arXiv:2305.03620v1 [hep-th] 5 May 2023

具有 $\mathcal{Z}_r$ 对称性的可积自旋链的标度行为

格列布·A·科托索夫[1] **和谢尔盖·L·卢基扬诺夫**[2]

[1]汉诺威莱布尼茨大学理论物理研究所，¨阿佩尔街 2 号，¨30167 汉诺威，德国

[2]NHETC，罗格斯大学物理与天文学系，美国新泽西州皮斯卡塔韦市，邮编 08855-0849

摘要

本文的研究对象是与具有额外 $\mathcal{Z}_r$ 对称性的非均匀六顶点模型相关联的一维量子自旋 - 1 2 链。本文在模型处于临界状态的某个参数域内对其进行研究。在 ODE/IQFT 方法框架下，本文提出了一类常微分方程和一个量子化条件，用以描述该系统的标度极限。研究发现，支配临界行为的共形场论具有一些显著特征，其中包括共形初级态的无限简并，以及在偶数 r 情形下谱中存在连续分量。

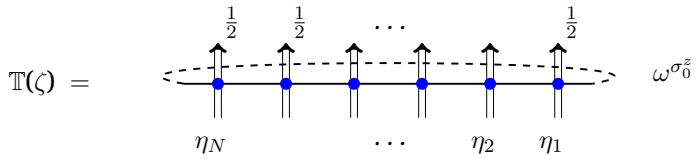


图 1：非均匀六顶点模型转移矩阵的图示。施加了扭曲边界条件，如因子 $\omega^{\sigma_0^z}$ 所示，其中 σ_0^z 是作用于二维辅助空间的泡利矩阵。

1 引言

早期对二维经典统计力学中精确可解模型的兴趣，很大程度上源于对临界现象的研究。从伊辛模型出发，精确解对于标度假设和普适性等关键概念的发展至关重要。后者的形成深受六顶点模型 [1] 的启发。在标准参数化下，其局部玻尔兹曼权重取决于 q，有时也称为各向异性参数。只要 q 是模为一的数，即 $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$，该统计系统就是临界的；而且事实证明，相应的临界指数取决于 $\gamma \in (0,\ \pi]$。这与人们最初对普适性的理解相矛盾。借助量子场论（QFT）的框架，这一问题得到澄清：它是临界点的一种精确边缘形变。人们认识到，六顶点模型的普适行为由无质量高斯共形场论支配，其中基本玻色场被紧化到半径为$\sqrt{2\gamma/\pi}$ [2–4]的圆上。

在文献 [5], 中，Baxter 引入了一种多参数统计系统，它是六顶点模型的推广，并证明该系统可通过 Bethe Ansatz 技术求解。相应的代数方程组形式如下

$$\prod_{J=1}^{N} \frac{\eta_J + q^{+1}\,\zeta_m}{\eta_J + q^{-1}\,\zeta_m} = -\omega^2\, q^{2S^z} \prod_{j=1}^{M} \frac{\zeta_j - q^{+2}\,\zeta_m}{\zeta_j - q^{-2}\,\zeta_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, M,\quad S^z = \tfrac{N}{2} - M \geq 0\,). \tag{1.1}$$

得到一个解 $\{\zeta_m\}_{m=1}^{M}$ 后，可以计算对易族中所有算子的本征值，其中包括图 1 中示意性描绘的单行转移矩阵。

这些参数包括各向异性 $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ 以及一组复数 $\{\eta_J\}_{J=1}^{N}$，后者称为非均匀参数，并假定它们均为固定值。此外，贝特 Ansatz 方程还涉及参数 ω。后者源于在晶格上施加所谓的准周期边界条件；对于周期性情形，有 $\omega = 1$。当这些参数满足某些条件时，晶格系统会呈现出可由共形场论描述的临界行为。我们假设格点数 N 可被 r 整除，并且非均匀参数满足 r格点周期性条件

$$\eta_{J+r} = \eta_J \qquad (J = 1, 2, \ldots, N - r\,;\ N/r \in \mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

以确保连续理论具有平移不变性。在标度极限 $N \to \infty$，同时保持 r 固定。

研究标度极限时，切换到哈密顿量图像会很有帮助；其中，哈密顿量 $\mathbb{H}$ 起着核心作用。后者属于算子对易族，而且可以表示为 r 行传递矩阵的对数导数（详情参见参考文献 [6] 第 6.4 节）。对于齐次模型，η_J 相同，且不失一般性可设为 1，此时 $\mathbb{H}$ 与以下模型的哈密顿量一致：

海森堡 XXZ 自旋 - 1 2 链：

$$\mathbb{H}\,|_{r=1} = -\frac{1}{2\sin(\gamma)}\sum_{m=1}^{N}\Big(\sigma_m^x\sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y\sigma_{m+1}^y + \cos(\gamma)\left(\sigma_m^z\sigma_{m+1}^z - \hat{\mathbf{1}}\right)\Big)\,. \tag{1.3}$$

还应补充准周期性边界条件 [4]

$$\sigma_{N+m}^x \pm \mathrm{i}\,\sigma_{N+m}^y = \omega^{\pm 2}\left(\,\sigma_m^x \pm \mathrm{i}\,\sigma_m^y\,\right), \qquad\qquad \sigma_{N+m}^z = \sigma_m^z\,. \tag{1.4}$$

对于 $r=2$，有两个非均匀参数 η_1、η_2，但总可以将问题限制在 $\eta_2=\eta_1^{-1}$ 的情形。在参数化 $\eta_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 下，哈密顿量写作 [8,12][1]

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}\,|_{r=2} \;=\;& \frac{\cos(\gamma)}{2\sin(\gamma-\alpha)\,\sin(\gamma+\alpha)}\sum_{m=1}^{N}\Bigg[\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(\gamma)}\left(\,\sigma_m^x\,\sigma_{m+2}^x + \sigma_m^y\,\sigma_{m+2}^y + \sigma_m^z\,\sigma_{m+2}^z - \hat{\mathbf{1}}\,\right)\\
-\;& 2\sin(\gamma)\left(\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos(\gamma)}\left(\sigma_m^x\,\sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y\,\sigma_{m+1}^y\right) + \sigma_m^z\,\sigma_{m+1}^z - \hat{\mathbf{1}}\right) - \mathrm{i}\sin^2(\alpha)\left(\sigma_{m+2}^z - \sigma_{m-1}^z\right)\\
\times\;& \left(\sigma_m^x\sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y\sigma_{m+1}^y\right) + (-1)^m\sin(2\alpha)\,\Big(\tan(\gamma)\left(\sigma_m^x\sigma_{m+1}^y - \sigma_m^y\sigma_{m+1}^x\right)\\
+\;& \frac{\mathrm{i}}{2\cos(\gamma)}\left(\sigma_m^x\,\sigma_{m+2}^y - \sigma_m^y\sigma_{m+2}^x\right)\sigma_{m+1}^z - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\sigma_m^x\,\sigma_{m+1}^y - \sigma_m^y\sigma_{m+1}^x\right)\left(\sigma_{m+2}^z - \sigma_{m-1}^z\right)\Big)\Bigg]
\end{aligned} \tag{1.5}$$

并且满足上述准周期性边界条件。当 $r>2$ 时，$\mathbb{H}$ 的显式公式将变得繁杂，且不够直观。该公式涉及对若干项求和，这些项描述了最多 $r+1$ 个相邻自旋之间的相互作用。所有此类哈密顿量都与总自旋算子的 z-投影算子对易。

$$\mathbb{S}^z = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\sigma_m^z\,: \qquad\qquad [\,\mathbb{S}^z,\mathbb{H}\,] = 0\,. \tag{1.6}$$

场论描述的是那些激发态，其相对于基态的能量足够低。一般晶格系统的完整相图，包括对临界曲面的识别，目前尚不清楚。自 Jacobsen 和 Saleur 的开创性论文 [7]，以来，迄今为止已研究的临界模型实例均对应于各向异性参数为模长为 1 的情形，换言之，γ 为实数，且可以取自如下范围

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\,: \qquad\qquad \gamma\in(0,\pi]\,. \tag{1.7}$$

同样，非均匀参数也是模为 1 的，$|\eta_J|=1$，并且不失一般性，总可以假设

$$\prod_{J=1}^{r}\eta_J = 1\,. \tag{1.8}$$

如前所述，对于 $r=1$，在施加准周期边界条件时，模型的临界行为由无质量紧致玻色场描述。对于 $r=2$，模型已经呈现出不同类型的临界行为，而（晶格哈密顿量 (1.5) 的参数）平面（γ，α）中的相图如图 2 所示。

不同相位已体现在基态贝特根的一般分布模式中。对于均匀模型，所有 $\{\zeta_m\}$ 都是实数且为正。实际上，这要求扭转参数满足以下条件：

$$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mathtt{k}}\,, \qquad\qquad \mathtt{k}\in(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}] \tag{1.9}$$

[1]在 [8] 中给出的哈密顿量对应于情形 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，而参考文献 [12]中的哈密顿量则可通过相似变换与 (1.5) 联系起来。

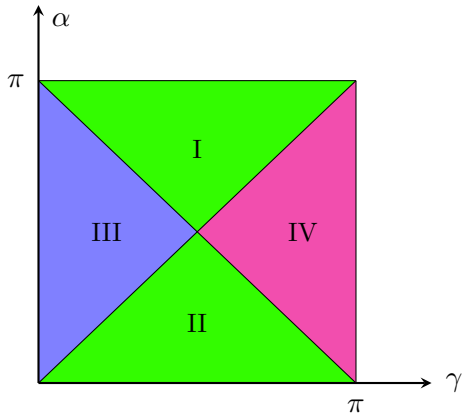


图 2：模型 (1.5) 的相图，其中 γ，α 为位于区间 (0，π]内的实数。相位 I 和 II 对应无质量紧致玻色场，而 III 与二维黑洞 σ 模型 [7–14] 有关。在参数域 IV 中，统计系统的临界行为由一个共形场论支配，该共形场论由一个无质量紧致玻色子和两个马约拉纳费米子组成 [15, 16]。

当 |k| 足够小时。在图 3 中，展示了情形 $r = 2$下相位 III 和 IV 的贝特根在 $\beta \equiv -\frac{1}{2}\log(\zeta)$ 复平面上的典型分布。一个重要区别是，对于相位 III，贝特根恰好沿着直线 $\Im m(\beta) = 0, \frac{\pi}{2}$ 聚集，与非齐次参数 α 的取值无关（例如参见参考文献 [12]）。对于相位 IV，贝特根也沿着两条直线聚集，但这两条直线取决于 α，其形式为 $\Im m(\beta) = \pm\frac{1}{2}\alpha$ （例如参见参考文献 [16]）。

$r > 2$ 的相图总体而言尚待绘制。本文将研究该模型在区域 $0 < \gamma < \frac{\pi}{r}$ 内的普适行为。结果表明，与情形 $r = 1$，2 相比，它呈现出定性上的新特征。特别是，基态的贝特根分布不会聚集在 $\Im m(\beta)$ 取固定值的直线上，而是聚集在复 β 平面中的某个轨迹上，该轨迹取决于非均匀参数的取值（示意见图 4）。例外情况是

$$\eta_J = (-1)^r \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{r}(2J-1)} \,, \tag{1.10}$$

其中晶格模型具有额外的 $\mathcal{Z}_r$ 不变性。除其他方面外，这种对称性还体现在贝特根沿着直线聚集。

$$\Im m(\beta_j) = 0 \,, \ \frac{\pi}{r} \,, \ \frac{2\pi}{r} \,, \ldots, \ \frac{(r-1)\pi}{r} \qquad (\mathrm{mod}\ \pi) \,. \tag{1.11}$$

研究可积晶格系统临界行为的最有效方法基于常微分方程/量子场论对应 [17–20]。文献 [21] 对 XXZ 自旋 - 1 2 链展示了这一方法，而文献 [14] 则针对图 2 中第 III 相的情形 $r = 2$ 展示了这一方法。文献 [16]，提出了适用于具有 $(1 - \frac{1}{r})\pi < \gamma < \pi$ 的非均匀六顶点模型的常微分方程/量子场论对应。

在本文中，我们提出一组微分方程，用于描述满足准周期边界条件 (1.4)、(1.9) 的 $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链在非均匀参数取值为 (1.10) 时的标度极限，以及

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} \ : \qquad 0 < \gamma < \frac{\pi}{r} \,. \tag{1.12}$$

事实证明，这种分析比 $\mathcal{Z}_2$ 情形更为复杂，临界行为的详细研究留待未来开展。

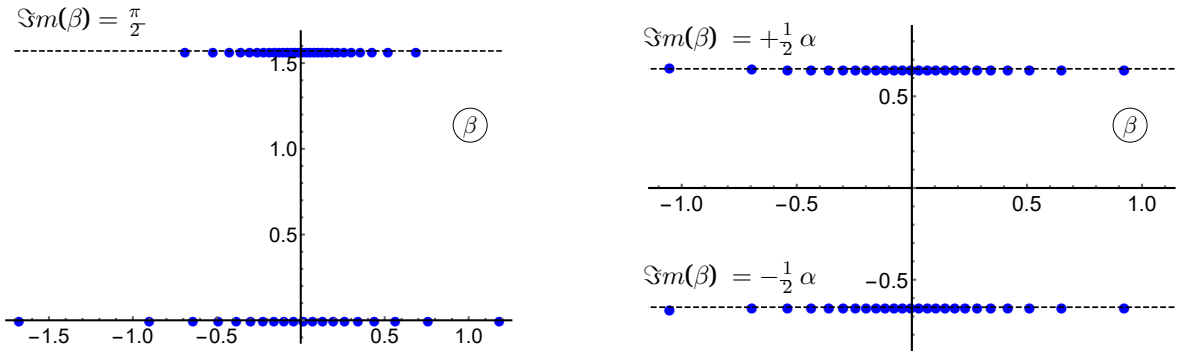


图 3：哈密顿量 (1.5) 的基态 ($S^z = 0$) 的贝特根典型分布显示在复 β平面上，其中 $\beta = -\frac{1}{2}\log(\zeta)$。对于左图，参数取为 $(\gamma, \alpha) = (\frac{43\pi}{200}, 13\,10)$，因此该模型处于图 2 所示的临界相 III。对于右图 $(\gamma, \alpha) = (\frac{143\pi}{200}, 13\,10)$，对应于相 IV。格点数 $N = 100$ 以及扭转参数 k（通过 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mathrm{k}}$ 进入边界条件 (1.4)）被设为 $\mathrm{k} = \frac{1}{10}$。

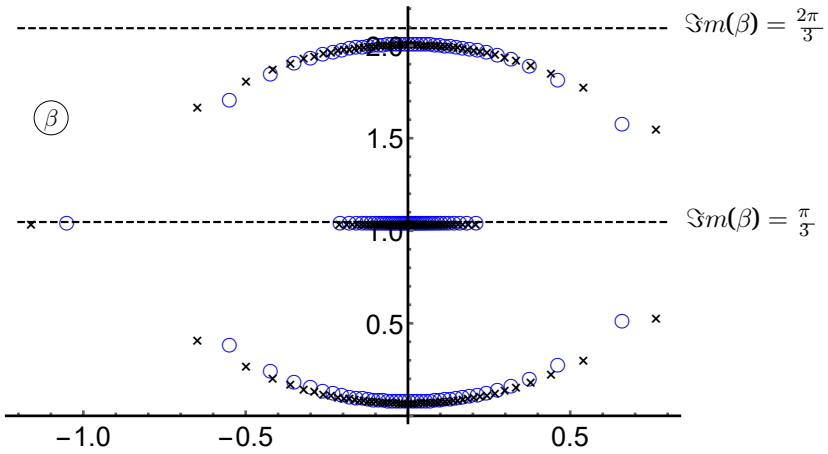


图 4：自旋链哈密顿量 $\mathbb{H}$在 $r = 3$、 $S^z = 0$扇区中基态的贝特根 $\beta_j = -\frac{1}{2}\log(\zeta_j)$ 分布图。非均匀参数设为 $\eta_1 = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$、 $\eta_2 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\mathrm{i}3}\epsilon}$和 $\eta_3 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\mathrm{i}3}(1-\epsilon)}$，其中 $\epsilon = \frac{3}{40}$。蓝色空心圆对应的格点数为 $N = 240$，黑色叉号对应的格点数为 $N = 324$。其余参数取为 $\gamma = \frac{\pi}{5}, \mathrm{k} = \frac{1}{20}$。

