arXiv:2305.03600v2 [math.PR] 2 Jun 2023

Rosenblatt 分布的四阶和五阶累积量的精确公式。

Enno Diekema *

摘要

在本文的早期版本 [1] 中，推导了 Rosenblatt 分布的四阶累积量公式。本文采用两种方法推导三阶、四阶和五阶累积量的公式。第一种方法是直接求出所需的积分。第二种方法是 Veillette 和 Taqqu 所用的方法。这是一种反复使用的方法。最后对这两种方法进行讨论。

1 引言

关于 Rosenblatt 分布的介绍，我们遵循 Tudor [3] 和 Veilette 以及 Taqqu[4]。我们需要考虑一个平稳高斯序列 $X_i, i = 1,2,\ldots$，其协方差结构具有如下形式 $E[X_0 X_k] = L(k)\, k^{-d}$ as $k \to \infty$，其中 $0 \le d \le 0.5$，且 $L(k)$ 是无穷远处的缓变函数。利用变换 $Y_i = (X_i)^2 - 1$，可以定义一列归一化和

$$Z_d^n = \frac{\sigma(d)}{n^{1-d}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

这里的 $\sigma(d)$ 是一个归一化常数。它由下式给出：

$$\sigma(d) = \left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d) \right)^{1/2}$$

序列 Z_d^n 在 $n \to \infty$ 时趋于一个方差为 1 的非高斯极限 Z_d。该极限服从一种称为 Rosenblatt 分布的分布。Z_d 的特征函数由一个仅在原点附近收敛的幂级数给出：

$$\varphi(\theta) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(2\, i\, \theta\, \sigma(d)\right)^k \frac{c_k}{k} \right) \tag{1.1}$$

其中

$$c_k = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 |x_1 - x_2|^{-d} |x_2 - x_3|^{-d} \ldots |x_{k-1} - x_k|^{-d} |x_k - x_1|^{-d} dx_1\, dx_2 \ldots dx_k \tag{1.2}$$

当 $d = 0$ 时，Rosenblatt 分布函数是均值为 0、方差为 1 的标准卡方分布。当 $d = 0.5$ 时，该分布是 $N(0,\ 1)$ 高斯分布。

*电子邮箱：e.diekema@gmail.com

根据 (1.1)，Rosenblatt 分布的累积量 $\kappa_k(d)$ 为 $\kappa_1(0) = 0$，且对于 $k \geq 2$

$$\kappa_k(d) = 2^{k-1}(k-1)!\big(\sigma(d)\big)^k c_k = 2^{k-1}(k-1)!\left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d)\right)^{k/2} c_k \tag{1.3}$$

其中 c_k 由（1.2）给出。积分（1.2）的难点在于各个因子的绝对值。在 [4] 中，作者声称无法求得 $k > 3$ 的累积量。他们介绍了一种利用递推方程的方法，从而减少积分的数量。随后，他们对这些积分进行数值近似，进而得到一张累积量表 [5, 表 4]。本文通过两种方法计算积分，推导出 $\kappa_4(d)$ 和 $\kappa_5(d)$ 的公式。第一种方法直接计算所有积分。Veillette 和 Taqqu 提出的第二种方法则递归地计算积分。

Rosenblatt 分布的二阶累积量由 $\kappa_2(d) = 1$ 给出。第 3 节从直接计算 $\kappa_3(d)$ 开始。这个三阶累积量已为人所知，但这里我们采用一种同样用于推导更高阶累积量的方法。第 4 节推导四阶累积量的公式。第 5 节推导五阶累积量的公式。我们将结果与 [5, 表 4]中的结果进行核对。第 6 节介绍 Veillette 和 Taqqu 的方法，并运用该方法精确计算四阶累积量所需的积分。第 7 节则运用该方法推导五阶累积量。第 8 节讨论这两种方法。附录列出了若干针对 ${}_3F_2$ 超几何函数 [6] 的 Thomae 变换。

注 1： 全文中会根据需要交换积分与求和的次序。在所有情况下，都可以通过控制收敛定理证明这种做法是允许的，但由于这些证明与本文内容的展开无关，因此此处略去。

注 2： 简单的积分通常可以在 [2] 中查到。当然，也可以用标准方法手工计算这些积分，但既然用 Mathematica（Wolfram 公司开发的程序）也能求出，何必把事情弄复杂呢?

注 3： 附录 [6] 中列出了所用 Pochhammer符号和伽马函数的性质。我们经常使用性质 $\Gamma(a+k) = \Gamma(a)\,(a)_k$ 其中 $(a)_k$ 是 Pochhammer 符号。

注 4： 推导这些积分时，我们经常使用（在允许的情况下）以下变换

$$\int_0^a f(y)\left(\int_0^y g(x)dx\right)dy = \int_0^a g(x)\left(\int_x^a f(y)dy\right)dx \qquad a > y > x > 0 \tag{1.4}$$

注5： 我们经常使用的另一种变换是代换：$y_5 = y_3\, z_3$、$y_3 = y_2\, z_3$和 $y_2 = y_1\, z_2$。

2 主要结果

本文的主要结果是 Rosenblatt 分布关于参数 d（其中 $0 \leq d \leq 0.5$）的四阶和五阶累积量公式。

$$\kappa_4(d) = \frac{12(1-2d)^2}{(1-d)(3-4d)}\left(2\frac{\Gamma(1-d)\Gamma(2-d)^2}{\Gamma(3-3d)} + \frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-d)^2}{\Gamma(2-2d)^2} + {}_3F_2\left(\begin{matrix}1, d, 2-2d\\ 2-d, 3-2d\end{matrix}; 1\right)\right)$$

$$\kappa_5(d) = 3840\left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d)\right)^{5/2}\frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)}S$$

with

$$\begin{aligned}S = {} & \frac{\Gamma(1-d)^4}{\Gamma(4-4d)} + \frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)\Gamma(2-2d)}\frac{\Gamma(3-3d)}{\Gamma(4-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}d, 1-d, 3-3d\\ 2-d, 4-4d\end{matrix}; 1\right) + \\ & + \frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-2d)}{(1-d)\Gamma(4-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}d, 1-d, 2-2d\\ 2-d, 4-4d\end{matrix}; 1\right) + \frac{\Gamma(1-d)^2}{3(1-d)\Gamma(3-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1, d, 3-3d\\ 3-2d, 4-3d\end{matrix}; 1\right) + \\ & + \frac{2\Gamma(1-d)^2}{3(1-d)^2\Gamma(2-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1, d, 3-3d\\ 2-d, 4-3d\end{matrix}; 1\right) + \frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)\Gamma(3-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1, d, 2-2d\\ 2-d, 3-2d\end{matrix}; 1\right)\end{aligned}$$

3 三阶累积量的直接推导

尽管三阶累积量已知 [4], ，本文仍以直接方式对其进行推导。下一节中四阶和五阶累积量的计算也采用了这一方法。对于三阶累积量，(1.3)给出

$$\kappa_3(d) = 8\left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d)\right)^{3/2} c_3 \qquad 0 \le d \le 0.5 \tag{3.1}$$

对于 c_3 ，由（1.2）可得

$$c_3 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 |x_1-x_2|^{-d}|x_2-x_3|^{-d}|x_3-x_1|^{-d}dx_1\,dx_2\,dx_3 \tag{3.2}$$

根据绝对值函数的定义

$$\begin{aligned}|x| &= x \qquad x > 0\\ |x| &= -x \qquad x < 0\end{aligned}$$

并代入（3.2）得到

$$\begin{aligned}|x_1-x_2| &= x_1-x_2 \qquad x_1 > x_2\\ |x_1-x_2| &= x_2-x_1 \qquad x_2 > x_1\\ |x_2-x_3| &= x_2-x_3 \qquad x_2 > x_3\\ |x_2-x_3| &= x_3-x_2 \qquad x_3 > x_2\\ |x_3-x_1| &= x_3-x_1 \qquad x_3 > x_1\\ |x_3-x_1| &= x_1-x_3 \qquad x_1 > x_3\end{aligned}$$

(3.2) 中的每个因子都有两种可能性，共有三个因子，因此将其应用于积分区域可得到八种可能的条件：

$$
\begin{array}{lll}
x_1 > x_2 & x_2 > x_3 & x_3 > x_1 \\
x_1 > x_2 & x_2 > x_3 & x_1 > x_3 \qquad 0 < x_3 < x_2 < x_1 < 1 \\
x_1 > x_2 & x_3 > x_2 & x_3 > x_1 \qquad 0 < x_2 < x_1 < x_3 < 1 \\
x_1 > x_2 & x_3 > x_2 & x_1 > x_3 \qquad 0 < x_2 < x_3 < x_1 < 1 \\
x_2 > x_1 & x_2 > x_3 & x_3 > x_1 \qquad 0 < x_1 < x_3 < x_2 < 1 \\
x_2 > x_1 & x_2 > x_3 & x_1 > x_3 \qquad 0 < x_3 < x_1 < x_2 < 1 \\
x_2 > x_1 & x_3 > x_2 & x_3 > x_1 \qquad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1 \\
x_2 > x_1 & x_3 > x_2 & x_1 > x_3
\end{array}
$$

第一个条件和最后一个条件会导致矛盾。因此，还剩下六个区域，如图1所示。这些区域共同构成一个立方区域。

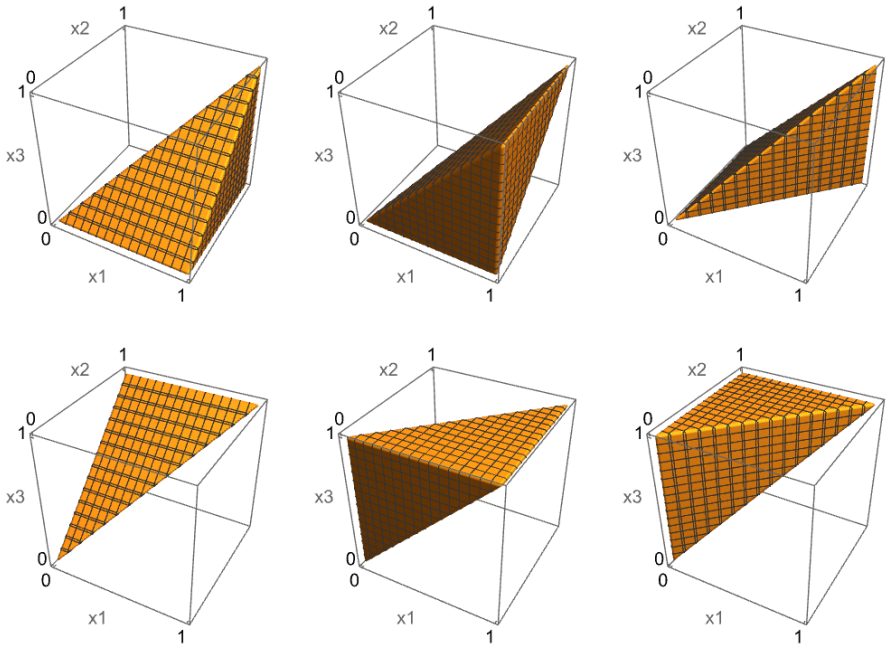


图1： c_3的六个区域

还剩下六个积分

$$
\begin{aligned}
c_3(1) &= \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} (x_1 - x_2)^{-d} (x_2 - x_3)^{-d} (x_1 - x_3)^{-d} dx_3\, dx_2\, dx_1 \\
c_3(2) &= \int_0^1 \int_0^{x_3} \int_0^{x_1} (x_3 - x_1)^{-d} (x_1 - x_2)^{-d} (x_3 - x_2)^{-d} dx_2\, dx_1\, dx_3 \\
c_3(3) &= \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_1 - x_3)^{-d} (x_1 - x_2)^{-d} (x_3 - x_2)^{-d} dx_2\, dx_3\, dx_1 \\
c_3(4) &= \int_0^1 \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_2 - x_3)^{-d} (x_2 - x_1)^{-d} (x_3 - x_1)^{-d} dx_1\, dx_3\, dx_2
\end{aligned}
$$

$$c_3(5) = \int_0^1 \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} (x_2 - x_1)^{-d}(x_2 - x_3)^{-d}(x_1 - x_3)^{-d} dx_3\, dx_1\, dx_2$$
$$c_3(6) = \int_0^1 \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} (x_3 - x_2)^{-d}(x_2 - x_1)^{-d}(x_3 - x_1)^{-d} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

这些积分中的每一个都可以转换为以下积分

$$I = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_2)^{-d}(y_2 - y_3)^{-d}(y_1 - y_3)^{-d} dy_3\, dy_2\, dy_1$$

那么， c_3 是六个积分之和，我们得到

$$c_3 = 6 \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_2)^{-d}(y_2 - y_3)^{-d}(y_1 - y_3)^{-d} dy_3\, dy_2\, dy_1 \tag{3.3}$$

在 [4]中，计算了该积分。这里我们采用另一种方法，这种方法将在后续各节中广泛使用。由（3.3）可得

$$\int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{-d}(y_1 - y_3)^{-d} dy_3 = \frac{1}{1-d}(y_2)^{1-d}(y_1)^{-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 2-d\end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right)$$

