arXiv:2305.03645v1 [econ.TH] 5 May 2023

算法决策过程

C.Baldassi F. Maccheroni M. Marinacci M. Pirazzini

2023年5月8日

摘要

我们对一种算法决策过程进行了全面分析。该过程在多选项选择问题中，能够产生可计算的选择概率和预期决策时间。

1 引言

一种算法决策程序 在多备选项选择问题中，决策单元旨在从有限的可选项选择集 A 中找出最佳备选项。如果它们拥有无限资源，能够不受限制地对备选项作出精确判断，就可以采用标准修正程序。这种蛮力比较与淘汰算法依次分析备选项对，并永久淘汰较差者。如果单元偏好是完备且传递的，那么经过 $|A|-1$ 次比较后，该算法的当前解就是最优选择。传统选择理论隐含着一种此类底层算法。

然而，决策单元的资源通常过于有限，无法实施标准修正程序。事实上，二元比较通常代价高昂、耗时且容易出错（因此并不精确）。这是因为决策单元可能无法完全了解竞争选项的相对吸引力。因此，对这些选项进行审议会消耗资源（经济或生理资源）、需要时间，也容易出错。[1] 在涉及同一对备选项的选择情境中，可能会观察到不同的决策时间和选择。二元选择行为只能用概率术语来描述，包括随机决策时间和选择概率。

工作记忆众所周知的局限性表明，多备选项选择问题具有序贯结构。代价高昂、耗时且不精确的二元比较通过随机探索过程依次展开，在每次二元比较中，备选项分别充当提议项和当前选项。随后，迭代选择过程开始运行。决策单元的有限资源通过限制可执行的二元比较次数来约束这一过程，并为可负担的迭代次数设定一个（可能是随机的）上限。过程终止时，便会选出一个备选项。比较的不精确性和探索过程的随机性使得这一选择具有随机性。

[1]这里我们暂不考虑不可避免的非决策时间。

我们通过一种称为神经 Metropolis 算法的决策程序，将这一框架形式化。该算法以提议项与当前选项之间的序贯二元比较为基础，对标准修正进行简约改造；这些比较被明确建模为耗时且易出错（因而具有随机性），并通过对选择集 A 的马尔可夫探索展开。由决策单元资源决定的停止数会终止算法的迭代，从而使算法选出一个备选项。由于二元比较和马尔可夫探索都具有随机性，算法在不同迭代中可能会选出不同的备选项。

据我们所知，这是首次对选择集上的算法决策过程进行全面分析。我们能够推导出神经 Metropolis 算法所产生的选择概率和预期决策时间，并在一些值得关注的情形下得到封闭形式（第 4.2 节）。我们还能够为该算法提供一种价值表示：该算法仿佛受备选项上的某些潜在效用判断所支配（第 4.4 节）。通过这样做，我们将传统随机选择的一些基本结果推广并扩展至选择概率与决策时间这一对指标。

这一价值基础使我们能够将算法决策单元解读为决策者面对决策问题时的神经系统。尤其是，当放宽资源约束时，神经 Metropolis 算法可以实现传统选择分析；开篇概述的传统选择分析正是如此。另一方面，我们的算法可以纳入神经科学二元选择模型，例如漂移扩散模型（DDM），从而将其嵌入序贯多选项决策过程中。

分析概述 我们通过引入二元选择概率 $\rho(i \mid j)$ 来对传统随机选择进行推广，以建模二元比较；在序贯情境下，这些比较涉及备选项 i 和 j，分别扮演提议项和现有项的不同角色（随机选择并不作此区分）。在我们的第一个主要结果——定理4——中，我们证明，当二元选择概率满足基本的传递性性质时，它们通过费希纳标度 v 具有价值表示：$A \to \mathbb{R}$ 从而将传统确定性选择理论和传统随机选择理论中的经典结果扩展到我们的情境。事实上，我们的分析将确定性传统选择和传统随机选择都作为特殊情形包括在内：前者中 ρ 取值为0或1，后者中 ρ 严格为正。

除了选择概率之外，分析的另一个关键要素是预期决策时间 $\tau(i \mid j)$，它反映了提案 i 与当前选项 j之间比较的平均持续时间。我们对其进行正式定义，并考察配对项 (ρ, τ)，以研究它们与二元选择概率之间的相互作用。我们也为这些配对项提出一种价值表示。定理 5 从行为角度刻画了这种表示。定理 6 则涵盖了对称的预期决策时间这一特殊情形；这类时间源自经典的速度—准确性关系：决策越快，错误率越低。

至此，我们转入对神经 Metropolis 算法的分析。该算法依次比较成对的备选项，分别充当当前选项和提议项。这些比较采用二元选择模型（C，反应时间），该模型由选择变量和反应时间组成，用于确定提议项 i 被当前选项 j 接受的频率 $\rho_C(i \mid j)$，以及

比较所需的平均反应时间 $\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)$。对于这对（$\rho_{\mathrm{C}}$，$\tau_{\mathrm{RT}}$），我们可以应用此前建立的价值分析：对于随机二元比较（具有正的 ρ_{C}），采用费希纳标度 v_{C}： $A \to \mathbb{R}$；对于确定性比较（则具有取值为 0-1 的 ρ），采用帕累托效用函数 w_{C}： $A \to \mathbb{R}$ 。初始随机条件 μ 和探索矩阵 Q 共同完成了对神经 Metropolis 算法构成要素的描述。停止时间 N 终止该算法，该算法因而选择一个备选项。

因此，该算法生成了备选项间的选择概率 p_N，其中 $p_N(i, A)$ 是算法从选择集 A 中选出备选项 i 的概率；还生成了平均反应时间 $\tau_N \geq 0$，即算法从A中选出一个备选项所需的平均时间。对于负二项停止时间这一重要情形（包括几何分布），我们得到了 p_N 和 τ_N 的闭式解。

我们的价值分析表明，随着停止数允许的迭代次数越来越多，神经 Metropolis 算法具有值得注意的最优性。当所有二元比较都是确定性的时，它会选择最优备选项，从而实现传统选择行为。相反，当确定性二元比较与随机二元比较并存时，该算法会首先选择在确定性比较中表现最佳的备选项 i，因此属于 $\arg\max_A w_{\mathrm{C}}$，然后根据 logit 规则在这些备选项中进行选择。

$$\frac{e^{v_{\mathrm{C}}(i)}}{\sum_{j \in \arg\max_A w_{\mathrm{C}}} e^{v_{\mathrm{C}}(j)}}$$

其中， v_{C} 和 w_{C} 分别是前文提到的费希纳标度和帕累托效用。

分析的局限性在我们的分析中，停止数是外生给定的，它考虑了决策单元的资源限制。在对算法决策过程进行初步分析时，这是一个便于处理的假设，但未来研究的一个方向是研究能够内生地产生停止数的决策问题。

与此相关的是，我们将马尔可夫随机探索视为外生变量，尽管决策单元可能希望随着探索的推进对其进行调整。对更复杂的探索策略的研究则是未来研究的另一个方向。

鉴于工作记忆的局限性，神经 Metropolis 算法的序贯结构似乎是自然的。然而，明确阻碍对选择集中的所有竞争选项进行并行而非序贯考量的工作记忆约束，将有助于理解其最优性状态。

