-1}\gamma_{C,g}\sigma = \sigma^{-1}g\exp(\lambda(\gamma_C))m_{C,g}g^{-1}\sigma \in [\gamma_C]\cap\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta).$$

反过来，若 $\sigma \in \Gamma$ 使得 $\sigma^{-1}\gamma_{C,g}\sigma \in \mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)$，则有$\gamma_{C,g} = \sigma g' am(g')^{-1}\sigma^{-1}$ 其中 $g' \in \mathcal{B}(g_0,\varepsilon)$ 且 $am \in \mathfrak{C}_T\Theta$，但另一方面，$\gamma_{C,g} = g\exp(\lambda(\gamma_C))m_{C,g}g^{-1}$，因此 $\sigma g' \in gAM$，从而 $\sigma\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)\cap gAM \neq \emptyset$，也就是说，$\Gamma_{\tilde{C}}\sigma \in I(C)$。

$$\sigma g' \in \sigma\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)\cap gAM.$$

注意到映射 $\Gamma_{\tilde{C}}\sigma \in \Gamma_{\tilde{C}}\backslash\Gamma \mapsto \sigma^{-1}\gamma_{C,g}\sigma \in [\gamma_C]$ 是双射，因为 $\gamma_{C,g}$ 在 Γ 中的中心化子是 $\langle\gamma_{C,g}\rangle = \Gamma_{\tilde{C}}$，因此我们给出了 $I(C)$ 与 $[\gamma_C]\cap\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)$ 之间的一个双射。■

在下一个引理中，我们使用正则方向的有效闭合引理（引理 2.7）来建立 $\Gamma\cap\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)$ 与 $\Gamma\cap\mathcal{V}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)$之间的关系。

引理 6.5。存在仅依赖于 Γ 和 ψ的 $T_1 > 0$，使得对于所有充分大的 T，我们都有

$$\Gamma\cap\left(\mathcal{V}_{T-O(\varepsilon)}(g_0,\varepsilon(1-O(e^{-T})),\check{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)},\check{\Theta}_{O(\varepsilon)})\setminus\mathcal{V}_{T_1}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\right) \subset \Gamma\cap\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta),$$

其中 $\check{\Theta}_\varepsilon := \bigcap_{g_1,g_2\in G_\varepsilon} g_1\Theta g_2$ 且 $\check{\mathfrak{C}}_\varepsilon$ 是任意一个包含 $\mathbb{R}v$ 的锥，使得 $\check{\mathfrak{C}}_\varepsilon \setminus (\check{\mathfrak{C}}_\varepsilon)_{T_1}$ 的 ε-邻域包含于 $\mathfrak{C}$ 中。

证明。固定 $T_1 > 0$ 使得如果 $w \in \mathcal{L}$ 且 $\psi(w) \geq T_1$，那么 最小值$_{\alpha\in\Phi^+}\alpha(w) \geq T_0$，其中 T_0 如引理 2.7中所述。假设

$$\gamma \in \Gamma \cap \left(\mathcal{V}_{T-O(\varepsilon)}(g_0,\varepsilon(1-O(e^{-T})),\check{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)},\check{\Theta}_{O(\varepsilon)}) \setminus \mathcal{V}_{T_1}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\right).$$

那么 $\gamma = g_1\exp(w)mg_2$，其中 $g_1,g_2 \in \mathcal{B}(g_0,\varepsilon(1-O(e^{-T}))$，$w \in \check{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)}$满足 $T_1 < \psi(w) \leq T - O(\varepsilon)$，且 $m \in \check{\Theta}_{O(\varepsilon)}$。由引理 2.7 可知，对于某个 $g \in \mathcal{B}(g_0,\varepsilon)$，有$\gamma = g\exp(w')m'g^{-1}$，其中 $w' \sim_{O(\varepsilon)} w$ 且 $m \sim_{O(\varepsilon)} m'$。由此可得 $w \in \mathfrak{C}$，$\psi(w') \leq T$且 $m' \in \Theta$，因此 $\gamma \in \Gamma \cap \mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)$。■

令 m_Γ 表示 M_Γ 上的 Haar 概率测度。下述引理给出了 $\#\Gamma_{\mathrm{prim}} \cap \mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)$ 的下界。

引理 6.6。假设 $m_\Gamma(\Theta) > 0$ 且 $m_\Gamma(\partial\Theta) = 0$。那么，对所有充分大的 T，有

$$\#\Gamma \cap (\mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\Theta) \setminus \mathcal{W}_{2T/3}(g_0,\varepsilon,\Theta)) \leq \#\Gamma_{\mathrm{prim}} \cap \mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\Theta).$$

证明。令 $\Gamma_{\mathrm{prim}^k} = \{\sigma^k : \sigma \in \Gamma_{\mathrm{prim}}\}$。我们注意到

$$\begin{aligned}
&\#\Gamma_{\mathrm{prim}} \cap \mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\\
&\quad = \#\left(\Gamma \cap \mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\right) - \#\left(\bigcup_{k\geq 2}\Gamma_{\mathrm{prim}^k} \cap \mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\right)\\
&\quad \geq \#\left(\Gamma \cap \mathcal{W}_T(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta)\right) - \#\left(\bigcup_{k\geq 2}\Gamma \cap \mathcal{W}_{T/k}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\sqrt[k]{\Theta})\right),
\end{aligned}$$

其中 $\sqrt[k]{\Theta} := \{m \in M : m^k \in \Theta\}$。只需证明，对于所有充分大的 T，有

$$\#\left(\bigcup_{k\geq 2}\Gamma \cap \mathcal{W}_{T/k}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\sqrt[k]{\Theta})\right) \leq \#\Gamma \cap \mathcal{W}_{2T/3}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\Theta). \tag{6.7}$$

由于 $\mathcal{W}_{T/k}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\sqrt[k]{\Theta}) \subset \mathcal{V}_{T/k}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\sqrt[k]{\Theta})$ 以及 $\Gamma \cap \mathcal{W}_{T/k}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\sqrt[k]{\Theta})$ 在 T/k 充分小时为空，利用命题 5.24，可得

$$\#\left(\bigcup_{k\geq 2}\Gamma \cap \mathcal{W}_{T/k}(g_0,\varepsilon,\mathfrak{C},\sqrt[k]{\Theta})\right) = O(Te^{T/2}). \tag{6.8}$$

另一方面，利用引理 6.5、命题5.24 以及假设 $m_\Gamma(\Theta) > 0$，我们得到

$$\#\Gamma \cap \mathcal{W}_{2T/3}(g_0,\varepsilon,\Theta) \geq O(e^{2T/3}). \tag{6.9}$$