2 数值研究结果

这里介绍我们对处于（1.12）所示区域、具有 $\mathcal{Z}_r$ 对称性的自旋链进行数值分析所得的一些结果。

研究标度极限需要为低能态指定一种 N 依赖关系，即构造重整化群轨迹 $|\Psi_N\rangle$。显然，对于基态，或者对于希尔伯特空间各个互不相交扇区中的最低能态（例如，具有给定 S^z 值的扇区中的态，其中 S^z 是式（1.6）中 $\mathbb{S}^z$ 的本征值），这一点很容易做到。然而，为低能定态分别构造重整化群流轨迹并非易事。在这里，贝特 Ansatz 方程的存在使这一方法得以简化。

首先，对具有较少格点 $N = N_{\rm in} \lesssim 20$ 的自旋链的哈密顿量进行对角化。[2]每个定态都可以选为贝特态，它是整个对易算符族的本征向量。该算符族中的一个重要成员是 Q 算子。它的特征值是关于 ζ 的多项式，其零点 $\{\zeta_m\}_{m=1}^M$ 满足贝特 Ansatz 方程（1.1）。对于给定的低能态 $|\Psi_{N_{\rm in}}\rangle$，可以计算 Q 算子的特征值，从而确定相应的贝特根。有了这些贝特根，无须显式对角化哈密顿量，就可以指定态 $|\Psi_N\rangle$，其中 $N = N_{\rm in} + 2r$。求解贝特 Ansatz 方程，得到的解的模式在定性上类似于 $|\Psi_{N_{\rm in}}\rangle$ 的贝特根（技术细节见参考文献 [13]）。重复这一方法，即可得到随 N 增大时的重整化群轨迹 $|\Psi_N\rangle$。对应的能量由标记该贝特态的贝特根计算得出：

$$\mathcal{E} = \sum_{\ell=1}^{r} \mathcal{E}^{(\ell)}\,, \qquad\qquad \mathcal{E}^{(\ell)} = 2\mathrm{i} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{1+\zeta_m\, q^{-1}/\eta_\ell} - \frac{1}{1+\zeta_m\, q/\eta_\ell} \right), \tag{2.1}$$

而格点平移算符 $\mathbb{K}$ 的本征值为[3]

$$\mathcal{K} = \prod_{\ell=1}^{r} \mathcal{K}^{(\ell)}\,, \qquad\qquad \mathcal{K}^{(\ell)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mathtt{k}}\, q^{-M} \prod_{m=1}^{M} \frac{\zeta_m + \eta_\ell\, q}{\zeta_m + \eta_\ell\, q^{-1}}\,. \tag{2.2}$$

回顾一下，在给定值为 S^z 的扇区中，贝特根的数量与 $M = \frac{N}{2} - S^z$ 相同。 —

2.1 奇数 r时的低能谱

我们研究了低能谱随 N 增大时的行为，发现这些态如共形场论 [22]所预言的那样组织成共形塔。对于奇数 r 的情形，低能动量谱可描述为

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= N\, e_\infty + \frac{2\pi r v_{\rm F}}{N} \left(P^2 + \bar{P}^2 - \frac{r}{12} + \mathtt{L} + \bar{\mathtt{L}} \right) + o(N^{-1}) \\ \mathcal{K} &= (-1)^{r\mathtt{w}} \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} r}{N} \left(P^2 - \bar{P}^2 + \mathtt{L} - \bar{\mathtt{L}} \right) \right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

这里，具体的体能量和费米速度明确给出为

$$e_\infty = -\frac{2v_{\rm F}}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{\sinh\left(\frac{rt}{n}\right)}{\sinh\left(\frac{(n+r)\,t}{n}\right)\cosh(t)}\,, \qquad\qquad v_{\rm F} = \frac{r\,(n+r)}{n} \tag{2.4}$$

[2]哈密顿量及对易族中其他成员的显式公式可见参考文献 [6] 第 6 节。[3]只要满足 r 站点周期性条件 (1.2)，能量和格点平移算符本征值的公式对任意非均匀参数值均成立。显然，对于 $\mathcal{Z}_r$ 对称情形 (1.10)，这些公式可以简化，但我们倾向于保留原式。

并且各向异性参数 $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ 已替换为 n，使得

$$\gamma = \frac{\pi}{n+r} \qquad (n>0)\,. \tag{2.5}$$

进入 $1/N$ 修正的 P 和 P 取一组离散值，

$$P = \frac{1}{2\sqrt{n+r}}\left(S^z + (n+r)\,(\mathtt{k}+\mathtt{w})\right), \qquad \bar{P} = \frac{1}{2\sqrt{n+r}}\left(S^z - (n+r)\,(\mathtt{k}+\mathtt{w})\right), \tag{2.6}$$

其特征由 $\mathbb{S}^z$ 的本征值以及所谓的绕数 $\mathtt{w} = 0,\ \pm1,\ \pm2,$ .....决定。最后，非负整数对 $(\mathtt{L}\ \bar{\mathtt{L}})$ 给出了该态在共形塔中的手征能级。

满足渐近行为 (2.3) 且 $\mathtt{L} = \bar{\mathtt{L}} = 0$ 的贝特态将称为主贝特态。我们发现一个令人惊讶的现象：对于给定的 S^z 和 $\mathtt{w}$，主贝特态的数量会随 N 增大而增加，并且很可能在 $N\to\infty$ 极限下变为无穷。这意味着存在无穷多个由同一对共形维数标记的共形塔。要消除这种简并，应考虑对易族中其他算子谱的标度极限。我们使用了所谓的准移位算符，

$$\mathbb{K}^{(\ell)}\ \ (\ell = 1,2,\ldots,r)\ :\qquad \left[\mathbb{K}^{(\ell)},\mathbb{H}\right] = \left[\mathbb{K}^{(\ell)},\mathbb{K}^{(\ell')}\right] = 0\,, \tag{2.7}$$

其定义见文献 [6] 的第 6.2 节。请注意，这些算子在 $\mathcal{Z}_r$ 对称性的作用下会发生重排：

$$\hat{\mathcal{D}}^{-1}\mathbb{K}^{(\ell)}\hat{\mathcal{D}} = \mathbb{K}^{(\ell+1)} \qquad \left(\mathbb{K}^{(r+1)} \equiv \mathbb{K}^{(1)}\right), \tag{2.8}$$

此处使用了参考文献 [6] 中表示该对称性生成元的记号 $\mathcal{D}$。此外，它们的乘积恰好对应于 r 格点平移算子：

$$\mathbb{K} = \prod_{\ell=1}^{r}\mathbb{K}^{(\ell)}\,. \tag{2.9}$$

$\mathbb{K}^{(\ell)}$ 的特征值记为 $\mathcal{K}^{(\ell)}$，并按照式 (2.2) 用贝特根表示。

考虑到 $\mathcal{Z}_r$ 对称性，我们研究了 $\mathcal{K}^{(\ell)}$ 的对数的离散傅里叶变换：[4]

$$b_a \equiv \frac{N^{1-\frac{2|a|}{r}}}{2\pi\mathrm{i}r}\ \sum_{\ell=1}^{r}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{r}a(r+1-2\ell)}\ \log\left(\mathcal{K}^{(\ell)}\right) \qquad \left(1\le|a|\le[\tfrac{r-1}{2}]\right). \tag{2.10}$$

引入因子 $N^{1-\frac{2|a|}{r}}$的原因如下：我们观察到，对于如上定义的低能态$b_a = b_a(N)$，当 $N\to\infty$ 时，它们趋于有限极限；这些极限通常是非零的（复）数。此外，在式（2.10）中，符号 $[\cdots]$ 表示整数部分。这里这样写是为了便于后文讨论偶数 r，届时将使用同一定义的 b_a。

$N\to\infty$ 趋于极限时，b_a (2.10) 的取值是重整化群轨迹的重要特征。结果表明，这些取值与 P 和 P (2.6) 一起，足以区分主贝特态。此外，我们发现，b_a 会出现在式 (2.3) 中能量标度修正项里。特别地，对于任意低能贝特态

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \;&=\; N\,e_\infty + \frac{2\pi r v_{\mathrm{F}}}{N}\left(P^2+\bar{P}^2-\frac{r}{12}+\mathtt{L}+\bar{\mathtt{L}}\right) \\ &-\; \frac{4\pi^2 r v_{\mathrm{F}}}{N^{1+\frac{2}{r}}}\,\cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)\,b_{\frac{r-1}{2}}\,b_{\frac{1-r}{2}} + O\Big(N^{-1-\frac{6}{r}},N^{-1-\frac{4n}{r}}\Big) \qquad (r=3,5,\ldots)\,.\end{aligned} \tag{2.11}$$

[4] 对于低能态 $\mathcal{K}^{(\ell)}\to(-1)^{\mathtt{w}}$ 在 $N\to\infty$时，其中 $\mathtt{w}\in\mathbb{Z}$ 是绕数。对于奇数 $\mathtt{w}$，渐近行为 $\log(\mathcal{K}^{(\ell)}) = \mathrm{i}\pi + \ldots$ 的首项对 b_a 的定义没有贡献，因为对 (2.10) 中 ℓ 求和时该项会被抵消。

2.2 r 为偶数时的低能谱

对于偶数 r，需要特别关注算子

$$\mathbb{B} = \prod_{m=1}^{\frac{r}{2}} \mathbb{K}^{(2m-1)} \left(\mathbb{K}^{(2m)}\right)^{-1} . \tag{2.12}$$

对其特征值的数值研究表明，格点模型中存在低能态，使得

$$b_{\frac{r}{2}} \equiv \frac{(-1)^{\frac{r}{2}+1}}{2\pi r} \log(\mathcal{B}) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{\ell=1}^{r} (-1)^{\ell+\frac{r}{2}} \log\left(\mathcal{K}^{(\ell)}\right) \tag{2.13}$$

要么趋于一个非零值，要么衰减至零，因为

$$b_{\frac{r}{2}} \sim \frac{1}{\log(N)} \qquad \text{for} \qquad N \to \infty . \tag{2.14}$$

这种现象在具有 $\mathcal{Z}_2$ 不变性的自旋链（$r = 2$）的背景下已经被观察到并得到广泛研究。应当采取这样的标度极限：当 $N \to \infty$时，保持 $b_{\frac{r}{2}}$ 的值不变。这会导致底层共形场论的谱中出现一个连续分量。在 $r = 4,\ 6, \ldots$ 的情形下，对于低能态，由（2.10）定义的 b_a 在 $N \to \infty$时保持有限且（一般而言）不为零。这样，对于奇数和偶数两种情况，重整化群轨迹均由 b_a的极限值标记。对于偶数 r，我们观察到，能量在大 N下的渐近行为遵循与（2.11）类似的公式：

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= N\, e_\infty + \frac{2\pi r v_{\rm F}}{N} \Big(P^2 + \bar{P}^2 + 2n\, (b_{\frac{r}{2}})^2 - \frac{r}{12} + \mathtt{L} + \bar{\mathtt{L}} \Big) \\ &- \frac{8\pi^2 r v_{\rm F}}{N^{1+\frac{4}{r}}} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) b_{\frac{r}{2}-1}\, b_{1-\frac{r}{2}} + O\Big(N^{-1-\frac{8}{r}}, N^{-1-\frac{4n}{r}}\Big) \qquad (r = 4, 6, \ldots) . \end{aligned} \tag{2.15}$$

以下是几点补充说明。在数值研究中，我们为 $r = 2$、3、.....、7 构造了各种重整化群轨迹。在所有情况下，我们的数据都与渐近公式完全吻合。

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= N\, e_\infty + \frac{2\pi r v_{\rm F}}{N} \Bigg[P^2 + \bar{P}^2 + 2n\, (b_{\frac{r}{2}})^2 - \frac{r}{12} + \mathtt{L} + \bar{\mathtt{L}} \\ &- \sum_{a=1}^{[\frac{r-1}{2}]} 2\pi\,(r-2a)\, \cot\left(\tfrac{\pi\,(r-2a)}{2n}\right) \frac{b_a\, b_{-a}}{N^{2-\frac{4a}{r}}} + O\Big(N^{-2}, N^{-\frac{4n}{r}}\Big) \Bigg] , \end{aligned} \tag{2.16}$$

其中，对于奇数 r，假设 $b_{\frac{r}{2}} \equiv 0$ 和 n 是一般的。还值得一提的是，(2.1) 中的各项 $\mathcal{E}^{(\ell)}$ 与彼此对易的算子的本征值相同

$$\mathbb{H}^{(\ell)} \quad : \qquad \left[\mathbb{H}^{(\ell)}, \mathbb{H}^{(\ell')}\right] = 0 , \qquad \mathbb{H} = \sum_{\ell=1}^{r} \mathbb{H}^{(\ell)} . \tag{2.17}$$

与 $\mathbb{H}$ 类似，这些项由若干项求和得到，每一项描述最多涉及 $r+1$ 个相邻自旋的相互作用。不过，它们并非 $\mathcal{Z}_r$ 不变，而是

$$\hat{\mathcal{D}}^{-1} \mathbb{H}^{(\ell)} \hat{\mathcal{D}} = \mathbb{H}^{(\ell+1)} \qquad \left(\mathbb{H}^{(r+1)} \equiv \mathbb{H}^{(1)}\right) . \tag{2.18}$$

对于其特征值的主导大 N 行为，我们发现对于 $r \geq 2$

$$\sum_{\ell=1}^{r} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{r} a(r+1-2\ell)}\, \mathcal{E}^{(\ell)} = 2\pi v_{\rm F}\, \mathrm{sgn}(a)\, (r - 2|a|)\, N^{-1+\frac{2|a|}{r}} \left(b_a + o(1)\right) \qquad \left(1 \leq |a| \leq [\tfrac{r}{2}]\right) \tag{2.19}$$

其中，sgn(a) 表示整数 a 的符号。最后，还观测到一些贝特态，其 $\delta\mathcal{E} =_{2\pi r v_{\rm F}}^{N} \left(\mathcal{E} - N e_\infty\right)$ 随 $N \to \infty$ 呈对数增长，见图 5。我们不将这些态计入低能谱。原始文献 [7,8] 讨论了 $\mathcal{Z}_2$ 不变自旋链中的类似现象。

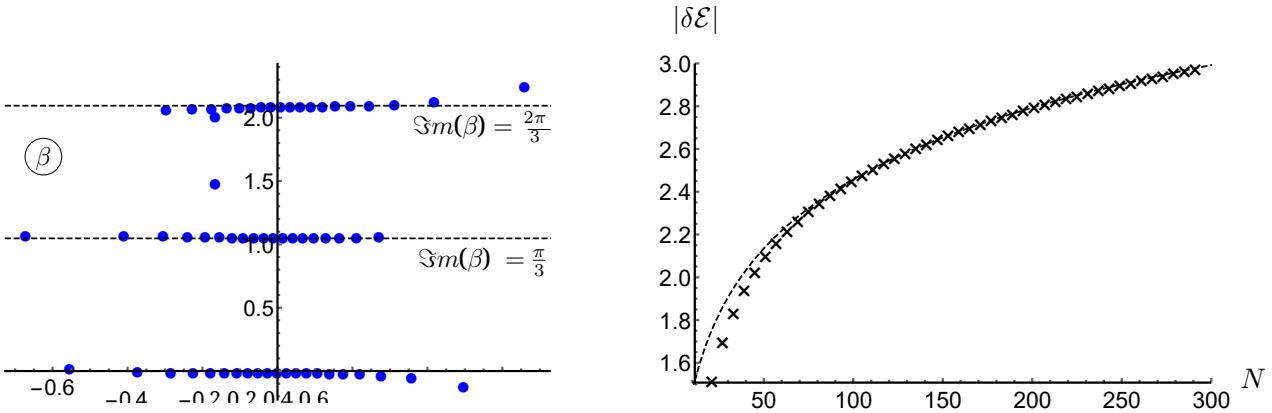


图5：展示的是 $\mathcal{Z}_3$ 不变自旋链在 $S^z = \frac{1}{2}$ 扇区中的一条重整化群轨迹数值数据，其标度能量 $\delta\mathcal{E} = \frac{N}{2\pi r v_F}\left(\mathcal{E} - Ne_\infty\right)$ 随 $N \to \infty$ 呈对数增长。左图描绘了复 β 平面上的典型贝特根分布（$N = 123$）。右图中的叉号对应于通过求解贝特 Ansatz 方程得到的 $|\delta\mathcal{E}|$ 数值。虚线绘制的是拟合 $\delta\mathcal{E} \approx -0.03 - 1.11\,\mathrm{i} + (0.521 + 0.099\,\mathrm{i})\log(N)$ 的绝对值。参数为 $n = 3$ 和 $\mathtt{k} = \frac{1}{20}$。

3 O $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链的标度极限微分方程

正如引言中所述，研究可积格点系统普适行为的最有效方法是基于常微分方程/量子场论对应。在本节中，我们提出一组常微分方程，用以描述具有 $\mathcal{Z}_r$ 不变性的自旋链的标度极限，其中各向异性参数取为 $q = \mathrm{e}^{\pi i/(n+r)}$，且满足 $n > 0$。此外，我们还讨论了对这一方案的一些数值验证。