相关文献 神经 Metropolis 算法将 Baldassi 等（2020）和 Cerreia-Vioglio 等（2022）的 Metropolis DDM 算法视为其特殊情形，在这些情形中，二元比较是根据 Ratcliff（1978）的 DDM 进行的，该模型经过 Krajbich 等（2010）和 Milosavljevic 等（2010）的调整，适用于基于价值的二元选择。这种推广意义重大，它将研究范围从一种特定的二元比较模型扩展到了几乎所有此类模型。此外，即使在二元比较基于 DDM 的情况下，我们的研究结果也是新颖的。

神经 Metropolis 算法不同于神经科学领域的大多数神经计算模型；后者通常认为，对

选择集 A 中的所有备选项同时进行证据积累。例如，参见 Roe 等人（2001年）、Anderson 等人（2004年）、McMillen 和 Holmes（2006年）、Bogacz 等人（2007年）、Ditterich（2010年）以及 Krajbich 和 Rangel（2011年）。尽管这种同时性假设本身很高效，但正如前文所述，它与注意力和工作记忆的已知局限并不一致。

一个重要的例外是 Reutskaja 等人（2011年），他们提出了三个两阶段模型：在初始搜索阶段，受试者在可行集中随机搜索；该阶段结束时，受试者会从搜索过程中遇到的项目中选出最佳项目（允许存在一定噪声）。这种方法可称为准穷尽搜索，因为时间压力可能会在所有备选项都得到评估之前终止搜索阶段，并引入错误概率。

尽管我们的模型不同于 Krajbich 和 Rangel（2011年）以及 Reutskaja 等人（2011年）所考察的模型，但它与他们关于选择集探索过程的一些实验发现，以及 Russo 和 Rosen（1975）的开创性眼动注视研究所得出的结论是一致的。

2 预备知识

2.1 数学

随机矩阵 若方阵 B 的每一列元素之和均为 1，则称其为（左）随机矩阵。它的幂是随机矩阵 $B^0 = I$ 和 $B^n = BB^{n-1}$，其在索引集 B中每个 i、j 对应的元素为 $b_{ij}^{(n)}$ 。随机矩阵 B 是：

(i) 若其元素均严格为正，则称为正；(ii) 若其非对角元素均严格为正，则称为准正；(iii) 若存在 $n \geq 1$ 使得 B^n 为正，则称为本原；(iv) 若对其指标集中的每个 i、j，都存在 $n \geq 1$ 使得 $b_{ij}^{(n)} > 0$，则称为不可约；(v) 若其对角线上至少有一个严格为正的元素，则称为非零迹；(vi) 若其为对称的且准正，则称为优良；(vii) 若存在概率向量 $p \gg 0$ 使得

$$b_{ij}p_j = b_{ji}p_i \tag{1}$$

对每个非对角元素 b_{ij}均成立。

除 (vi) 外，这些术语都是标准术语。显然，正矩阵是准正的；当阶数至少为 3 时，准正矩阵是本原的。不可约且非零迹的矩阵是本原的。给定一个随机矩阵 B，当 $\zeta \in (-1, 1)$ 时，矩阵 $I - \zeta B$可逆，因为 $\|\zeta B\|_1 = |\zeta| < 1$。相反，矩阵 $I - B$不可逆，因为根据马尔可夫定理，存在一个概率向量 p使得

$$Bp = p$$

这样的向量称为 B的平稳分布。

停止数 停止数（或规则）是一个取 $\mathbb{N}$值的随机变量，其均值 $\mathbb{E}[N]$ 有限，并定义在一个具有概率测度 $\mathbb{P}$ 的底层概率空间上。与停止数 N 相关联的有两个重要函数。概率生成函数 f_N： $[0,1] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = n] z^n$$

而生存生成函数 g_N： $[0,1] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$g_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N > n] z^n$$

这两个函数之间的关系如下（Feller，1968，第 265 页）：

$$g_N(z) = \frac{1 - f_N(z)}{1 - z} \qquad \forall z \in [0,1]$$

在极限约定下

$$g_N(1) = \lim_{z \to 1^-} \frac{1 - f_N(z)}{1 - z} = \mathbb{E}[N] \tag{2}$$

概率生成函数应用广泛，且有多种适用于它们的公式（例如，参见 Johnson 等人，2005）。

设 $\mathcal{B}$ 为所有随机矩阵的集合。给定一个随机矩阵 $B \in \mathcal{B}$，我们用 $f_N(B)$ 和 $g_N(B)$ 表示与 B 同阶的方阵，它们定义为

$$f_N(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = n] B^n \quad \text{and} \quad g_N(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N > n] B^n \tag{3}$$

容易验证，右端的矩阵幂级数逐项收敛，因此矩阵 $f_N(B)$ 有明确定义。[2] 随着 $B \in \mathcal{B}$ 变化，通过式（3）可在 $\mathcal{B}$上定义由概率生成函数 f_N诱导的矩阵生成函数，仍记为 f_N。[3]

停止数上存在一种自然的偏序：如果停止数 N随机占优于停止数 N'，记作 $N \geq N'$，则称

$$\mathbb{P}[N > n] \geq \mathbb{P}[N' > n] \qquad \forall n \geq 0$$

直观地说， N 是一个不如 N'严格的停止数。在极限情况下，如果停止数序列 N_k发散，记作 $N_k \to \infty$，则称

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(N_k > n) = 1 \qquad \forall n \geq 0$$

这意味着（很容易验证），在任意有限的 n处停止的概率都会随着$k \to \infty$趋于零，即对每个 $n \geq 0$，$\lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(N_k = n) = 0$。

[2]有关更多详细信息，请参见 B.2.2 节。[3]关于矩阵函数，参见例如 Rinehart（1955年）和 Higham（2008年）。

2.2 随机选择

设 A是一个有限的选择集，包含至少三个备选项，[4] 称为选项集。其典型元素为 i、 j、 h 和 k。我们用 $\Delta(A)$表示定义在 A上的所有概率分布的集合，并将其视为$|A|$维向量。换言之，$\Delta(A)$是欧几里得空间$\mathbb{R}^{|A|}$中的标准单纯形。

选择概率 $p(\cdot, A) \in \Delta(A)$ 为每个备选项 i指定决策单元在选项集 A中选择 i的概率 $p(i, A)$。形式上， $p(i, A)$ 是 $|A|$维向量 $p(\cdot, A)$ 的第 i个分量。

3 二元选择

正如引言中所述，我们的算法决策过程考虑当前选项与提案之间的一系列二元选择。为了对这些二元选择建模，本节将推广传统随机选择，以考虑备选项在二元选择中可能扮演的当前选项和提案这两种角色之间的区别。下一节中，我们将把这一广义框架应用于观察到的二元选择行为。

3.1 二元选择概率

神经系统，即我们的决策单元，[5] 通过概率核——一个函数 $\rho\colon A^2 \to [0,1]$——比较选项集 A中的两个备选项 i 和 j。对于不同的 i 和 j，

$$\rho(i \mid j)$$

表示当 j 是当前选项（或现状）时，提案 i 被接受的概率。因此， $1 - \rho(i \mid j)$ 是提案被拒绝、当前选项得以维持的概率。接下来，我们将介绍要研究的核函数类别。