不等式（6.7）现在由（6.8）和（6.9）得出。■

引理6.3、6.5和6.6推出以下引理。

引理 6.10（比较引理）。假设 $m_\Gamma(\Theta) > 0$ 且 $m_\Gamma(\partial\Theta) = 0$。对于所有充分大的 T，我们有

$$b_{\mathsf{r}}(\varepsilon) \cdot \#\Gamma \cap \left(\mathcal{V}_{T-O(\varepsilon)}(g_0, \varepsilon(1-O(e^{-T})), \check{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)}, \check{\Theta}_{O(\varepsilon)}) \setminus \mathcal{V}_{2T/3}(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)\right) \leq \mu_{\mathfrak{C},T}(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta) \leq b_{\mathsf{r}}(\varepsilon) \cdot \#\Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta).$$

证明。上界直接由引理 6.3 以及平凡包含关系 $\Gamma \cap \mathcal{W}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta) \subset \Gamma \cap \mathcal{V}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)$得出。下界则由引理 6.3、引理 6.6以及引理 6.5得出：

$$\begin{aligned}
&\mu_{\mathfrak{C},T}(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta) \\
&= b_{\mathsf{r}}(\varepsilon) \#(\Gamma_{\mathrm{prim}} \cap \mathcal{W}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)) \\
&\geq b_{\mathsf{r}}(\varepsilon) \#\Gamma \cap (\mathcal{W}_T(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta) \setminus \mathcal{W}_{2T/3}(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)) \\
&\geq b_{\mathsf{r}}(\varepsilon) \#\Gamma \cap \left(\mathcal{V}_{T-O(\varepsilon)}(g_0, \varepsilon(1-O(e^{-T})), \check{\mathfrak{C}}_{O(\varepsilon)}, \check{\Theta}_{O(\varepsilon)}) \setminus \mathcal{V}_{2T/3}(g_0, \varepsilon, \mathfrak{C}, \Theta)\right).
\end{aligned}$$

■

结合命题 5.24 和引理 6.10，我们得到如下渐近式：$\mu_{\mathfrak{C},T}(\mathcal{B}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta)$。

命题 6.11。对于所有 $g_0 \in \mathrm{supp}\mathsf{m}\psi$，对于所有满足 $\int_\Theta dm_\Gamma > 0$ 和 $\int_{\partial\Theta} dm = 0$ 的共轭不变博雷尔子集 $\Theta \subset M_\Gamma$，以及所有充分小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\mu_{\mathfrak{C},T}(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta) = \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^T \left(\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta)(1+O(\varepsilon)) + o_T(1)\right).$$

证明。将命题5.24代入引理6.10可得

$$\mu_{\mathfrak{C},T}(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta) \leq \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^T \left(\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta)(1+O(\varepsilon)) + o_T(1)\right)$$

and

$$\begin{aligned}
&\mu_{\mathfrak{C},T}(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta) \\
&\geq \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^{T-O(\varepsilon)} \\
&\qquad \cdot \left(\frac{b_{\mathsf{r}}(\varepsilon)\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(g_0, \varepsilon(1-O(e^{-T}))) \otimes \check{\Theta}_{O(\varepsilon)})}{b_{\mathsf{r}}(\varepsilon(1-O(e^{-T})))}(1+O(\varepsilon)) + o_T(1)\right) \\
&\qquad - \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^{2T/3} \left(\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta)(1+O(\varepsilon)) + o_T(1)\right) \\
&= \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} e^T \left(\mathsf{m}_\psi(\tilde{\mathcal{B}}(g_0,\varepsilon) \otimes \Theta)(1+O(\varepsilon)) + o_T(1)\right).
\end{aligned}$$

■

6.2. **主要结果的证明。** 现在我们可以证明主要的联合等分布定理及其推论了。我们注意到，定理1.3和推论1.4 是在 $\mathfrak{C} = \mathcal{L}$时以下陈述的特殊情形。

定理 6.12 (联合等分布)。 对于任意 $f \in C_c(\Gamma\backslash G/M)$、 $\varphi \in \mathrm{Cl}(M)$ 以及满足 $\mathsf{v} \in$ 内部 $\mathfrak{C}$的锥 $\mathfrak{C} \subset \mathcal{L}$，我们有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mu_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi)}{e^T} = \frac{\mathsf{m}_\psi(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{M_\Gamma} \varphi\, dm_\Gamma.$$

证明。 若 $\operatorname{supp}\varphi \cap M_\Gamma = \emptyset$，则该定理显然。我们先证明当 $\varphi = \mathbb{1}_\Theta$ 时的情形，其中 $\Theta \subset M_\Gamma$ 是共轭不变的博雷尔子集，且$\int_\Theta dm_\Gamma > 0$ 和 $\int_{\partial\Theta} dm = 0$。利用单位分解，不失一般性，我们可以假设˜，且 f 的支集包含于 $\mathcal{B}(g_0,\varepsilon)$，其中 $g_0 \in$supp m_ψ ，并且存在一个如命题 5.24中的 $\varepsilon > 0$ 。然后，我们可以用形如 $\mathcal{B}(h,\rho)$ 的盒子˜ ˜上的示性函数的线性组合任意逼近 f，其中 $h \in \mathcal{B}(g_0,\varepsilon)$，且 $\rho > 0$ 任意小。接着，对每个$\mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{B}}(h,\rho)} \otimes \mathbb{1}_\Theta$应用命题 6.11 ，得到

$$\begin{aligned}(1-O(\rho))\frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\mathsf{m}_\psi(f\otimes\mathbb{1}_\Theta) &\le \liminf_T e^{-T}\mu_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\mathbb{1}_\Theta)\\ &\le \limsup_T e^{-T}\mu_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\mathbb{1}_\Theta)\\ &\le (1+O(\rho))\frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\mathsf{m}_\psi(f\otimes\mathbb{1}_\Theta)\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_T e^{-T}\mu_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\mathbb{1}_\Theta) &= \frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\mathsf{m}_\psi(f\otimes\mathbb{1}_\Theta)\\ &= \frac{\mathsf{m}_\psi(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{M_\Gamma}\mathbb{1}_\Theta\, dm_\Gamma.\end{aligned}$$

将 M 识别为其最大环面的李代数模去相对于该最大环面的 Weyl群后，可以将类似的逼近论证用于一般的 $\varphi \in \mathsf{Cl}(M)$。■

对于每个 $T > 0$，我们以类似于 $\mu_{\mathfrak{C},T}$ 的方式定义 $\Gamma\backslash G/M \times [M]$ 上的 Radon 测度 $\eta_{\mathfrak{C},T}$，但将极大平坦圆柱上的哈尔测度按其 ψ-周长进行归一化。对于 $T > 0$, $f \in \mathsf{C_c}(\Gamma\backslash G/M)$ 和$\varphi \in \mathsf{Cl}(M)$，令

$$\eta_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi) := \sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C})} \frac{V_C(f)}{\ell_\psi(C)}\varphi(h_C).$$