对于积分 y_2 ，我们得到

$$I_2 = \frac{1}{1-d}(y_1)^{-d} \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d}(y_2)^{1-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 2-d\end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right) dy_2$$

将超几何函数写成求和形式，并交换积分与求和的顺序，可得

$$I_2 = \frac{1}{1-d}(y_1)^{-d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \left(\frac{1}{y_1}\right)^k \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d}(y_2)^{1-d+k} dy_2$$

该积分众所周知，经过大量运算后得到的结果为

$$I_2 = \frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-2d)}(y_1)^{2-3d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 3-2d\end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-3d)}{\Gamma(2-2d)\Gamma(3-3d)}(y_1)^{2-3d}$$

最后，我们得到

$$I = \frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-3d)}{\Gamma(2-2d)\Gamma(3-3d)} \int_0^1 (y_1)^{2-3d} dy_1 = \frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-3d)}{\Gamma(2-2d)\Gamma(4-3d)}$$

那么， c_3 的结果为

$$c_3 = 6\frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-3d)}{\Gamma(2-2d)\Gamma(4-3d)}$$

而这就是 与 Veilette 和 Taqqu 在 [4, (12)] 中推导的结果相同。因此，对于三阶累积量，我们得到的是 t

$$\kappa_3(d) = 48\left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d)\right)^{3/2} \frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-3d)}{\Gamma(2-2d)\Gamma(4-3d)} \tag{3.4}$$

对于 $0 \le d \le 0.5$。对于 $d = 0$ ，我们得到积分总和： $c_3(0) = 1$。公式 (3.4) 给出了以下关于 $\kappa_3(d)$ 与 d 的对应表格。该公式得出的数值与 [5] 中表4的数值相同。

我们在图2中展示了这张表。

d	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
κ_3	2.828	2.815	2.770	2.684	2.548	2.348	2.067	1.686	1.183	0.5603	0

Ta表1： $\kappa_3(d)$关于 d的取值。 $\kappa_3(d)$由公式（3.4）计算得出 .

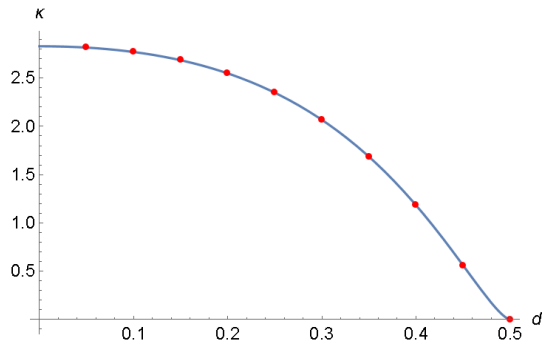


图2：三阶累积量 $\kappa_3(d)$ 与 d 的关系。实线由 (3.4) 给出。圆点来自表1。

4 直接推导四阶累积量

对于四阶累积量，由 (3.1) 得到

$$\kappa_4(d) = 48\left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d)\right)^2 c_4(d) \tag{4.1}$$

对于 $c_4(d)$，由 (3.2) 式可得

$$c_4(d) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |x_1-x_2|^{-d}|x_2-x_3|^{-d}|x_3-x_4|^{-d}|x_4-x_1|^{-d}dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 \tag{4.2}$$

还剩下24个区域，因此可得到24个积分。经过变换，最终得到三种不同的积分，且每个积分都出现八次。

$$c_4(1) = \int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}\int_0^{y_3} (y_1-y_2)^{-d}(y_2-y_3)^{-d}(y_3-y_4)^{-d}(y_1-y_4)^{-d}dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$
$$c_4(2) = \int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}\int_0^{y_3} (y_1-y_2)^{-d}(y_1-y_3)^{-d}(y_2-y_4)^{-d}(y_3-y_4)^{-d}dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$
$$c_4(3) = \int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}\int_0^{y_3} (y_1-y_3)^{-d}(y_2-y_3)^{-d}(y_1-y_4)^{-d}(y_2-y_4)^{-d}dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

那么对于 c_4，我们得到

$$c_4(d) = 8\Big(c_4(1)+c_4(2)+c_4(3)\Big) \tag{4.3}$$

4.1 $c_4(1)$的推导

对于 $c_4(1)$，我们有

$$c_4(1) = \int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}\int_0^{y_3} (y_1-y_2)^{-d}(y_2-y_3)^{-d}(y_3-y_4)^{-d}(y_1-y_4)^{-d}dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

对 y_4 的积分为

$$\int_0^{y_3}(y_3-y_4)^{-d}(y_1-y_4)^{-d}dy_4=\frac{1}{(1-d)}(y_1)^{-d}(y_3)^{1-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_3}{y_1}\right)$$

对 y_3 的积分给出

$$\int_0^{y_2}(y_3)^{1-d}(y_2-y_3)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_3}{y_1}\right)dy_3=\frac{\Gamma(1-d)\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-2d)}(y_2)^{2-2d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\3-2d\end{matrix};\frac{y_2}{y_1}\right)$$

对 y_2 和 y_1 进行积分，得到

$$c_4(1)=\frac{\Gamma(1-d)\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-2d)}\int_0^1\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}(y_2)^{2-2d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\3-2d\end{matrix};\frac{y_2}{y_1}\right)dy_2\,dy_1=$$
$$=\frac{\Gamma(1-d)^3\Gamma(3-4d)}{\Gamma(3-3d)\Gamma(5-4d)}$$

4.2 $c_4(2)$

对于 c_4(2)，我们有

$$c_4(2)=\int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}\int_0^{y_3}(y_1-y_2)^{-d}(y_1-y_3)^{-d}(y_2-y_4)^{-d}(y_3-y_4)^{-d}dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

对 y_4 的积分给出

$$\int_0^{y_3}(y_2-y_4)^{-d}(y_3-y_4)^{-d}dy_4=\frac{1}{(1-d)}(y_2)^{-d}(y_3)^{1-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_3}{y_1}\right)$$

将超几何函数写成关于 y_3 的求和和积分，得到

$$c_4(2)=\frac{1}{(1-d)}\frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(3-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^{y_1}(y_1)^{-d}(y_2)^{2-2d}(y_1-y_2)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}d,2-d+k\\3-d+k\end{matrix};\frac{y_2}{y_1}\right)dy_2\,dy_1$$

对 y_2 和 y_1 积分后得到

$$c_4(2)=\frac{\Gamma(3-2d)\Gamma(1-d)^2}{(4-4d)\Gamma(4-3d)\Gamma(3-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2-d+k,d,3-2d\\3-d+k,4-3d\end{matrix};1\right)$$

应用 Thomae 变换 (9.1) 后，我们得到

$$c_4(2)=2\frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(3-d)}\frac{\Gamma(2-2d)^2}{\Gamma(5-4d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,d+k\\2-d,3-d+k\end{matrix};1\right)$$

将超几何函数写成关于 j 的求和后，再对 k 求和。然后，对 j 求和得到

$$c_4(2)=\frac{\Gamma(2-2d)^2}{(1-d)^2\Gamma(5-4d|)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,d\\2-d,2-d\end{matrix};1\right)$$

经过大量推导，应用 Thomae 变换 (9.2) 可得

$$c_4(2)=\frac{\Gamma(1-d)^4\Gamma(3-4d)}{2\Gamma(2-2d)^2\Gamma(5-4d)}$$

4.3 c_4 的推导(3)

对于 c_4(3)，我们有

$$c_4(3) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} \int_0^{y_3} (y_1 - y_3)^{-d}(y_2 - y_3)^{-d}(y_1 - y_4)^{-d}(y_2 - y_4)^{-d} dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

本节介绍计算此积分的两种方法。之所以这样做，是因为这两种方法都常用于推导 Rosenblatt 分布的五阶累积量。

对于第一种方法，我们使用注 4 中的性质。应用该性质可得。

$$\int_0^{y_2} \int_0^{y_3} (y_1 - y_3)^{-d}(y_2 - y_3)^{-d}(y_1 - y_4)^{-d}(y_2 - y_4)^{-d} dy_4\, dy_3 =$$
$$= \int_0^{y_2} (y_1 - y_4)^{-d}(y_2 - y_4)^{-d} \int_{y_4}^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d}(y_2 - y_3)^{-d} dy_3\, dy_4$$

使用变换 $y_3 = \big(y_2 - y_4\big)z + y_4$ 得到

$$\int_0^{y_2} (y_1 - y_4)^{-2d}(y_2 - y_4)^{1-2d} \int_0^1 (1 - z)^{-d} \left(1 - \frac{y_2 - y_4}{y_1 - y_4} z\right)^{-d} dz\, dy_1 =$$
$$= \frac{1}{1-d} \int_0^{y_2} (y_1 - y_4)^{-2d}(y_2 - y_4)^{1-2d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, d \\ 2 - d \end{matrix}; \frac{y_2 - y_4}{y_1 - y_4}\right) dy_1$$

将超几何函数写成求和形式，并交换积分与求和的次序，得到

$$\frac{1}{1-d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \int_0^{y_2} (y_1 - y_4)^{-2d-k}(y_2 - y_4)^{1-2d+k} dy_4 =$$
$$= \frac{1}{1-d} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k (2-2d)_k}{(2-d)_k (3-2d)_k} (y_1)^{-2d-k} (y_2)^{2-2d+k}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 2d+k \\ 3-2d+k \end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right)$$

代换 c_4(3) 得到

$$c_4(3) = \frac{1}{1-d} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k (2-2d)_k}{(2-d)_k (3-2d)_k}$$
$$\int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1)^{-2d-k} (y_2)^{2-2d+k}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 2d+k \\ 3-2d+k \end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right) dy_2\, dy_1$$

对于内层积分，使用变换 $y_2 = y_1\, z$ 后，我们得到

$$\int_0^{y_1} (y_2)^{2-2d+k}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 2d+k \\ 3-2d+k \end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right) dy_2 =$$
$$= (y_1)^{3-2d+k} \int_0^1 z^{2-2d+k}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 2d+k \\ 3-2d+k \end{matrix}; z\right) dz = \frac{\Gamma(3-4d)}{\Gamma(4-4d)} (y_1)^{3-2d+k}$$

代换后得到

$$c_4(3) = \frac{1}{1-d} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)} \frac{\Gamma(3-4d)}{\Gamma(4-4d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k (2-2d)_k}{(2-d)_k (3-2d)_k} \int_0^1 (y_1)^{3-4d} dy_1 =$$
$$= \frac{1}{1-d} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)} \frac{\Gamma(3-4d)}{\Gamma(5-4d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k (2-2d)_k}{(2-d)_k (3-2d)_k}$$

该求和可以写成 a ${}_3F_2$ 超几何函数。经过一些变换，我们最终得到

$$c_4(3) = \frac{1}{2(1-d)^2}\frac{\Gamma(3-4d)}{\Gamma(5-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1, d, 2-2d\\ 2-d, 3-2d\end{matrix};1\right) \tag{4.4}$$

对于第二种方法，我们使用注5中的变换，得到

$$c_4(3) = \frac{1}{(4-4d)}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (z_2)^{2-2d}(z_3)(1-z_3)^{-d}(1-z_2\,z_3)^{-d}(1-z_2\,z_3\,z_4)^{-d}(1-z_3\,z_4)^{-d}dz_2\,dz_3\,dz_4$$

将因子 $(1-z_2\,z_3\,z_4)^{-d}$ 写成求和形式后，对 z_2 积分可得

$$c_4(3) = \frac{1}{(4-4d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-2d+k)k!}$$
$$\int_0^1\int_0^1 (1-z_3)^{-d})z_3)^{1+k}(z_4)^k(1-z_3\,z_4)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}d, 3-2d+k\\ 4-2d+k\end{matrix};z_3\right)dz_3\,dz_4$$

对 z_4 积分可得

$$c_4(3) = \frac{1}{(4-4d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-2d+k))(1+k)k!}$$
$$\int_0^1 (z_3)^{(1-d)-1}(1-z_3)^{1+k}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}d, 1+k\\ 2+k\end{matrix};1-z_3\right)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}d, 3-2d+k\\ 4-2d+k\end{matrix};1-z_3\right)dz_3$$

由 [2, 2.21.9(12)] 可得

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{c-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix};1-x\right)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a', b'\\ c'\end{matrix};1-x\right)dx =$$
$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')\Gamma)(\alpha)\Gamma(c-a-b+\alpha)}{\Gamma(c-a+\alpha)\Gamma(c-b+\alpha)\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}a', b', \alpha, c-a-b+\alpha\\ c-a+\alpha, c-b+\alpha, a'+b'-c'+1\end{matrix};1\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(c')\Gamma(a'+b'-\underline{c'})\Gamma(c'-a'-b'+\alpha)\Gamma(c+c'-a-a'-b-b'+\alpha)}{\Gamma(a')\Gamma(b')\Gamma(c+c'-a-a'-b'+\alpha)\Gamma(c+c'-a'-b-b'+\alpha)}$$
$${}_4F_3\left(\begin{matrix}c'-a', c'-b', c'-a'-b'+\alpha, c+c'-a-a'-b-b'+\alpha\\ c'-a'-b'+1, c+c'-a-a'-b'+\alpha, c+c'-a'-b-b'+\alpha\end{matrix};1\right)$$