定义 1 概率核 $\rho\colon A^2 \to [0,1]$ 是二元选择概率，当且仅当

$$\rho(i \mid j) = 1 \iff \rho(j \mid i) = 0 \tag{4}$$

约定 $\rho(i \mid i) = \varepsilon > 0$。

因此，我们始终假设，当一个备选项确定优于另一个备选项而被选中时，无论它们所扮演的角色如何，结果都是如此。有了这一点，我们现在来介绍一些基本性质。

定义 2 二元选择概率 ρ 为：

[4]本文不对不同选项集进行比较静态分析。因此，我们针对任意固定的选项集 A 展开分析。[5]全文中，我们交替使用“决策单元”和“神经系统”这两个术语。

- (现状)无偏，如果

$$\underbrace{\rho(i \mid j)}_{prob.\ i\ if\ proposal} = \underbrace{1-\rho(j \mid i)}_{prob.\ i\ if\ incumbent}$$

对于所有互异的备选项 i 和 j;

- 为正，当且仅当对于所有互异的备选项 i 和 j，$\rho(i \mid j) > 0$；

- 为狄拉克，当且仅当对于所有互异的备选项 i 和 j，$\rho(i \mid j) \in \{0,1\}$。

这些性质有一个简单的解释：当二元选择概率不赋予当前选项特殊地位时，它是无偏的；当选择任一备选项的概率都严格为正时，它是正的；当确定性地选择任一备选项时，它是狄拉克的。[6]

传统随机选择通常考察无偏的（且通常为正的）二元选择概率，其中 $\rho(i \mid j) = p(i, \{i,j\})$ 描述了从二元集合 $\{i,j\}$中选择 i的概率。一般的、可能有偏的二元选择概率则考虑当前选项和提案所扮演的不同角色，而这正是序贯分析所特有的。

定义 3 若二元选择概率 ρ 具有传递性，则

$$\rho(j \mid i)\,\rho(k \mid j)\,\rho(i \mid k) = \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(i \mid j) \tag{5}$$

对于所有互不相同的备选项 i、j 和 k。

换言之，当选择中出现的传递性违反仅由噪声导致时，二元选择概率就是传递的。[7] 事实上，条件（5）要求不传递循环

$$i \to j \to k \to i \quad \text{and} \quad i \to k \to j \to i$$

（在相互独立的选择中）发生的可能性相同。传递性确保不会出现系统性的不传递性——这违反了一项基本的理性原则。我们认为，一个有效的神经系统应满足这一性质。

3.2 二元价值分析

二元选择概率 ρ 诱导出两个二元关系 $\succ^*$ 和 $\succsim$，定义如下：

$$i \succ^* j \iff \rho(i \mid j) = 1 \quad \text{and} \quad i \succsim j \iff \rho(i \mid j) \geq \rho(j \mid i)$$

[6]如果二元选择概率为正，那么对于所有互不相同的 i和 j，$\rho(i \mid j) > 0$和 $\rho(j \mid i) > 0$，则它们都不可能等于 1（否则另一个就会等于 0）。因此，对于所有 i和 j，我们有 $0 < \rho(i \mid j) < 1$。[7]参见 Luce 和 Suppes（1965年），第341页。另请注意，如果两个备选项并不互不相同，那么条件（5）自动成立。

对于所有备选项 i 和 j。我们将 $\succ^*$ 解释为一种明确、确定的严格偏好，表示决策单元能够对备选项的价值进行完美区分。这是传统（非随机）效用理论中的标准概念。[8] 由于

$$i \succ^* j \iff \rho(i \mid j) = 1 \iff \rho(j \mid i) = 0 \tag{6}$$

严格偏好不受备选项是当前选项还是提案的角色影响。[9] 当两个备选项之间不存在严格偏好时，我们记作 $i \parallel^* j$，即：

$$i \parallel^* j \iff i \not\succ^* j \text{ and } j \not\succ^* i$$

根据（6），这等价于 $\rho(i \mid j) \in (0, 1)$，也等价于 $\rho(j \mid i) \in (0, 1)$。也就是说，此时选择是真正随机的（同样与备选项的作用无关）。

相比之下，我们将 $\succsim$ 解释为一种弱偏好概念，它通过允许对决策单元仅能根据价值进行不完全区分的备选项进行随机排序，从而扩展了严格偏好$\succ^*$。一致性性质

$$i \succ^* j \Longrightarrow i \succ j \tag{7}$$

这表明，正如预期的那样，严格偏好在（$\succsim$ 的非对称部分）下得以保留。最后，由.....定义的二元关系 $\succsim^\circ$

$$i \succsim^\circ j \iff i \succsim j \text{ and } i \parallel^* j$$

描述具有随机性的排名。实际上，

$$i \succsim^\circ j \iff 1 > \rho(i \mid j) \geq \rho(j \mid i) > 0$$

下一个引理证实了我们的解释。

引理1 如果二元选择概率 ρ 具有传递性，那么

(i) $\succ^*$ 具有非对称性和负传递性；

(ii) $\parallel^*$ 是一个等价关系；

(iii) $\succsim$ 是完备且传递的；

(iv) $\succsim^\circ$ 在 $\parallel^*$ 的每个等价类上都是自反且传递的，同时也是完备的.

偏好 $\succsim^\circ$ 和 $\succ^*$ 相辅相成，分别刻画价值区分不完美和完美时发生的随机比较与确定性比较。二者结合起来，对所有备选项对进行排序。[10] 鉴于此，我们将分析重点放在它们上。

[8]参见 Fishburn（1970）和 Kreps（1988年）。[9]进一步阐述，$\rho(i \mid j) = 1$ 意味着，当提出 i 时，它肯定会被接受，而 $\rho(j \mid i) = 0$，也就是说，$1 - \rho(j \mid i) = 1$，意味着当 i 为当前选项时，它肯定会被保留。[10]从集合论角度来看，我们有 $\succ^* \cap \succsim^\circ = \emptyset$ 和 $\succ^* \cup \succsim^\circ = \succsim$。

定义 4 若存在 v、w：$A \to \mathbb{R}$ 以及一个对称的 s：$A^2 \to (0,\infty)$，使得二元选择概率 ρ：$A^2 \to [0,1]$ 具有二元价值表示，则称其具有二元价值表示。

$$\rho(i \mid j) = \begin{cases} 1 & if\ w(i) > w(j) \\ s(i,j)\dfrac{e^{v(i)}}{e^{v(i)}+e^{v(j)}} & if\ w(i) = w(j) \\ 0 & if\ w(i) < w(j) \end{cases} \tag{8}$$

对于所有 i 和 j。

很容易看出，在这种情况下

$$i \succ^* j \iff w(i) > w(j) \quad ; \quad i \parallel^* j \iff w(i) = w(j) \tag{9}$$

并且，当 $w(i) = w(j)$ 时，

$$i \succsim^\circ j \iff v(i) \geq v(j) \tag{10}$$

因此，我们将 w 解释为 $\succ^*$ 的效用函数，将 v 解释为 $\succsim^\circ$的效用函数。此外，我们将 s 解释为现状偏差指数。下一个结果印证了这些解释。阅读该结果时，请注意，v 和 s 仅与随机排序相关（由 $\parallel^*$的等价类所确定，因此也由 w的水平集所确定）。

Lemma 2 如果二元选择概率具有二元价值表示，那么，

(i) 效用函数 w 在严格递增变换下是唯一的。 ;

(ii) 该 效用函数 v 在 w 的每个等值集上都唯一，且相差一个加法常数。 ;

(iii) 现状偏差指数 s 在 w 的每个水平集上都是唯一的。

$$\begin{aligned} &\rho(i \mid j) < 1 - \rho(j \mid i) \iff s(i,j) < 1 \\ &\rho(i \mid j) = 1 - \rho(j \mid i) \iff s(i,j) = 1 \\ &\rho(i \mid j) > 1 - \rho(j \mid i) \iff s(i,j) > 1 \end{aligned} \tag{11}$$