推论 6.13. 对于任意 $f \in C_c(\Gamma\backslash G/M)$、 $\varphi \in \mathrm{Cl}(M)$ 以及满足 $\mathsf{v} \in \operatorname{int}\mathfrak{C}$ 的锥 $\mathfrak{C} \subset \mathcal{L}$，我们有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\eta_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi)}{e^T/T} = \frac{\mathsf{m}_\psi(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{M_\Gamma}\varphi\, dm_\Gamma.$$

证明. 我们注意到 $T\eta_{\mathfrak{C},T} \geq \mu_{\mathfrak{C},T}$，并且对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&Te^{-T}\eta_{\mathfrak{C},T}(f \otimes \varphi) \\
&= Te^{-T}\left(\sum_{\mathcal{C}_\psi((1-\varepsilon)T,\mathfrak{C})} \frac{V_C(f)}{\ell_\psi(C)}\varphi(h_C) + \sum_{\mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C})\setminus\mathcal{C}_\psi((1-\varepsilon)T,\mathfrak{C})} \frac{V_C(f)}{\ell_\psi(C)}\varphi(h_C)\right) \\
&\leq Te^{-T}\left(O\left(\sum_{\mathcal{C}_\psi((1-\varepsilon)T,\mathfrak{C})} V_C(f)\varphi(h_C)\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{\mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C})\setminus\mathcal{C}_\psi((1-\varepsilon)T,\mathfrak{C})} \frac{V_C(f)}{(1-\varepsilon)T}\varphi(h_C)\right) \\
&= Te^{-T}\Big(O(\mu_{\mathfrak{C},(1-\varepsilon)T}(f \otimes \varphi)) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{(1-\varepsilon)T}\left(\mu_{\mathfrak{C},T}(f \otimes \varphi) - \mu_{\mathfrak{C},(1-\varepsilon)T}(f \otimes \varphi)\right)\Big) \\
&= O(Te^{-\varepsilon T}) + \frac{1}{1-\varepsilon}e^{-T}\mu_{\mathfrak{C},T}(f \otimes \varphi).
\end{aligned}$$

应用定理 6.12 且 $\varepsilon > 0$ 任意，即完成证明。 ∎

推论 6.14（全纯单值的等分布）。 对于任意 $\varphi \in \mathrm{Cl}(M)$ 和锥 $\mathfrak{C} \subset \mathcal{L}$ 满足 $\mathrm{v} \in \operatorname{int}\mathfrak{C}$，我们有

$$\sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C})} \varphi(h_C) \sim \frac{e^T}{T}\int_{M_\Gamma} \varphi\, dm_\Gamma \quad as\ T \to \infty.$$

证明。 回忆小节 4.2 中的结论：$\Omega \cong \mathcal{X}_\psi \times \ker\psi$, $d\mathrm{m}_\psi\big|_\Omega = dm_{\mathcal{X}_\psi}\, du$以及我们使用的勒贝格测度满足 $dw = dt\, du$，其中 $w = t\mathrm{v} + u$。选取 $f \in \mathrm{C_c}(\Omega)$，使得 $f = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_\psi} \otimes b$，其中 $b \in \mathrm{C_c}(\ker\psi)$ 且$\int_{\ker\psi} b(u)\, du = 1$。则 $\mathrm{m}_\psi(f) = |m_{\mathcal{X}_\psi}|$，且对每个 $C \in \mathcal{C}_\Gamma$,

$$\begin{aligned}
V_C(f) &= \int_{\mathfrak{a} \mod \lambda(\gamma_C)} f(\Gamma g a_w M)\, dw \\
&= \int_{\ker\psi}\int_0^{\ell_\psi(C)} b(u)\, dt\, du = \ell_\psi(C),
\end{aligned}$$

因为对于某个 $u \in \ker\psi$，$\lambda(\gamma_C) = \ell_\psi(C)\mathrm{v} + u$。

应用推论 6.13 于这一选择 f，我们得到

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{e^T/T} \sum_{C\in\mathcal{C}_\psi(T,\mathfrak{C})} \varphi(h_C) = \int_{M_\Gamma} \varphi\, dm_\Gamma.$$

∎

回忆一下，引理 4.18 给出了极大平坦圆柱与平移流 Φ 在 $\mathcal{X}_\psi$上的周期轨道之间的双射。令

$$\mathcal{G}_{\mathcal{X}_\psi}(T) := \{\Phi\text{-periodic orbits of length at most } T\}.$$

对于 $C \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}_\psi}(T)$，用 $\mathcal{L}_C$ 表示 C 上的长度测度，并为 C 关联相应极大平坦圆柱的 ψ-周长 $\ell_\psi(C)$ 和 holonomy h_C。holonomy 也与 $\mathcal{X}_\psi$ 中的周期轨道联合等分布。

推论 6.15（$\mathcal{X}_\psi$ 中的联合等分布）。对于任意 $f \in C_c(\mathcal{X}_\psi)$ 和$\varphi \in \mathrm{Cl}(M)$，我们有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{e^T} \sum_{C\in\mathcal{G}_{\mathcal{X}_\psi}(T)} \mathcal{L}_C(f)\varphi(h_C) = \frac{m_{\mathcal{X}_\psi}(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \int_{M_\Gamma} \varphi \, dm;$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{e^T/T} \sum_{C\in\mathcal{G}_{\mathcal{X}_\psi}(T)} \frac{\mathcal{L}_C(f)}{\ell_\psi(C)}\varphi(h_C) = \frac{m_{\mathcal{X}_\psi}(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \int_{M_\Gamma} \varphi \, dm;$$

证明。将定理6.12 应用于函数 $f \otimes b$，其中 $b \in C_c(\ker \psi)$，且$\int_{\ker\psi} b(u)\, du = 1$。■

7. 关于类范数排序的联合等分布

设 $\mathsf{N} : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ 除原点外二阶连续可微、凸、一次齐次，并且在 $\mathcal{L}\backslash\{0\}$上为正。例如，当 $1 \le p < \infty$时，$\mathfrak{a}$ 上的任意 L^p-范数都具有这些性质。本节中，我们对前几节中的论证稍作修改，以证明关于由 N 确定的 $\mathcal{C}_\Gamma$ 上的排序的联合等分布：

$$\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T) := \{C \in \mathcal{C}_\Gamma : \mathsf{N}(\lambda(\gamma_C)) \le T\}.$$