注意，下划线标出的 c' 有一个小错误，此处已更正。应用后，对 k 求和可得

$$c_4(3) = \frac{\Gamma(4-3d)\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-2d)\Gamma(2d-1)}{\Gamma(5-4d)\Gamma(3-3d)\Gamma(d)} - \frac{\Gamma(3-4d)\Gamma(2d-1)}{(1-d)\Gamma(5-4d)\Gamma(2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2d-1, d, 1\\ 2d, 2-d\end{matrix};1\right)$$

使用 Thomae 变换 (9.3) 得到与 (4.4) 相同的结果。

4.4 四阶累积量

对于 $c_4\,8\big(c_4(1)+c_4(2)+c_4(3)\big)$ 的求和给出

$$c_4 = \frac{1}{(1-d)^2(3-4d)}\left({}_3F_2\left(\begin{matrix}2-2d, 1, d\\ 3-2d, 2-d\end{matrix};1\right)+\frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-d)^2}{\Gamma(2-2d)^2}+\frac{2\Gamma(1-d)\Gamma(2-d)^2}{\Gamma(3-3d)}\right)$$

对于四阶累积量，我们使用公式 (4.1) 和 (4.3)。结果为

$$\kappa_4(d) = 12(1-2d)^2(1-d)^2 c_4$$

代换得到四阶累积量

$$\kappa_4(d) = \frac{12(1-2d)^2}{(1-d)(3-4d)} \left({}_3F_2\left(\begin{matrix} 2-2d, 1, d \\ 3-2d, 2-d \end{matrix} ; 1 \right) + \frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-d)^2}{\Gamma(2-2d)^2} + \frac{2\Gamma(1-d)\Gamma(2-d)^2}{\Gamma(3-3d)} \right) \quad (4.5)$$

其中 $0 \le d \le 0.5$。对于 $d = 0$，积分总和为：$8\left(c_4(1)+c_4(2)+c_4(3)\right) = 1$。公式 (4.5) 给出了 κ_4 相对于 d 的下表。这一公式给出的数值与 [5] 中表4的数值相同。

d	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
κ_4	12.00	11.92	11.66	11.15	10.35	9.192	7.632	5.665	3.392	1.173	0

Ta表2： $\kappa(d)$ 关于 d 的取值。 $\kappa_4(d)$ 根据公式 (4.5) 计算。

下一幅图展示了此表。

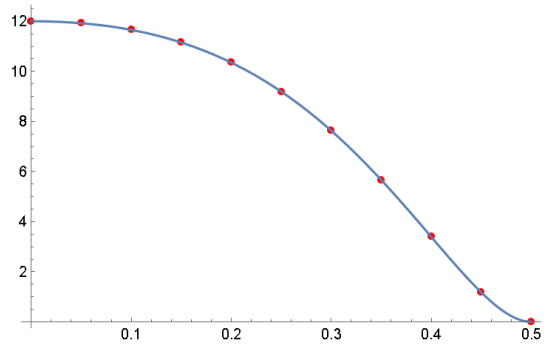


图3：四阶累积量 $\kappa_4(d)$ 关于 d 的关系。连续线来自 (4.5)。点来自表2。

5 五阶累积量的直接推导

对于五阶累积量，由（1.3）式可得

$$\kappa_5(d) = 384\left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d)\right)^{5/2} c_5 \quad (5.1)$$

由此公式立即得到 $0 \le d \le 0.5$。对于 c_5，由 (1.2) 可得

$$c_5 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |x_1-x_2|^{-d}|x_2-x_3|^{-d}|x_3-x_4|^{-d}(x_4-x_5)^{-d} |x_5-x_1|^{-d} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\, dx_5 \quad (5.2)$$

含有绝对值的因子应当拆分。剩下 120 个区域，因此对应 120 个积分。利用注5中的变换，剩下十二个不同的积分，且每个积分出现十次。这些区域为

$$
\begin{aligned}
&(\,1) \qquad 0<x_5<x_4<x_3<x_2<x_1<1\\
&(\,2) \qquad 0<x_4<x_5<x_3<x_2<x_1<1\\
&(\,3) \qquad 0<x_4<x_3<x_5<x_2<x_1<1\\
&(\,4) \qquad 0<x_5<x_3<x_4<x_2<x_1<1\\
&(\,5) \qquad 0<x_3<x_5<x_4<x_2<x_1<1\\
&(\,6) \qquad 0<x_5<x_3<x_2<x_4<x_1<1\\
&(\,7) \qquad 0<x_3<x_5<x_2<x_4<x_1<1\\
&(\,8) \qquad 0<x_5<x_3<x_2<x_1<x_4<1\\
&(\,9) \qquad 0<x_4<x_3<x_2<x_5<x_1<1\\
&(10) \qquad 0<x_3<x_2<x_5<x_4<x_1<1\\
&(11) \qquad 0<x_3<x_5<x_2<x_1<x_4<1\\
&(12) \qquad 0<x_3<x_2<x_5<x_1<x_4<1
\end{aligned}
$$

以区域 (3) 为例，说明如何得到变换后的积分。该积分变为

$$
c_5(3)=\int_0^1\int_0^{x_1}(x_1-x_2)^{-d}\int_0^{x_2}(x_1-x_5)^{-d}\int_0^{x_5}(x_2-x_5)^{-d}\int_0^{x_3}(x_5-x_4)^{-d}(x_3-x_4)^{-d}dx_4\,dx_3\,dx_5\,dx_2\,dx_1
$$

对该积分进行变换，得到

$$
c_5(3)=\int_0^1\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_2-y_4)^{-d}\int_0^{y_4}(y_3-y_5)^{-d}(y_4-y_5)^{-d}dy_5\,dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1
$$

应用注5中的变换后，我们得到

$$
c_5(3)=\frac{1}{(5-5d)}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1(z_2)^{3-3d}(1-z_2)^{-d}(z_3)^{2-2d}(1-z_2\,z_3)^{-d}(z_4)^{1-d}(1-z_3\,z_4)^{-d}(1-z_4\,z_5)^{-d}(1-z_5)^{-d}dz_5\,dz_4\,dz_3\,dz_2
$$

这些变换可以应用于全部 120 个积分，并且我们可以比较所有这些积分。剩下的是以下积分

$$
\begin{aligned}
c_5(1)&=\int_0^1\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}\int_0^{y_2}(y_2-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_3-y_4)^{-d}\int_0^{y_4}(y_4-y_5)^{-d}(y_1-y_5)^{-d}dy_5\,dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1\\
c_5(2)&=\int_0^1\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}\int_0^{y_2}(y_2-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_1-y_4)^{-d}\int_0^{y_4}(y_4-y_5)^{-d}(y_3-y_5)^{-d}dy_5\,dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1
\end{aligned}
$$

$$c_5(3) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_2 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_3 - y_5)^{-d} (y_4 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

$$c_5(4) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} \int_0^{y_2} \int_0^{y_3} (y_2 - y_4)^{-d} (y_3 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_3 - y_5)^{-d} (y_1 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

$$c_5(5) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} \int_0^{y_2} \int_0^{y_3} (y_3 - y_4)^{-d} (y_1 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_2 - y_5)^{-d} (y_3 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

$$c_5(6) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_3 - y_4)^{-d} (y_2 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_2 - y_5)^{-d} (y_1 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

$$c_5(7) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_2 - y_4)^{-d} (y_1 - y_4)^{-d} \text{<escape>} \int_0^{y_4} (y_2 - y_5)^{-d} (y_3 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1 \text{</escape>}$$

$$c_5(8) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_3 - y_4)^{-d} (y_1 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_1 - y_5)^{-d} (y_2 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

$$c_5(9) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_3 - y_4)^{-d} \text{<escape>} \int_0^{y_4} (y_2 - y_5)^{-d} (y_4 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1 \text{</escape>}$$

$$c_5(10) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} (y_2 - y_3)^{-d|} \int_0^{y_3} (y_1 - y_4)^{-d} \text{<escape>} \int_0^{y_4} (y_2 - y_5)^{-d} (y_4 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1 \text{</escape>}$$

$$c_5(11) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_1 - y_4)^{-d} (y_2 - y_4)^{-d} \text{<escape>} \int_0^{y_4} (y_1 - y_5)^{-d} (y_3 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1 \text{</escape>}$$

$$c_5(12) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} (y_2 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_2 - y_4)^{-d} \text{<escape>} \int_0^{y_4} (y_1 - y_5)^{-d} (y_4 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1 \text{</escape>}$$

并且每个积分都出现十次。因此，对于五阶累积量 c_5，我们得到

$$c_5 = 10 \sum_{i=1}^{12} c_5(i) \tag{5.3}$$

5.1 c_5（1）的推导

对于 c_5(1)，我们有

$$c_5(1) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} \int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_3 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_4 - y_5)^{-d} (y_1 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

y_5 的积分给出

$$\int_0^{y_4} (y_4 - y_5)^{-d} (y_1 - y_5)^{-d} dy_5 = \frac{1}{(1-d)} (y_1)^{-d} (y_4)^{1-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 2-d\end{matrix}; \frac{y_4}{y_1}\right)$$

对 y_4 的积分给出

$$\frac{1}{(1-d)} (y_1)^{-d} \int_0^{y_3} (y_3 - y_4)^{-d} (y_4)^{1-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 2-d\end{matrix}; \frac{y_4}{y_1}\right) dy_4 = \\ = \frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-2d)} (y_1)^{-d} (y_3)^{2-2d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 3-2d\end{matrix}; \frac{y_3}{y_1}\right)$$

对 y_3 的积分给出

$$\frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-2d)} (y_1)^{-d} \int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{-d} (y_3)^{2-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 3-2d\end{matrix}; \frac{y_3}{y_1}\right) dy_3 = \\ = \frac{\Gamma(1-d)^3}{\Gamma(4-3d)} (y_1)^{-d} (y_2)^{3-3d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 4-3d\end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right)$$

对 y_2 的积分给出

$$\frac{\Gamma(1-d)^3}{\Gamma(4-3d)} (y_1)^{-d} \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} (y_2)^{3-3d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 4-3d\end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right) dy_2 = \\ = \frac{\Gamma(1-d)^4}{\Gamma(5-4d)} (y_1)^{4-5d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 5-4d\end{matrix}; 1\right)$$

对 y_1 的积分给出

$$\frac{\Gamma(1-d)^4 \Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(5-5d)} \int_0^1 (y_1)^{4-5d} dy_1 = \frac{\Gamma(1-d)^4 \Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(5-5d)} \frac{1}{(5-5d)}$$

那么，对于 c_5(1)，我们最终得到

$$c_5(1) = \frac{\Gamma(1-d)^4 \Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(6-5d)}$$

5.2 $c_5(2)$ 的推导

对于 c_5(2)，我们有

$$c_5(2) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} \int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_1 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_4 - y_5)^{-d} (y_3 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

y_5 的积分为

$$\int_0^{y_4}(y_4-y_5)^{-d}(y_3-y_5)^{-d}dy_5=\frac{1}{(1-d)}(y_3)^{-d}(y_4)^{1-d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_4}{y_3}\right)$$

将超几何函数写成求和形式，并交换求和与积分，得到

$$\frac{1}{(1-d)}\int_0^{y_3}(y_3)^{-d}(y_4)^{1-d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_4}{y_3}\right)dy_4=$$
$$=\frac{1}{(1-d)}\frac{\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-d)}(y_1)^{-d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}(y_3)^{2-2d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}d,2-d+k\\3-d+k\end{matrix};\frac{y_3}{y_1}\right)$$

将超几何函数写成求和形式，并交换求和与积分，得到

$$\frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(3-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j(2-d+k)_j}{(3-d+k)_j}\frac{1}{j!}(y_1)^{-j-d}\int_0^{y_2}(y_3)^{2-2d+j}(y_2-y_3)^{-d}dy_3=$$
$$=\frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j(2-d+k)_j}{(3-d+k)_j}\frac{1}{j!}(y_1)^{-j-d}\frac{\Gamma(3-2d+j)}{\Gamma(4-3d+j)}(y_2)^{3-3d+j}$$

对 y_2 的积分为

$$\frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j(2-d+k)_j}{(3-d+k)_j}\frac{1}{j!}(y_1)^{-j-d}\frac{\Gamma(3-2d+j)}{\Gamma(4-3d+j)}$$
$$\int_0^{y_1}(y_2)^{3-3d+j}(y_1-y_2)^{-d}dy_2=$$
$$=\frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-d)}\frac{\Gamma(3-2d)}{\Gamma(5-4d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j(3-2d)_j(2-d+k)_j}{(5-4d)_j(3-d+k)_j}\frac{1}{j!}(y_1)^{4-5d}\tag{5.4}$$