引理最后一点中的关系阐明了如何将 s 解释为比较提案 i 与当前选项 j 时的现状偏差指数。特别是，当 $s(i,j) < 1$ 时，偏差偏向当前选项；当 $s(i,j) > 1$ 时，偏差偏向提案；否则则不存在偏差。因此，当且仅当 s 恒等于 1 时，二元选择概率 ρ 不存在偏差。

效用 w 是传统的帕累托效用函数，它通过对备选项进行序数排序来表示严格偏好 $\succ^*$。当且仅当 ρ 为正时，即所有排序都是随机的情况下，这一帕累托效用才是常数，因此在（8）中无关紧要。当 ρ 既为正又无偏时，二元价值表示（8）可简化为

$$\rho(i \mid j) = \frac{e^{v(i)}}{e^{v(i)}+e^{v(j)}}$$

这就是 Marschak（1960年）以及 Luce 和 Suppes（1965年）的严格效用表示，[11]因此，我们的二元价值表示将其扩展到了更一般的二元选择概率，包括可能有偏且部分确定性的情况。众所周知，利用逻辑斯蒂函数 ξ，我们可以写成：

$$\frac{e^{v(i)}}{e^{v(i)}+e^{v(j)}}=\xi\left(v\left(i\right)-v\left(j\right)\right) \tag{12}$$

因此，二元选择概率 $\rho(i \mid j)$ 以费希纳式的方式取决于效用差$v\left(i\right)-v(j)$。[12]

在我们的扩展中，v 仍然是定义在 w的水平集上的真正效用函数，如所示。我们称 (10) 之为费希纳式效用函数。当 $w(i)=w(j)$时，有

$$\rho\left(i \mid j\right) \geq \rho\left(j \mid i\right) \Longleftrightarrow v\left(i\right) \geq v\left(j\right) \iff 1-\rho\left(j \mid i\right) \geq 1-\rho\left(i \mid j\right) \tag{13}$$

因此，费希纳效用较高的备选项被选中的概率也较高，而无论它们是提议项还是当前选项。当 ρ 既为正又无偏时，式（13）可写为

$$v\left(i\right) \geq v\left(j\right) \Longleftrightarrow \rho\left(i \mid j\right) \geq \frac{1}{2}$$

这在传统随机选择中十分常见。当ρ 为狄拉克分布时，费希纳式效用函数无关紧要；也就是说，对不同备选项的所有排序都是确定性的。

引理3 二元选择概率 ρ 是狄拉克分布且具有传递性，当且仅当 $\succ^{*}$ 弱完备且具有传递性。[13]

因此，二元选择概率的传递性推广了传统效用理论中严格偏好的传递性。在这种情况下，二元价值表示（8）简化为

$$\rho\left(i \mid j\right)=\begin{cases}1 & \text{if } w\left(i\right)>w\left(j\right)\\ \frac{1}{2} & \text{if } w\left(i\right)=w\left(j\right)\\ 0 & \text{if } w\left(i\right)<w\left(j\right)\end{cases}$$

下一个表示定理是我们的第一个主要结果，它表明，传递性刻画了具有二元价值表示的二元选择概率。

定理4 二元选择概率具有二元价值表示，当且仅当它具有传递性。

该定理推广了随机选择中的标准效用表示（例如，Luce 和 Suppes，1965年，第350页），并且鉴于引理3，也推广了传统效用理论中的标准效用表示。

[11]Luce（1959年）和 Block和Marschak（1960年）研究了严格效用的一种更强的非二元版本。[12]参见 Luce 和 Suppes（1965年），第334页。逻辑斯蒂函数 ξ：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为 $\xi(x)=1/(1+e^{-x})$。[13]如果对每个 $i \neq j$，要么 $i \succ^{*} j$，要么 $j \succ^{*} i$，那么严格偏好 $\succ^{*}$ 就是弱完备的（参见 Fishburn，1970年）。在弱完备性成立时，我们无需担心无差异这一众所周知的棘手问题。

最后我们指出，根据二元价值表示式 (8)，偏好 $\succsim$ 可通过费希纳效用 v 和帕累托效用 w 得到字典序表示。事实上，很容易看出，对于每个 i 和 j,

$$i \succsim j \Longleftrightarrow (w(i), v(i)) \geq_{lex} (w(j), v(j))$$

其中， $\geq_{lex}$ 是平面上的字典序。

3.3 预期反应时间

除了选择概率 $\rho(i \mid j)$ 之外，序贯二元选择中涉及的另一个量是预期时间

$$\tau(i \mid j)$$

即决策单元在不同的提案 i 与当前选项 j之间作出选择所需的时间。我们用函数 τ: $A^2 \to [0, \infty)$ 表示它。

定义5 若一对 (ρ, τ) 分别为二元选择概率和预期反应时间，则当对每个 $i \neq j$ 都满足以下条件时，它们构成一个串联体:

$$\rho(i \mid j) \in \{0, 1\} \Longleftrightarrow \tau(i \mid j) = 0 \tag{14}$$

and

$$\tau(i \mid j) = \tau(j \mid i) \Longrightarrow \rho(i \mid j) = 1 - \rho(j \mid i) \tag{15}$$

串联体全面描述了我们的决策单元在选项集 A 中的二元选择。在这种描述中，一致性条件 (14) 确保确定性选择所需的时间为零（因此我们忽略非决策时间）。特别地，由于 ρ 是二元选择概率,

$$\tau(i \mid j) = 0 \iff \tau(j \mid i) = 0$$

相反，一致性条件（15）要求，现状偏好的缺失主要体现在反应时间的对称性上。

定义6 若存在 v、w: $A \to \mathbb{R}$，一个对称的 s: $A^2 \to (0, \infty)$，以及一个严格拟凹且单峰的 φ: $\mathbb{R} \to (0, \infty)$，使得（8）成立，且满足

$$\tau(i \mid j) = \begin{cases} 0 & \text{if } w(i) \neq w(j) \\ \varphi(v(i) - v(j)) & \text{if } w(i) = w(j) \end{cases} \tag{16}$$

对于所有 i 和 j。

严格拟凹且单峰的 $\varphi:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ 是一种先严格递增至强极大值、随后严格递减的函数。这种模式源于标准的心理物理学假设，即刺激强度决定反应时间，且刺激越强，诱发的反应越快。由于此处的刺激强度对应于由效用差 $v(i)-v(j)$ 所表示的偏好强度，因此，这一标准假设要求，较大的（正）差值和较小的（负）差值都对应较短的反应时间。这正是 φ 的形状所体现的特征。

为了给这一标准假设提供一个可观测的对应形式，我们需要引入以下可观测量：

$$\ell_{ij}=\ln\frac{\rho(i\mid j)}{\rho(j\mid i)}$$

利用这些对数优势比，我们可以引入一类串联体：

定义 7 若 ρ 具有传递性，且存在一个阈值 l 使得，串联体 (ρ,τ) 就称为计时的，

$$\ell_{ij}=\ell_{hk}\implies\tau(i\mid j)=\tau(h\mid k) \tag{17}$$

$$l\le\ell_{ij}<\ell_{hk}\implies\tau(i\mid j)>\tau(h\mid k) \tag{18}$$

$$\ell_{ij}<\ell_{hk}\le l\implies\tau(i\mid j)<\tau(h\mid k) \tag{19}$$

对于所有反应时间非零的备选项对 i,j 和 h,k 均成立。

现在，我们可以陈述第二个表示定理，该定理刻画了具有二元价值表示的串联体。

定理 5 当且仅当一个串联体具有二元价值表示时，它才是计时的 .