我们将 N-临界指数定义为

$$\delta_{\mathsf{N}} := \max_{\mathsf{N}(w)=1} \psi_\Gamma(w). \tag{7.1}$$

由 N 的凸性和 ψ_Γ的严格凹性可知，存在唯一的

$$\mathsf{v} \in \operatorname{int} \mathcal{L}$$

使得 (7.1) 中的最大值在 $w = \delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}$ 处取得。注意，当N 是 $\mathfrak{a}$上的欧几里得范数时，v 就是ψ_Γ的最大增长方向。我们还记 ψ 为满足以下条件的切形式

$$\psi \text{ is tangent to } \psi_\Gamma \text{ at } \mathsf{v}.$$

注意到 $\mathsf{N}(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}) = 1 = \frac{1}{\delta_{\mathsf{N}}}\psi_\Gamma(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v})$，因此由 N 的凸性可得 $\frac{1}{\delta_{\mathsf{N}}}\psi \le \mathsf{N}$，且等号沿 v 方向成立。特别地，N 沿 v 方向的微分为 $\frac{1}{\delta_{\mathsf{N}}}\psi$。固定一个锥

$$\mathfrak{C} \subset \mathcal{L} \text{ with } \mathsf{v} \in \operatorname{int} \mathfrak{C}. \tag{7.2}$$

定义

$$\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T,\mathfrak{C}) := \{C \in \mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T) : \lambda(\gamma_C) \in \mathfrak{C}\}.$$

然后我们定义测度 $\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},\,T}$ 和 $\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},\,T}$ 于 $\Gamma\backslash G/M \times [M]$ 上如下。对于 $T>0$，$f \in \mathsf{C_c}(\Gamma\backslash G/M)$，$\varphi \in \mathsf{Cl}(M)$，以及 $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{a}^+$，令

$$\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi) := \sum_{C\in\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T,\mathfrak{C})} V_C(f)\varphi(h_C);$$

$$\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi) := \sum_{C\in\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T,\mathfrak{C})} \frac{V_C(f)}{\ell_\psi(C)}\varphi(h_C).$$

请注意，对于 $\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},\,T}$，我们仍使用 ψ 周长进行归一化，换言之，使用 $\mathcal{X}_\psi$ 中周期轨道的长度，因为这有助于从联合等分布推导出全纯单值的等分布。现在我们陈述关于 N 的联合等分布定理。

定理 7.3 （关于 N 的联合等分布。）存在一个常数 $c_{\mathsf{N}}>0$，使得对于任意 $f\in C_c$（$\Gamma\backslash G/M$）、$\varphi\in\mathrm{Cl}(M)$，以及任意满足 $\mathsf{v}\in\operatorname{int}\mathfrak{C}$ 的锥 $\mathfrak{C}\subset\mathcal{L}$，我们有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi)}{e^{\delta_{\mathsf{N}}T}} = c_{\mathsf{N}}\frac{\mathsf{m}_\psi(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{M_\Gamma}\varphi\,dm_\Gamma; \tag{7.4}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}T(f\otimes\varphi)}{e^{\delta_{\mathsf{N}}T}/\delta_{\mathsf{N}}T} = c_{\mathsf{N}}\frac{\mathsf{m}_\psi(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{M_\Gamma}\varphi\,dm_\Gamma. \tag{7.5}$$

常数 c_{N} 由以下公式给出

$$c_{\mathsf{N}} := \frac{\kappa_{\mathsf{v}}}{[M:M_\Gamma]}\int_{\ker\psi} e^{-I(u)-\frac{\delta_{\mathsf{N}}^2}{2}u^\top(\mathrm{Hess}(\mathsf{N})(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}))u}\,du \le 1,$$

其中，$\mathrm{Hess}(\mathsf{N})$ 表示N的海森矩阵，I 和 κ_{v} 如定理4.11中所述，而 du 如(4.9)中所述。

注记 7.6. 如果类范数函数 N 实际上是由内积诱导的范数，那么 $u^\top(\mathrm{Hess}(\mathsf{N})(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}))\,u=\mathsf{N}(u)^2$.

推论 7.7 （关于 N 的全纯单值等分布）。对于任意$\varphi\in\mathsf{Cl}(M)$ 以及锥 $\mathfrak{C}\subset\mathcal{L}$ 满足 $\mathsf{v}\in\operatorname{int}\mathfrak{C}$，有

$$\sum_{C\in\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T,\mathfrak{C})}\varphi(h_C)\sim c_{\mathsf{N}}\frac{e^{\delta_{\mathsf{N}}T}}{\delta_{\mathsf{N}}T}\int_{M_\Gamma}\varphi\,dm_\Gamma \quad as\ T\to\infty.$$

推论 7.8. 对于任意满足 $\mathsf{v}\in$ 内部$\mathfrak{C}$ 的锥 $\mathfrak{C}\subset\mathcal{L}$，当 $T\to\infty$ 时，我们有，

$$\#\{[\gamma]\in[\Gamma_{\mathrm{prim}}] : \mathsf{N}(\lambda(\gamma))\le T,\ \lambda(\gamma)\in\mathfrak{C}\}\sim c_{\mathsf{N}}\frac{e^{\delta_{\mathsf{N}}T}}{\delta_{\mathsf{N}}T}.$$

第5 节和6 节中的论证很容易适用于当前情形，唯一需要关注的是替换引理5.17 ，以及由$\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}$的渐近式推导出$\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}$ 的渐近式。

Let

$$\mathfrak{C}_T^{\mathsf{N}} := \{\exp(w) : w \in \mathfrak{C}, \mathsf{N}(w) \le T\}.$$

以下引理是对引理5.17中第一条陈述的恰当替代。

引理 7.9. 我们有

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\delta_{\mathsf{N}} T} \int_{a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathfrak{C}_T^{\mathsf{N}}} e^t e^{-I(u)}\, dt\, du = \int_{\ker\psi} e^{-I(u)-\frac{\delta_{\mathsf{N}}^2}{2}u^\top(\mathrm{Hess}(\mathsf{N})(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}))u}\, du.$$

证明。 对于 $u \in \ker\psi$ 和 $T > 0$, 令

$$R_T(u) = \{t > 0 : a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u} \in \mathfrak{C}_T^{\mathsf{N}}\},$$

使得我们有

$$e^{-\delta_{\mathsf{N}} T} \int_{a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathfrak{C}_T^{\mathsf{N}}} e^t e^{-I(u)}\, dt\, du = \int_{\ker\psi} e^{-I(u)} e^{-\delta_{\mathsf{N}} T} \int_{R_T(u)} e^t\, dt\, du.$$

利用 N 在 $\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}$ 处的二阶泰勒近似，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathsf{N}(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u)\\
&= \frac{t}{\delta_{\mathsf{N}}}\mathsf{N}\left(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}+\frac{\delta_{\mathsf{N}}}{\sqrt{t}}u\right)\\
&= \frac{t}{\delta_{\mathsf{N}}}\left(1+\frac{1}{\delta_{\mathsf{N}}}\psi\left(\frac{\delta_{\mathsf{N}}}{\sqrt{t}}u\right)+\frac{\delta_{\mathsf{N}}^2}{2t}u^\top\left(\mathrm{Hess}(\mathsf{N})(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v})\right)u+O\left(\frac{\|u\|^3}{t^{3/2}}\right)\right)\\
&= \frac{t}{\delta_{\mathsf{N}}}\left(1+\frac{\delta_{\mathsf{N}}^2}{2t}u^\top\left(\mathrm{Hess}(\mathsf{N})(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v})\right)u+O\left(\frac{\|u\|^3}{t^{3/2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