3.1 主Bethe态的微分方程

$N \to \infty$ 时 b_a (2.10)、(2.13) 的极限值是单条重整化群轨迹的重要特征。为便于后续讨论，我们将改用以下指标。

$$s_a = C_a \lim_{N\to\infty} b_a\,, \qquad \bar{s}_a = -C_a \lim_{N\to\infty} b_{-a}\,, \qquad 1 \le a \le [\tfrac{r}{2}] \tag{3.1}$$

其正比系数由.....给出

$$C_a = (-1)^{a(r-1)}\, 2n\, \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1 + \frac{r-2a}{2n})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{r-2a}{2n})} \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{r}{2n})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \frac{r}{2n})}\right]^{\frac{r-2a}{r}}. \tag{3.2}$$

符号“slim”用于提醒，极限 (3.1) 仅对低能态这一类状态存在；并且对于偶数 r 应取为使得 $b_{\frac{r}{2}}$ 在 $N \to \infty$时保持不变。注意，根据定义$b_{-r} \equiv -b_r$因此

$$\bar{s}_{\frac{r}{2}} \equiv s_{\frac{r}{2}}\,. \tag{3.3}$$

s_a 和 $\bar{s}_a$ 将合并为两组

$$\boldsymbol{s} = \left(s_1, \ldots, s_{[\frac{r}{2}]}\right), \qquad \bar{\boldsymbol{s}} = \left(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{[\frac{r}{2}]}\right). \tag{3.4}$$

此外，我们将使用以下记号

$$p = \frac{n+r}{2}\left(\frac{S^z}{n+r} + \mathtt{k} + \mathtt{w}\right), \qquad \bar{p} = \frac{n+r}{2}\left(\frac{S^z}{n+r} - \mathtt{k} - \mathtt{w}\right). \tag{3.5}$$

除此之外，常微分方程/量子场论对应还意味着，低能贝特态的 Q算子本征值的标度极限与一组特定常微分方程的谱行列式之间存在关系。在这里讨论的情形中， $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链的主贝特态完全由 p、 $\bar{p}$ 以及 $\boldsymbol{s}$、 $\bar{\boldsymbol{s}}$ 刻画，相应的一对微分方程被提出如下：

$$\Big[-\partial_z^2 + \frac{1}{z^2}\,\Big(E^{-n-r}\; z^{n+r} - z^r + p^2 - \frac{1}{4} + \sum_{a=1}^{[\frac{r}{2}]} s_a\,(-z)^a \Big) \Big]\,\Psi = 0 \tag{3.6}$$

$$\Big[-\partial_{\bar{z}}^2 + \frac{1}{\bar{z}^2}\,\Big(\bar{E}^{-n-r}\; \bar{z}^{n+r} - \bar{z}^r + \bar{p}^2 - \frac{1}{4} + \sum_{a=1}^{[\frac{r}{2}]} \bar{s}_a\,(-\bar{z})^a \Big) \Big]\,\bar{\Psi} = 0\ . \tag{3.7}$$

$r=1$ 和 $r=2$ 的情况已在文献 [14] 中得到广泛研究（另见附录 A）。为避免文本中充斥过多技术细节，这里不再重复一般 r 情形的类似分析，而是简要回顾谱行列式的构造方法。该方法在数值上效率很高，以下重点讨论方程 (3.6)。

使用以下变量改写常微分方程会更方便：

$$z = E\,\mathrm{e}^{y}\,, \qquad\qquad \Psi = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}}\,\psi\ . \tag{3.8}$$

于是，微分方程 (3.6) 变为

$$\Big[-\partial_y^2 + p^2 + \mathrm{e}^{(n+r)y} - E^r\,\mathrm{e}^{ry} + \sum_{a=1}^{[\frac{r}{2}]} s_a\,(-E\,\mathrm{e}^{y})^a \Big]\psi = 0\ . \tag{3.9}$$

假设 $\Re e(p)\ge 0$，则存在一个由以下渐近条件唯一确定的解

$$\psi_p(y) \to \mathrm{e}^{py} \qquad\quad \text{as} \qquad\quad y\to-\infty\ . \tag{3.10}$$

通过以下 WKB 渐近式引入另一个解 $\chi=\chi(y)$：

$$\chi \asymp \exp\Big[-\frac{n+r}{4}\,y - \frac{2}{n+r}\,\mathrm{e}^{(n+r)\frac{y}{2}}\;{}_2F_1\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{r}{2n}, \frac{1}{2}-\frac{r}{2n}\,\Big|\,E^r\mathrm{e}^{-ny}\Big)\Big] \quad \text{as}\ \ y\to+\infty \tag{3.11}$$

这里， ${}_2F_1$ 是通常的超几何函数，并假设 $\frac{r}{n}\neq 1,\ 3,\ \ldots$。谱行列式由这两个解的朗斯基行列式给出：

$$D_p(E) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\frac{2p}{n+r})}\;(n+r)^{-\frac{1}{2}-\frac{2p}{n+r}}\;\big(\chi\partial_y\psi_p - \psi_p\partial_y\chi\big) \tag{3.12}$$

前面的因子经过选择，使得对于 p 的一般取值， $D_p(0)=1$。

谱行列式是 E 的整函数，因此级数

$$\log D_p(E) = -\sum_{j=1}^{\infty} J_j\,E^j \tag{3.13}$$

具有有限的收敛半径。展开系数取决于 p和 $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_{[\frac{r}{2}]})$（当然也取决于 $n>0$），

$$J_j = J_j(p,\boldsymbol{s})\ , \tag{3.14}$$

它们是该微分方程的参数。对常微分方程 (3.9) 关于 E 应用微扰理论，可以得到前两个参数的显式解析公式。关于 $r = 1,2$ 这些情形的结果见参考文献 [14]。该结果可以直接推广到 $r \geq 3$:

$$J_1 = s_1 \, f_1\big(\tfrac{p}{n+r}, \tfrac{1}{n+r}\big) \, C \tag{3.15}$$

$$J_2 = \left(s_1^2 \, f_2\big(\tfrac{p}{n+r}, \tfrac{1}{n+r}\big) - s_2 \, 2^{\frac{4}{n+r}} \, \frac{\pi \Gamma^2(-\frac{1}{n+r})}{\Gamma^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+r})} \, f_1\big(\tfrac{p}{n+r}, \tfrac{2}{n+r}\big) \right) C^2$$

with

$$C = \frac{(n+r)^{\frac{2}{n+r}}}{\Gamma^2(-\frac{1}{n+r})} \tag{3.16}$$

（对于 $r = 3$，应将 s_2 恒定设为零）。函数 f_1 和 f_2 的显式形式见附录 B。

格点 Q-算子的特征值是关于谱参数 ζ的多项式，其根满足贝特 Ansatz 方程。按照参考文献 [6],[5]中的记号

$$A_+(\zeta) = \prod_{m=1}^{M} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_m}\right) \qquad\qquad (M \leq N/2\,). \tag{3.17}$$

多项式的系数可简单地用以下求和表示

$$h_N^{(j)} = j^{-1} \sum_{m=1}^{M} (\zeta_m)^{-j}\,, \tag{3.18}$$

例如,

$$\log A_+(\zeta) = -h_N^{(1)}\,\zeta - h_N^{(2)}\,\zeta^2 + \dots\ . \tag{3.19}$$

对于低能 Bethe 态， $h_N^{(j)}$ 的标度行为由谱行列式的展开式 (3.13) 中的 J_j 描述。特别地,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N}{rN_0}\right)^{-\frac{2n}{r(n+r)}} h_N^{(1)} &= J_1 \\ \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N}{rN_0}\right)^{-\frac{4n}{r(n+r)}} h_N^{(2)} &= J_2\ , \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中

$$N_0 = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\frac{r}{2n})}{r\,\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{r}{2n})}\ . \tag{3.21}$$

给定固定 $N \gg 1$ 下的低能贝特态，可以利用 (3.18) 从相应的贝特根计算方程 (3.20) 左端的值。此外，根据准移位算符 $\mathcal{K}^{(\ell)}$ (2.2) 的本征值，可通过定义 (2.10) 和 (2.13) 提取复数 b_a 。利用公式 (3.1)，即可确定常微分方程一侧出现的参数 s_a 。对于主贝特

[5]如该文所述，Baxter TQ-关系式有两个解 $\mathbb{Q}_\pm$。算子 $\mathbb{A}_+$ 与 $\mathbb{Q}_+$仅相差一个涉及 ζ 的分数次幂的简单因子；其优点是，它的本征值 $A_+(\zeta)$ 是关于 ζ 的 $M \leq N/2$阶多项式。

态，可以利用系数 J_1、J_2 关于 s_a 和 p 的显式解析表达式 (3.15) 计算右端。

对于求和，也存在类似的关系式。

$$\bar{h}_N^{(j)} = j^{-1} \sum_{m=1}^{M} (\zeta_m)^j \,. \tag{3.22}$$

它们与含 $h_N^{(j)} \mapsto \bar{h}_N^{(j)}$ 的式（3.20）形式相同，而 $J_j(p,\ \boldsymbol{s})$ 被替换为 $J_j(\bar{p},\ \bar{\boldsymbol{s}})$。后者出现在第二个常微分方程（3.7）的谱行列式对数的泰勒级数中。注意，$\bar{h}_N^{(j)}$ 是 $-\log\ \big(\prod_{m=1}^{M}(1-\zeta_m/\zeta)\big)$ 关于变量 ζ^{-1} 的展开系数:

$$\bar{A}_+(\zeta) \equiv \prod_{m=1}^{M} \left(1 - \frac{\zeta_m}{\zeta}\right) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \bar{h}_N^{(j)} \zeta^{-j}\right). \tag{3.23}$$

¯多项式 $A_+(\zeta)$ 是.....的本征值

$$\bar{\mathbb{A}}_+(\zeta) = \zeta^{\mathbb{S}^z - N/2}\, \mathbb{A}_+(\zeta)\, \big(\mathbb{A}_+^{(\infty)}\big)^{-1}, \tag{3.24}$$

其中，算子 $\mathbb{A}_+^{(\infty)}$ 属于对易族，其在具有相应贝特根 $\{\zeta_m\}$ 的贝特态上的本征值由下列乘积给出:

$$A_+^{(\infty)} = \prod_{m=1}^{M} (-\zeta_m)^{-1} \,. \tag{3.25}$$

我们对标度关系式（3.20）及其带横线的对应形式进行了大量数值检验。部分数据展示在图6中。

3.2 标度极限下 Q 算子的特征值

对于激发态，按照众所周知的方法[20]，可以从 (3.6) 和 (3.7) 得到常微分方程。文献 [13, 14] 讨论了 $\mathcal{Z}_2$ 不变自旋链的情形。基于同样的论证思路，我们提出，描述 $\mathcal{Z}_r$ 不变模型中任意低能贝特态的标度极限的常微分方程 (3.6) 的推广形式为

$$\Big(-\partial_z^2 + t_0(z) + t_1(z) + E^{-n-r}\ z^{n+r-2}\Big)\,\Psi = 0\ , \tag{3.26}$$

其中

$$\begin{aligned} t_0(z) &= \frac{1}{z^2}\left(-z^r + p^2 - \frac{1}{4} + \sum_{a=1}^{[\frac{r}{2}]} s_a\,(-z)^a\right) \\ t_1(z) &= \sum_{\alpha=1}^{\mathtt{L}} \left(\frac{2}{(z-w_\alpha)^2} + \frac{n_\alpha}{z(z-w_\alpha)}\right). \end{aligned} \tag{3.27}$$

极点 w_α 的位置和留数 n_α 必须以这样的方式取值，使得对于任意 $\alpha = 1, \ldots, \mathtt{L}$，常微分方程的任意解在 $z = w_\alpha$ 附近都是单值的。该条件导出关于 w_α 和 n_α的代数方程组:

$$\begin{aligned} & n_\alpha\left(\tfrac{1}{4}\,n_\alpha^2 - w_\alpha^2\, t_0^{(\alpha)}\right) + w_\alpha^3\, t_1^{(\alpha)} = 0 \\ & n_\alpha = n + r - 2 \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mathtt{L})\ . \end{aligned} \tag{3.28}$$

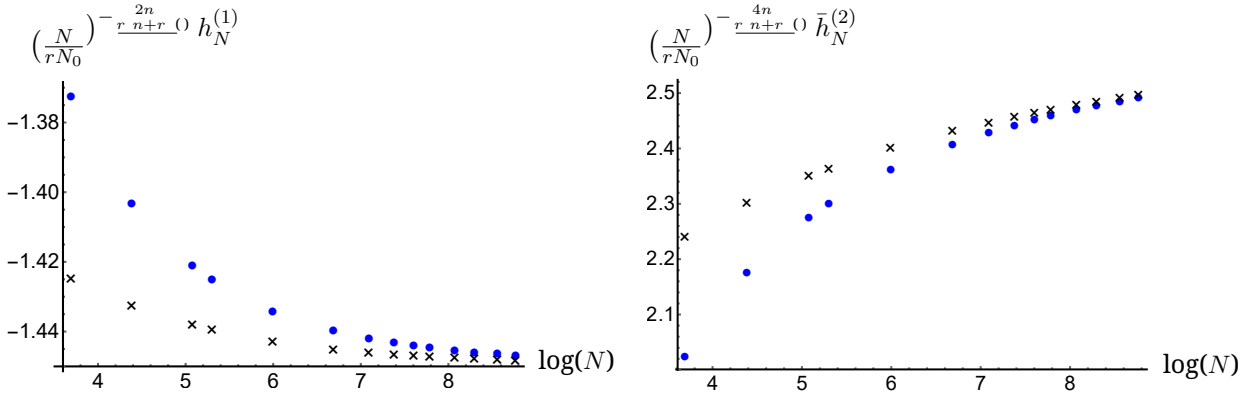


图6：图中给出了 $h_N^{(1)}$ （左图）和 $\bar{h}_N^{(2)}$ （右图）的数值数据；这些数据乘以适当的 N相关因子后，表示为对数 log(N) 的函数，对应于具有 $r=4$ 的 $\mathcal{Z}_r$ 对称模型。所选贝特态为一个初级态，黑色叉号由相应的贝特根通过定义（3.18）和（3.22）得到。蓝点分别表示左图和右图中 $J_1(p,s_1,s_2)$以及 $J_2(\bar{p},\bar{s}_1,\bar{s}_2)$的值，它们由公式（3.15）给出。这里，将 $s_1\,(\bar{s}_1)$替换为 $C_1\,b_1(N)$（$-C_1\,b_{-1}(N)$），见式（3.1），其中 $b_{\pm1}(N)$通过式（2.10）由准移位算符的本征值获得。类似地， $s_2\equiv\bar{s}_2\mapsto C_2\,b_2(N)$中的 $b_2(N)$通过式（2.13）计算得到。参数取为 $n=\frac{1}{2}$、$\mathtt{k}=\frac{1}{10}$，而 $S^z=\mathtt{w}=0$。请注意，在计算 $\bar{p}=-(n+r)\,\frac{\mathtt{k}}{2}=-\frac{9}{40}<0$情况下的 $J_2(\bar{p},\bar{s}_1,\bar{s}_2)$时，需要在第一个参数为负时计算函数 f_2 （该函数出现在式（3.15）中）。只要对实轴上的积分轮廓进行局部变形，使其在极点 $x=\mathrm{i}h$ 下方经过，公式（B.2）—（B.4）仍然适用。

Here

$$t_0^{(\alpha)} = t_0(w_\alpha)-\frac{n_\alpha}{w_\alpha^2}+\sum_{\beta\neq\alpha}\left(\frac{2}{(w_\alpha-w_\beta)^2}+\frac{n_\beta}{w_\alpha(w_\alpha-w_\beta)}\right) \tag{3.29}$$

$$t_1^{(\alpha)} = t_0'(w_\alpha)+\frac{n_\alpha}{w_\alpha^3}-\sum_{\beta\neq\alpha}\left(\frac{4}{(w_\alpha-w_\beta)^3}+\frac{n_\beta\,(2w_\alpha-w_\beta)}{w_\alpha^2\,(w_\alpha-w_\beta)^2}\right)$$

撇号表示对辐角求导。推广式 (3.7) 的常微分方程具有类似的形式，其中包含附加项

$$\bar{t}_1(\bar{z})=\sum_{\alpha=1}^{\bar{\mathtt{L}}}\left(\frac{2}{(\bar{z}-\bar{w}_\alpha)^2}+\frac{\bar{n}_\alpha}{\bar{z}(\bar{z}-\bar{w}_\alpha)}\right), \tag{3.30}$$

其中，集合 $\bar{n}_\alpha$ 和 $\{\bar{w}_\alpha\}_{\alpha=1}^{\mathtt{L}}$ 满足由方程 (3.28) 和 (3.29) 经过形式替换 $(p,s_a,n_\alpha,w_\alpha,\mathtt{L})\mapsto(\bar{p},\bar{s}_a,\bar{n}_\alpha,\bar{w}_\alpha,\bar{\mathtt{L}})$ 得到的方程组。

我们预期，任意低能贝特态 $|\Psi_N\rangle$ 都会流向共形塔中由 p、$\bar{p}$、s、$\bar{s}$ 标记的态，同时还带有两组“表观”奇点：

$$\boldsymbol{w}=\{w_\alpha\}_{\alpha=1}^{\mathtt{L}}\,,\qquad\qquad \bar{\boldsymbol{w}}=\{\bar{w}_\alpha\}_{\alpha=1}^{\bar{\mathtt{L}}}\,. \tag{3.31}$$

态 $|\Psi_N\rangle$ 的 Q 算子本征值 $A_+(\zeta)$ (3.17) 的标度行为，随后用常微分方程 (3.26) 的谱行列式 $D_p(E\,|\,\boldsymbol{w})$ 和“加横线”微分方程的 $D_{\bar{p}}(E\,|\,\bar{\boldsymbol{w}})$ 来描述。对于激发态，定义 $D_p(E\,|\,\boldsymbol{w})$ 时涉及的公式 (3.8)、(3.10)-(3.12) 保持不变。[6] $\bar{D}_{\bar{p}}(\,\bar{E}\,|\,\bar{\boldsymbol{w}})$ 的对应方程则仅.....