另一项标准的心理物理学假设认为，刺激强度决定错误率，刺激越强，错误率越低。要使这一假设与前一项假设相一致，较短的反应时间就必须对应较低的错误率。令人意外的是，这会导出无偏串联体。

具体而言，比较提案 i 和当前选项 j（或反过来）时，我们可能会犯两类错误：拒绝较优提案，或接受较差的提案。借用标准术语，我们分别称之为第一类错误和第二类错误。它们的概率为

$$\mathrm{ER}^{\mathrm{I}}_{i,j}=\min\{1-\rho(i\mid j),1-\rho(j\mid i)\}\quad;\quad\mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{i,j}=\min\{\rho(i\mid j),\rho(j\mid i)\} \tag{20}$$

接下来，我们引入一项基本的错误单调性性质。

定义 8 若 ρ 具有传递性，且满足以下条件，则称串联体 (ρ,τ) 是心理测量的

$$\tau(i\mid j)<\tau(h\mid k)\Longrightarrow\mathrm{ER}^{\mathrm{I}}_{i,j}<\mathrm{ER}^{\mathrm{I}}_{h,k}\quad and\quad\mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{i,j}<\mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{h,k}$$

and

$$\tau(i\mid j)\le\tau(h\mid k)\Longrightarrow\mathrm{ER}^{\mathrm{I}}_{i,j}\le\mathrm{ER}^{\mathrm{I}}_{h,k}\quad and\quad\mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{i,j}\le\mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{h,k}$$

对于所有反应时间非零的备选项对 i,j 和 h,k。

换言之，较短的二元预期响应时间对应于两类错误率都较低；这一性质意味着效用差较大的备选项之间更容易做出选择。下一个表示定理表明，心理测量性刻画了预期响应时间对称的时间串联体，因此不存在现状偏差。

定理 6 当且仅当一个串联体具有偶数 φ 的二元价值表示时，它才是心理测量的。

值得注意的是，心理测量性意味着计时性，因为这两个定义之间的关系并不显而易见。凭借这一作为第三个主要结果的定理，我们完成了对二元选择的一般分析。

4 算法决策过程

4.1 二元选择行为

现在该转向观察到的二元选择行为，并将刚刚介绍的一般二元选择框架应用于其中了。

定义 9 二元选择模型（BCM）是一对随机矩阵 (C, RT)，其中 :

(i) $\mathrm{C} = [\mathrm{C}_{i,\ j}]$ 由随机选择变量 $\mathrm{C}_{i,\ j}$ 组成，用于描述提案 i 与现状 j比较时的随机结果，其中

$$\mathrm{C}_{i,j} = \begin{cases} i & if\ i\ accepted \\ j & if\ i\ rejected \end{cases}$$

(ii) $\mathrm{RT} = [\mathrm{RT}_{i,\ j}]$ 由比较所需的随机反应时间 $\mathrm{RT}_{i,\ j}$ 组成。[14]

原则上，C 和 RT 的分布都可以从选择行为中观察到。通过令概率与频率相等，它们导出一对 $(\rho_{\mathrm{C}}, \tau_{\mathrm{RT}})$，其中

$$\rho_{\mathrm{C}}\left(i \mid j\right) = \mathbb{P}\left[\mathrm{C}_{i,j} = i\right]$$

是提案 i 被接受而非当前选项 j的频率，并且

$$\tau_{\mathrm{RT}}\left(i \mid j\right) = \mathbb{E}\left[\mathrm{RT}_{i,j}\right]$$

是比较所需的平均反应时间。

当 $(\rho_{\mathrm{C}}, \tau_{\mathrm{RT}})$ 具有二元价值表示时，我们记为

$$\left(s_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}}, w_{\mathrm{C}}, \varphi_{\mathrm{RT}}\right)$$

[14]始终 我们假设随机反应时间（例如以秒为单位测量）具有有限的均值和方差 e.

其元素。BCM（C, RT）最基本的例子出现在传统效用理论中，此时决策单元的选择是确定性的。在这种情况下，配对（$\rho_{\mathrm{C}}, \tau_{\mathrm{RT}}$）具有狄拉克形式的二元价值表示：

$$\rho_{\mathrm{C}}(i \mid j)=\begin{cases}1 & \text{if } w_{\mathrm{C}}(i)>w_{\mathrm{C}}(j)\\ \frac{1}{2} & \text{if } w_{\mathrm{C}}(i)=w_{\mathrm{C}}(j)\\ 0 & \text{if } w_{\mathrm{C}}(i)<w_{\mathrm{C}}(j)\end{cases}$$

并且 τ_{RT} 通常未定义。

一种广受欢迎的随机二元选择模型是 Ratcliff（1978）提出的漂移扩散模型（DDM）。在其价值版本中，由 Krajbich 等（2010）和 Milosavljevic 等（2010）加以发展，对两个备选项 i 和 j 的比较由其神经效用 $\nu(i)$ 和 $\nu(j)$ 所决定，决策单元会在选择两个备选项之前的审议过程中（例如通过记忆提取）习得这些效用。[15] 支持任一备选项的证据积累由两个带漂移的布朗运动表示，即 $\mathrm{V}_i(t)=\nu(i)\,t+\mathrm{W}_i(t)$ 和 $\mathrm{V}_j(t)=\nu(j)\,t+\mathrm{W}_j(t)$。每个积累过程都会经历相互独立的白噪声波动，这些波动由不相关的维纳过程 W_i 和 W_j 建模。由此，

- 在每个 $t>0$，支持 i 而非 j 的净证据由以下差值给出

$$\mathrm{Z}_{i,j}(t)=\mathrm{V}_i(t)-\mathrm{V}_j(t)=[\nu(i)-\nu(j)]\,t+\sqrt{2}\,\mathrm{W}(t) \tag{21}$$

  其中，\(W\) 是维纳差分过程（$\mathrm{W}_i-\mathrm{W}_j$）$/\sqrt{2}$；

- 比较在 $\mathrm{Z}_{i,j}(t)$ 达到屏障 $\lambda>0$ 或 $-\beta<0$ 时结束；因此反应时间是

$$\mathrm{RT}_{i,j}=\min\{t:\mathrm{Z}_{i,j}(t)=\lambda \text{ or } \mathrm{Z}_{i,j}(t)=-\beta\}$$

  当达到上界 λ 时，• 提案 i 被接受；而当达到下界 $-\beta$ 时，当前选项 j 得以维持（因此 i 提案 i 被拒绝）；所以选择变量是

$$\mathrm{C}_{i,j}=\begin{cases}i & \text{if } \mathrm{Z}_{i,j}(\mathrm{RT}_{i,j})=\lambda\\ j & \text{if } \mathrm{Z}_{i,j}(\mathrm{RT}_{i,j})=-\beta\end{cases}$$

不同的净证据，λ和 β，解释了备选项作为提案和现状所发挥的不同作用。漂移扩散模型（DDM）由其要素 ν、λ 和 β确定。因此，我们将其写作 DDM（ν，λ，β）。当 $\lambda=\beta$时，我们称该漂移扩散模型为对称的。