接下来应进行以下步骤

- 对 (5.4) 关于 y_1 积分。- 应用 Thomae 变换 (9.1)。- 交换求和，并对 k 求和。- 应用 Thomae 变换 (9.1)。- 将求和写成超几何函数。

结果为

$$c_5(2)=\frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)}\frac{\Gamma(4-5d)\Gamma(2-2d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(4-4d)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}d,1-d,2-2d\\2-d,4-4d\end{matrix};1\right)$$

5.3 c_5的推导(3)

对于 $c_5(3)$，我们有

$$c_5(3) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_2 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_3 - y_5)^{-d} (y_4 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

使用 **(1.4)** 并进行变换 $y_4 = (y_3 - y_5)z + y_5$，得到

$$c_5(3) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{-d} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_3 - y_5)^{-d} \int_0^1 z^{-d} \left(1 - \frac{y_3 - y_5}{y_2 - y_5} z\right)^{-d} dz\, dy_5\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

对 z 积分，得到

$$\int_0^1 z^{-d} \left(1 - \frac{y_3 - y_5}{y_2 - y_5} z\right)^{-d} dz = \frac{1}{(1-d)} (y_3 - y_5)^{1-d} (y_2 - y_5)^{-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-d, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{y_3 - y_5}{y_2 - y_5}\right)$$

将超几何函数写成求和形式后，对 y_5 积分，得到

$$\frac{1}{(1-d)} \int_0^{y_3} (y_3 - y_5)^{1-2d} (y_2 - y_5)^{-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-d, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{y_3 - y_5}{y_2 - y_5}\right) dy_5 =$$

$$= \frac{1}{(1-d)} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-d)_k (d)_k}{(2-d)_k} \frac{(2-2d)_k}{(3-2d)_k} \frac{1}{k!} (y_2)^{-d-k} (y_3)^{2-2d+k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d+k)_j}{(3-2d+k)_j} \left(\frac{y_3}{y_2}\right)^j$$

对 y_3 积分，得到

$$\frac{1}{(1-d)} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-d)_k (d)_k}{(2-d)_k} \frac{(2-2d)_k}{(3-2d)_k} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d+k)_j}{(3-2d+k)_j} (y_2)^{-d-k-j} \int_0^{y_2} (y_3)^{2-2d+k+j} (y_1 - y_3)^{-d} dy_3 =$$

$$= \frac{1}{(1-d)} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-d)_k (d)_k}{(2-d)_k} \frac{(2-2d)_k}{(3-2d)_k} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d+k)_j}{(3-2d+k)_j} (y_2)^{-d-k-j} \frac{1}{(3-2d+j+k)} (y_1)^{-d} (y_2)^{3-3d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} d, 3-2d+j+k \\ 4-2d+j+k \end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right)$$

对 y_2 的积分得出

$$\frac{1}{(1-d)} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(4-2d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-d)_k (d)_k}{(2-d)_k} \frac{(2-2d)_k}{(4-2d)_k} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d+k)_j}{(4-2d+k)_j} (y_1)^{-d} \int_0^{y_1} (y_2)^{3-3d} (y_1 - y_2)^{-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} d, 3-2d+j+k \\ 4-2d+j+k \end{matrix}; \frac{y_2}{y_1}\right) dy_2 =$$

$$= \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(4-2d)} \frac{\Gamma(4-3d)}{\Gamma(5-4d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-d)_k (d)_k}{(2-d)_k} \frac{(2-2d)_k}{(4-2d)_k} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d+k)_j}{(4-2d+k)_j}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} d, 4-3d, 3-2d+j+k \\ 5-4d, 4-2d+j+k \end{matrix}; 1\right) (y_1)^{4-5d}$$

对 y_1 的积分得出

$$c_5(3) = \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)(5-5d)} \frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(4-2d)} \frac{\Gamma(4-3d)}{\Gamma(5-4d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-d)_k (d)_k}{(2-d)_k} \frac{(2-2d)_k}{(4-2d)_k} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d+k)_j}{(4-2d+k)_j} \\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} d, 4-3d, 3-2d+j+k \\ 5-4d, 4-2d+j+k \end{matrix} ; 1 \right)$$

为求出求和，我们进行以下步骤。

- 应用 Thomae 变换 (9.1)，并将超几何函数写成关于 m 的求和。

- 计算关于 j 的求和。

- 超几何函数可以写成伽马函数的比值。结果是一个超几何函数。- 应用 Thomae 变换 (9.1)，将超几何函数写成关于 m 的求和。- 计算关于 k 的求和。

- 结果是两个求和的和，可以写成两个超几何函数之和。

结果是

$$c_5(3) = \frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)\Gamma(2-2d)} \frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)} \frac{\Gamma(3-3d)}{\Gamma(6-5d)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} d, 1-d, 3-3d \\ 2-d, 4-4d \end{matrix} ; 1 \right) - \\ - \frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)} \frac{\Gamma(4-5d)\Gamma(2-2d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(6-5d)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} d, 1-d, 2-2d \\ 2-d, 4-4d \end{matrix} ; 1 \right)$$

5.4 c_5（4）的推导

对于 c_5（4），我们有

$$c_5(4) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1-y_2)^{-d} \int_0^{y_2} \int_0^{y_3} (y_2-y_4)^{-d} (y_3-y_4)^{-d} \\ \int_0^{y_4} (y_3-y_5)^{-d} (y_1-y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

利用（1.4）以及变换 $y_4 = (y_3-y_5)z + y_5$，得到

$$c_5(4) = \int_0^1 \int_0^{y_1} (y_1-y_2)^{-d} \int_0^{y_2} \int_0^{y_3} (y_2-y_5)^{-d} (y_3-y_5)^{1-2d} (y_1-y_5)^{-d} \\ \int_0^1 (1-z)^{-d} \left(1 - \frac{y_3-y_5}{y_2-y_5} z\right)^{-d} dz dy_5 dy_3 dy_2 dy_1$$

对 z 的积分得到一个超几何函数。将其写成求和形式可得

$$\int_0^1 (1-z)^{-d} \left(1 - \frac{y_3-y_5}{y_2-y_5} z\right)^{-d} dz = \frac{1}{(1-d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \left(\frac{y_3-y_5}{y_2-y_5}\right)^k \tag{5.5}$$

对于对 y_5 的积分，我们将因子 $(y_1-y_5)^{-d}$ 写成求和形式，积分后得到

$$\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}(y_1)^{-d-j}\frac{(d)_j}{j!}\int_0^{y_3}(y_2-y_5)^{-d-k}(y_3-y_5)^{1-2d+k}(y_5)^j dy_5$$
$$=\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k\Gamma(2-2d+k)}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}(y_1)^{-d-j}\frac{(d)_j}{\Gamma(3-2d+j+k)}(y_2)^{-d-k}(y_3)^{2-2d+j+k}$$
$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1+j,d+k\\3-2d+j+k\end{matrix};\frac{y_3}{y_2}\right)$$

对 y_3 积分可得

$$\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k\Gamma(2-2d+k)}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}(y_1)^{-d-j}\frac{(d)_j}{\Gamma(3-2d+j+k)}(y_2)^{-d-k}$$
$$\int_0^{y_2}(y_3)^{2-2d+j+k}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1+j,d+k\\3-2d+j+k\end{matrix};\frac{y_3}{y_2}\right)dy_3$$
$$=\frac{1}{(1-d)}\frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)\Gamma(4-3d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k(2-2d)_k}{(2-d)_k(3-2d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}(y_1)^{-d-j}\frac{(d)_j}{(4-3d)_j}(y_2)^{3-3d+j}$$

对 y_2 积分可得

$$\frac{1}{(1-d)}\frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)\Gamma(4-3d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k(2-2d)_k}{(2-d)_k(3-2d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}(y_1)^{-d-j}\frac{(d)_j}{(4-3d)_j}$$
$$\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}(y_2)^{3-3d+j}dy_2$$
$$=\frac{\Gamma(1-d)}{2(1-d)^2}\frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(5-5d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k(2-2d)_k}{(2-d)_k(3-2d)_k}(y_1)^{4-5d}$$

对 y_1 积分，最后得到

$$c_5(4)=\frac{\Gamma(1-d)}{2(1-d)^2}\frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(6-5d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,2-2d\\2-d,3-2d\end{matrix};1\right)$$

5.5 c_5（5）的推导

对于 c_5（5），我们有

$$c_5(5)=\int_0^1\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}\int_0^{y_2}\int_0^{y_3}(y_1-y_4)^{-d}(y_3-y_4)^{-d}$$
$$\int_0^{y_4}(y_3-y_5)^{-d}(y_1-y_5)^{-d}dy_5\,dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

利用 (1.4) 和变换 $y_4=(y_3-y_5)z+y_5$ 可得

$$c_5(5)=\int_0^1\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}\int_0^{y_2}\int_0^{y_3}(y_2-y_5)^{-d}(y_3-y_5)^{1-2d}(y_1-y_5)^{-d}$$
$$\int_0^1(1-z)^{-d}\left(1-\frac{y_3-y_5}{y_1-y_5}z\right)^{-d}dz\,dy_5\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

对 z 的积分可得一个超几何函数。将其写成求和形式，可得

$$\int_0^1 (1-z)^{-d}\left(1-\frac{y_3-y_5}{y_1-y_5}z\right)^{-d}dz = \frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\left(\frac{y_3-y_5}{y_1-y_5}\right)^k \tag{5.6}$$

F或者对于 y_5 上的积分，我们将因子 $(y_2-y_5)^{-d}$ 写成求和，得到

$$\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{j!}(y_2)^{-d-j}\int_0^{y_3}(y_3-y_5)^{1-2d+k}(y_1-y_5)^{-d-k}(y_5)^j dy_5$$

$$= \frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k\Gamma(2-2d+k)}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{\Gamma(3-2d+j+k)}(y_1)^{-d-k}(y_2)^{-d-j}(y_3)^{2-2d+j+k}$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1+j,d+k\\3-2d+j+k\end{matrix};\frac{y_3}{y_1}\right)$$

对于 y_3 上的积分，我们得到

$$\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k\Gamma(2-2d+k)}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{\Gamma(3-2d+j+k)}(y_1)^{-d-k}(y_2)^{-d-j}$$

$$\int_0^{y_2}(y_3)^{2-2d+j+k}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1+j,d+k\\3-2d+j+k\end{matrix};\frac{y_3}{y_1}\right)dy_3$$

$$= \frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k\Gamma(2-2d+k)}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{\Gamma(4-2d+j+k)}(y_1)^{-d-k}(y_2)^{3-3d+k}$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1+j,d+k\\4-2d+j+k\end{matrix};\frac{y_2}{y_1}\right)$$

对于关于 y_2 的积分，我们得到

$$\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k\Gamma(2-2d+k)}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{\Gamma(4-2d+j+k)}(y_1)^{-d-k}(y_2)^{3-3d+k}$$

$$\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1+j,d+k\\4-2d+j+k\end{matrix};\frac{y_2}{y_1}\right)dy_2$$

$$= \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k\Gamma(2-2d+k)}{(2-d)_k\Gamma(4-2d+k)}\frac{\Gamma(4-3d+k)}{\Gamma(5-4d+k)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{(4-2d+k)_j}(y_1)^{4-5d}$$

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}1+j,4-3d+k,d+k\\5-4d+k,4-2d+j+k\end{matrix};1\right)$$

对 y_1 的积分得到

$$c_5(5) = \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)(5-5d)}\frac{\Gamma(2-2d)\Gamma(4-3d)}{\Gamma(4-2d)\Gamma(5-4d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k(2-2d)_k(4-3d)_k}{(2-d)_k(4-2d)_k}(5-4d)_k$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{(4-2d+k)_j}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1+j,4-3d+k,d+k\\5-4d+k,4-2d+j+k\end{matrix};1\right)$$

为求出这些求和，我们采取以下步骤

- 将超几何函数写成关于 m 的求和。

- 计算关于 j 的求和。

- 超几何函数可以表示为伽马函数的分式。结果是对 m 的求和。

- 计算关于 m 的求和。

- 剩余部分是关于 k 的求和，可以将其写成超几何函数。

结果是

$$c_5(5) = \frac{\Gamma(1-d)}{2(1-d)^2}\frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(6-5d)}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}1, d, 2-2d, 3-3d\\ 2-d, 3-2d, 4-4d\end{matrix}; 1\right)$$

5.6 c_5 的推导(6)

对于 c_5(6)，我们有

$$c_5(6) = \int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_3-y_4)^{-d}(y_2-y_4)^{-d} \int_0^{y_4}(y_2-y_5)^{-d}(y_1-y_5)^{-d}dy_5\,dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

利用 (1.4) 和变换 $y_4 = (y_3-y_5)z + y_5$，得到

$$c_5(6) = \int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_2-y_5)^{-2d}(y_1-y_5)^{-d}(y_3-y_5)^{1-d} \int_0^1(1-z)^{-d}\left(1-\frac{y_3-y_5}{y_2-y_5}z\right)^{-d}dz\,dy_5\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