[6]附加项 t_1 在奇点附近 $\chi(z)$ 在常微分方程中不会改变解 ψ_p 和位于 $z=0$ 和 $z=\infty$ 处的奇点。

有所不同。S　　与在 [14] 中研究的 $\mathcal{Z}_2$ 不变自旋链的情形类似，我们预期

$$\lim_{N\to\infty} G^{(N/r)}\big(E^r \,|\, \tfrac{r}{n+r}\big)\; A_+\Big(\big(N/(rN_0)\big)^{-\frac{2n}{r(n+r)}} E\Big) = D_p(E\,|\,\boldsymbol{w})\,. \tag{3.32}$$

这里引入函数

$$G^{(N)}(E\,|\,g) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{1}{2(1-g)}\right]} \frac{(-1)^m\, N}{2m\cos(\pi m g)}\,(N/N_0)^{2m(g-1)}\; E^m\right), \qquad g\neq 1-\tfrac{1}{2k} \tag{3.33}$$

（对所有态都相同）以确保极限存在。注意，只要 $\frac{r}{n}\neq 1$、3、5、.....，该结果对任意 $n>0$ 都成立。在这些特殊取值下，为使极限（3.32）存在，必须在定义 $G^{(N)}(E\,|\,g)$ 的指数中加入额外项 $\propto \log(N)$，详情参见文献 [14]。类似地，算子 $\bar{\mathbb{A}}_+(\zeta)$（3.24）的特征值的标度极限可描述为

$$\lim_{N\to\infty} G^{(N/r)}\big(\bar{E}^r \,|\, \tfrac{r}{n+r}\big)\; \bar{A}_+\Big(\big(N/(rN_0)\big)^{\frac{2n}{r(n+r)}} \bar{E}^{-1}\Big) = \bar{D}_{\bar{p}}(\bar{E}\,|\,\bar{\boldsymbol{w}})\,. \tag{3.34}$$

对猜想关系（3.32）和（3.34）的验证，可参照主贝特态的情形，以相同思路进行。只要将右端的 J_j 取为式（3.26）谱行列式的展开系数（3.13），求和 $h_N^{(j)}$（3.18）及其带横线版本的标度关系（3.20）仍然成立。除 p 和 s 外，它们现在还依赖于集合 $\{w_\alpha\}_{\alpha=1}^{\mathtt{L}}$，该集合满足代数方程组（3.28）、（3.29），即

$$J_j = J_j(p, \boldsymbol{s}\,|\,\boldsymbol{w})\,, \qquad\qquad \bar{J}_j = J_j(\bar{p}, \bar{\boldsymbol{s}}\,|\,\bar{\boldsymbol{w}})\,. \tag{3.35}$$

对于激发态的情况，目前尚无展开系数 J_j 的显式解析表达式。尽管如此，仍可通过对微分方程进行数值积分来获得这些系数。结合初级态，我们对激发态的式 (3.32)-(3.34) 进行了验证，结果见图 7。我们还分析了代数方程组 (3.28)、(3.29)。研究发现，对于给定的 L 以及参数 n、p 和 $\boldsymbol{s}$ 的一般取值，解的数量等于 L 的 r 带颜色分拆数：

$$\sum_{\mathtt{L}=0}^{\infty} \mathrm{par}_r(\mathtt{L})\,\mathtt{q}^{\mathtt{L}} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\mathtt{q}^m)^r} = 1 + r\mathtt{q} + \frac{1}{2}\,r\,(r+3)\,\mathtt{q}^2 + \frac{1}{6}\,r\,(r+1)(r+8)\,\mathtt{q}^3 + \ldots\,. \tag{3.36}$$

3.3 乘积法则

作为 E 的整函数，谱行列式在零点附近具有收敛的级数展开。在无穷远处，它具有渐近展开，其描述需要确定斯托克斯线，即将复 E 平面划分为不同区域的直线，在这些区域中，渐近行为的描述方式各不相同。在当前讨论的情形下，斯托克斯线就是零点的聚集线。根据 $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链的低能贝特态的贝特根分布模式，可以利用关于 $D_p(E\,|\,\boldsymbol{w})$的公式 (3.32) 和关于 $D_{\bar{p}}(E\,|\,\bar{\boldsymbol{w}})$的公式 (3.34) 推导出这些直线的位置。根据 (1.11)，贝特根沿着复 β 平面中平行于实轴的直线聚集，其中 $\beta = -\frac{1}{2}\log(\zeta)$。在分布的边缘处，根呈现出标度行为。具体而言，按照绝对值对 $\{\zeta_m\}_{m=1}^{M}$ 进行排序，

$$|\zeta_1| \le |\zeta_2| \le \ldots \le |\zeta_{M-1}| \le |\zeta_M|\,,$$

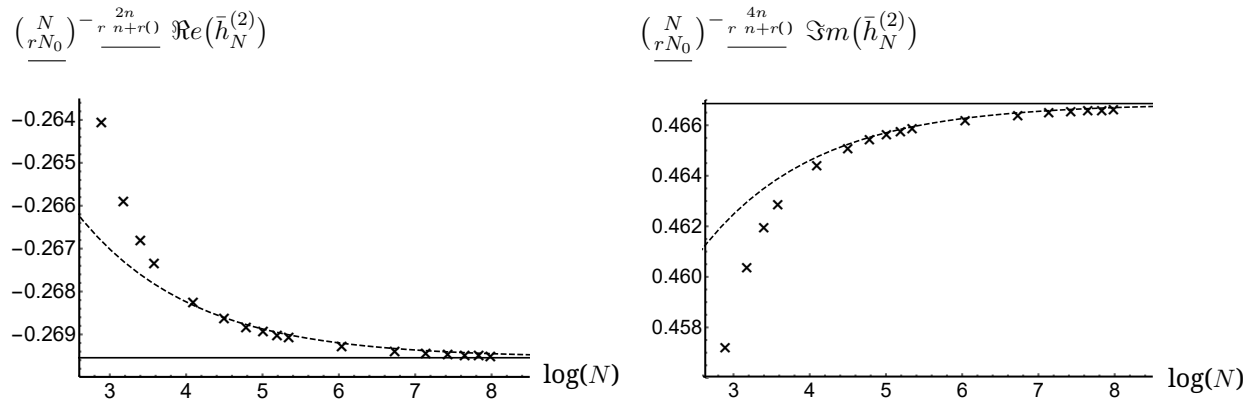


图7：展示了具有 $n = 2$、$\mathbf{k} = \frac{1}{20}$、由 $S^z = 1$ 表征、$\mathbf{w} = 0$ 及能级 $(\mathbf{L}\ \bar{}\mathbf{L}) = (0, 1)$ 的 $\mathcal{Z}_3$ 不变自旋链的重整化群轨迹数值数据。$s_1 = -0.942033 - 1.631649\,\mathbf{i}$ 和 $\bar{s}_1 = 0.085024 - 0.147266\mathbf{i}$ 的值通过式 (3.1) 提取，并采用特定的插值过程取极限 $N \to \infty$。叉号表示 $\binom{N}{rN_0}^{-\frac{2n}{r(n+r)}} \bar{h}_N^{(2)}$ 的实部和虚部，其中 $\bar{h}_N^{(2)}$ 表示对贝特根求和（式 (3.22)）。实线表示标度公式 (3.20) 的带横线对应形式所给出的预测，即 $\overline{J_2}(\bar{p}, \bar{\boldsymbol{s}} \,|\, \bar{\boldsymbol{w}})$ $= -0.269543 + 0.466857\,\mathbf{i}$。后者通过对常微分方程 (3.26)、(3.27) 进行数值积分得到，其中参数替换为 $p \mapsto \bar{p} = \frac{3}{8}$、$\mathbf{L} \mapsto \bar{}\mathbf{L} = 1$、$s_1 \mapsto \bar{s}_1 = -0.942033 - 1.631649\mathbf{i}$，并将其中的 $\{w_\alpha\} \mapsto \{\bar{w}_\alpha\}$ 替换为 $\bar{w}_1 = 0.778812 - 1.348942\,\mathbf{i}$。虚线表示拟合 $-0.269539 + 0.466854\mathbf{i} + (0.0186614 - 0.0323224\mathbf{i})\ N^{-\frac{2}{3}}$。

公式（3.32）和（3.34）表明这些极限的存在性。

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ j \text{ fixed}}} (N/(rN_0))^{\frac{2n}{r(n+r)}}\, \zeta_j = E_j\,, \qquad\qquad \lim_{\substack{N\to\infty \\ M-j \text{ fixed}}} (N/(rN_0))^{\frac{2n}{r(n+r)}}\, \zeta_{M-j}^{-1} = \bar{E}_j\,. \tag{3.37}$$

显然，E_j 与谱行列式 $D_p(E \,|\, \boldsymbol{w})$ 的零点重合，并沿着射线

$$\arg(E) = 0,\ \frac{2\pi}{r},\ \frac{4\pi}{r}, \ldots,\ \frac{2\pi(r-1)}{r} \qquad\qquad (\text{模 } 2\pi) \tag{3.38}$$

$\bar{}$，E_j 也同样如此。

射线（3.38）将复平面划分为若干扇形区域，在这些区域中，谱行列式表现出$\bar{}$不同的大 E (E) 渐近行为。为了写出不同$\bar{}$扇形区域的渐近公式，这些区域将标记为 $\ell = 1$、2、.....、r，我们将 E 和 E 替换为 θ，得到

$$E = (-1)^{r-1}\ \mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}\pi}{r}(2\ell-1)}\ \mathrm{e}^{\frac{2n\theta}{r(n+r)}}\,, \qquad\qquad \bar{E} = (-1)^{r-1}\ \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{r}(2\ell-1)}\ \mathrm{e}^{\frac{2n\theta}{r(n+r)}}\,. \tag{3.39}$$

于是，根据 对常微分方程（3.26）及其带横线对应方程的分析，可以证明 s

$$\Re e(\theta) \to +\infty \qquad \text{and} \qquad |\Im m(\theta)| < \frac{\pi(n+r)}{2n} \tag{3.40}$$

以下渐近行为成立

$$\begin{aligned} D_p(E \,|\, \boldsymbol{w}) &= \mathfrak{C}_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})\ \exp\left[\left((-1)^{\ell-1}\,\mathrm{i}s - \frac{2np}{n+r}\right)\frac{\theta}{r} + \frac{N_0}{\cos(\frac{\pi r}{2n})}\ \mathrm{e}^{\theta} + O\Big(\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{r}}\Big)\right] \\ \bar{D}_{\bar{p}}(\bar{E} \,|\, \bar{\boldsymbol{w}}) &= \bar{\mathfrak{C}}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}(\bar{\boldsymbol{w}})\ \exp\left[\left((-1)^{\ell-1}\,\mathrm{i}s - \frac{2n\bar{p}}{n+r}\right)\frac{\theta}{r} + \frac{N_0}{\cos(\frac{\pi r}{2n})}\ \mathrm{e}^{\theta} + O\Big(\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{r}}\Big)\right]. \end{aligned} \tag{3.41}$$

这里，根据定义，

$$s \equiv \begin{cases} 0 & \text{for odd } r \\ s_{\frac{r}{2}} & \text{for even } r \end{cases} \tag{3.42}$$

数值常数 N_0 由式（3.21）给出。对于 $r = 1$, 2，系数 $\mathfrak{C}_p^{(\ell)}$, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{w})$ 和 $\bar{\mathfrak{C}}_{\bar{p}\,\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}$, $(\bar{\boldsymbol{w}})$ 有解析闭式 [25]。附录 C 中介绍了一种高效的数值计算方法，可用于计算任意 r 对应的这些系数。

着重考察 $r = 1$ 和 $r = 2$的情形，文献 [21] 和 [14], 分别发现，$\mathfrak{C}_p^{(\ell)}$, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{w})$ 和 $\bar{\mathfrak{C}}_{\bar{p}\,\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}$, $(\bar{\boldsymbol{w}})$ 会出现在某些贝特根乘积的标度极限中。我们发现，对于 $r \geq 3$，类似的关系式也成立，即：

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{M} q\,(\zeta_m + \eta_\ell\, q^{-1})(\zeta_m^{-1} + \eta_{\ell'}^{-1}\, q^{-1}) \;&=\; \mathrm{e}^{((-1)^{\ell'}-(-1)^{\ell})\frac{\pi s}{2n}}\; \mathfrak{C}_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})\, \bar{\mathfrak{C}}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell')}(\bar{\boldsymbol{w}}) \\ &\times\; \left(\frac{N}{rN_0}\right)^{\mathrm{i}\,((-1)^{\ell'}-(-1)^{\ell})\frac{s}{r}-\frac{2n(p+\bar{p})}{r(n+r)}} \left(\frac{4n}{n+r}\right)^{\frac{N}{r}} \Big(1 + O\big(N^{-\epsilon}\big)\Big) \end{aligned} \tag{3.43}$$

这里，余项按 N 的某个正指数 ϵ 的幂次衰减，而 η_ℓ 表示非均匀参数，与式（1.10）中的含义相同，即，

$$\eta_\ell = (-1)^r\; \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{r}(2\ell-1)} \qquad\qquad (\ell = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{3.44}$$

除了关系式 (3.43) 之外，我们还证明了

$$\prod_{m=1}^{M} (\zeta_m)^r = \left(\frac{N}{rN_0}\right)^{\frac{2n(p-\bar{p})}{n+r}} \prod_{\ell=1}^{r} \frac{\bar{\mathfrak{C}}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}(\bar{\boldsymbol{w}})}{\mathfrak{C}_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})} \;\Big(1 + O\big(N^{-\epsilon}\big)\Big)\,. \tag{3.45}$$

将式 (3.43) 左端对 $\ell = \ell' = 1$、2、.....、r 求乘积，再将结果除以/乘以 $\prod_{m=1}^{M}(\zeta_m)^r$，即可得到

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{M} \big(\zeta_m^{-r} + q^r\big)\big(\zeta_m^{-r} + q^{-r}\big) \;&=\; \prod_{\ell=1}^{r} \Big(\mathfrak{C}_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})\Big)^2 \left(\frac{N}{rN_0}\right)^{-\frac{4np}{n+r}} \left(\frac{4n}{n+r}\right)^{N} \Big(1 + O\big(N^{-\epsilon}\big)\Big) \\ \prod_{m=1}^{M} \big(\zeta_m^{+r} + q^r\big)\big(\zeta_m^{+r} + q^{-r}\big) \;&=\; \prod_{\ell=1}^{r} \Big(\bar{\mathfrak{C}}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}(\bar{\boldsymbol{w}})\Big)^2 \left(\frac{N}{rN_0}\right)^{-\frac{4n\bar{p}}{n+r}} \left(\frac{4n}{n+r}\right)^{N} \Big(1 + O\big(N^{-\epsilon}\big)\Big)\,. \end{aligned} \tag{3.46}$$

最后两个乘积法则的优点在于，它们分别涉及常微分方程 (3.26) 及其加横线变体的谱行列式的渐近系数。

上述乘积法则进一步支持了关于 Q-算子 (3.32) 和 (3.34) 的特征值标度极限的设想。我们对多种情况进行了数值检验，其中部分数据展示于图 8。

4 量子化条件

要完整描述非齐次六顶点模型在 $q = \mathrm{e}^{\pi/r}$ 且 $n > 0$ 的区域中的临界行为所对应的共形场论，是一项艰巨的任务。所提出的常微分方程为这一问题提供了一些指引，使我们得以取得进展。我们的分析表明