命题 7：由漂移扩散模型（ν、λ、β）生成的对（ρ_{C}、τ_{RT}）是一个计时的串联体，其中 ρ_{C} 为正（且具有传递性）。它具有二元价值表示，其中

$$v_{\mathrm{C}}=\lambda\nu \quad ; \quad s_{\mathrm{C}}(i,j)=1+\frac{e^{\lambda|\nu(i)-\nu(j)|}-e^{\beta|\nu(i)-\nu(j)|}}{1-e^{(\lambda+\beta)|\nu(i)-\nu(j)|}} \quad ; \quad w_{\mathrm{C}}\ constant \tag{22}$$

[15]为简化分析，我们假设神经效用 $\nu:\ A\to\mathbb{R}$ 是单射。

and

$$\varphi_{\mathrm{RT}}(x)=\frac{\lambda^2}{x}\left[\frac{1-e^{\frac{\beta}{\lambda}x}}{e^{-x}-e^{\frac{\beta}{\lambda}x}}\left(1+\frac{\beta}{\lambda}\right)-\frac{\beta}{\lambda}\right] \tag{23}$$

对于所有 $x\in\mathbb{R}$。

因此，在漂移扩散模型的情形下，数对 $(\rho_{\mathrm{C}},\tau_{\mathrm{RT}})$ 是一个具有二元价值表示的串联体

$$\rho_{\mathrm{C}}(i\mid j)=s_{\mathrm{C}}(i,j)\,\xi\left(v_{\mathrm{C}}(i)-v_{\mathrm{C}}(j)\right)=s_{\mathrm{C}}(i,j)\,\frac{e^{v_{\mathrm{C}}(i)}}{e^{v_{\mathrm{C}}(i)}+e^{v_{\mathrm{C}}(j)}}$$

and

$$\tau_{\mathrm{RT}}(i\mid j)=\varphi_{\mathrm{RT}}\left(v_{\mathrm{C}}(i)-v_{\mathrm{C}}(j)\right)=\lambda\frac{\lambda\rho_{\mathrm{C}}(i\mid j)-\beta\left(1-\rho_{\mathrm{C}}(i\mid j)\right)}{v_{\mathrm{C}}(i)-v_{\mathrm{C}}(j)}$$

具体而言，费希纳效用 $v_{\mathrm{C}}=\lambda\nu$ 可以分解为神经效用函数 ν 和接受阈值 λ。因此，

$$v_{\mathrm{C}}(i)-v_{\mathrm{C}}(j)=\lambda\left(\nu(i)-\nu(j)\right)$$

费希纳效用差可分解为神经效用差 $\nu(i)-\nu(j)$，并由系数 λ 加权。神经效用差越大，i 相对于 j 的神经价值强度就越高。λ 越大，决策者感知这一价值差异、进而区分备选项主观价值的能力就越强。换言之，λ 如同放大镜，能够放大神经效用差。

下一个结果为漂移扩散模型的情形给出了明确的实证内容。使用对数优势比来表述这一结果较为方便

$$\ell_{ij}=\log\frac{\rho_{\mathrm{C}}(i\mid j)}{\rho_{\mathrm{C}}(j\mid i)}\quad\text{and}\quad\bar{\ell}_{ij}=\log\frac{1-\rho_{\mathrm{C}}(j\mid i)}{1-\rho_{\mathrm{C}}(i\mid j)}$$

命题8 漂移扩散模型 (v,λ,β) 的各要素由其生成的串联体 $(\rho_{\mathrm{C}},\tau_{\mathrm{RT}})$ 唯一确定。具体而言，如果 $\ell_{ij}\neq 0$,

$$\lambda=|\ell_{ij}|\sqrt{\frac{\tau_{ij}}{\ell_{ij}\rho_{ij}+\bar{\ell}_{ij}\left(\rho_{ij}-1\right)}}$$

and

$$\beta=\lambda\frac{\bar{\ell}_{ij}}{\ell_{ij}}\quad;\quad\nu(i)=\frac{1}{\lambda}\log r_{\mathrm{C}}(i,j^*)$$

在归一化 $v(j^*)=0$ 下，对于某个备选项 j^*。

最后，我们通过证明对称性等价于无偏的 ρ_{C} 以及对称的 τ_{RT}，来刻画对称的漂移扩散模型。

命题9 对于由漂移扩散模型（ν、λ、β）生成的串联体（ρ_{C}、τ_{RT}），以下条件等价：

(i) 该串联体是心理测量的；

(ii) $\beta = \lambda$；(iii) 对于某些（所有） $i \neq j$，
$\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j) = \tau_{\mathrm{RT}}(j \mid i)$；(iv) 对于某些（所有）
$i \neq j$， $\rho_{\mathrm{C}}(i \mid j) = 1 - \rho_{\mathrm{C}}(j \mid i)$。

在这种情况下，

$$\varphi_{\mathrm{RT}}(x) = \frac{\lambda^2}{x} \tanh \frac{x}{2}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}$。

最后，我们指出，证据阈值模型构成了一个广泛的 BCM 模型族。它们既包括积分模型（例如刚刚讨论的漂移扩散模型），也包括 Stine 等人（2020）讨论的极值检测模型。我们将在附录 A 中较为详细地讨论这一 BCM 模型族。

4.2 神经元 Metropolis 算法

我们分析的主角，是神经系统在面对多备选项选项集 A 时可能实施的一种算法决策过程。该过程由一系列通过 BCM 进行的成对比较构成，比较对象由一种马尔可夫机制选出，其原理与 Metropolis 等人（1953年）提出的机制相同。正如引言中所述，这种序列结构的依据是众所周知的工作记忆局限，并得到了经典和近期眼动追踪研究的支持。[16]

概括来说，这一算法决策过程：

1. 从选项集中的任意元素 j 开始，即当前选项；

2. 在选项集中选择一个候选备选项 i，即提案；

3. 通过 BCM 对它们进行比较，并将胜者设为新的当前选项；

4. 重复步骤 1-3，直到审议时间到来，最后的当前选项即为选项集中的选定备选项。

更具体地说，算法首先根据初始分布 $\mu \in \Delta(A)$ 选择一个初始当前选项 j，例如，该分布可以描述决策单元的“首次固定”。随后，算法通过一个探索（随机）矩阵进行推进。

$$Q = [Q(i \mid j) : i, j \in A]$$

描述算法如何在备选项间进行搜索的阶数为 $|A|$。具体而言，给定当前选项 j，以概率 $Q(i \mid j)$选取一个提案 i。随后通过 BCM (C, RT) 对当前选项和提案进行比较。经过 $\mathrm{RT}_{i,\,j}$ 秒后，新的当前选项为$j' = \mathrm{C}_{i,\,j}$；接着以概率 $Q(i' \mid j')$选取一个新提案 i'，如此继续。

[16]参见 Russo 和 Rosen（1975）、Krajbich 和 Rangel（2011）以及 Reutskaja 等人（2011），另请参阅 Cerreia-Vioglio 等人（2022）中的讨论。

算法根据设定的随机停止数 N 终止，该停止数限制了允许的迭代次数，这是因为计算资源受到外部限制（例如，该停止数可能会给决策单元带来某种成本，如经济成本或生理成本）。最后一个当前选项即为算法输出，也就是算法从选项集 A中选出的内容。