因此，对于固定的 u,

$$R_T(u) = \left[O(1), \delta_{\mathsf{N}}T - \frac{\delta_{\mathsf{N}}^2}{2}u^\top\left(\mathrm{Hess}(\mathsf{N})(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v})\right)u+O\left(\frac{\|u\|^3}{\sqrt{T}}\right)\right].$$

<escape>注意到$e^{-I(u)}e^{-\delta_{\mathsf{N}}T}\int_{R_T(u)} e^t\, dt \le e^{-I(u)}$ 并根据 I 定理 4.11中的公式， $e^{-I(u)} \in L^1(\ker\psi)$。然后，由勒贝格控制收敛定理，</escape>

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} e^{-\delta_{\mathsf{N}}T}\int_{a_{t\mathsf{v}+\sqrt{t}u}\in\mathfrak{C}_T} e^t e^{-I(u)}\, dt\, du\\
&\quad= \int_{\ker\psi} e^{-I(u)} \lim_{T\to\infty} e^{-\delta_{\mathsf{N}}T}\int_{R_T(u)} e^t\, dt\, du\\
&\quad= \int_{\ker\psi} e^{-I(u)} \lim_{T\to\infty} e^{-\delta_{\mathsf{N}}T}\left(e^{\delta_{\mathsf{N}}T-\frac{\delta_{\mathsf{N}}^2}{2}u^\top(\mathrm{Hess}(\mathsf{N})(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}))u+O\left(\frac{\|u\|^3}{\sqrt{T}}\right)}\right) du\\
&\quad= \int_{\ker\psi} e^{-I(u)-\frac{\delta_{\mathsf{N}}^2}{2}u^\top(\mathrm{Hess}(\mathsf{N})(\delta_{\mathsf{N}}\mathsf{v}))u}\, du.
\end{aligned}$$

■

定理的证明 7.3。 将引理 5.17 替换为引理 7.9 后，关于7.4的渐近式$\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},\,T}$ 的其余证明几乎与定理 6.12的证明完全相同。

我们给出 $\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C}}$7.5 的渐近式证明，$_T$。由于在 $\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},\,T}$ 的定义中，极大平坦圆柱 C 上的体积测度是按其 ψ 周长归一化的 $\ell_\psi(C)$，而不是按 $\mathsf{N}(\lambda(\gamma_C))$ 归一化，因此需要格外谨慎。

注意，对于 $C \in \mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T,\mathfrak{C})$，我们有 $\ell_\psi(C) = \psi(\lambda(\gamma_C) \leq \mathsf{N}(\lambda(\gamma_C)) \leq T$ 因此我们有

$$T^{-1}\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T} \leq \eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}. \tag{7.10}$$

接下来，我们给出 $\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},\,T}$ 的一个上界。固定 $\vartheta > 0$，使得对于所有 $w \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$，$^{\psi}(w)\ \mathsf{N}(w) > \vartheta$。固定 $\varepsilon > 0$，并选取一个锥 $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$，使得 $\mathsf{v} \in \mathfrak{int}\,\mathfrak{C}'$，且对于所有 $w \in \mathfrak{C}'$，$^{\psi}(w)\ \delta_{\mathsf{N}}\mathsf{N}(w) > 1-\varepsilon$。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi)\\
&\leq O\left(\sum_{\mathcal{C}_{\mathsf{N}}((1-\varepsilon)T,\mathfrak{C})} V_C(f)\varphi(h_C)\right)\\
&\qquad + \sum_{\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T,\mathfrak{C})\setminus(\mathcal{C}_{\mathsf{N}}(T,\mathfrak{C}')\cup\mathcal{C}_{\mathsf{N}}((1-\varepsilon)T,\mathfrak{C}))} \frac{V_C(f)}{(1-\varepsilon)\vartheta T}\varphi(h_C)\\
&\qquad\qquad + \sum_{\mathcal{C}(T,\mathfrak{C}')-\mathcal{C}((1-\varepsilon)T)} \frac{V_C(f)}{(1-\varepsilon)^2\delta_{\mathsf{N}}T}\varphi(h_C)\\
&= O\left(\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},(1-\varepsilon)T}\right) + \frac{1}{(1-\varepsilon)\vartheta T}\left(\left(\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}-\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C}',T}\right)-\left(\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},(1-\varepsilon)T}-\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C}',(1-\varepsilon)T}\right)\right)\\
&\qquad + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2\delta_{\mathsf{N}}T}\left(\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C}',T}-\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C}',(1-\varepsilon)T}\right).
\end{aligned} \tag{7.11}$$

利用 7.4 中关于 $\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},\,T}$ 在 7.10 和 7.11 中的渐近式，可得

$$c_{\mathsf{N}}\frac{\mathsf{m}_\psi(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{M_\Gamma}\varphi\,dm \leq \lim_{T\to\infty}\frac{\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},T}(f\otimes\varphi)}{e^{\delta_{\mathsf{N}}T}/\delta_{\mathsf{N}}T} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}c_{\mathsf{N}}\frac{\mathsf{m}_\psi(f)}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{M_\Gamma}\varphi\,dm.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，证明至此完成。 ∎

注 7.12. 我们指出，在上述针对给定锥 $\eta^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C},\,T}$（如 $\mathfrak{C}$ 中7.2）证明渐近式时，关键在于：对于任何满足（$\mu^{\mathsf{N}}_{\mathfrak{C}',\,T}$）的更小 $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ （7.2），渐近式都相同。

附录 A. κ_{v} 与 I 之间的恒等式

设 $\Gamma < G$ 是一个扎里斯基稠密 Anosov 子群（定义 4.1）。设$\psi \in \mathfrak{a}^*$ 是一个切形式（3.13），在 ψ_Γ 的某个 v 处与极限锥 $\mathcal{L}$ 的内部 Γ （定义 3.2）。我们取v 使其归一化为

$\psi(\mathsf{v}) = 1$。本附录旨在证明局部混合定理（定理 4.11 或定理 A.2）中出现的常数 κ_{v} 和函数 $I\colon \ker\psi \to \mathbb{R}$ 与 $[M\colon M_\Gamma]$ 之间的以下恒等式，其中 M_Γ 是 Γ （定义3.5）的全纯群。这一恒等式是第 5–7 节确定我们所证明的渐近式中的常数所必需的。