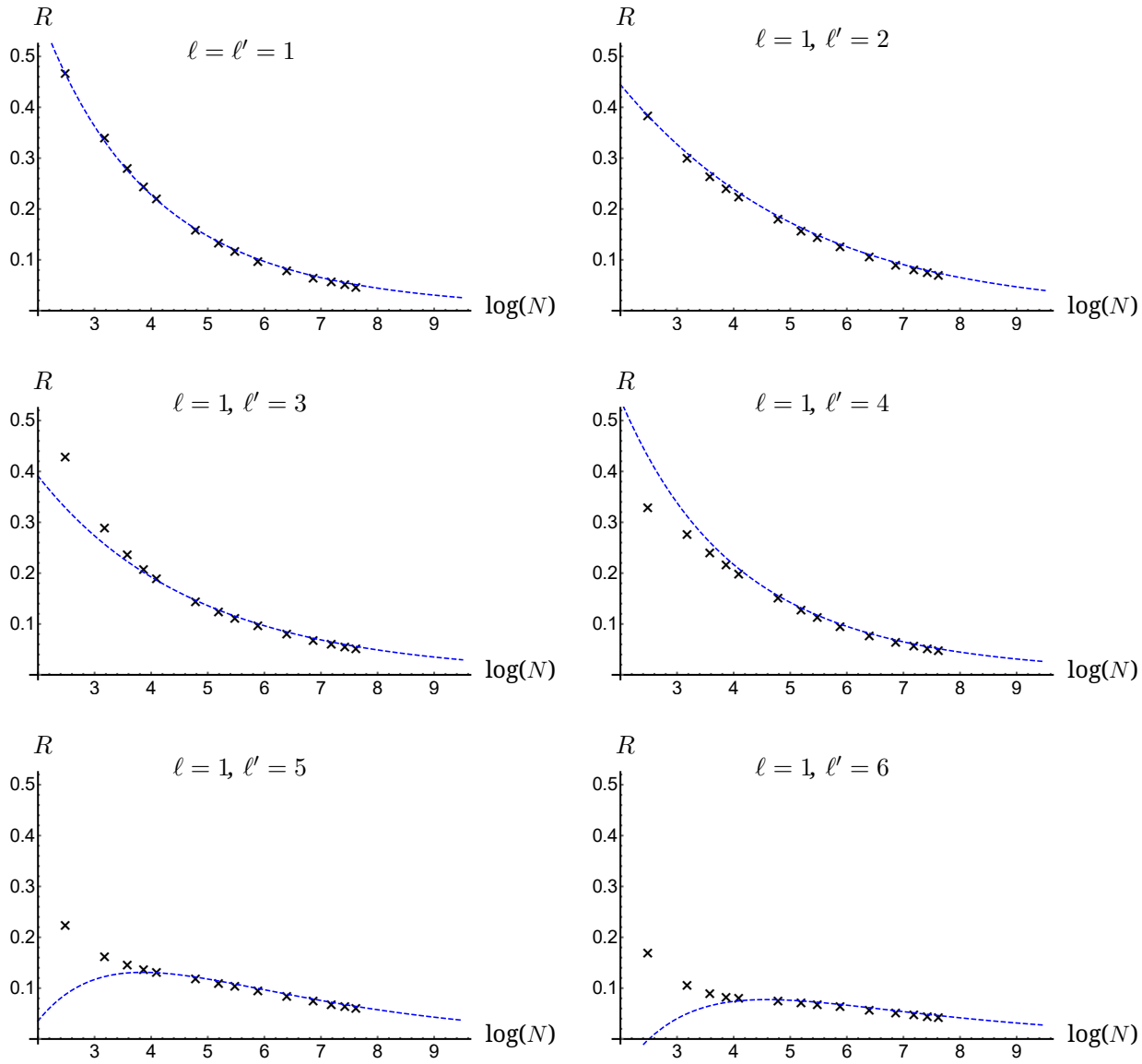


图8：图中展示的是关系式 (3.43) 左端与右端之比的对数绝对值，$R = |\log(\text{l.h.s. of (3.43)/r.h.s. of (3.43)})|$，对于 $\ell = 1$ 和 $\ell' = 1,\ 2, \ldots, 6$。该结果是针对带有 $\mathrm{w} = \mathrm{L} = \mathrm{L} = 0$ 的重整化群轨迹计算得到的，研究对象为具有 $r = 6$, $n = 3.5$ 且 $\mathrm{k} = 0.1$ 、处于扇区 $S^z = 0$的 $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链。左端由与该轨迹对应的贝特根得到。对于右端，根据式 (3.1)，将 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ 和 $\bar{\boldsymbol{s}} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)$ 换成了“流耦合” $s_a \mapsto C_a\, b_a(N)$ 和 $\bar{s}_a \mapsto -C_a\, b_{-a}(N)$。$b_a(N)$ 本身则通过公式 (2.10) 和 (2.13)，从准移位算符的特征值中提取。此外，在计算右端时，忽略了修正项 $O(N^{-\epsilon})$。虚线是 $c_1\, N^{-\frac{1}{3}} + c_2\, N^{-\frac{2}{3}}$ 的线性-对数图，其中每个 ℓ' 对应的系数 c_1 和 c_2 均通过拟合确定。

在适当归一化下，$|\Psi_N\rangle$ $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链的低能贝特态具有一个标度极限，使得

$$\lim_{N\to\infty} |\Psi_N\rangle = |\boldsymbol{\psi}_{p,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{w})\rangle \otimes \overline{|\boldsymbol{\psi}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}(\bar{\boldsymbol{w}})\rangle} \,. \tag{4.1}$$

我们预期，态$|\boldsymbol{\psi}_{p,\ \boldsymbol{s}}(\boldsymbol{w})\rangle$ 组织成某种扩展共形对称手征代数的最高权表示，$|\boldsymbol{\psi}_{\bar{p},\ \bar{\boldsymbol{s}}}(\bar{\boldsymbol{w}})\rangle$也有类似情形。特别是，主贝特态在标度极限中出现的手征分量，将是这类表示中的最高态。由此立即引出一些问题：如何确定扩展共形对称代数，以及在 $\boldsymbol{s}$、 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{s}'$， $\boldsymbol{w}'$ 满足什么条件时，态$|\boldsymbol{\psi}_{p,\ \boldsymbol{s}}(\boldsymbol{w})\rangle$ 与$|\boldsymbol{\psi}_{p,\ \boldsymbol{s}'}(\boldsymbol{w}')\rangle$ 属于同一个手征模。此外，对于态 (4.1)，$\boldsymbol{s}$ 和 $\bar{\boldsymbol{s}}$ 的允许取值遵循哪些选择规则？这些问题大多仍有待解决。本文将对选择规则进行一些分析。

4.1 一般量子化条件

关系式 (3.43) 给出一个重要推论。通过在其中作如下特化：$(\ell,\ \ell') \mapsto (\ell+1,\ \ell)$ 和 $(\ell,\ \ell') \mapsto (\ell,\ \ell+1)$，其中 ℓ 取模 r，并考虑它们的比值即可得到该推论。所得结果的左端可用准移位算子的本征值 $\mathcal{K}^{(\ell)}$ 和 $\mathcal{K}^{(\ell+1)}$ (2.2) 表示。注意，对于 r 为奇数的情况，$\log\big((-1)^{\mathtt{w}}\mathcal{K}^{(\ell)}\big) = O(N^{-\frac{1}{r}})$；对于 r 为偶数的情况，$\log\big((-1)^{\mathtt{w}}\mathcal{K}^{(\ell)}\big) = (-1)^{\ell}\frac{\pi}{n}s + O(N^{-\frac{1}{r}})$，于是得到

$$\left(\frac{N}{rN_0}\right)^{\frac{4\mathrm{i}}{r}(-1)^{\ell}s} \frac{\mathfrak{c}^{(\ell+1)}_{p,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{w})}{\mathfrak{c}^{(\ell)}_{p,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{w})} \frac{\bar{\mathfrak{c}}^{(\ell)}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}(\bar{\boldsymbol{w}})}{\bar{\mathfrak{c}}^{(\ell+1)}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}(\bar{\boldsymbol{w}})} = (-1)^{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{r}S^z}\Big(1+O\big(N^{-\epsilon}\big)\Big) \qquad (\ell\sim\ell+r)\,, \tag{4.2}$$

其中

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{for } \frac{N}{r} \text{ even} \\ 1 & \text{for } \frac{N}{r} \text{ odd} \end{cases} . \tag{4.3}$$

回想一下，我们始终假设 N 可被 r 整除，并且在构造重整化群轨迹 $|\Psi_N\rangle$时，必须保持 N/r 的奇偶性不变。因此我们得出结论：表征低能贝特态的参数 $\boldsymbol{s}$、 $\bar{\boldsymbol{s}}$ 并非彼此独立，而是满足 $r-1$ 个条件（对 $\ell=1$、2、.....、r将 (4.2) 相乘后，该等式恒成立）。

对于 $r=2$ 的情形，渐近系数 $\mathfrak{c}^{(\ell)}_{p,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{w})$ 和 $\bar{\mathfrak{c}}^{(\ell)}_{\bar{p}\,\bar{\boldsymbol{s}}}$ 存在解析闭式公式（$\bar{\boldsymbol{w}}$），参见文献 [25] 第 3 节。通过研究 (4.2) 发现， $\mathcal{Z}_2$ 不变自旋链所基于的共形场论的态空间同时具有连续分量和离散分量：在连续分量中， s 可取任意实数值；而在离散分量中， s 属于纯虚数构成的离散集合。当 r 为奇数时，按定义 s 为零，因此上述关系式左端依赖于 N 的因子消失。于是，给定 p 和 $\bar{p}$ 后，(4.2) 构成施加于 $r-1$ 个复数 $(s_1,\ldots,s_{\frac{r-1}{2}})$ 和 $(\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_{\frac{r-1}{2}})$ 的 $r-1$ 个独立复条件。因此，它们起到“量子化条件”的作用，预计将给出 $\boldsymbol{s}$ 和 $\bar{\boldsymbol{s}}$ 的一组离散可取值。对于偶数 r，关系式 (4.2) 中存在依赖于 N 的因子。与 $r=2$ 的情形相同，我们预计，除了一组离散值外，$s = s_{\frac{r}{2}} \equiv \bar{s}_{\frac{r}{2}}$ 也可取任意实数值，从而在谱中产生连续分量。其余的 $r-2$ 个复数 $(s_1,\cdots s_{\frac{r}{2}-1})$ 和 $(\bar{s}_1,\cdots \bar{s}_{\frac{r}{2}-1})$ 属于某个离散集合，这与 r 为奇数的情形相似。遗憾的是，由于缺少渐近系数的解析表达式，无法对量子化条件 (4.2) 进行全面分析。尽管如此，我们还是通过附录 C 中所述的方法计算了 $\mathfrak{c}^{(\ell)}_{p,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{w})$ 和 $\bar{\mathfrak{c}}^{(\ell)}_{\bar{p}\,\bar{\boldsymbol{s}}}$（$\bar{\boldsymbol{w}}$），并进行了一些数值检验，见表 1。

			|左边 − 右边| 关系式 (4.2)			
(L, $\bar{\mathrm{L}}$)	$\boldsymbol{s}=(s_1,\ s_2)$ $\boldsymbol{w}=\{w_\alpha\}_{\alpha=1}^{\mathrm{L}}$	$\bar{\boldsymbol{s}}=(\bar{s}_1,\ \bar{s}_2)$ $\bar{\boldsymbol{w}}=\{\bar{w}_\alpha\}_{\alpha=1}^{\bar{\mathrm{L}}}$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$
(0, 0)	$s_1=-0.5482+1.6871\mathrm{i}$ $s_2=+0.8181+0.5943\mathrm{i}$	$\bar{s}_1=-0.4520-1.3912\mathrm{i}$ $\bar{s}_2=+0.8017-0.5825\mathrm{i}$	1.6×10^{-4}	4.6×10^{-5}	1.8×10^{-4}	1.8×10^{-4}
(0, 1)	$s_1=+0.0974+1.8226\mathrm{i}$ $s_2=+0.3824+0.9444\mathrm{i}$	$\bar{s}_1=-2.9344-3.7480\mathrm{i}$ $\bar{s}_2=+0.7373+0.2855\mathrm{i}$ $\bar{w}_1=+1.2595-0.9676\mathrm{i}$	3.1×10^{-4}	3.9×10^{-4}	6.9×10^{-4}	6.8×10^{-4}
(1, 0)	$s_1=+0.2683-0.8257\mathrm{i}$ $s_2=+0.4242+0.3082\mathrm{i}$ $w_1=-0.6077-1.8703\mathrm{i}$	$\bar{s}_1=-0.5075-1.5618\mathrm{i}$ $\bar{s}_2=+0.9775-0.7102\mathrm{i}$	5.2×10^{-4}	4.4×10^{-4}	3.9×10^{-4}	3.9×10^{-4}
(2, 1)	$s_1=-4.0464-1.2882\mathrm{i}$ $s_2=+0.7113+1.7374\mathrm{i}$ $w_1=+1.3211-1.7905\mathrm{i}$ $w_2=+1.5367-0.9398\mathrm{i}$	$\bar{s}_1=-2.6122-4.0725\mathrm{i}$ $\bar{s}_2=+0.6267+0.6401\mathrm{i}$ $\bar{w}_1=+1.2004-1.0049\mathrm{i}$	4.8×10^{-4}	9.6×10^{-4}	1.1×10^{-3}	1.8×10^{-3}

表 1：列出的是从具有 $r=5$, $n=2.5$、$\mathrm{k}=0.1$ 且处于扇区 $S^z=1$ 的自旋链获得的数值数据，这些数据用于验证量子化条件 (4.2)。各行对应不同的重整化群轨迹。对于所有轨迹，$\mathrm{w}=0$；第一列显示手征能级 L 和 $\bar{\mathrm{L}}$。接下来的两列列出 $\boldsymbol{s}=(s_1,\ s_2)$ 和 $\bar{\boldsymbol{s}}=(\bar{s}_1,\ \bar{s}_2)$ 的值。这些值由 $b_a(N)$ (2.10) 得出，方法是将有限 N 处的数据插值至 $N=\infty$，见公式 (3.1)。此外，对于具有非零能级的态，我们给出集合 $\boldsymbol{w}$ 和 $\bar{\boldsymbol{w}}$，它们分别满足代数方程组 (3.28) 及其加横线版本。最后四列显示了四个独立关系式 (4.2) 左右两端之差的绝对值，其中 $\ell=1$，2，3，4。对于右端，忽略了修正项 $O(N^{-\epsilon})$，并且 $\sigma=0$，因为构建重整化群轨迹时所用的晶格尺寸使 $N/5$ 保持为偶整数。

4.2 主贝特态的量子化条件

我们首先讨论关于主贝特态的贝特根分布模式的一些简单事实。为此，有必要观察如下关于带有如式 (1.10) 中的非均匀参数 η_J 的贝特 Ansatz 方程 (1.1) 的解的事实。假设贝特根的数量 $M=\frac{N}{2}-S^z$ 可被 r 整除，并设 $\underline{\zeta_j}$ 具有如下形式

$$\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{r}(\ell-1)}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{r}\alpha_c}\qquad\qquad(c=1,2,\ldots,M/r\,;\ \ell=1,2,\ldots r)\,. \tag{4.4}$$

将其代入 (1.1)，可得

$$\left[\frac{\cosh(\alpha_c-\frac{\mathrm{i}\tilde{\gamma}}{2})}{\cosh(\alpha_c+\frac{\mathrm{i}\tilde{\gamma}}{2})}\right]^{\frac{N}{r}}=-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mathrm{k}}\prod_{b=1}^{\frac{N-2S^z}{2r}}\frac{\sinh(\alpha_c-\alpha_b-\mathrm{i}\tilde{\gamma})}{\sinh(\alpha_c-\alpha_b+\mathrm{i}\tilde{\gamma})}\,. \tag{4.5}$$

容易看出，这些正是长度为 N/r 的 Heisenberg XXZ 自旋 - 1 2 链 (1.3) 的贝特 Ansatz 方程，其中以 $\tilde{\gamma}$ 代替 γ，并且

$$\tilde{\gamma}=\frac{\pi r}{n+r}\,. \tag{4.6}$$

这些方程对应于总自旋的 z-分量取值为 S^z/r =0，1 2，1，..... 的扇区。众所周知，对于该扇区中的真空态，即 XXZ 哈密顿量本征值最低的态，相应的解满足所有 α_c 都是实数且互不相同，

$$\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{M/r}\,, \tag{4.7}$$

只要扭转参数 k 的绝对值足够小。通过公式 (2.1) 计算 $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链的哈密顿量 $\mathbb{H}$ 的本征值，其中贝特根取为