经过这番初步讨论，接下来我们将形式化神经 Metropolis 算法，即我们的算法决策过程。其构成要素包括一个 BCM（C，反应时间）和一种探索策略（μ， Q），概括为这个四元组。

$$(\mathrm{C}, \mathrm{RT}, \mu, Q) \tag{24}$$

为方便数学处理，我们将算法的起始时间设为 -1。

神经 Metropolis 算法

输入：给定一个停止数 N。

开始：根据 μ 和，从 A 中抽取 i

- 设置 $t_{-1} = 0$,
- 设置为 $j_{-1} = i$。

重复：根据 $Q(\cdot \mid j_{n-1})$ 从 A 中抽取 i_n，并将其与 j_{n-1} 比较：

- $set\ t_n = t_{n-1} + \mathrm{RT}_{i_n, j_{n-1}}$,
- $set\ j_n = \mathrm{C}_{i_n, j_{n-1}}$;

直到 $n = N$。

停止：设置 $k = j_{n-1}$。

输出：从 A 中选择 k。

除了停止数 N 外，神经 Metropolis 算法（24）还会在 $N = n$ 时选择备选项j_{n-1}，其中 n 是决策过程因停止数而中断时所处的迭代。神经 Metropolis 算法推广了 Cerreia-Vioglio 等（2022）的 Metropolis-DDM 算法；当底层 BCM 由漂移扩散模型生成、探索矩阵 $Q(i \mid j)$ 与反应时间$_{i\text{的均值}_j}$ 成反比，且给定硬截止期限时，该算法就是一个特例。

4.3 算法性质

神经 Metropolis 算法（24）生成一个当前解的马尔可夫链

$$J = \{J_{-1}, J_0, J_1, ...\} \tag{25}$$

对于所有备选项 j in A，以及对于每个 $n \geq 0$，均有 $\mathbb{P}[J_{-1} = j] = \mu(j)$

$$\mathbb{P}[J_n = i \mid J_{n-1} = j] = \underbrace{Q(i \mid j)}_{\text{prob. } i \text{ proposed}} \times \underbrace{\rho_{\mathrm{C}}(i \mid j)}_{\text{prob. } i \text{ accepted}} =: M(i \mid j)$$

对于 A 中所有不同的备选项 i 和 j。随机矩阵 M 是当前解的马尔可夫链 J 的转移矩阵。特别地，当神经 Metropolis 算法的转移矩阵可逆时，我们称该算法是可逆的，因此当前解的马尔可夫链 (25) 也是可逆的。

对于每个停止数 N，神经 Metropolis 算法会产生：

(i) 选择概率 $p_N \in \Delta(A)$，其中 $p_N(i, A)$ 是算法从选项集 A 中选择备选项 i 的概率；
(ii) 平均反应时间 $\tau_N \in [0, \infty)$，即算法从 A 中选择一个备选项所需的平均时间。

能够以显式形式计算这些量，正是神经 Metropolis 算法具有实证意义的原因。为此，下面我们将介绍一类便于计算的停止数。

定义 10 如果停止数 N 与当前解、提议项和反应时间的实现无关，则称其在神经 Metropolis 算法 (24) 中是简单的。

接下来，我们计算停止数简单的神经 Metropolis 算法的选择概率和平均反应时间。先介绍一个记号：我们用

$$\bar{\tau}_j = \sum_{i \in A} Q(i \mid j)\, \tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j) \tag{26}$$

表示当 j 为当前选项时一次迭代的平均持续时间。

命题 10 对于具有简单停止数 N,[18] 的神经 Metropolis 算法 (24)

$$p_N = f_N(M)\,\mu \quad and \quad \tau_N = \bar{\tau} \cdot g_N(M)\,\mu \tag{27}$$

[17]回顾一下，p_N 是一个 $|A|$ 维向量。[18]公式 (27) 右端的两式都涉及标准的矩阵-向量乘法：μ 和 $\bar{\tau}$ 是 $|A|$ 维向量，而 $f_N(M)$ 和 $g_N(M)$ 是由 (3) 定义的 $|A|$ 阶方阵。

利用概率和生存生成函数的定义，我们可以将选择概率和平均反应时间 (27) 改写为

$$p_N = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[N = n\right] M^n\right) \mu \quad \text{and} \quad \tau_N = \bar{\tau} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[N > n\right] M^n\right) \mu \tag{28}$$

这种重写的一个直接结果是

$$N \geq N' \Longrightarrow \tau_N \geq \tau_{N'}$$

A 较宽松的停止数结果自然会导致更长的平均决策时间。

在以下重要情形中，我们可以用闭式形式计算选择概率和平均反应时间。

定义 11 给定两个系数 $\zeta \in (0,1)$ 和 $r \geq 1$，负二项分布停止数 $N_r(\zeta)$ 定义为

$$\mathbb{P}\left[N = n\right] = \binom{n+r-1}{r-1} \zeta^n \left(1-\zeta\right)^r \qquad \forall n \geq 0$$

在该分布下，决策单元以概率 ζ 接收到“搜索”信号，以概率 $1-\zeta$ 接收到“停止”信号；当接收到搜索信号时，它会继续比较各个备选项，而在收到 r 个停止信号后便停止搜索。[19] 当 $r = 1$ 时，该过程便简化为几何停止数。

$$\mathbb{P}\left[N_1\left(\zeta\right) = n\right] = \zeta^n \left(1-\zeta\right) \qquad \forall n \geq 0$$

现在，决策单元一收到第一个停止信号就会停止。

命题 11 成立

$$f_{N_r(\zeta)}\left(M\right) = \left(1-\zeta\right)^r \left(1-\zeta M\right)^{-r}$$

and

$$g_{N_r(\zeta)}\left(M\right) = -\left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(-\zeta\right)^k \sum_{j=0}^{k-1} M^j\right) \left(1-\zeta M\right)^{-r} \tag{29}$$

By 根据命题 10，对于简单负二项停止数，我们有

$$p_{N_r(\zeta)} = \left(1-\zeta\right)^r \left(1-\zeta M\right)^{-r} \mu \quad \text{and} \quad \tau_{N_r(\zeta)} = -\bar{\tau} \cdot \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(-\zeta\right)^k \sum_{j=0}^{k-1} M^j\right) \left(1-\zeta M\right)^{-r} \mu$$

特别地，在几何分布情形下 $r = 1$ 我们得到

$$p_{N_1(\zeta)} = \left(1-\zeta\right) \left(1-\zeta M\right)^{-1} \mu \qquad \text{and} \qquad \tau_{N_1(\zeta)} = \bar{\tau} \cdot \zeta \left(1-\zeta M\right)^{-1} \mu$$

$p_{N_1(\zeta)}$ 的公式最早由 Valkanova（2020）证明，其他所有公式似乎都是新提出的。

[19] 对于前 $r-1$ 个停止信号，它会冻结，并在下一轮重新启动。

4.4 算法价值分析

在论文前文中，我们讨论了二元选择概率背后的价值基础。接下来，我们将探讨神经Metropolis算法中的一个类似概念。

定义12 若神经 Metropolis 算法 (24) 的二元选择概率 ρ_{C} 具有二元价值表示 $(s_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}}, w_{\mathrm{C}})$，则称其为基于价值的。

这一概念是二元选择概率的二元价值表示在算法层面的对应概念。根据定理4，基于价值的神经Metropolis算法具有传递性二元选择概率。

定理12 若基于价值的神经 Metropolis 算法具有良好的探索矩阵，则

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[J_n=i\right]=\lim_{N_k\to\infty}p_{N_k}\left(i,A\right)=\begin{cases}\frac{e^{v_{\mathrm{C}}(i)}}{\sum_{j\in\arg\max_A w_{\mathrm{C}}}e^{v_{\mathrm{C}}(j)}} & if\ i\in\arg\max_A w_{\mathrm{C}}\\ 0 & else\end{cases}\tag{30}$$