对于关于 z 的积分，我们使用 (5.5)。结果是一个超几何函数。我们将因子 $(y_1-y_5)^{-d}$ 和超几何函数写成求和的形式。积分后得到

$$\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{j!}(y_1)^{-d-j}\int_0^{y_3}(y_2-y_5)^{-2d-k}(y_3-y_5)^{1-d+k}(y_5)^j dy_5 =$$
$$= \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(3-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{(3-d+k)_j}(y_1)^{-d-j}(y_2)^{-2d-k}(y_3)^{2-d+j+k}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1+j, 2d+k\\ 3-d+j+k\end{matrix}; \frac{y_3}{y_2}\right)$$

将超几何函数写成求和形式，使用注5中的变换，并对 y_1 积分，得到

$$c_5(6) = \frac{1}{(5-5d)}\frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(3-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_j}{(3-d+k)_j}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+j)_i(2d+k)_i}{(3-d+j+k)_i}\frac{1}{i!} \int_0^1\int_0^1(z_2)^{3-3d+j}(z_3)^{2-d+i+j+k}(1-z_2\,z_3)^{-d}dz_3\,dz_2$$

对于二重积分，我们得到

$$\int_0^1 \int_0^1 (z_2)^{3-3d+j} (z_3)^{2-d+i+j+k} (1 - z_2\, z_3)^{-d} dz_3\, dz_2 =$$
$$= \frac{\Gamma(1-d)}{(2d-1+i+k)} \left(\frac{\Gamma(4-3d+j)}{\Gamma(5-4d+j)} - \frac{\Gamma(3-d+i+j+k)}{\Gamma(4-2d+i+j+k)} \right)$$

依次对 i、j 和 k 求和，得到

$$c_5(6) = \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)} \frac{\Gamma(2d-1)}{\Gamma(2d)} \frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(4-4d)}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, d, 2d-1 \\ 2-d, 2d \end{matrix}; 1 \right) -$$
$$- \frac{\Gamma(1-d)^2}{(3-2d)} \frac{\Gamma(2d-1)}{\Gamma(2d)} \frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} 2d-1, 1, d \\ 2d, 3-2d \end{matrix}; 1 \right)$$

应用 Thomae 变换 (9.3) 和 (9.2)，得到

$$c_5(6) = \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)} \frac{\Gamma(2d-1)}{\Gamma(2d)} \frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(4-4d)}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, d, 2d-1 \\ 2-d, 2d \end{matrix}; 1 \right) -$$
$$- \frac{\Gamma(1-d)^3\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(6-5d)} \frac{\Gamma(2-2d)\Gamma(2d-1)}{\Gamma(d)} +$$
$$+ \frac{\Gamma(1-d)^2}{3(1-d)^2} \frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(2-2d)}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, d, 3-3d \\ 2-d, 4-3d \end{matrix}; 1 \right)$$

5.7 $c_5(7)$ 的推导

对于 $c_5(7)$，我们有

$$c_5(7) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_2 - y_4)^{-d} (y_1 - y_4)^{-d}$$
$$\int_0^{y_4} (y_2 - y_5)^{-d} (y_3 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

利用 (1.4) 以及变换 $y_4 = (y_3 - y_5)z + y_5$，得到

$$c_5(7) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_2 - y_5)^{-2d} (y_3 - y_5)^{1-d} (y_1 - y_5)^{-d}$$
$$\int_0^1 \left(1 - \frac{y_3 - y_5}{y_2 - y_5} z \right)^{-d} \left(1 - \frac{y_3 - y_5}{y_1 - y_5} z \right)^{-d} dz\, dy_5\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

利用已知积分

$$\int_0^1 (1 - p\, z)^{-d} (1 - q\, z)^{-d} dz =$$
$$= \frac{1}{(1-d)} \frac{1}{p}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{q}{p} \right) - \frac{1}{(1-d)} \frac{1}{p} (1-p)^{1-d} (1-q)^{-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{q(1-p)}{p(1-q)} \right) \quad (5.7)$$

我们得到

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{y_3 - y_5}{y_2 - y_5} z \right)^{-d} \left(1 - \frac{y_3 - y_5}{y_1 - y_5} z \right)^{-d} dz = \frac{1}{(1-d)} \frac{(y_2 - y_5)}{(y_3 - y_5)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{y_2 - y_5}{y_1 - y_5} \right) -$$
$$- \frac{1}{(1-d)} \frac{(y_2 - y_5)}{(y_3 - y_5)} \left(\frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_5} \right)^{1-d} \left(\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_5} \right)^{-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_3} \right)$$

将其代换到 c_5(7) 后

$$\int_0^{y_3}(y_3-y_5)^{-d}(y_2-y_5)^{-d}dy_5=\frac{1}{(1-d)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_3}{y_2}\right)$$

我们得到 c_5(7) $=I_1-I_2$ 其中

$$I_1=\frac{1}{(1-d)}\int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_1-y_5)^{-d}(y_2-y_5)^{1-2d}(y_3-y_5)^{-d}$$
$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_2-y_5}{y_1-y_5}\right)dy_5dy_3dy_2dy_1$$

$$I_2=\frac{1}{(1-d)^2}\int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_2)^{-d}(y_3)^{1-d}(y_1-y_3)^{-2d}(y_2-y_3)^{1-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_3}{y_2}\right)$$
$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_2-y_3}{y_1-y_3}\right)dy_3dy_2dy_1$$

5.7.1 I_1的推导。

写　出因子 $(y_1-y_5)^{-d}$ 并将超几何函数表示为求和，我们得到

$$I_1=\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\frac{(d+k)_j}{j!}$$
$$\int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_5)^j(y_2-y_5)^{1-2d+k}(y_3-y_5)^{-d}dy_5\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

对 y_5 积分得到一个超几何函数。将此函数表示为关于i 的求和，得到

$$I_1=\frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(d)_k(d+k)_j}{(2-d)_k\Gamma(2-d+j)}\frac{(1+j)_i(2d-1-k)_i}{(2-d+j)_i\,i!}$$
$$\int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1)^{-d-j-k}(y_2)^{1-2d-i+k}(y_3)^{1-d+i+j}(y_1-y_3)^{-d}dy_3\,dy_2\,dy_1$$

三重积分可以直接求出，我们得到

$$I_1=\frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)(5-5d)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(4-3d+j+k)(d)_k(1+j)_i(2d-1-k)_i(d+k)_j}{(2d-2+i-k)i!\Gamma(2-d_i+j)(2-d)_k\Gamma(5-4d+j+k)}-$$
$$-\frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)(5-5d)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(d)_k(1+j)_i\Gamma(2d-2-k)(2d-2-k)_i(d+k)_j}{\Gamma(2d-2-k)i!(2-d)_k\Gamma(3-2d+i+j)}$$

依次对 i、 j 和 k 求和后，最终得到

$$I_1=\frac{\Gamma(1-d)^2}{2(1-d)^2}\frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(2-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,2-2d\\2-d,3-2d\end{matrix};1\right)-$$
$$-\frac{\Gamma(1-d)}{2(1-d)^2}\frac{\Gamma(3-3d)}{\Gamma(4-4d)}\frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}1,d,2-2d,3-3d\\2-d,3-2d,4-4d\end{matrix};1\right)$$

5.7.2 I_2的推导

利用注5中的变换，对 y_1 进行积分，并将超几何函数写成求和形式，可得

$$I_2 = \frac{1}{(1-d)^2(5-5d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d)_j}{(2-d)_j} \int_0^1 \int_0^1 (z_2)^{3-3d+j} (z_3)^{1-d+k} (1-z_2\, z_3)^{-2d-j} (1-z_3)^{1-d+j} dz_3\, dz_2$$

关于 z_2 的积分与关于 z_3的积分一样，都是已知的。结果为

$$I_2 = \frac{\Gamma(3-3d)}{(1-d)^2(5-5d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d)_j}{(2-d)_j} \frac{\Gamma(4-3d+j)}{\Gamma(5-3d+j)} \frac{\Gamma(2-d+k)}{\Gamma(5-4d+k)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 5-5d, 2-d+k \\ 5-3d+j, 5-4d+k \end{matrix} ; 1 \right)$$

应用 Thomae 变换（9.1）得到

$$I_2 = \frac{\Gamma(3-3d)}{(1-d)^2(5-5d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d)_j}{(2-d)_j} \frac{\Gamma(4-3d+j)}{\Gamma(5-3d+j)} \frac{\Gamma(2-d+k)}{\Gamma(5-4d+k)} \frac{\Gamma(5-3d+j)\Gamma(2-d+j)}{\Gamma(4-3d+j)\Gamma(3-d+j)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 3-3d, d+k \\ 3-d+j, 5-4d+k \end{matrix} ; 1 \right)$$

将超几何函数表示为求和形式，并经过大量求和运算后，我们最终得到

$$I_2 = \frac{\Gamma(1-d)}{2(1-d)^2} \frac{\Gamma(3-3d)}{\Gamma(6-5d)} \frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)} {}_4F_3\left(\begin{matrix} 1, d, 2-2d, 3-3d \\ 2-d, 3-2d, 4-4d \end{matrix} ; 1 \right)$$

合并 I_1 和 I_2 ，可得 c_5(7)

$$c_5(7) = \frac{\Gamma(1-d)^2}{2(1-d)^2} \frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(2-2d)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, d, 2-2d \\ 2-d, 3-2d \end{matrix} ; 1 \right) - \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)^2} \frac{\Gamma(3-3d)}{\Gamma(4-4d)} \frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)} {}_4F_3\left(\begin{matrix} 1, d, 2-2d, 3-3d \\ 2-d, 3-2d, 4-4d \end{matrix} ; 1 \right)$$

5.8 c_5的推导(8)

对于 c_5(8)，我们有

$$c_5(8) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_2-y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_3-y_4)^{-d} (y_1-y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_1-y_5)^{-d} (y_2-y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

利用 (1.4) 和变换 $y_4 = (y_3-y_5)z + y_5$ 得到

$$c_5(8) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_2-y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_1-y_5)^{-2d} (y_2-y_5)^{-d} (y_3-y_5)^{1-d} \int_0^1 (1-z)^{-d} \left(1 - \frac{y_3-y_5}{y_1-y_5} z\right)^{-d} dz\, dy_5\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

利用 (5.6) 计算关于 z 的积分，并将因子 $(y_1-y_5)^{-d}$ 写成求和形式，我们得到关于 y_5 的积分

$$\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2d+k)_j}{j!}(y_1)^{-2d-k-j}\int_0^{y_3}(y_2-y_5)^{-d}(y_3-y_5)^{1-d+k}(y_5)^j dy_5 =$$
$$=\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2d+k)_j\Gamma(2-d+k)}{\Gamma(3-d+j+k)}(y_1)^{-2d-k-j}(y_2)^{-d}(y_3)^{2-d+j+k}$$
$${}_2F_1\left(\begin{matrix}d,1+j\\3-d+j+k\end{matrix};\frac{y_3}{y_2}\right)$$

对 y_3 积分得

$$\frac{1}{(1-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2d+k)_j\Gamma(2-d+k)}{\Gamma(3-d+j+k)}(y_1)^{-2d-k-j}(y_2)^{-d}$$
$$\int_0^{y_2}(y_3)^{2-d+j+k}(y_2-y_3)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}d,1+j\\3-d+j+k\end{matrix};\frac{y_3}{y_2}\right)dy_3 =$$

$$=\frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(3-3d)}{\Gamma(3-2d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k(3-3d)_k}{(3-2d)_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2d+k)_j}{\Gamma(4-3d+j+k)}(y_1)^{-2d-k-j}(y_2)^{3-3d+j+k}$$

对 y_2 和 y_1 积分，最终得到

$$c_5(8)=\frac{\Gamma(1-d)^2}{3(1-d)}\frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(3-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,3-3d\\3-2d,4-3d\end{matrix};1\right)$$

5.9 $c_5(9)$ 的推导

对于 $c_5(9)$，我们有

$$c_5(9)=\int_0^1\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{-d}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_3-y_4)^{-d}$$
$$\int_0^{y_4}(y_2-y_5)^{-d}(y_4-y_5)^{-d}dy_5\,dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

对 y_5 的积分得

$$\int_0^{y_4}(y_2-y_5)^{-d}(y_4-y_5)^{-d}dy_5=\frac{1}{(1-d)}(y_2)^{-d}(y_4)^{1-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_4}{y_2}\right)$$

对于关于 y_4 的积分，我们得到

$$\frac{1}{(1-d)}(y_2)^{-d}\int_0^{y_3}(y_4)^{1-d}(y_3-y_4)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_4}{y_2}\right)dy_4 =$$
$$=\frac{1}{(1-d)}(y_2)^{-d}\frac{\Gamma(1-d)\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-2d)}(y_3)^{2-2d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_3}{y_2}\right)$$

对于关于 y_3 的积分，我们将因子 $(y_1 - y_3)^{-d}$ 写成求和，得到

$$\frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-2d)}(y_2)^{-d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{k!}(y_1)^{-d-k}\int_0^{y_2}(y_3)^{2-2d+k}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_3}{y_2}\right)dy_3$$
$$=\frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-2d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{k!}\frac{1}{(3-2d+k)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,3-2d+k\\3-2d,4-2d+k\end{matrix};1\right)(y_1)^{-d-k}(y_2)^{3-3d+k}$$