在选定此 α_c 时，式 (4.4) 中的形式，结果表明该本征值在给定 S^z 值的扇区中具有最低能量。

对于一个一般的 $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链主Bethe态，贝特根的分布模式在定性上仍然相似。也就是说，它们分成 r 组，使得每组中 ζ_j 的辐角近似等于 $\frac{2\pi}{r}(\ell-1)$，其中 $\ell=1,2,\ldots,r$。然而，贝特根中相位大致相同的根的数量可能有所不同。换言之，

$$\{\zeta_j\}_{j=1}^{M}=\{\zeta_j^{(1)}\}_{j=1}^{M_1}\cup\{\zeta_j^{(1)}\}_{j=1}^{M_2}\cup\ldots\cup\{\zeta_j^{(r)}\}_{j=1}^{M_r} \tag{4.8}$$

with

$$\arg\left(\zeta_j^{(\ell)}\right)\approx\frac{2\pi}{r}\,(\ell-1)\qquad\qquad(\mathrm{mod}\ 2\pi) \tag{4.9}$$

而整数 M_ℓ 不一定相同。需要指出的是，在沿每条射线分布的 Bethe 根分布边缘处，某些根的辐角可能会显著偏离 $\frac{2\pi}{r}(\ell-1)$。因此，将这些根分配到由 ℓ 或 $\ell+1\ (\mathrm{mod}\,r)$标记的相邻组时，可能会产生歧义。忽略这一细微问题后，可以为这些态分配如下数值集合

$$\mathfrak{m}_1=M_1-\frac{N}{2r}\,,\qquad \mathfrak{m}_2=M_2-\frac{N}{2r}\,,\qquad \ldots\,,\qquad \mathfrak{m}_r=M_r-\frac{N}{2r}\,, \tag{4.10}$$

当 N/r 为偶数时，它们是整数；当 N/r 为奇数时，它们是半整数。它们并非彼此独立，而是满足

$$\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\ldots+\mathfrak{m}_r=-S^z\le 0\,, \tag{4.11}$$

这是因为贝特根的总数等于 $\frac{N}{2}-S^z$。根分布边缘处的贝特根偏离射线不多，且沿射线没有明显间隙的态，通常对应于主贝特态。

对于形式为 (4.4) 的贝特 Ansatz 方程的解，其对应于 $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链的最低能量态（$S^z=0$），准移位算符 (2.2) 的本征值为

$$\mathcal{K}^{(\ell)}=1\ . \tag{4.12}$$

反过来，这意味着在标度极限下，常微分方程 (3.6) 和 (3.7) 中出现的所有参数 s_a 和 $\bar{s}_a$ 均为零。随后，经过变量替换，这些微分方程便与薛定谔方程一致；后者描述了 XXZ自旋链中主态的标度极限（见式 (A.4)）。

考虑针对主贝特态的量子化条件 (4.2)。在这种情况下，集合 $\boldsymbol{w}$ 和 $\bar{\boldsymbol{w}}$ 是平凡的，关系式可写为

$$\left(\frac{2^{\frac{r}{n}}\,N}{rN_0}\right)^{\frac{4\mathrm{i}}{r}(-1)^\ell s}\ \frac{F_p(\boldsymbol{s}^{(\ell+1)})}{F_p(\boldsymbol{s}^{(\ell)})}\,\frac{F_{\bar{p}}(\bar{\boldsymbol{s}}^{(\ell)})}{F_{\bar{p}}(\bar{\boldsymbol{s}}^{(\ell+1)})}=(-1)^\sigma\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{r}S^z}\Big(1+O\big(N^{-\epsilon}\big)\Big)\ . \tag{4.13}$$

此处 $\boldsymbol{s}^{(\ell)}$ 和 $\bar{\boldsymbol{s}}^{(\ell)}$ 表示

$$\boldsymbol{s}^{(\ell)}=\big(s_1^{(\ell)},\ldots,s_{[\frac{r}{2}]}^{(\ell)}\big)\,,\qquad\qquad \bar{\boldsymbol{s}}^{(\ell)}=\big(\bar{s}_1^{(\ell)},\ldots,\bar{s}_{[\frac{r}{2}]}^{(\ell)}\big) \tag{4.14}$$

with

$$s_a^{(\ell)}=(-1)^{ar}\ \mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}\pi a}{r}(2\ell-1)}\ s_a\,,\qquad\qquad \bar{s}_a^{(\ell)}=(-1)^{ar}\ \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi a}{r}(2\ell-1)}\ \bar{s}_a\ . \tag{4.15}$$

该函数

$$F_p(\boldsymbol{s})\equiv F_p\big(s_1,\ldots s_{[\frac{r}{2}]}\big) \tag{4.16}$$

是常微分方程的某个连接系数

$$\Big[-\partial_v^2+\mathrm{e}^{rv}+p^2+\sum_{a=1}^{[\frac{r}{2}]}s_a\,\mathrm{e}^{av}\Big]\,\tilde{\psi}=0\,. \tag{4.17}$$

为定义它，需考虑该微分方程的一个约斯特解，对于 $\Re e(p)\geq 0$，该解由以下条件唯一确定：

$$\tilde{\psi}_p\to \mathrm{e}^{pv}\qquad \text{as}\qquad v\to-\infty\,. \tag{4.18}$$

那么，系数 $F_p(\boldsymbol{s})$ 出现在渐近行为中：

$$\tilde{\psi}_p(v)\to F_p(\boldsymbol{s})\;\exp\Big(-\frac{rv}{4}+\frac{sv}{2}+\frac{2}{r}\,\mathrm{e}^{\frac{rv}{2}}\Big)\qquad \text{as}\qquad v\to+\infty\,. \tag{4.19}$$

回想一下，s 与式 (4.13) 一同出现在上述方程中，当 r 为奇数时恒等于零，而当 r 为偶数时则有 $s\equiv s_{\frac{r}{2}}\equiv\bar{s}_{\frac{r}{2}}$。显然，$F_p(\boldsymbol{s})$ 是所有变量 $(s_1,\dots,s_{[\frac{r}{2}]})$ 的整函数，因此当其辐角取任意复数时，函数都有明确的定义。

对等式 (4.13) 两边取对数，可得

$$\frac{4}{r}\,(-1)^{\ell-1}\,s\log\Big(\frac{2^{\frac{r}{n}}\,N}{rN_0}\Big)+\mathrm{i}\log\Big[\frac{F_p(\boldsymbol{s}^{(\ell+1)})}{F_p(\boldsymbol{s}^{(\ell)})}\,\frac{F_{\bar{p}}(\bar{\boldsymbol{s}}^{(\ell)})}{F_{\bar{p}}(\bar{\boldsymbol{s}}^{(\ell+1)})}\Big]=2\pi\,\Big(\mathfrak{n}_\ell+\frac{S^z}{r}\Big)+O\big(N^{-\epsilon}\big)\,. \tag{4.20}$$

这里 $\mathfrak{n}_\ell$ 与 $\ell=1,\dots,r$ 是一些数，使得

$$\mathfrak{n}_\ell\in\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{for}\;\; N/r\;\text{even}\\ \mathbb{Z}+\frac{1}{2} & \text{for}\;\; N/r\;\text{odd}\end{cases}\,. \tag{4.21}$$

为了赋予它们明确的意义，有必要确定包含函数 F_p 和 $F_{\bar{p}}$ 的对数分支。一个显而易见的要求是，对 $\ell=1,2,\dots,r$ 求和后，左端项必须为零。这意味着条件

$$\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r=-S^z\,. \tag{4.22}$$

可以预期的是，只要适当选择对数分支，$\mathfrak{n}_\ell$这些（半）整数就会与（4.10）中标记主贝特态的 $\mathfrak{m}_\ell$ 存在简单关系。为进一步探究这一点，我们考虑 $r=2$,3的情形。

For $r=2$ 连接系数 $F_p(\boldsymbol{s})$ 具有简单的解析表达式：

$$F_p(s)=2^{\frac{s}{2}-p-\frac{1}{2}}\;\frac{\Gamma(1+2p)}{\Gamma(\frac{1}{2}+p+\frac{s}{2})}\,. \tag{4.23}$$

这是因为相应的常微分方程（4.17）可化为

$$\Big[-\partial_v^2+\mathrm{e}^{2v}+p^2+s\,\mathrm{e}^{v}\Big]\,\tilde{\psi}=0\qquad\qquad (r=2)\,, \tag{4.24}$$

可将其化为合流超几何方程的形式。将关系式 (4.20) 专门应用于 $r=2$ 后，仅由一个独立方程组成。在其中令 $\ell=2$ 和 $\ell=1$ 并取差，得到

$$-4s\log\Big[\frac{N\,2^{\frac{2}{n}}\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{n})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\frac{1}{n})}\Big]-2\mathrm{i}\,\log\Big[2^{-2\mathrm{i}s}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+p+\frac{\mathrm{i}s}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+p-\frac{\mathrm{i}s}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\bar{p}+\frac{\mathrm{i}s}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\bar{p}-\frac{\mathrm{i}s}{2})}\Big]=2\pi\,(\mathfrak{n}_2-\mathfrak{n}_1)+O\big(N^{-\epsilon}\big) \tag{4.25}$$

其中，将 N_0 替换为其关于参数 n 的表达式 (3.21)。这是参考文献 [9,13,14] 中研究的量子化条件，研究背景为具有 $\mathcal{Z}_2$ 不变性的自旋链，其中 $\mathfrak{n}_2-\mathfrak{n}_1$ 被 $\mathfrak{m}\equiv\mathfrak{m}_2-\mathfrak{m}_1\in\mathbb{Z}$ 替换。[7] 在此情况下，对数分支的选取应使左侧对于实数 s 为连续函数，并且在 $s=0$ 处为零。考虑到 $\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2=-S^z$，可得

$$\mathfrak{n}_\ell=\mathfrak{m}_\ell \qquad\qquad (r=2)\,. \tag{4.26}$$

对于 $r\geq 3$，类似于式 (4.23) 的 $F_p(s)$ 简单解析公式并不存在。尽管如此，仍可通过对式 (4.17) 应用微扰理论和 WKB 近似来分析此函数。对于 $r=3$，常微分方程变为

$$\Big[-\partial_v^2+\mathrm{e}^{3v}+p^2+s_1\,\mathrm{e}^{v}\Big]\,\tilde\psi=0 \qquad\qquad (r=3) \tag{4.27}$$

通过微扰计算可得泰勒展开的前几项

$$\log F_p(s_1)=\log\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\;3^{\frac12+\frac{2p}{3}}\;\Gamma\big(1+\tfrac{2p}{3}\big)\right]+f_1\big(\tfrac{p}{3},\tfrac13\big)\,C\;s_1-f_2\big(\tfrac{p}{3},\tfrac13\big)\,C^2\;s_1^2+O(s_1^3)\;. \tag{4.28}$$

这里，函数 $f_1(h,g)$ 和 $f_2(h,g)$ 列于附录 B，而

$$C=\frac{3^{\frac23}}{\Gamma^2(-\frac13)}\;. \tag{4.29}$$

另一方面，WKB 近似给出，当 $|\arg(s_1)|<\pi$ 且 $|s_1|\to\infty$ 时，

$$\log F_p(s_1)=\log\left(\frac{\Gamma(1+2p)}{2\sqrt{\pi}}\right)-p\,\log(s_1)+\frac{\Gamma^2(\frac14)}{3\sqrt{\pi}}\;s_1^{\frac34}+\frac{\Gamma^2(\frac34)}{8\sqrt{\pi}}\;(1-8p^2)\,s_1^{-\frac34}+O\big(s_1^{-\frac32}\big) \tag{4.30}$$

（在此方程及式 (4.28) 右端，$\log(1)=0$）。整函数 $F_p(s_1)$ 的零点聚集在负 s_1 轴上，该轴是一条斯托克斯线。当 $s_1\to-\infty$ 时，可以证明

$$\begin{aligned}F_p(s_1)\;&=\;\frac{\Gamma(1+2p)}{\sqrt{\pi}}\;|s_1|^{-p}\;\exp\left(-|s_1|^{\frac34}\;\frac{\Gamma^2(\frac14)}{3\sqrt{2\pi}}-\frac{\Gamma^2(\frac34)}{8\sqrt{2\pi}}\;(1-8p^2)\,|s_1|^{-\frac34}+O\big(|s_1|^{-\frac32}\big)\right)\\&\times\;\cos\left(\pi p-|s_1|^{\frac34}\;\frac{\Gamma^2(\frac14)}{3\sqrt{2\pi}}+\frac{\Gamma^2(\frac34)}{8\sqrt{2\pi}}\;(1-8p^2)\,|s_1|^{-\frac34}+O\big(|s_1|^{-\frac32}\big)\right).\end{aligned} \tag{4.31}$$

这样，函数 $\log F_p(s_1)$ 可在较小的 s_1 处通过公式 (4.28) 确定，然后利用连续性将其延拓至楔形区域 $|\arg(s_1)|<\pi-\delta$，其中选择 $0<\delta\ll1$，使得 $F_p(s_1)$ 的零点不落在该区域内。

$r=3$ 的量子化条件 (4.20) 可写为

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\log\Big(F_p\big(\mathrm{e}^{+\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\ell}\,s_1\big)\Big)-\mathrm{i}\log\Big(F_p\big(\mathrm{e}^{+\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}(\ell-1)}\,s_1\big)\Big)+\mathrm{i}\log\Big(F_{\bar p}\big(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}(\ell-1)}\,\bar s_1\big)\Big)-\mathrm{i}\log\Big(F_{\bar p}\big(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\ell}\,\bar s_1\big)\Big)\\&=2\pi\left(\mathfrak{n}_\ell+\frac{S^z}{r}\right)+O\big(N^{-\epsilon}\big)\,.\end{aligned} \tag{4.32}$$

我们发现，如果 $F_p(s_1)$ 的对数如上所述固定，那么（半）整数 $\mathfrak{n}_\ell$ 与式 (4.10) 中的$\mathfrak{m}_\ell$ 之间的关系为

$$\mathfrak{n}_\ell=\mathfrak{m}_{\ell-1} \qquad\qquad (\ell\sim\ell+r\,;\;r=3)\,. \tag{4.33}$$

[7]我们的参数（$-\frac{s}{2}$）与那些文献中使用的 s 一致，另见附录 A。

	$\lvert s_1\rvert/\mathfrak{m}^{\frac{4}{3}}$		$\arg(s_1)$	
$(\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{m}_2,\ \mathfrak{m}_3)$	贝特拟设	公式 (4.34)	贝特拟设	公式 (4.38)
$(-2,\ -1,\ 1)$	1.265280	1.280089	2.534721	
$(-4,\ -2,\ 4)$	1.351599	1.352403	2.523989	$+2.523396$
$(-6,\ -3,\ 7)$	1.365639	1.365794	2.523508	

	$\lvert \bar{s}_1\rvert/\mathfrak{m}^{\frac{4}{3}}$		$\arg(\bar{s}_1)$	
$(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_3)$	Bethe Ansatz	公式 (4.34)	贝特拟设	公式 (4.38)
$(-2,\ -1,\ 1)$	1.185686	1.194405	-2.522902	
$(-4,-2,4)$	1.330539	1.330982	-2.523408	-2.523396
$(-6,-3,7)$	1.356189	1.356273	-2.523398	

表2：为了展示渐近公式 (4.34) 和 (4.38) 的准确性，为具有 $\mathcal{Z}_3$ 不变性的自旋链构造了主贝特态 $|\Psi_N\rangle$，这些态由不同的三元组 $(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_3)$ 表征。随后，通过从准平移算子的本征值计算 b_1, b_{-1} (2.10)，并取标度极限 $s_1 = C_1 \operatorname{slim}_{N\to\infty} b_1$, $\bar{s}_1 = -C_1 \operatorname{slim}_{N\to\infty} b_{-1}$，其中系数 C_1 如公式 (3.2) 所示，得到了 $s_1, \bar{s}_1$。所得结果用于生成“Bethe Ansatz”列中列出的数值。回顾一下，根据公式 (4.35)， $\mathfrak{m}$ 由 $(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_3)$ 给出，其中 $\mathfrak{m}_j$, $\mathfrak{m}_k$ 通过条件 (4.36) 和 (4.37) 定义。注意，对于所考虑的三个主贝特态，渐近公式 (4.38) 对 $\arg(s_1)$ 给出相同的结果，该结果列于最后一列；对于 $\arg(\bar{s}_1)$ 也同样如此。参数取为 $n = 2.5, \mathrm{k} = 0.05$，而对于所有态 $\mathrm{w} = 0$, $S^z = 2$。