命题 A.1。 使用定理 *4.11* 或定理 *A.2*中的相同记号，我们有

$$\kappa_{\mathsf{v}} \int_{\ker\psi} e^{-I(u)}\, du = [M : M_\Gamma],$$

其中 du 表示 $\ker\psi$ 上的勒贝格测度，如 (4.9)中所示。

事实上，我们将从关于BMS测度 A.1 m的局部混合 m_ψ 以及相应的均匀性陈述中推导出命题。

定理 A.2 （局部混合， [CS23，定理 1。3]）。 存在 $\kappa_{\mathsf{v}} > 0$ 和函数 I: 核 $\psi \to \mathbb{R}$ 由 $I(\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle_* - {}^{\langle\cdot,}\mathsf{v}\langle\,,\,{}^{\rangle^2_*}\mathsf{v}\mathsf{v}\rangle_*$ 定义，其中某个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 定义在 $\mathfrak{a}$ 上，使得对于任意 $u \in$ 核 ψ 以及任意 $\phi_1, \phi_2 \in C_c(\Gamma\backslash G)$，都有

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{r-1}{2}} \int_{\Gamma\backslash G} \phi_1(x\exp(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u))\phi_2(x)\, d\mathsf{m}_\psi(x) = \frac{\kappa_{\mathsf{v}} e^{-I(u)}}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma} \mathsf{m}_\psi|_Z(\phi_1)\cdot \mathsf{m}_\psi|_Z(\phi_2),$$

其中 $\mathsf{r} =$秩(G)， $\mathfrak{Z}_\Gamma$ 表示 A-遍历分量的有限集 m_ψ，且$m_{\mathcal{X}_\psi}$ 与第 *4.2* 小节中的定义相同。

此外，对于所有的 $\phi_1, \phi_2 \in C_c(\Gamma\backslash G)$，存在常数 $D_{\mathsf{v}}(\phi_1,\phi_2)$，它依赖于 ϕ_1 和 ϕ_2，使得对于所有的 $(t,u) \in [0,\infty)\times\ker\psi$，我们有

$$\left| t^{\frac{r-1}{2}} \int_{\Gamma\backslash G} \phi_1(x\exp(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u))\phi_2(x)\, d\mathsf{m}_\psi(x) \right| \le D_{\mathsf{v}}(\phi_1,\phi_2) e^{-2(\|t\mathsf{v}+\sqrt{t}u\|_*\|\mathsf{v}\|_* - \langle t\mathsf{v}+\sqrt{t}u,\mathsf{v}\rangle_*)},$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 表示由 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$诱导的范数。

命题 *A.1* 的证明。 关于本证明中使用的记号，请参阅第 4.2 小节。设 $S\colon \mathcal{X}_\psi \to \Omega$ 是平凡 $\ker\psi$- 向量丛 $\pi_\psi\colon \Omega \to \mathcal{X}_\psi$ 的连续截面。那么存在连续函数$s\colon \Lambda^{(2)}\times\mathbb{R}\to\mathfrak{a}$，使得对于所有 $(x,\ y,\ r) \in \Lambda^{(2)}\times\mathbb{R}$,

$$S(\Gamma(x,y,r)) = \Gamma(x,y,s(x,y,r)) \text{ and } \psi(s(x,y,r)) = r.$$

那么，我们有一个同胚 $\mathcal{X}_\psi \times \ker\psi \cong \Omega$，由下式给出。

$$(\Gamma(x,y,r),u') \mapsto \Gamma(x,y,s(x,y,r)+u').$$

注意，对于 $T>0$ 和 $u \in \ker\psi$，其 $\mathfrak{a}$ 坐标为

$$\Gamma(x,y,s(x,y,r)+u')\exp(t\mathsf{v}+\sqrt{t}u) \in \Gamma\backslash(\Lambda^{(2)}\times\mathfrak{a})$$

给定为

$$s(x,y,r)+u'+t\mathsf{v}+\sqrt{t}u=s(x,y,r+t)+(u'+\sqrt{t}u)-\hat{s}(x,y,r,t),\quad (A.3)$$

其中，$\hat{s}(x,y,r,t):=s(x,y,r+t)-s(x,y,r)-t\mathsf{v}\in\ker\psi$。

固定一个紧支连续函数 $b:\ker\psi\to[0,\infty)$，使得 $\int_{\ker\psi}b(u')\,du'=1$，其中 du' 是 $\ker\psi$ 上的勒贝格测度，满足 $dm_{\mathcal{X}_\psi}\,du'=d\mathsf{m}_\psi|_{\Omega^\circ}$。令 $\phi\in C_c(\tilde{\Omega})$ 为函数 $\mathbb{1}_{X_\psi}\otimes b$ 在 $\mathcal{X}_\psi\times\ker\psi\cong\Omega$ 上的M-不变提升所得到的函数。注意，

$$\mathsf{m}_\psi|_Z(\phi)=\frac{1}{\#\mathfrak{Z}_\Gamma}\mathsf{m}_\psi(\phi)=\frac{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}{[M:M_\Gamma]},\quad (A.4)$$

其中最后一个等式利用了 $\#\mathfrak{Z}_\Gamma=[M:M_\Gamma]$ [LO20a，定理 1。1]。利用定理 A.2 应用于函数 $\phi_1=\phi_2=\phi$ 并利用（A.4），我们有

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{r-1}{2}}\int_{\mathcal{X}_\psi\times\ker\psi}b((u'+\sqrt{t}u)-\hat{s}(x,y,r,t))b(u')\,dm_{\mathcal{X}_\psi}(\Gamma(x,y,r))\,du'$$
$$=\frac{\kappa_{\mathsf{v}}e^{-I(u)}}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\sum_{Z\in\mathfrak{Z}_\Gamma}\left(\mathsf{m}_\psi|_Z(\phi)\right)^2=\frac{\kappa_{\mathsf{v}}e^{-I(u)}|m_{\mathcal{X}_\psi}|}{[M:M_\Gamma]}.\quad (A.5)$$

重新排列并对（A.5）关于 $u\in\ker\psi$ 进行积分，我们得到

$$\kappa_{\mathsf{v}}\int_{\ker\psi}e^{-I(u)}\,du$$
$$=\frac{[M:M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|}\int_{\ker\psi}\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{r-1}{2}}\int_{\ker\psi}\int_{\mathcal{X}_\psi}b((u'+\sqrt{t}u)-\hat{s}(x,y,r,t))$$
$$b(u')\,dm_{\mathcal{X}_\psi}(\Gamma(x,y,r))\,du'\,du\quad (A.6)$$

接下来，我们解释如何将（A.6）中的极限移到积分号外。根据定理 A.2，存在一个常数 $D:=D_{\mathsf{v}}(\phi,\phi)>0$ 使得对于所有 $(t,u)\in[1,\infty)\times\ker\psi$，我们都有

$$t^{\frac{r-1}{2}}\int_{\ker\psi}\int_{\mathcal{X}_\psi}b((u'+\sqrt{t}u)-\hat{s}(x,y,r,t))b(u')\,dm_{\mathcal{X}_\psi}(\Gamma(x,y,r))\,du'\,du$$
$$\le De^{-2(\|t\mathsf{v}+\sqrt{t}u\|_*\|\mathsf{v}\|_*-\langle t\mathsf{v}+\sqrt{t}u,\mathsf{v}\rangle_*)}.\quad (A.7)$$