对于 y_2 上的积分，我们得到

$$\frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-2d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{k!}\frac{1}{(3-2d+k)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,3-2d+k\\3-2d,4-2d+k\end{matrix};1\right)(y_1)^{-d-k}$$
$$\int_0^{y_1}(y_2)^{3-3d+k}(y_1-y_2)^{-d}dy_2$$
$$=\frac{\Gamma(1-d)^2}{\Gamma(3-2d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{k!}\frac{1}{(3-2d+k)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,3-2d+k\\3-2d,4-2d+k\end{matrix};1\right)\frac{\Gamma(4-3d+k)}{\Gamma(5-4d+k)}(y_1)^{4-5d}$$

对 y_1 积分后，我们得到

$$c_5(9)=\frac{\Gamma(1-d)^2}{(5-5d)\Gamma(3-2d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{k!}\frac{1}{(3-2d+k)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,3-2d+k\\3-2d,4-2d+k\end{matrix};1\right)\frac{\Gamma(4-3d+k)}{\Gamma(5-4d+k)}$$

为完成求和，我们执行以下步骤

- 将超几何函数表示为关于 m 的求和。
- 计算对 k 的求和。结果是对 m 的求和以及一个超几何函数。

- 对超几何函数应用 Thomae 变换 (9.1)。
- 将超几何函数写成关于 k 的求和形式。
- 计算关于 m 的求和。
- 剩余部分是关于 k 的求和，可以将其写成一个超几何函数。

结果是

$$c_5(9)=\frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)}\frac{\Gamma(4-5d)\Gamma(2-2d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(4-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}d,1-d,2-2d\\2-d,4-4d\end{matrix};1\right)$$

这一结果与 c_5(2) 的结果相同。然而，起始积分不同。

5.10 c_5的推导(10)

对于 c_5(10)，我们有

$$c_5(10)=\int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}(y_2-y_3)^{-d|}\int_0^{y_3}(y_1-y_4)^{-d}$$
$$\int_0^{y_4}(y_2-y_5)^{-d}(y_4-y_5)^{-d}dy_5\,dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

对于 y_5 上的积分，我们得到

$$c_5(10) = \frac{1}{(1-d)} \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1 - y_3)^{-d} (y_2 - y_3)^{-d|} \\ \int_0^{y_3} (y_4)^{1-d} (y_1 - y_4)^{-d} \, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{y_4}{y_2} \right) dy_4 \, dy_3 \, dy_2 \, dy_1$$

将超几何函数写成关于 k 的求和以及关于 y_4 的积分，得到

$$c_5(10) = \frac{1}{(1-d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1)^{-d} (y_2)^{-d-k} (y_3)^{2-d+k} (y_1 - y_3)^{-d} (y_2 - y_3)^{-d|} \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} d, 2-d+k \\ 3-d+k \end{matrix}; \frac{y_3}{y_1} \right) dy_3 \, dy_2 \, dy_1$$

将超几何函数写成关于 j 的求和以及关于 y_3 的积分，得到

$$c_5(10) = \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(3-d)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \frac{(d)_j (2-d+k)_j}{(3-d)_k} \frac{(d)_j (2-d+k)_j}{(3-d+k)_j} \frac{1}{j!} \\ \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1)^{-d-j} (y_2)^{-d-k} (y_3)^{2-d+j+k} (y_1 - y_3)^{-d} (y_2 - y_3)^{-d} dy_3 \, dy_2 \, dy_1$$

对于三重积分，我们得到

$$\int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_1)^{-d-j} (y_2)^{-d-k} (y_3)^{2-d+j+k} (y_1 - y_3)^{-d} (y_2 - y_3)^{-d} dy_3 \, dy_2 \, dy_1 = \\ = \frac{\Gamma(1-d)}{(5-5d)} \frac{\Gamma(3-d+j+k)}{(4-3d+j)\Gamma(4-2d+j+k)} \, {}_3F_2\left(\begin{matrix} d, 4-3d+j, 3-d+j+k \\ 5-3d+j, 4-2d+j+k \end{matrix}; 1 \right)$$

应用 Thomae 变换 (9.2) 后，经过大量推导，可得 c_5(10) s

$$c_5(10) = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(2-2d)}{(1-d)(5-5d)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d)_k (d)_j (2-d+k)_j}{\Gamma(5-3d+j+k)} \frac{1}{j!} \, {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 2-2d, d+k \\ 2-d, 5-3d+j+k \end{matrix}; 1 \right)$$

为计算这些求和，我们进行以下步骤

- 将超几何函数写成关于 i 的求和形式。

- 先计算对 j 的求和，然后再计算对 k的求和..

- 剩下对 i 的求和，可以写成超几何函数。

结果是

$$c_5(10) = \frac{\Gamma(1-d)}{2(1-d)^2} \frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(6-5d)} \, {}_4F_3\left(\begin{matrix} 1, d, 2-2d, 3-3d \\ 2-d, 3-2d, 4-4d \end{matrix}; 1 \right)$$

这一结果 i 这与 c_5(5) 的结果相同。不过，起始积分不同。

5.11 推导 $c_5(11)$

对于 c_5(11)，我们有

$$c_5(11) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_1 - y_4)^{-d} (y_2 - y_4)^{-d} \int_0^{y_4} (y_1 - y_5)^{-d} (y_3 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_4\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

利用 (1.4) 和变换 $y_4 = (y_3 - y_5)z + y_5$ 得到

$$c_5(11) = \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{-d} \int_0^{y_3} (y_1 - y_5)^{-2d} (y_3 - y_5)^{1-d} (y_2 - y_5)^{-d} \int_0^1 \left(1 - \frac{y_3 - y_5}{y_1 - y_5} z\right)^{-d} \left(1 - \frac{y_3 - y_5}{y_2 - y_5} z\right)^{-d} dz\, dy_5\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

利用积分 (5.7)，得到 $c_5(11) = I_1 - I_2$，其中

$$I_1 = \frac{1}{(1-d)} \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} \int_0^{y_3} (y_2 - y_3)^{-d} (y_1 - y_5)^{-2d} (y_3 - y_5)^{-d} (y_2 - y_5)^{1-d} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{y_2 - y_5}{y_1 - y_5}\right) dy_5\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

$$I_2 = \frac{1}{(1-d)} \int_0^1 \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} (y_2 - y_3)^{1-2d} (y_1 - y_3)^{-d}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, d \\ 2-d \end{matrix}; \frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_3}\right) \int_0^{y_3} (y_1 - y_5)^{-d} (y_3 - y_5)^{-d} dy_5\, dy_3\, dy_2\, dy_1$$

5.11.1 I_1的推导。

依次对 $y_5 = y_3\, z_3$、$y_3 = y_2\, z_3$ 和 $y_2 = y_1\, z_2$ 作代换，对 y_1 积分，并将超几何函数写成求和形式，得到

$$I_1 = \frac{1}{(1-d)(5-5d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d)_k}{(2-d)_k} \int_0^1 \int_0^1 (1 - z_3)^{-d} (z_3)^{1-d} (1 - z_5)^{-d} (1 - z_3\, z_5)^{1-d+k} \int_0^1 (z_2)^{3-3d+k} (1 - z_2\, z_3\, z_5)^{-2d-k} dz_2\, dz_3\, dz_5$$

为求出积分和求和，我们进行以下步骤

- 对 z_2 积分得到一个超几何函数。- 将超几何函数写成关于 j 的求和。- 对 z_3 积分得到一个超几何函数。- 对 z_5 积分。- 计算关于 j 的求和。

- 还剩下关于 k 的求和，可以将其写成一个超几何函数。

结果是

$$I_1 = \frac{\Gamma(1-d)^2}{3(1-d)^2} \frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(2-2d)}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, d, 3-3d \\ 2-d, 4-3d \end{matrix}; 1\right)$$

5.11.2 I_2的推导。

对 y_5 的积分是已知的，因此我们得到

$$I_2 = \frac{1}{(1-d)^2}\int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1)^{-d}(y_3)^{1-d}(y_2-y_)^{1-2d}(y_1-y_3)^{-d} \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_2-y_3}{y_1-y_3}\right)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};\frac{y_3}{y_1}\right)dy_3\,dy_2\,dy_1$$

为求出积分，我们执行以下步骤

- 将超几何函数表示为关于 k 和 j 的求和

- 执行积分运算

- 计算关于 j 的求和

- 剩下关于 k 的求和，可以将其写成超几何函数

$$I_2 = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(4-5d)\Gamma(3-3d)}{2(1-d)^2\Gamma(6-5d)\Gamma(4-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,2-2d\\2-d,3-2d\end{matrix};1\right)$$

结合 I_1 和 I_2，得到 c_5(11)

$$c_5(11) = \frac{\Gamma(1-d)^2}{3(1-d)^2}\frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)\Gamma(2-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,3-3d\\2-d,4-3d\end{matrix};1\right) - \\ - \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(4-5d)\Gamma(3-3d)}{2(1-d)^2\Gamma(6-5d)\Gamma(4-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,2-2d\\2-d,3-2d\end{matrix};1\right)$$

5.12 推导 $c_5(12)$

对于 c_5(12)，我们有

$$c_5(12) = \int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}(y_2-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_2-y_4)^{-d} \\ \int_0^{y_4}(y_1-y_5)^{-d}(y_4-y_5)^{-d}dy_5\,dy_4\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

使用 (1.4) 和变换 $y_4 = (y_3-y_5)z+y_5$ 得到

$$c_5(12) = \int_0^1\int_0^{y_1}\int_0^{y_2}(y_1-y_3)^{-d}(y_2-y_3)^{-d}\int_0^{y_3}(y_1-y_5)^{-d}(y_3-y_5)^{1-d}(y_2-y_5)^{-d} \\ \int_0^1 z^{-d}\left(1-\frac{y_3-y_5}{y_2-y_5}z\right)^{-d}dz\,dy_5\,dy_3\,dy_2\,dy_1$$

对 z 的积分会得到一个超几何函数。

$$\int_0^1 z^{-d}\left(1-\frac{y_3-y_5}{y_2-y_5}z\right)^{-d}dz = \frac{1}{(1-d)}(y_3-y_5)^{1-d}(y_2-y_3)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};-\frac{y_3-y_5}{y_2-y_3}\right)$$

利用注5中的变换，将因子 $(1-z_2\,z_3\,z_5)^{-d}$ 写成关于 y_1 的求和与积分，可得

$$c_5(12)=\frac{1}{(1-d)(5-5d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{k!}\int_0^1\int_0^1 (z_2)^{3-3d+k}(1-z_2\,z_3)^{-d}(z_3)^{2-d+k}(1-z_3)^{-2d}$$
$$\int_0^1 (z_5)^{1-d}(1-z_5)^k\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};-\frac{z_3}{1-z_3}z_5\right)dz_5\,dz_3\,dz_2$$

对 z_2 和 z_5 的积分给出

$$\int_0^1 (z_2)^{3-3d+k}(1-z_2\,z_3)^{-d}dz_2=\frac{1}{(4-3d+k)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}d,4-3d+k\\5-3d+k\end{matrix};z_3\right)$$
$$\int_0^1 (z_5)^{1-d}(1-z_5)^k\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};-\frac{z_3}{1-z_3}z_5\right)dz_5=\frac{\Gamma(2-d)\Gamma(k+1)}{\Gamma(3-d+k)}(1-z_3)^d\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}2-d+k,d\\3-d+k\end{matrix};z_3\right)$$

经过代换后，剩余部分为

$$c_5(12)=\frac{1}{(5-5d)}\frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(3-d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\frac{1}{(4-3d+k)}$$
$$\int_0^1 (z_3)^{2-d+k}(1-z_3)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}2-d+k,d\\3-d+k\end{matrix};z_3\right)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}d,4-3d+k\\5-3d+k\end{matrix};z_3\right)dz_3$$

该积分已知 [2, 2.21.9.(12)]. 应用后得到

$$c_5(12)=\frac{2}{(5-5d)}\frac{\Gamma(2-2d)\Gamma(1-d)^3}{\Gamma(5-4d)}\frac{\Gamma(2d-2)}{\Gamma(d-1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(5-4d)_k}+$$
$$+\frac{\Gamma(1-d)}{(5-5d)}\frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(2-2d)\Gamma(d-1)}{\Gamma(3-2d)\Gamma(d)\Gamma(5-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,3-3d,2-2d\\3-2d,2-d\end{matrix};1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(5-4d)_k}$$

应用 th e Thomae 变换 (9.1)，并完成求和后，我们终于得到

$$c_5(12)=\frac{\Gamma(1-d)^3\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(6-5d)}\frac{\Gamma(2-2d)\Gamma(2d-1)}{\Gamma(d)}-$$
$$-\frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)}\frac{\Gamma(2d-1)}{\Gamma(2d)}\frac{\Gamma(3-3d)\Gamma(4-5d)}{\Gamma(4-4d)\Gamma(6-5d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,2d-1\\2-d,2d\end{matrix};1\right)$$