此外，通过 $F_p(s_1)$ 的对数渐近公式（4.30），不难证明 国产成人

$$\begin{aligned} |s_1| &= \pi^2 \left[\frac{3}{\Gamma^2(\frac{1}{4})}\right]^{\frac{4}{3}} \mathfrak{m}^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{1-8\bar{p}^2}{9\pi\,\mathfrak{m}^2} + o\big(\mathfrak{m}^{-2}\big)\right) \\ |\bar{s}_1| &= \pi^2 \left[\frac{3}{\Gamma^2(\frac{1}{4})}\right]^{\frac{4}{3}} \mathfrak{m}^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{1-8p^2}{9\pi\,\mathfrak{m}^2} + o\big(\mathfrak{m}^{-2}\big)\right). \end{aligned} \tag{4.34}$$

这里， $\mathfrak{m}$ 以三元组（$\mathfrak{m}_1$， $\mathfrak{m}_2$， $\mathfrak{m}_3$）表示，如下：

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{\mathfrak{m}_j^2 + \mathfrak{m}_k^2}{2}}\,, \tag{4.35}$$

其中， $\mathfrak{m}_j$， $\mathfrak{m}_k$ 由以下条件定义

$$\mathfrak{m}_j \mathfrak{m}_k \geq 0\,. \tag{4.36}$$

公式 (4.34) 在保持 $\mathfrak{m} \gg 1$ 、 p 和 $\bar{p}$ 不变的情况下有效。请注意，如果 $\mathfrak{m}_1$、 $\mathfrak{m}_2$ 和 $\mathfrak{m}_3$ 的符号均相同，则它们的绝对值必须小于 $S^z = p + \bar{p} \geq 0$。因此，公式 (4.34) 不再适用。此外，对于我们能够构造的所有重整化群轨迹，只要半整数（$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$）能够被明确定义，其中至少有两个小于或等于零，因此 $\mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_k \leq 0$。

条件 (4.36) 无法明确确定从三元组 $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3)$ 中选取的 $\mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_k$。这对于描述 $|s_1|$ 和 $|\bar{s}_1|$ 的渐近行为并不重要，因为 (4.34) 仅涉及 $\mathfrak{m}$，而它在置换 $\mathfrak{m}_j \leftrightarrow \mathfrak{m}_k$ 下保持不变。接下来，考虑 s_1, $\bar{s}_1$ 的辐角的大 $\mathfrak{m}$ 渐近公式，我们在 (4.36) 中补充以下要求

$$|\mathfrak{m}_j| \geq |\mathfrak{m}_k|\,. \tag{4.37}$$

然后我们发现,

$$\arg(s_1) = \frac{2\pi}{3}\,\mu_\ell + (-1)^{\#(\mathcal{P})}\;\frac{4}{3}\,\arctan\Big(\frac{\mathfrak{m}_j-\mathfrak{m}_k}{\mathfrak{m}_j+\mathfrak{m}_k}\Big) + o\big(|\mathfrak{m}|^{-2}\big)$$

$$\arg(s_1) + \arg(\bar{s}_1) = o\big(|\mathfrak{m}|^{-2}\big)\,, \tag{4.38}$$

其中 $(-1)^{\#(\mathcal{P})}$ 表示置换 $\mathcal{P}$ 的奇偶性：$(1,2,3)\;\mapsto (j,k,\ell)$，而

$$\mu_\ell = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \ell = 1 \\ -1 & \text{for} \quad \ell = 2 \\ +1 & \text{for} \quad \ell = 3 \end{cases}\,. \tag{4.39}$$

注意，对于 $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}_k$ 的情况，(4.38) 中的反正切项为零，$\arg(s_1) = \frac{2\pi}{3}\,\mu_\ell + o(|\mathfrak{m}|^{-2})$，对于 $\arg(\bar{s}_1)$ 也有类似的结论。此外，条件 (4.36) 保证了不等式

$$-\,\frac{\pi}{3} \;<\; \frac{4}{3}\,\arctan\left(\frac{\mathfrak{m}_j-\mathfrak{m}_k}{\mathfrak{m}_j+\mathfrak{m}_k}\right) \;\le\; \frac{\pi}{3}\,. \tag{4.40}$$

为了说明式 (4.34) 和 (4.38) 的准确性，表 2 将通过求解与主贝特态相对应的贝特 Ansatz 方程得到的 s_1 和 $\bar{s}_1$ 的一些数值数据，与这些渐近公式给出的预测进行了比较。

5 大 E时的谱行列式

在常微分方程/量子场论对应的背景下，谱行列式的大E 渐近展开研究发挥着重要作用。展开的前几项已在 (3.39)-(3.41) 中给出。我们将这些公式中最后一个公式的右端记为

$$C^{(\ell)}(\theta) \equiv \mathfrak{C}^{(\ell)}_{p,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{w})\;\exp\left[\frac{N_0}{\cos(\frac{\pi r}{2n})}\,\mathrm{e}^{\theta} + \left((-1)^{\ell-1}\,\mathrm{i}s - \frac{2np}{n+r}\right)\frac{\theta}{r}\right]. \tag{5.1}$$

回想一下，整数 $\ell = 1, 2, \ldots r$ 标记了复平面中不同的扇形区域 $\arg\big((-1)^{r-1}\,E\big) \in \big(\frac{2\pi}{r}(\ell-1)\;\frac{2\pi}{r}\ell\big)$ (mod 2π)。对常微分方程 (3.26) 的分析表明，完整的渐近展开可以表示为如下形式

$$D_p(E\,|\,\boldsymbol{w}) \asymp C^{(\ell)}(\theta)\;\exp\Big(\,S^{(\ell)}(\theta) + I(\theta) + \tilde{H}^{(\ell)}(\theta)\,\Big)\,, \tag{5.2}$$

其中，形式渐近级数 $S^{(\ell)}(\theta)$、$I(\theta)$ 和 $\tilde{H}(\theta)$ 描述如下。

对（3.41）的最大修正来自 $S^{(\ell)}(\theta)$。特别是,

$$S^{(\ell)}(\theta) = \frac{1}{2n\sqrt{\pi}}\;\sum_{a=1}^{[\frac{r-1}{2}]}(\eta_\ell)^a\;\Gamma\big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2a-r}{2n}\big)\,\Gamma\big(\tfrac{2a-r}{2n}\big)\;s_a\;\mathrm{e}^{-(1-\frac{2a}{r})\,\theta} + S_1^{(\ell)}(\theta) \tag{5.3}$$

$S_1^{(\ell)}(\theta)$的衰减速度比显式写出的项更快，其中 $\theta\to\infty$。后一行线性依赖于进入微分方程 (3.26) 的参数 s_a。按照通常的解释，s_a是某些运动积分 (IM)$\mathbf{S}_a$的本征值。下标 a 与这些算子相对于 $\mathcal{Z}_r$ 对称变换的荷相一致。此外，它们的共形维数为

$$\mathbf{S}_a\;:\qquad (\Delta,\bar{\Delta}) = \big(1-\tfrac{2a}{r},0\big)\qquad\qquad \big(a=1,\ldots,[\tfrac{r}{2}]\big)\,. \tag{5.4}$$

类似地， E 很大时， $D_{\bar{p}}($ $E\,|\,\bar{\boldsymbol{w}})$的渐近形式涉及算子 $\mathbf{S}_a$的特征值，其 $\mathcal{Z}_r$荷为 $(-a)$，共形维数为

$$\bar{\mathbf{S}}_a\ :\qquad (\Delta,\bar{\Delta})=\big(0,1-\tfrac{2a}{r}\big)\qquad\qquad \big(a=1,\dots,[\tfrac{r}{2}]\big)\,. \tag{5.5}$$

式 (5.3) 中的形式渐近级数 $S_1^{(\ell)}$ (θ) 具有如下的一般结构

$$S_1^{(\ell)}(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{[\frac{r}{2}]}(\eta_\ell)^a\ S_{m,a}\ \mathrm{e}^{-(2m+1-\frac{2a}{r})\,\theta}\ . \tag{5.6}$$

同样，展开的系数$S_{m,\ a}$ 用某些算子的本征值表示，这些算子的 $\mathcal{Z}_r$ 荷为 a，且其共形维数为 $\Delta=2m+1-\frac{2a}{r}$ 和 $\bar{\Delta}=0$。

A在系数 $S_{m,\ a}$中， $a=\frac{r}{2}$ 为偶数 r 的那些系数值得特别关注 ：

$$S_{m,\frac{r}{2}}\equiv I_{2m}\qquad (m=1,2,\dots;\ \ r-\text{even})\,. \tag{5.7}$$

它们是某些算子 $\mathbf{I}_{2m}$ 的本征值，这些算子的 $\mathcal{Z}_r$ 荷为 $\frac{r}{2}$ （模 r），且具有整数共形维数

$$\mathbf{I}_{2m}\ :\qquad (\Delta,\bar{\Delta})=\big(2m,0\big)\,. \tag{5.8}$$

算子 $\mathbf{I}_{2m}$ 预期为局域 IM，即它们可表示为如下形式

$$\mathbf{I}_{2m}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\,T_{2m+1}(u)\,, \tag{5.9}$$

其中 $T_{2m+1}(u)$ 是洛伦兹自旋为 $2m+1$ 的手征局域场，满足

$$\bar{\partial}T_{2m+1}(u)=0\,. \tag{5.10}$$

同样地 谱行列式 $D_{\bar{p}}(E\,|\,\bar{\boldsymbol{w}})$ 的展开给出了

$$\bar{\mathbf{I}}_{2m}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{2\pi}\,\bar{T}_{2m+1}(\bar{u})\,,\qquad\qquad \partial\bar{T}_{2m+1}(\bar{u})=0\,. \tag{5.11}$$

这些具有与$\mathbf{I}_{2m}$相同的 $\mathcal{Z}_r$ 荷，即 $\frac{r}{2}$ （模 r）。

虽然只有当 r 为偶数时才会出现$\mathbf{I}_{2m}$ 和$\mathbf{I}_{2m}$ ，但预计对于一般的正整数 r，该理论还具有额外的局域 IM$\mathbf{I}_{2m-1}$ 和$\mathbf{I}_{2m-1}$。对于前者

$$\mathbf{I}_{2m-1}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\,T_{2m}(u)\,,\qquad\qquad \bar{\partial}T_{2m}(u)=0\,, \tag{5.12}$$

其中手性局域密度 T_{2m} 具有洛伦兹自旋 $2m$ ，对于 $\mathbf{I}_{2m-1}$ 也同样如此。这些局域 IM 均为$\mathcal{Z}_r$ 不变量。$\mathbf{I}_{2m-1}$ 的本征值出现在公式（5.2）中的 $I(\theta)$ 里。特别地，首项明确写作

$$I(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\big(-\tfrac{r}{2n}\big)\,\Gamma\big(\tfrac{3}{2}+\tfrac{r}{2n}\big)\ I_1\ \mathrm{e}^{-\theta}+\dots\ , \tag{5.13}$$

其中

$$I_1=\frac{p^2}{n+r}+\frac{s^2}{4n}-\frac{r}{24}+\mathtt{L}\qquad\qquad (s\equiv 0\ \text{for}\ r\ \text{odd};\ s\equiv s_{\frac{r}{2}}\ \text{for}\ r\ \text{even})\,. \tag{5.14}$$

相应的算子具有如下形式

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \left((\partial\varphi)^2 + \dots \right). \tag{5.15}$$

这里， $\partial\varphi$ 是与自旋链的全局 U(1) 对称性相关的流的手征分量。[8] 省略号表示其他自由度的贡献。请注意，公式 (5.15) 消除了$\mathbf{I}_1$, 归一化中的任意性，其归一化方式使其特征值由 (5.14) 给出。这是因为零模 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\frac{u}{2\pi}\, \partial\varphi$ 的本征值为 $P = \frac{p}{\sqrt{n+r}}$。共形场论哈密顿量与

$$\mathbf{H}_{\mathrm{CFT}} = \mathbf{I}_1 + \bar{\mathbf{I}}_1 \ . \tag{5.16}$$

$I(\theta)$的完整级数形式为

$$I(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(n+r)^m}{2n\sqrt{\pi}\, m!}\, \Gamma\big(-(m-\tfrac{1}{2})\,\tfrac{r}{n}\big)\, \Gamma\big((m-\tfrac{1}{2})\,\tfrac{n+r}{n}\big)\ I_{2m-1}\ \mathrm{e}^{-(2m-1)\theta}\ . \tag{5.17}$$

这里，系数 I_{2m-1} 依赖于 p，使得当 $p \to \infty$时，

$$I_{2m-1} = \left(\frac{p^2}{n+r} \right)^m + O\big(p^{2m-2}\big)\ . \tag{5.18}$$

这些是式 (5.12) 中局域 IM $\mathbf{I}_{2m-1}$ 的本征值。

最后，式 (5.2) 中的项 $\tilde{H}^{(\ell)}(\theta)$表示形式渐近级数

$$\tilde{H}^{(\ell)}(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{H}_m^{(\ell)}\ \mathrm{e}^{-\frac{2nm}{r}\,\theta}\,. \tag{5.19}$$

它涉及“对偶非局域”IM 的本征值，其洛伦兹自旋取决于 n，由$\frac{2nm}{r}$给出，其中 $m = 1, 2, 3, \dots$。对于 $r = 1$ 这一情形，这类算子最早是在量子 KdV 理论的背景下于参考文献 [23] 中讨论的。另请注意，式 (5.1) 中的系数 $\mathfrak{C}_p^{(\ell),s}(w)$ 可以解释为最简单的非局域 IM 的本征值，它与所谓的反射算子 [24,25]有关。

6 结论

本文的主要成果是给出一类二阶线性微分方程及其量子化条件，用以描述各向异性参数为 $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n+r}}$ 且满足 $n > 0$ 的临界区中 $\mathcal{Z}_r$ 不变自旋链的标度极限。由于场论描述超出了本文的范围，我们不能声称已经为该模型建立了常微分方程/量子场论对应。我们认为进一步研究这一理论很有价值，因为即便是浅显的分析，也揭示了支配临界行为的共形场论的许多有趣特征。其中包括基态（以及所有共形初级态）的无限简并，以及谱中连续分量的存在；后一现象出现在 r 为偶数的情形。作为本文的结尾，我们想提及两个可能的研究方向；在我们看来，它们或许有助于更好地理解该模型的临界行为。

第一个涉及扩展共形对称代数。研究该代数的一种方法是利用局域 IM (5.9)、(5.12) 的密度 (T_j, T_j)，其中 $j = 2, 4, 6, \dots$ 适用于奇数 r，并且

[8] 流 $\partial\varphi$ 通过算子乘积展开 $\partial\varphi(u_1)\,\partial\varphi(u_2) = -\frac{1}{(u_1-u_2)^2} + O(1)$ 进行归一化。

$j = 2$，3，4，.....对于偶数 r。由于此类场具有周期性，例如 $T_j(u + 2\pi) = T_j(u)$，并且出现在积分中，因此它们在加上一个全导数的意义下定义：

$$T_j \mapsto T_j + \partial \mathcal{O}_{j-1}\,, \qquad\qquad \bar{T}_j \mapsto \bar{T}_j + \bar{\partial}\bar{\mathcal{O}}_{j-1}\,, \tag{6.1}$$

其中，$\mathcal{O}_{j-1}\ (\bar{\mathcal{O}}_{j-1})$ 是洛伦兹自旋为 $j-1\,(1-j)$ 的局部手征场。根据对 $r = 1,2$ 这些情形的研究经验，我们预期可以选择密度，使其生成一个封闭的 $\mathcal{W}$-代数。构造扩展共形对称代数，将是描述晶格系统临界行为所依据的共形场论的重要一步。

第二个方向是研究极限 $n \to \infty$。与 $r = 2$ 的情况一样，人们预期它可以被解释为经典极限，此时共形场论具有拉格朗日描述。若果真如此，这无疑将为理解该理论的物理内容带来宝贵的启示。

致谢

GK 感谢与 Holger Frahm 的讨论。

GK 的研究得到了德国研究联合会（Deutsche Forschungsgemeinschaft）资助，资助项目编号为 Fr 737/9-2。本研究的最后一部分是在 GK 访问罗格斯大学 NHETC 期间完成的。他对访问期间所获得的支持与热情接待表示感谢。

研究#+#+#+#+ SL 的 h 部分由美国国家科学基金会通过 NSF-PHY-2210187 号资助项目部分资助。.