注意，对于 $t\ge1$，

$$\|t\mathsf{v}+\sqrt{t}u\|_*\|\mathsf{v}\|_*-\langle t\mathsf{v}+\sqrt{t}u,\mathsf{v}\rangle_*=\frac{\|u\|_*^2\|\mathsf{v}\|_*^2-\langle u,\mathsf{v}\rangle_*^2}{\|\mathsf{v}+u/\sqrt{t}\|_*\|\mathsf{v}\|_*+\langle\mathsf{v}+u/\sqrt{t},\mathsf{v}\rangle_*}$$
$$\ge\frac{\|u\|_*^2\|\mathsf{v}\|_*^2-\langle u,\mathsf{v}\rangle_*^2}{2\|\mathsf{v}\|_*^2+(\|u\|_*\|\mathsf{v}\|_*+\langle u,\mathsf{v}\rangle_*)}.\quad (A.8)$$

定义函数 $f:\ker\psi\to[0,\infty)$ 如下：

$$f(u)=\frac{\|u\|_*^2\|\mathsf{v}\|_*^2-\langle u,\mathsf{v}\rangle_*^2}{2\|\mathsf{v}\|_*^2+\|u\|_*\|\mathsf{v}\|_*+\langle u,\mathsf{v}\rangle_*}.$$

结合（A.7）和（A.8），对于所有 $(t,\ u) \in [1,\infty) \times \ker \psi$，我们有

$$t^{\frac{r-1}{2}} \int_{\ker \psi} \int_{\mathcal{X}_\psi} b((u' + \sqrt{t}u) - \hat{s}(x,y,r,t)) b(u')\, dm_{\mathcal{X}_\psi}(\Gamma(x,y,r))\, du'\, du \leq De^{-2f(u)}. \quad \text{(A.9)}$$

此外，我们注意到 $e^{-2f(u)} \in L^1(\ker\ \psi)$，因为对于所有 $u \in \ker \psi \setminus \{0\}$，我们有

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{f(\lambda u)}{\lambda} = \frac{\|u\|_*^2 \|\mathsf{v}\|_*^2 - \langle u, \mathsf{v}\rangle_*^2}{\|u\|_* \|\mathsf{v}\|_* + \langle u, \mathsf{v}\rangle_*} > 0.$$

然后根据（A.9），我们可以在（A.7）中应用勒贝格控制收敛定理，接着进行变量替换 $\tilde{u} = \sqrt{t}u$、应用 Fubini 定理，并使用 $\int_{\ker \psi} b(u')\ du' = 1$ 积分两次，从而得出

$$\begin{aligned}
&\kappa_{\mathsf{v}} \int_{\ker \psi} e^{-I(u)}\, du \\
&= \frac{[M : M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{r-1}{2}} \int_{\ker \psi} \int_{\ker \psi} \int_{\mathcal{X}_\psi} b((u' + \sqrt{t}u) - \hat{s}(x,y,r,t)) \\
&\qquad\qquad b(u')\, dm_{\mathcal{X}_\psi}(\Gamma(x,y,r))\, du'\, du, \\
&= \frac{[M : M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \lim_{t\to+\infty} \int_{\ker \psi} \int_{\mathcal{X}_\psi} \int_{\ker \psi} b((u' + \tilde{u}) - \hat{s}(x,y,r,t)) \\
&\qquad\qquad b(u')\, d\tilde{u}\, dm_{\mathcal{X}_\psi}(\Gamma(x,y,r))\, du' \\
&= \frac{[M : M_\Gamma]}{|m_{\mathcal{X}_\psi}|} \lim_{t\to+\infty} \int_{\ker \psi} \int_{\mathcal{X}_\psi} b(u')\, dm_{\mathcal{X}_\psi}(\Gamma(x,y,r))\, du' \\
&= [M : M_\Gamma].
\end{aligned}$$

■

参考文献

[Alb99] Paul Albuquerque。高秩对称空间中的 Patterson-Sullivan 理论。*Geom. Funct. Anal.*，9 1 1 28，1999 17 （）：–。Ben Yves [97] Benoist。线性群的渐近性质。*Geom. Funct. Anal.*，7 1 1 47，1997 16 （）：–。BQ Yves Benoist 和 Jean-François Quint。射影空间上的随机游走。*Compos. Math.*，[14] 150 9 1579 1606，2014 17 （）：–。Bow a Rufus Bowen。闭测地线的等分布。*Amer. J. Math.*，[72] 94 413 423，1972 7：–。Bow b Rufus Bowen。双曲流的周期轨道。*Amer. J. Math.*，[72] 94 30，1972 17：–。[BCKM22] Harrison Bray、Richard Canary、Lien-Yung Kao 和 Giuseppe Martone。无穷远处的计数、等分布与熵间隙及其在带尖点 Hitchin 表示中的应用。*J. Reine Angew. Math.*，791:1–51，2022。6[BCLS15] Martin Bridgeman、Richard Canary、François Labourie 和 Andres Sam-barino。阿诺索夫表示的压力度量。*Geom. Funct. Anal.*，25(4):1089–1179，2015。21