5.13 第五阶累积量

对于五阶累积量，我们使用 (5.1) 和 (5.3)。得到的是

$$\kappa_5(d)=3840\left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d)\right)^{5/2}\sum_{i=1}^{12}c_5(i)$$

c_5(1..12)的求和得到18项。其中，三项不含超几何函数，三项含有 a ${}_4F_3$ 超几何函数，另有十二项含有 a ${}_2F_1$ 超几何函数。含有 ${}_4F_3$ 函数的项彼此抵消，

不含超几何函数的项中也有两项彼此抵消。最终剩下六项。结果为

$$\kappa_5(d) = 384\left(\frac{1}{2}(1-2d)(1-d)\right)^{5/2}\ 10\,S$$

with

$$S\left[\frac{\Gamma(4-5d)}{\Gamma(6-5d)}\right]^{-1} = \frac{\Gamma(1-d)^4}{\Gamma(4-4d)} + \frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)\Gamma(2-2d)}\frac{\Gamma(3-3d)}{\Gamma(4-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}d, 1-d, 3-3d\\ 2-d, 4-4d\end{matrix};1\right) +$$
$$+\frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2-2d)}{(1-d)\Gamma(4-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}d, 1-d, 2-2d\\ 2-d, 4-4d\end{matrix};1\right) + \frac{\Gamma(1-d)^2}{6(1-d)^2\Gamma(2-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1, d, 3-3d\\ 3-2d, 4-3d\end{matrix};1\right) +$$
$$+\frac{2\Gamma(1-d)^2}{3(1-d)^2\Gamma(2-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1, d, 3-3d\\ 2-d, 4-3d\end{matrix};1\right) + \frac{\Gamma(1-d)^2}{2(1-d)^2\Gamma(2-2d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1, d, 2-2d\\ 2-d, 3-2d\end{matrix};1\right) \tag{5.8}$$

其中有 $0 \le d \le 0.5$。对于 $d = 0$，我们得到积分总和： $10\,S = 1$。该公式给出了 $\kappa_5(d)$与 d 对应的下表。此表给出的数值与 [5]中的表4数值相同。

d	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
κ_5	67.88	67.33	65.46	61.92	56.37	48.51	38.32	26.24	13.68	3.563	0

表3： κ 作为 d的函数时的取值。 κ_5 根据公式（5.8）计算。 .

下一幅图展示了该表的绘图结果。

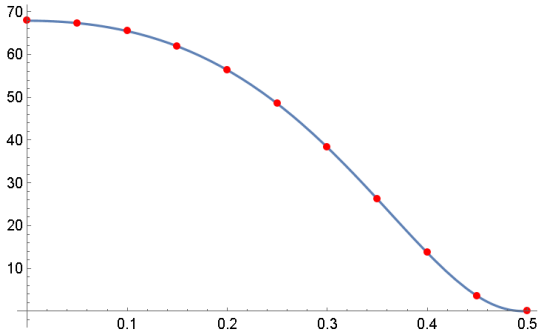


图4：五阶累积量 $\kappa_5(d)$ 与 d 的关系。实线来自公式（5.8），点号来自表3。

6 Veillette 和 Taqqu 计算四阶累积量的方法

Veilette 和 Taqqu 设计了一种利用递推方程计算累积量的方法。他们定义了算子

$$\big(\kappa_d f\big)(x) = \int_0^1 |x-u|^{-d} f(u)du$$

并给出递推方程

$$G_{1,d}(x) = \frac{(1-x)^{-d}}{(1-d)^{1/2}} \qquad G_{k,d}(x) = \big(\kappa_d G_{k-1,d}\big)(x) = \int_0^1 |x-u|^{-d} G_{k-1,d}(u)du \tag{6.1}$$

然后他们证明了对于因子 c_k

$$c_k = \int_0^1 G_{\mu,d}(x) G_{\nu,d}(x) dx$$

结合 $\mu + \nu = k$。由此，根据 (1.3) 可得累积量。对于 $k = 2$，3，4，5，我们得到

$$\begin{aligned}
c_2 &= \int_0^1 G_{1,d}(x) G_{1,d}(x) dx \\
c_3 &= \int_0^1 G_{1,d}(x) G_{2,d}(x) dx \\
c_4 &= \int_0^1 G_{1,d}(x) G_{3,d}(x) dx = \int_0^1 G_{2,d}(x) G_{2,d}(x) dx \qquad (6.2) \\
c_5 &= \int_0^1 G_{1,d}(x) G_{4,d}(x) dx = \int_0^1 G_{2,d}(x) G_{3,d}(x) dx \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

T要计算 c_k，我们必须计算 $G_{k,\ d}(x)$。对于 $k = 2$ Veillette 和 Taqqu 发 d

$$G_{2,d}(x) = \frac{x^{1-d}}{(1-d)^{3/2}} {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 2-d\end{matrix}; x\right) + \frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)^{1/2}\Gamma(2-2d)} (1-x)^{1-2d}$$

利用 (6.2) 计算 c_4 有两种方法。我们倾向于第一种，因为采用第二种方法会出现两个超几何函数乘积的积分，而这类积分非常难以计算。接下来，我们必须计算 $G_{3,\ d}$。

对于 $k = 3$，我们得到

$$\begin{aligned}
G_{3,d}(x) &= \int_0^1 |x-u|^{-d} G_{2,d}(u) du \\
&= \frac{1}{(1-d)^{3/2}} \int_0^1 |x-u|^{-d} u^{1-d} {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d \\ 2-d\end{matrix}; u\right) du + \\
&\qquad + \frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)^{1/2}\Gamma(2-2d)} \int_0^1 |x-u|^{-d} (1-u)^{1-2d} du \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

为计算这些积分，我们使用以下引理。

引理 1。*Le* 令 a, b, c, d, e 和 x 为实数。设 $c > a + b$, $0 < x < 1$ 和 $0 \le d \le 0.5$。则

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |x-u]^{-d} u^e {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b \\ c\end{matrix}; u\right) du = \\
&\qquad = \Gamma(1-d)\left(\frac{\Gamma(1+e)}{\Gamma(2-d+e)} + \frac{\Gamma(d-1-e)}{\Gamma(-e)}\right) x^{1-d+e} {}_3F_2\left(\begin{matrix}a, b, e+1 \\ c, 2-d+e\end{matrix}; x\right) + \\
&\qquad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1-d+e+m)} {}_2F_1\left(\begin{matrix}d-1-e-m, d \\ d-e-m\end{matrix}; x\right) \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

注:

$$\Gamma(1-d)\left(\frac{\Gamma(1+e)}{\Gamma(2-d+e)} + \frac{\Gamma(d-1-e)}{\Gamma(-e)}\right) = B(1-d, d-1-e) + B(1-d, 1+e)$$

其中 $B(a,\ b)$ 是贝塔函数。

证明。 由于绝对值的缘故，我们不得不将积分拆分开来

$$I(x)=\int_0^1 |x-u|^{-d}\,u^e\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};u\right)du=$$
$$=\int_0^x (x-u)^{-d}\,u^e\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};u\right)du+\int_x^1 (u-x)^{-d}\,u^e\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};u\right)du$$

第一个积分是已知的。对于第二个积分，我们将超几何函数写成求和形式，并交换积分与求和的次序。结果为

$$\begin{aligned}I(x)=&\frac{\Gamma(1+e)\Gamma(1-d)}{\Gamma(2-d+e)}x^{1-d+e}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b,e+1\\c,2-d+e\end{matrix};x\right)+\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{1}{k!}\frac{1}{(1-d+e+k)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}d-1-e-k,d\\d-e-k\end{matrix};x\right)+\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{1}{k!}x^{1-d+e+k}\frac{\Gamma(1-d)\Gamma(d-1-e-k)}{\Gamma(-e-k)}\end{aligned}$$

对于第二个求和，我们得到

$$\begin{aligned}S=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{1}{k!}x^{1-d+e+k}\frac{\Gamma(1-d)\Gamma(d-1-e-k)}{\Gamma(-e-k)}=\\&=\Gamma(1-d)\frac{\Gamma(d-1-e)}{\Gamma(-e)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{1}{k!}x^{1-d+e+k}\frac{(1+e)_k}{(2-d+e)_k}=\\&=\Gamma(1-d)\frac{\Gamma(d-1-e)}{\Gamma(-e)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b,e+1\\c,2-d+e\end{matrix};x\right)\end{aligned}$$

将 $I(x)$ 代换后，引理得证 □

引理 2. 设 d 和 x 为实数。设 p 为整数。设 $0<x<1$ 和 $0\le d\le 0.5$。则

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x-u|^{-d}(1-u)^{p-(p+1)d}du=&\frac{\Gamma(1-d)\Gamma((p+1)(1-d))}{\Gamma((p+2)(1-d))}(1-x)^{(p+1)-(p+2)d}+\\&+\frac{1}{(1-d)}x^{1-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,(p+1)d-1\\2-d\end{matrix};x\right)\end{aligned}$$

证明。 由于绝对值的缘故，我们不得不将积分拆开

$$\int_0^1 |x-u|^{-d}(1-u)^{p-(p+1)d}du=$$
$$=\int_0^x (x-u)^{-d}(1-u)^{p-(p+1)d}du+\int_x^1 (u-x)^{-d}(1-u)^{p-(p+1)d}du$$

这些积分都是标准积分，由此即可得到所需结果。 □

将引理 1 应用于式 (6.4) 的第一个积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-d)^{3/2}}\int_0^1 |x-u]^{-d}u^{1-d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\2-d\end{matrix};u\right)du = \\ = \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)^{3/2}}\left(\frac{\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-2d)}+\frac{\Gamma(2d-2)}{\Gamma(d-1)}\right)x^{2-2d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\3-2d\end{matrix};x\right)+ \\ + \frac{1}{(1-d)^{3/2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(d)_m}{(2-d)_m}\frac{1}{(2-2d+m)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}2d-2-m,d\\2d-1-m\end{matrix};x\right)\end{aligned}$$

将引理 2 应用于 (6.4) 第二项中的积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)^{1/2}\Gamma(2-2d)}\int_0^1 |x-u|^{-d}(1-u)^{1-2d}du = \\ = \frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)^{3/2}\Gamma(2-2d)}x^{1-d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,2d-1\\2-d\end{matrix};x\right)+\frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)^{1/2}\Gamma(3-3d)}(1-x)^{2-3d}\end{aligned}$$

结合这些结果，得到

$$\begin{aligned}G_{3,d}(x) = \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)^{3/2}}\left(\frac{\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-2d)}+\frac{\Gamma(2d-2)}{\Gamma(d-1)}\right)x^{2-2d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\3-2d\end{matrix};x\right)+ \\ + \frac{1}{(1-d)^{3/2}}\frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\frac{(2-2d)_k}{(3-2d)_k}{}_2F_1\left(\begin{matrix}2d-2-k,d\\2d-1-k\end{matrix};x\right)+ \\ + \frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)^{3/2}\Gamma(2-2d)}x^{1-d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,2d-1\\2-d\end{matrix};x\right)+\frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)^{1/2}\Gamma(3-3d)}(1-x)^{2-3d} \quad (6.6)\end{aligned}$$

利用 $G_{3,\ d}(x)$，我们可以用 (6.2) 计算 c_4。代入 (6.2)，得到 c_4 的

$$\begin{aligned}c_4 = \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)^{3/2}}\left(\frac{\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-2d)}+\frac{\Gamma(2d-2)}{\Gamma(d-1)}\right)\int_0^1 x^{2-2d}(1-x)^{-d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\3-2d\end{matrix};x\right)dx+ \\ + \frac{1}{2(1-d)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\frac{(2-2d)_k}{(3-2d)_k}\int_0^1(1-x)^{-d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}2d-2-k,d\\2d-1-k\end{matrix};x\right)dx+ \\ + \frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)^2\Gamma(2-2d)}\int_0^1 x^{1-d}(1-x)^{-d}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,2d-1\\2-d\end{matrix};x\right)dx+\frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)\Gamma(3-3d)}\int_0^1(1-x)^{2-4d}dx\end{aligned}$$

所有积分都是标准积分。经过一些整理，积分得到

$$\begin{aligned}c_4 = \frac{1}{2(1-d)^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\frac{(2-2d)_k}{(3-2d)_k}{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,2d-2-k\\2-d,2d-1-k\end{matrix};1\right)+ \\ + \frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)(3-4d)\Gamma(3-3d)}-\frac{\Gamma(1-d)^2\Gamma(2d-2)\Gamma(3-2d)}{(1-d)(3-4d)\Gamma(d)\Gamma(3-3d)}+ \\ + \frac{\Gamma(1-d)^4}{(1-d)(3-4d)\Gamma(2-2d)^2}+\frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)(3-4d\Gamma(3-3d)} \quad (6.7)\end{aligned}$$