A 附录

所提出的常微分方程 (3.6) 中，$r = 1,2$ 这些特殊情形已有文献讨论。对于 $r = 1$，该微分方程写作

$$\left[-\partial_z^2 + \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - \frac{1}{z} + E^{-n-1}\ z^{n-1}\right]\Psi = 0 \qquad\qquad (r = 1)\,. \tag{A.1}$$

通过变量替换：

$$z = \tfrac{1}{4}\,E_{\mathrm{XXZ}}\,x^2\,, \qquad\qquad \Psi = \sqrt{x}\,\Psi_{\mathrm{XXZ}} \tag{A.2}$$

及参数

$$p = \sqrt{\alpha+1}\,(\ell + \tfrac{1}{2})\,, \qquad n = \alpha\,, \qquad E = 2^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}}\,E_{\mathrm{XXZ}} \tag{A.3}$$

这个常微分方程变为文献 [17–19] 中出现的非简谐振子的薛定谔方程：

$$\left[-\partial_x^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + x^{2\alpha} - E_{\mathrm{XXZ}}\right]\Psi_{\mathrm{XXZ}} = 0\,. \tag{A.4}$$

它描述了各向异性参数为 $q = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{\alpha+1}}$ 的 XXZ自旋链的标度行为，参见例如文献 [14, 21]。

当 $r = 2$ 时，方程 (3.6) 变为

$$\left[-\partial_z^2 + \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - \frac{s_1}{z} - 1 + E^{-n-2}\ z^n\right]\Psi = 0 \qquad\qquad (r = 2)。 \tag{A.5}$$

代换

$$z \mapsto \mathrm{i}z\,, \qquad\qquad s_1 \mapsto -2s\,, \qquad\qquad E \mapsto \mathrm{i}\lambda \tag{A.6}$$

将其化为参考文献 [13] 中讨论的微分方程形式，该文讨论的是具有 $\mathcal{Z}_2$ 不变性的自旋链的标度极限。

B 附录

这里给出 f_1、 f_2 的显式公式，它们出现在方程 (3.15) 和 (4.28) 中。我们采用与参考文献 [14], 相同的记号，这些函数此前已在该文中出现。

函数 f_1 定义为

$$f_1(h,g) \;=\; \frac{\pi\Gamma(1-2g)}{\sin(\pi g)}\,\frac{\Gamma(g+2h)}{\Gamma(1-g+2h)}\;. \tag{B.1}$$

至于 f_2，情况则更为复杂，其表达式由积分给出。

$$f_2(h,g) = 2^{1-4g}\,\frac{\Gamma^2(1-g)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+g)}\,\frac{\Gamma(2g+2h)}{\Gamma(1-2g+2h)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\,\frac{S_1(x)}{x+\mathrm{i}h} \qquad \big(0<g<\tfrac{1}{2},\ \Re e(h)>0\big) \tag{B.2}$$

with

$$S_1(x) = \sinh(2\pi x)\,\Gamma(1-2g+2\mathrm{i}x)\,\Gamma(1-2g-2\mathrm{i}x)\,\big(\Gamma(g+2\mathrm{i}x)\Gamma(g-2\mathrm{i}x)\big)^2\;. \tag{B.3}$$

对于- $\frac{1}{2}<g<1$ ，有

$$\begin{aligned} f_2(h,g) \;&=\; 2^{1-4g}\,\frac{\Gamma^2(1-g)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+g)}\,\frac{\Gamma(2g+2h)}{\Gamma(1-2g+2h)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\,\frac{S_1(x)}{x+\mathrm{i}h}\right. \\ &-\; \left.\frac{\sin(2\pi g)\Gamma(3-4g)\Gamma^2(1-g)\Gamma^2(3g-1)}{(2h+1-2g)(2h-1+2g)}\right) \qquad \big(\tfrac{1}{2}<g<1,\ \Re e(h)>0\big)\;. \end{aligned} \tag{B.4}$$

C 附录

系数 $\mathfrak{c}_p^{(\ell)},\ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{w})$ 出现在谱行列式 (3.41) 的大 E 渐近展开中，可用该微分方程的连接系数表示。

$$\left[-\partial_v^2+\mathrm{e}^{rv}+p^2+\sum_{a=1}^{[\frac{r}{2}]}s_a^{(\ell)}\,\mathrm{e}^{av}+\sum_{\alpha=1}^{\mathtt{L}}\left(\frac{2}{\big(1+w_\alpha^{(\ell)}\mathrm{e}^{-v}\big)^2}+\frac{n_\alpha}{1+w_\alpha^{(\ell)}\mathrm{e}^{-v}}\right)\right]\tilde{\psi}=0\;, \tag{C.1}$$

其中

$$s_a^{(\ell)} = (-1)^{ar}\,\mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}\pi a}{r}(2\ell-1)}\,s_a \qquad \text{and} \qquad w_\alpha^{(\ell)} = (-1)^r\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{r}(2\ell-1)}\,w_\alpha\;. \tag{C.2}$$

该常微分方程通过变量代换由 (3.26) 得到,

$$z = (-1)^{r-1}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{r}(2\ell-1)}\,\mathrm{e}^{v}\;, \qquad \Psi = \mathrm{e}^{\frac{v}{2}}\,\tilde{\psi}\,, \tag{C.3}$$

并令其中的 E 趋于无穷大。假设 $\Re e(p)\geq 0$ ，我们考虑 (C.1) 的一个解，使得

$$\tilde{\psi}_p \to \mathrm{e}^{pv} \qquad \text{as} \quad v\to-\infty\;. \tag{C.4}$$

直接进行 WKB 分析可得，当 $v\to+\infty$,

$$\tilde{\psi}_p(v) \to C_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})\;\exp\left(-\frac{rv}{4}-\mathrm{i}\,(-1)^\ell\,\frac{sv}{2}+\frac{2}{r}\,\mathrm{e}^{\frac{rv}{2}}\right) \tag{C.5}$$

with

$$s\equiv\begin{cases}0 & \text{for odd } r\\ s_{\frac{r}{2}} & \text{for even } r\end{cases}\;. \tag{C.6}$$

可以证明，$\mathfrak{C}_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})$ 可用连接系数 $C_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})$ 表示为

$$\mathfrak{C}_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w}) = \sqrt{\frac{4\pi}{n+r}}\ (n+r)^{-\frac{2p}{n+r}}\ 2^{-\mathrm{i}\,(-1)^{\ell}\,\frac{s}{n}}\ \frac{C_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})}{\Gamma\big(1+\frac{2p}{n+r}\big)}\,. \tag{C.7}$$

$\bar{\mathfrak{C}}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}(\bar{\boldsymbol{w}})$ 的计算与谱行列式 $D_{\bar{p}}(E\,|\,\bar{\boldsymbol{w}})$ 的大 $\bar{E}$ 渐近公式 (3.41) 中的计算类似。相关的常微分方程在形式上与 (C.1) 一致，只需将变量 $(v,\tilde{\psi}) \mapsto (\bar{v},\tilde{\bar{\psi}})$ 和参数 $(p, s_a^{(\ell)}, w_\alpha^{(\ell)}, n_\alpha, \mathrm{L}) \mapsto (\bar{p}, \bar{s}_a^{(\ell)}, \bar{w}_\alpha^{(\ell)}, \bar{n}_\alpha, \bar{\mathrm{L}})$ 进行相应替换即可；同时，结合 (C.2)，我们采用如下记号。

$$\bar{s}_a^{(\ell)} = (-1)^{ar}\ \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi a}{r}(2\ell-1)}\ \bar{s}_a \qquad \text{and} \qquad \bar{w}_\alpha^{(\ell)} = (-1)^{r}\ \mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}\pi}{r}(2\ell-1)}\ \bar{w}_\alpha\ . \tag{C.8}$$

连接系数是从解 $\psi_{\bar{p}}$ 的 $\bar{v} \to +\infty$ 渐近行为中提取的，该解由条件 $\tilde{\bar{\psi}}_{\bar{p}} \to \mathrm{e}^{\bar{p}\bar{v}}$（当 $\bar{v} \to -\infty$ 时）定义。也就是说，

$$\tilde{\bar{\psi}}_{\bar{p}}(\bar{v}) \to \bar{C}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}(\bar{\boldsymbol{w}})\ \exp\bigg(-\frac{r\bar{v}}{4} + \mathrm{i}\,(-1)^{\ell}\,\frac{s\bar{v}}{2} + \frac{2}{r}\,\mathrm{e}^{\frac{r\bar{v}}{2}}\bigg) \tag{C.9}$$

（回想一下，对于 r 偶数时，$s \equiv \bar{s}_{\frac{r}{2}}$，而对于 r 奇数时则恒等于零。）那么，(C.7) 的带横线版本可写为

$$\bar{\mathfrak{C}}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}(\bar{\boldsymbol{w}}) = \sqrt{\frac{4\pi}{n+r}}\ (n+r)^{-\frac{2\bar{p}}{n+r}}\ 2^{+\mathrm{i}\,(-1)^{\ell}\,\frac{s}{n}}\ \frac{\bar{C}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}(\bar{\boldsymbol{w}})}{\Gamma\big(1+\frac{2\bar{p}}{n+r}\big)}\,. \tag{C.10}$$

这里需要作如下说明。对于不存在表观奇点的情况，系数 $C_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}$ 和 $\bar{C}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}$ 可用第 4.2 节中使用的函数 $F_p(\boldsymbol{s}) = F_p(s_1,\dots,s_{[\frac{r}{2}]})$ 表示：

$$C_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\emptyset) = F_p(\boldsymbol{s}^{(\ell)})\,, \qquad \bar{C}_{\bar{p},\bar{\boldsymbol{s}}}^{(\ell)}(\emptyset) = F_{\bar{p}}(\bar{\boldsymbol{s}}^{(\ell)})\,, \tag{C.11}$$

其中 $\boldsymbol{s}^{(\ell)} = \big(s_1^{(\ell)},\dots,s_{[\frac{r}{2}]}^{(\ell)}\big)$、$\bar{\boldsymbol{s}}^{(\ell)} = \big(\bar{s}_1^{(\ell)},\dots,\bar{s}_{[\frac{r}{2}]}^{(\ell)}\big)$ 中的 $s_a^{(\ell)}$ 和 $\bar{s}_a^{(\ell)}$ 分别定义于公式 (C.2) 和 (C.8)。

上述计算渐近系数的方法，例如 $\mathfrak{C}_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})$，是在假设 $\Re e(p) \geq 0$ 的前提下成立的。不过，该方法也可扩展到任意 $2p \neq -1,-2,\dots$，如下所述。注意，$\Psi_p(z) = \mathrm{e}^{\frac{v}{2}}\,\tilde{\psi}_p$，其中 z 与 v 的关系如 (C.3) 所示，满足微分方程

$$\Big(-\partial_z^2 + t_0(z) + t_1(z)\Big)\,\Psi_p = 0 \tag{C.12}$$

并且满足

$$\Psi_p\big(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}z\big) = -\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p}\,\Psi_p(z)\ . \tag{C.13}$$

此处左端项应理解为沿着围绕 $z=0$ 的小轮廓逆时针进行解析延拓。对于任意 $2p \neq -1,\ -2,\ \cdots$，均可定义这样的解 $\Psi_p(z)$。通过变回原变量 v、ψ_p 并使用 (C.5)，即可提取连接系数 $C_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})$。进而，$\mathfrak{C}_{p,\boldsymbol{s}}^{(\ell)}(\boldsymbol{w})$ 可由公式 (C.7) 得到。

参考文献

[1] *R. J. Baxter*，《统计力学中的精确可解模型》，*Academic Press*，伦敦（*1982*）。[2] *A. Luther* 和 *I. Peschel*，《从一维量子场论计算二维临界指数》，*Phys. Rev. B 12 (1975) 3908-3917*。[3] *L. P. Kadanoff* 和 *A. C. Brown*，《*Baxter*模型和*Ashkin-Teller*模型临界线上的关联函数》，*Ann. Phys. 121 (1979) 318-342*。[4] *F. C. Alcaraz*、*M. N. Barber* 和 *M. T. Batchelor*，《共形不变性、*XXZ*链与二维临界系统的算符内容》，*Ann. of Phys. 182 (1988) 280-343*。[5] *R. J. Baxter*，《正方晶格上的广义铁电模型》，*Stud. Appl. Math. 50 (1971) 51-69*。[6] *V. V. Bazhanov*、*G. A. Kotousov*、*S. M. Koval* 和 *S. L. Lukyanov*，《非均匀六顶点模型的若干代数方面》，*SIGMA 17 (2021)* 025 [*arXiv:math-ph/2010.*10615].[7] *J. L. Jacobsen* 和 *H. Saleur*，《正方晶格波茨模型的反铁磁相变》，*Nucl. Phys. B 743 (2006) 207-*248 [*arXiv:cond-mat/*0512058].[8] *Y. Ikhlef*、*J. Jacobsen* 和 *H. Saleur*，《具有非紧致连续极限的交错六顶点模型》，*Nucl. Phys. B 789 (2008) 483-*524 [*arXiv:cond-mat/*0612037].[9] *Y. Ikhlef*、*J. L. Jacobsen* 和 *H. Saleur*，《用于*SL(2,R)/U(1)*黑洞*σ*模型的可积自旋链》，*Phys. Rev. Lett. 108 (2012)* 081601 [*arXiv:hep-th/1109.*1119].[10] *H. Frahm* 和 *M. J. Martins*，《可积交替 $U_q[sl(2|1)]$ 超自旋链的相图》，*Nucl. Phys. B 862 (2012) 504-*552 [*arXiv:cond-mat/1202.*4676].[11] *C. Candu* 和 *Y. Ikhlef*，《*SL(2,R)/U(1)*黑洞*σ*模型的非线性积分方程》，*J. Phys. A 46 (2013)* 415401 [*arXiv:hep-th/1306.*2646].[12] *H. Frahm* 和 *A. Seel*，《交错六顶点模型：共形不变性与标度修正》，*Nucl. Phys. B 879 (2014) 382-*406 [*arXiv:comd-mat/1311.*6911].[13] *V. V. Bazhanov*、*G. A. Kotousov*、*S. M. Koval* 和 *S. L. Lukyanov*，《交替自旋链的标度行为》，*JHEP 08 (2019)* 087 [*arXiv:hep-th/1903.*05033].[14] *V. V. Bazhanov*、*G. A. Kotousov*、*S. M. Koval* 和 *S. L. Lukyanov*，《 $\mathbb{Z}_2$不变非均匀六顶点模型的标度极限》，*Nucl. Phys. B 965 (2021) 115337*[*arXiv:math-ph/2010.*10613].[15] *Y. Ikhlef*、*J. L. Jacobsen* 和 *H. Saleur*，《 $\mathbb{Z}_2$ 交错顶点模型及其应用》，*J. Phys. A 43 (2010)* 225201 [*arXiv:math-ph/0911.*3003].[16] *G. A. Kotousov* 和 *S. L. Lukyanov*，《广义仿射 $\mathfrak{sl}(2)$ *Gaudin*模型的常微分方程/量子场论对应》，*JHEP 09 (2021)* 201 [*arXiv:hep-th/2106.*01238].[17] *A. Voros*，《非简谐振子（单维）的精确量子化条件》，*J. Phys. A 27 (1994) 4653-4661*。[18] *P. Dorey* 和 *R. Tateo*，《非谐振子、热力学贝特拟设与非线性积分方程》，*J. Phys. A 32 (1999) L419-L*425 [*arXiv:hep-th/*9812211]。

[19] *V. V. Bazhanov*、*S. L. Lukyanov* 和 *A. B. Zamolodchikov*，《薛定谔方程的谱行列式与共形场论的 *Q* 算子》，*J. Stat. Phys. 102 (2001) 567-576*[*arXiv:hep-th/*9812247].[20] *V. V. Bazhanov*、*S. L. Lukyanov* 和 *A.B.Zamolodchikov*，《*Q* 算子的高阶本征值与薛定谔方程》，*Adv. Theor. Math. Phys. 7 (2003) 711-*725 [*arXiv:hep-th/*0307108].[21] *G. A. Kotousov* 和 *S. L. Lukyanov*，《标度极限下海森堡自旋链的贝特态范数》，*Nucl. Phys. B 947 (2019)* 114748 [*arXiv:hep-th/1906.*07081].[22] *J. L. Cardy*，《二维共形不变理论的算符内容》，*Nucl. Phys. B 270 (1986) 186-204*.[23]*V. V. Bazhanov*、*S. L. Lukyanov* 和 *A. B. Zamolodchikov*，《共形场论的可积结构 *II*：*Q* 算子与 *DDV* 方程》，*Commun. Math. Phys. 190 (1997) 247-278*[*arXiv:hep-th/*9604044].[24] *A. B. Zamolodchikov* 和 *Al. B. Zamolodchikov*，《*Liouville* 场论中的结构常数与共形自举》，*Nucl. Phys. B 477 (1996) 577-*605 [*arXiv:hep-th/*9506136].[25] *G. A. Kotousov* 和 *S. L. Lukyanov*，《不同可积结构中的反射算子谱》，*JHEP 02 (2020)* 029 [*arXiv:hep-th/1910.*05947].