[Car21] León Carvajales。阿诺索夫子群作用下二次型的增长。Int. Math. Res. Not. IMRN，即将出版，10 2021。预印本，arXiv:2004.05903。6，22[CS22] Michael Chow 和 Pratyush Sarkar。凸余紧局部对称空间中标架流的指数混合。2022。预印本，arXiv:2211.14737。8[CS23] Mikey Chow 和 Pratyush Sarkar。阿诺索夫齐性空间上单参数对角流的局部混合。Int. Math. Res. Not. IMRN，即将出版，2023 2105 11377 10, 11, 22, 23, 51 。arXiv：。。DL [22] Nguyen-Thi Dang 和 Jialun Li。周期平坦环面的等分布与计数。2022 2202 08323 8 。预印本，arXiv：。。ELO Sam Edwards、Minju Lee 和 Hee Oh。阿诺索夫群：局部混合、计数与等分布。Geom. Topol.，即将出版，2020。预印本，arXiv: 2003 14277 19, 20 。。ELO a Sam Edwards、Minju Lee 和 Hee Oh。Kleinian 群的环面计数与自拼接。[22] 2022 2210 10229 39 。预印本，arXiv：。。ELO b [22] Sam Edwards、Minju Lee 和 Hee Oh。阿诺索夫群的共形测度唯一性与局部混合。Michigan Math. J.，72:243–259，2022。[80] GW Ramesh Gangolli 和 Garth Warner。秩一对称空间某些非紧商空间上的 Selberg 型 ζ 函数。Nagoya Math. J., 78 1 44, 1980 7 ：–。GGKW François Guéritaud、Olivier Guichard、Fanny Kassel 和 Anna Wienhard。阿诺索夫表示与真作用。Geom. Topol.，21 584，2017 1 485（）：–。[17] 2, 21 [12] GW Olivier Guichard 和 Anna Wienhard。阿诺索夫表示：不连续作用域及其应用。Invent. Math., 190 2 357 438, 2012 2, 21 （）：–。GR [07] Yves Guivarc'h 和 Albert Raugi。大半群的作用与边界等距扩张上的随机游走。Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 40 2 209 249, 2007 5, 17 （）：–。KLP Michael Kapovich、Bernhard Leeb 和 Joan Porti。阿诺索夫子群：动力学与几何刻画。Eur. J. Math.，3(4):808–898，2017。[17] 2, 21 [22] KO Dongryul Kim 和 Hee Oh。通过自拼接实现 Kleinian 群的刚性。2022 2208 05806 8 。预印本，arXiv：。。KO a Dongryul Kim 和 Hee Oh。通过自拼接实现表示的共形测度刚性。[23] 2023 2302 03539 8 。预印本，arXiv：。。KO b [23] Dongryul Kim 和 Hee Oh。通过自拼接实现 Kleinian 群的测度刚性。2023 2302 03552 8 。预印本，arXiv：。。KO c Dongryul [23] Kim 和 Hee Oh。阿诺索夫子群 Patterson-Sullivan 测度的非集中性质。2023 2304 14911 39 。预印本，arXiv：。。KMO Dongryul M. Kim、Yair N. Minsky 和 Hee Oh。增长指标函数的帐篷性质及其应用。[21] 2021 2112 00877 21 。预印本，arXiv：。。Lab François Labourie。阿诺索夫流、曲面群与射影空间中的曲线。Invent. Math., 165 1 51 114, 2006 2, 9, 21 （）：–。LO a Minju Lee 和 Hee Oh。[06] 阿诺索夫齐性空间上几何测度的遍历分解。Israel J. Math.，即将出版，2020。预印本，arXiv: 2010 11337 22, 52 。。LO b Minju Lee 和 Hee Oh。视界作用的不变测度与阿诺索夫群。Int. Math. Res. Not. IMRN，即将出版，2020。预印本，arXiv: 2008 05296 2, 22 。。[20] LO Minju Lee 和 Hee Oh。阿诺索夫群极限集上的二分性与测度。2022。预印本，arXiv:2203.06794。2，22 [22]

[LPS23] Jialun Li、Wenyu Pan 和 Pratyush Sarkar。几何有限双曲流形上标架流的指数混合。2023年。预印本，arXiv:2302.03798。8[MMO14] Gregory Margulis、Amir Mohammadi 和 Hee Oh。克莱因流形上的闭测地线与全纯单值。Geom. Funct. Anal.，24：1636，2014，1608–（）：5，1，7，8，10，13，14，41。[Mar04] Grigoriy A. Margulis。关于阿诺索夫系统理论的若干方面。Springer 数学专著丛书。Springer-Verlag，柏林，2004年。附有 Richard Sharp 撰写的综述：双曲流的轨道，由 Valentina 7, 13 Vladimirovna Szulikowska 从俄文翻译。[19]

OP Hee Oh 和 Wenyu Pan。阿贝尔覆盖上 horospherical 子群的局部混合与不变测度。Int. Math. Res. Not. IMRN，(19：6088，2019，6036–）：7。[Par05] William Parry。书评：《关于阿诺索夫系统理论的若干方面》，G. A. Margulis 著。Bull. Amer. Math. Soc.，

42 2 257 261, 2005 7 （）：–。PP William

[86]
Parry 和 Mark Pollicott。Axiom A 流的伽罗瓦覆盖的切博塔廖夫定理。Ergodic Theory Dynam. Systems，6(1)：133–148，1986。7[Pat76] Samuel J. Patterson。福克斯群的极限集。Acta Math.，136(3-

4 241 273, 1976 17 ）：–。PS Rafael Potrie 和 Andrés Sambarino。Hitchin 表示的特征值与熵。

[17]
Invent. Math.，

209 3 885 925, 2017 9, 21 （）：–。PR Gopal

[72]
Prasad 和 M. S. Raghunathan。半单群中的嘉当子群与格。Ann. of Math.（

2 96 296 317, 1972 3 ），：–。Qui a Jean-François Quint。

[02]
高秩离散子群的指数发散。Comment. Math. Helv.，

77 3 563 608, 2002 2, 17, 18 （）：–。Qui b

[02]
Jean-François Quint。高秩情形下的帕特森–沙利文测度。Geom. Funct. Anal.，

12 4 776 809, 2002 17, 18 （）：–。Qui Jean-François Quint。Schottky 群的增长指

[03]
标。Ergodic Theory Dynam. Systems，

23 1 249 272, 2003 21

[06]
（）：–。Qui Jean-François Quint。帕特森–沙利文理论概述。2006年。讲义，可见于 https://www.math.u-bordeaux.fr/ jquint/publications/courszurich.pdf。18

[03]
Rob Thomas Roblin。负曲率下的遍历性与等分布。Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)，（

95 +96 2003 7 ）：vi，。Sam a

[14]
Andrés。Sambarino。超凸表示与指数增长。Ergodic Theory Dynam. Systems，

34 3 986 1010, 2014 6, 21 （）：–。Sam b Andrés

[14]
Sambarino。凸表示的定量性质。Comment. Math. Helv.，

89 2 443 488, 2014 6 （）：–。Sam Andrés Sambarino。超凸表示的轨道计数

[15]
问题。Ann. Inst. Fourier (Grenoble)，

65 4 1755 1797, 2015 2, 21 （）：–。SW Peter Sarnak 和

[99]
Masato Wakayama。闭测地线周围 holonomy 的等分布。Duke Math. J.，

100 1 1 57, 1999 7 （）：–。Spa Ralf Jürgen Spatzier。代数系统

[83]
的动力学性质：闭测地线研究。

1983 8 。博士学位论文——华威大

[79]
学，华威。Sul Dennis Sullivan。双曲运动离散群在无穷远处的密度。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.，(

50 171 202, 1979 17 ）：–。Wie Anna

[18]
Wienhard。高阶 Teichmüller 理论导论。载于《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》，第二卷，特邀报告，第1013–1039页。World Sci. Publ.，Hackensack，新泽西州，2018年。[15] 2, 21 Win Dale

Winter。秩一局部对称空间上标架流的混合与测度分类。Israel J. Math.，210(1)：467–507，2015。8

数学系，耶鲁大学，纽黑文，康涅狄格州 06511电子邮件地址:
mikey.chow@yale.edu 数学系，耶鲁大学，纽黑文，康涅狄格州 06511电子邮件地址:
elijah.fromm@yale.edu