剩下的部分　　是第一项中的求和。应用 Thomae 变换（9.1　　）

得

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\frac{(2-2d)_k}{(3-2d)_k}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,2d-2-k\\2-d,2d-1-k\end{matrix};1\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\frac{(2-2d)_k}{(3-2d)_k}\Gamma(2-2d)\Gamma(2d-1-k)\frac{1}{\Gamma(-k)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2-2d,1-d,2d-2-k\\-k,2-d\end{matrix};1\right)$$

当 M 为非负整数时，有一个众所周知的变换

$$\frac{1}{\Gamma(-M)}\,{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_0,\dots,a_p\\-M,b_2,\dots,b_p\end{matrix};x\right)=$$
$$=\frac{x^{M+1}(a_0)_{M+1}\dots(a_p)_{M+1}}{\Gamma(M+2)(b_2)_{M+1}\dots(b_p)_{M+1}}\,{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_0+M+1,\dots,a_p+M+1\\M+2,b_2+M+1,\dots,b_p+M+1\end{matrix};x\right)$$

应用后得到

$$S=\frac{(1-d)\Gamma(2d-1)\Gamma(3-2d)}{(2-d)}\frac{\Gamma(2d-1)}{\Gamma(2d-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k(3-2d)_k}{(2)_k(3-d)_k}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}3-2d+k,2-d+k,2d-1\\2+k,3-d+k\end{matrix};1\right)$$

应用 Thomae 变换 (9.2) 得到

$$S=\frac{4(1-d)^3\Gamma(1-2d)}{(2-d)\Gamma(3-2d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(3-d)_k}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,d,2d-1\\2d,3-d+k\end{matrix};1\right)$$

将超几何函数写成关于 m的求和，交换求和顺序并对 k 求和，得到

$$S=\frac{(1-d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(2-2d)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2d-1)_m(2-2d)_m(d)_m}{(2d)_m(3-2d)_m(2-d)_m}\tag{6.8}$$

该求和可以写成一个 ${}_4F_3$ 超几何函数，因此得到

$$S=\frac{(1-d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(2-2d)}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}2d-1,2-2d,1,d\\2d,3-2d,2-d\end{matrix};1\right)$$

一个特殊 ${}_4F_3$ 超几何函数的已知性质为

$${}_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,c,d\\a+1,b+1,e\end{matrix};1\right)=\frac{b(a-e)}{e(a-b)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,c,d\\a+1,e+1\end{matrix};1\right)-\frac{a(b-e)}{e(a-b)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}b,c,d\\b+1,e+1\end{matrix};1\right)$$

应用得出

$${}_4F_3\left(\begin{matrix}2d-1,2-2d,1,d\\2d,3-2d,2-d\end{matrix};1\right)=$$
$$=\frac{(2-2d)(3-3d)}{(2-d)(3-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2d-1,1,d\\2d,3-d\end{matrix};1\right)+\frac{d\,(1-2d)}{(2-d)(3-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2-2d,1,d\\3-2d,3-d\end{matrix};1\right)$$

然而，使用 Mathematica 对式 (6.8) 求和，得到

$${}_4F_3\left(\begin{matrix}2d-1,2-2d,1,d\\2d,3-2d,2-d\end{matrix};1\right)=$$
$$=\frac{(1-d)}{(3-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2-2d,1,d\\3-2d,2-d\end{matrix};1\right)+\frac{2\,(1-d)^2}{(1-2d)(3-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2d-1,1,d\\2d,2-d\end{matrix};1\right)\tag{6.9}$$

很难证明这两个结果相等。我们将此留给读者。对第二个超几何函数使用 Thomae 变换 (9.3) 由 (6.9) 得到

$$S = \frac{2(1-d)}{(3-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2-2d,1,d\\3-2d,2-d\end{matrix};1\right) + \frac{\Gamma(2-d)^2\Gamma(2d)\Gamma(3-2d)}{(3-4d)(1-2d)\Gamma(3-3d)\Gamma(d)}$$

将 (6.7) 代换进去，经过大量推导后得到

$$\begin{aligned} c_4 = {} & \frac{1}{(1-d)^3(3-4d)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2-2d,1,d\\3-2d,2-d\end{matrix};1\right) + \\ & + \frac{\Gamma(1-d)^4}{(3-4d)(1-d)\Gamma(2-2d)^2} + \frac{2\Gamma(1-d)^3}{(3-4d)(1-d)\Gamma(3-3d)} \end{aligned}$$

这与第 4 节中的结果相同。

7 The Veillette 和 Taqqu 计算五阶累积量的方法

为了使用 Veillette 和 Taqqu 的方法计算五阶累积量，我们采用 (6.3) 的第一种可能形式

$$c_5 = \int_0^1 G_{1,d}(x)G_{4,d}(x)dx = \frac{1}{(1-d)^{1/2}}\int_0^1 (1-x)^{-d}\int_0^1 |x-u|^{-d}G_{3,d}(u)dudx$$

对于$G_{3,\ d}(x)$，我们使用 (6.6)。最后一个积分为 $G_{4,\ d}(x)$。我们得到

$$\begin{aligned} G_{4,d}(x) = {} & \frac{\Gamma(1-d)}{(1-d)^{3/2}}\left(\frac{\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-2d)} + \frac{\Gamma(2d-2)}{\Gamma(d-1)}\right)I_1(x) \\ & + \frac{1}{(1-d)^{3/2}}\frac{\Gamma(2-2d)}{\Gamma(3-2d)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(d)_m}{(2-d)_m}\frac{(2-2d)_m}{(3-2d)_m}I_2(x) + \\ & + \frac{\Gamma(1-d)^2}{(1-d)^{3/2}\Gamma(2-2d)}I_3(x) + \frac{\Gamma(1-d)^3}{(1-d)^{1/2}\Gamma(3-3d)}I_4(x) \end{aligned}$$

with

$$I_1(x) = \int_0^1 |x-u|^{-d}u^{2-2d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\3-2d\end{matrix};u\right)du \qquad I_2(x) = \int_0^1 |x-u|^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}2d-2-k,d\\2d-1-k\end{matrix};u\right)du$$

$$I_3(x) = \int_0^1 |x-u|^{-d}u^{1-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,2d-1\\2-d\end{matrix};u\right)du \qquad I_4(x) = \int_0^1 |x-u|^{-d}(1-u)^{2-3d}du$$

对于包含超几何函数的积分，我们使用引理 1。

$$\begin{aligned} I_1(x) = \Gamma(1-d)\left(\frac{\Gamma(3-2d)}{\Gamma(4-3d)} + \frac{\Gamma(3d-3)}{\Gamma(2d-2)}\right)x^{3-3d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,d\\4-3d\end{matrix};x\right) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d)_k}{(2-d)_k}\frac{1}{(3-3d+k)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}3d-3-k,d\\3d-2-k\end{matrix};x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(x) = \frac{1}{(1-d)}x^{1-d}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2d-2-m,d,1\\2d-1-m,2-d\end{matrix};x\right) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2d-2-m)_k(d)_k}{(2d-1-m)_k}\frac{1}{k!}\frac{1}{(3-3d+k)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}3d-3-k,d\\3d-2-k\end{matrix};x\right) \end{aligned}$$

$$I_3(x) = \Gamma(1-d)\left(\frac{\Gamma(2-d)}{\Gamma(3-2d)} + \frac{\Gamma(2d-2)}{\Gamma(d-1)}\right) x^{2-2d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 2d-1\\ 3-2d\end{matrix}; x\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2d-1)_k}{(2-d)_k} \frac{1}{(2-2d+k)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}2d-2-k, d\\ 2d-2-k\end{matrix}; x\right)$$

将引理 2 应用于 $I_4(x)$，可得

$$I_4(x) = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(3-3d)}{\Gamma(4-4d)}(1-x)^{3-4d} + \frac{1}{(1-d)} x^{1-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}3d-2, 1\\ 2-d\end{matrix}; x\right)$$

为了计算 c_5，我们必须计算 $(1-x)^{-d}$ 与 $I_{1,\ 2,\ 3,\ 4}(x)$ 的积分。我们得到

$$\int_0^1 (1-x)^{-d} I_1(x)dx = A_1 \int_0^1 (1-x)^{-d} x^{3-3d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1, d\\ 4-3d\end{matrix}; x\right) dx + \sum_{k=0}^{\infty} B_1(k) \int_0^1 (1-x)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}3d-3-k, d\\ 3d-2-k\end{matrix}; x\right) dx$$

$$\int_0^1 (1-x)^{-d} I_2(x)dx = \frac{1}{(1-d)} x^{1-d} \int_0^1 (1-x)^{-d}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2d-2-m, d, 1\\ 2d-1-m, 2-d\end{matrix}; x\right) dx + \sum_{k=0}^{\infty} B_2(k) \int_0^1 (1-x)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}3d-3-k, d\\ 3d-2-k\end{matrix}; x\right) dx$$

$$\int_0^1 (1-x)^{-d} I_3(x)dx = A_2 \int_0^1 (1-x)^{-d} x^{2-2d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 2d-1\\ 3-2d\end{matrix}; x\right) dx + \sum_{k=0}^{\infty} B_3(k) \int_0^1 (1-x)^{-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}2d-2-k, d\\ 2d-2-k\end{matrix}; x\right) dx$$

$$\int_0^1 (1-x)^{-d} I_4(x)dx = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(3-3d)}{\Gamma(4-4d)} \int_0^1 (1-x)^{3-5d} dx + \frac{1}{(1-d)} \int_0^1 (1-x)^{-d} x^{1-d}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}3d-2, 1\\ 2-d\end{matrix}; x\right) dx$$

对于 c_5，我们必须将所有积分相加。这些积分都是标准积分。大多数项都很简单。然而，仍有四项包含超几何函数的求和。这些项非常复杂。很难证明这与第 5 节中的结果相同。因此，这里不再进一步展开。

8 讨论

本文讨论了两种计算 Rosenblatt 分布累积量的方法。两种方法都需要计算积分。最终得到的是一个包含超几何函数的公式。为了比较这两种方法，我们考察确定 c_k所用的积分数量。本文以 c_5 的计算为例进行讨论。在 Veillette

和 Taqqu 的方法中，还必须知道所有先前的 c_k 。这里假设三阶累积量的公式已知。此外，还会用到引理。然后需要计算 c_4 4 个积分。对于 c_5 ，需要计算 8 个积分。总计 12 个积分。这些都是标准积分。

直接法不要求已知所有先前的 c_k 。原则上，必须为 c_5计算 60 个积分。这些都是标准积分，而且许多积分彼此相同。实际上，所需计算的积分会少得多。

总之，看来两种方法中所有待求的积分都相对简单。剩下的问题是涉及超几何函数的求和数量。与直接法相比，Veillette 和 Taqqu 的方法在这方面要困难得多。请注意，对于 c_6 ，有 720 个可能的区域，其中只有 60 个区域保留下来。这就产生了 360 个积分！我们正在设法用计算机程序自动完成计算。

9 附录：一些 Thomae 变换

对于自变量为 1 的 ${}_3F_2$ 超几何函数，有许多 Thomae 变换 [6]。以下是本文中使用的一些例子。在所有公式中，我们可以互换 a、b和 c，也可以互换 e 和 f。

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b,c\\e,f\end{matrix};1\right)=\frac{\Gamma(e+f-a-b-c)\Gamma(f)}{\Gamma(f-a)]\Gamma(e+f-b-c)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,e-c,e-b\\e+f-b-c,e\end{matrix};1\right) \tag{9.1} $$

$$ \begin{aligned}{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b,c\\e,f\end{matrix};1\right)=&\frac{\Gamma(e+f-a-b-c)\Gamma(e)\Gamma(f)}{\Gamma(a)\Gamma(e-f+a-c)\Gamma(e+f-a-b)}\\&{}_3F_2\left(\begin{matrix}e+f-a-b-c,f-a,e-a\\e+f-a-c,e+f-a-b\end{matrix};1\right)\end{aligned} \tag{9.2} $$

$$ \begin{aligned}{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b,c\\e,f\end{matrix};1\right)=&\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(f)\Gamma(a+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(f-a)\Gamma(a-c+1)}-\\&-\frac{a\,\Gamma(1-c)\Gamma(f)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(f-b)(b-a)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}b,b-f+1,b-a\\b-a+1,b-c+1\end{matrix};1\right)\end{aligned} \tag{9.3} $$

参考文献

[1]Diekema, E. *Rosenblatt* 分布四阶累积量的精确公式.arXiv:2305.03600, 2023.[2] Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., Marichev, O.I.积分与级数，第 *3* 卷：更多特殊函数. Gordon and Breach, 1990.[3] Tudor, C.A. *Rosenblatt* 过程分析. (2–8) ESAIM Probab.Stat. 12 230–257.MR2374640.[4] Veilette, M.S., Taqqu, M.S.*Rosenblatt* 分布的性质与数值计算. Bernoulli 19(3) (2013),982–1005.[5]Veilette, M.S., Taqqu, M.S. 《*Rosenblatt* 分布的性质与数值计算》补充材料.(2012), DOI:10.3150/12-BEJ4218SUPP.[6] Slater, L.J. 广义超几何函数.Cambridge university press,1966.