对于所有发散的简单停止规则序列 N_k。

这一结果阐明了基于价值的神经 Metropolis 算法的性质。要理解这一点，请注意，$\Pr\left[J_n=i\right]$ 表示算法在未停止的情况下经过 n 次迭代后选择备选项i 的概率，而 $\arg\max_A w_{\mathrm{C}}$ 则是根据 $\succ^*$ 取最大值的备选项集合。因此，

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[J_n=i\right]$$

表示神经 Metropolis 算法固有地倾向于选择一个最大的备选项 i，而不受外生设定的停止数影响。因此，它可以被视为代表备选项 i 的内在价值。当算法满足 (30) 时，对于在 $\succ^*$ 下最大的备选项 i 和 j， we have, for alternatives? Need translate whole phrase: "we have, for alternatives ...," ending comma. Chinese: 我们有：对于...， Need preserve punctuation maybe. "我们有，对于..." Output: ... 对于...，. Ensure English all translated. My answer accidentally English. Final.

$$v_{\mathrm{C}}\left(i\right)\geq v_{\mathrm{C}}\left(j\right)\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\Pr\left[J_n=i\right]\geq\lim_{n\to\infty}\Pr\left[J_n=i\right]$$

因此，该算法的内在倾向与费希纳式效用函数v_{C}一致；在极限情况下，该函数支配着极大备选项之间的选择（无论它们是当前解还是提议项）。等式

$$\lim_{N_k\to\infty}p_{N_k}\left(i,A\right)=\lim_{n\to\infty}\Pr\left[J_n=i\right]$$

表明，当停止数越来越不严格时，就会出现这种极限行为。这意味着，除此之外，极限行为不受现状偏差的影响，因此 s_{C} 不起作用。这里隐含的观点是，这些偏差是在外部压力下产生的，此处外部压力体现为假定的停止数，因此当这种压力减弱时，这些偏差就会消失。

最后，公式 (30) 确保

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[J_n=i\right]=\lim_{N_k\to\infty}p_{N_k}\left(i,A\right)=0$$

对于 $\succ^*$ 下并非最大项的所有备选项 i in A 。换言之，在极限情况下，这些备选项没有被选中的机会——因为 $\lim_{N_k\to\infty} p_{N_k}(i,A) = 0$ ——而且无论如何，该算法都没有选择它们的倾向——因为 $\lim_{n\to\infty} \Pr[J_n = i] = 0$。这一最优性性质确保，随着停止数逐渐放宽，该算法会选择 $\succ^*$ 下的最大备选项。在这些备选项中，随机比较由费希纳效用决定。总之，在极限情况下，神经 Metropolis 算法对 w_{C} 进行硬最大化，并对 v_{C} 进行软最大化。

前述定理的一个重要推论涉及 $\succ^*$ 只有一个极大元素的情形。

推论 13 具有良好探索矩阵Q的基于价值的神经 Metropolis 算法 (24) 满足

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[J_n = i] = \lim_{N_k\to\infty} p_{N_k}(i,A) = \begin{cases} 1 & if\ i \in \arg\max_A w_{\mathrm{C}} \\ 0 & else \end{cases}$$

当且仅当 $\arg\max_A w_{\mathrm{C}}$ 是单元素集合时。

例如，在传递的狄拉克二元选择概率这一确定性情形下，神经 Metropolis 算法在极限时会选择最佳备选项。[20] 这一极限分析与计算资源不受限制的传统假设十分契合。因此，神经 Metropolis 算法以计算方式实现了传统选择行为。

在刚才讨论的传统情形中，$\arg\max_A w_{\mathrm{C}}$ 在 A中是单元素集合。相比之下，当二元选择概率 ρ_{C} 为正时，$\arg\max_A w_{\mathrm{C}}$ 与整个集合 A 重合；DDM 情形便是如此。在这种情况下， w_{C} 为常数，因此在$\succ^*$下所有备选项都是极大项。因此，我们得到了上一个表示定理的第二个值得注意的特殊情形。

推论 14 具有良好探索矩阵Q的基于价值的神经 Metropolis 算法 (24) 满足

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[J_n = i] = \lim_{N_k\to\infty} p_{N_k}(i,A) = \frac{e^{v_{\mathrm{C}}(i)}}{\sum_{j\in A} e^{v_{\mathrm{C}}(j)}} \qquad \forall i \in A \tag{31}$$

当且仅当其二元选择概率 ρ_{C} 为正。

根据命题 7，在 DDM 的特殊情形下，我们有 $v_{\mathrm{C}} = \lambda\nu$ （见公式（31）），因此呈现出多项 Logit 行为。

$$\frac{e^{\lambda\nu(i)}}{\sum_{j\in A} e^{\lambda\nu(j)}} \tag{32}$$

在极限处出现，正如 Baldassi 等（2020）和 Cerreia-Vioglio 等（2022）中的情形，尽管这里关于停止数的假设有所不同。

在正的 ρ_{C} 情形下，基于价值的神经Metropolis算法具有一项显著的计算性质，正如下一个定理（也是我们最后一个主要结果）所示。

[20]回想一下，狄拉克且传递的 ρ_{C} 对应于弱完备且传递的 $\succ^*$ （参见引理3）。因此，$\arg\max_A w_{\mathrm{C}}$ 是一个单元素集合，其中包含 $\succ^*$下的最佳备选项。

定理15：一个具有正的 ρ_{C} 和良好探索矩阵Q的神经 Metropolis 算法 (24)，当且仅当其转移矩阵 M 可逆时，才是基于价值的。[21]

从计算层面看，可逆性确保转移矩阵 M 可对角化，且具有实特征值。因此，

$$M = U \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{|A|}\right) U^{-1}$$

其中，diag (·) 是特征值 λ_i 的对角矩阵（每个特征值按其重数重复出现），而 U 的列构成相应特征向量的一组基。进而可直接推出

$$f_N(M) = U \operatorname{diag}\left(f_N(\lambda_1), f_N(\lambda_2), ..., f_N\left(\lambda_{|A|}\right)\right) U^{-1} \tag{33}$$

and

$$g_N(M) = U \operatorname{diag}\left(\frac{1 - f_N(\lambda_1)}{1 - \lambda_1}, \frac{1 - f(\lambda_2)}{1 - \lambda_2}, ..., \frac{1 - f\left(\lambda_{|A|}\right)}{1 - \lambda_{|A|}}\right) U^{-1} \tag{34}$$

结合极限约定 (2)，这些公式可以计算简单停止数下的选择概率和平均反应时间，如公式 (28) 所示。这一计算成果为基于价值的神经Metropolis算法的分析画上了句号。

5 讨论：时间约束

在我们的分析中，我们考虑了以迭代次数的停止数建模的受约束资源，这可能会给决策单元带来经济或生理成本。为作比较，在本节最后，我们将考虑另一种约束，即以硬时间约束 t 形式出现的时间约束。该截止时间会产生停止数 N_t，其中 $N_t = n$（如果 $t \in [t_{n-1}, t_n)$。换言之，如果第 n 次比较的持续时间 t_n 超过截止时间 t，决策单元就无法完成该次比较。为了解这一停止数如何影响分析，请注意，如果没有停止，神经 Metropolis 算法会实现一个随机过程

$$(J, I, T) = (J_{-1}, I_0, T_0, J_0, I_1, T_1, ..., J_{n-1}, I_n, T_n, J_n, I_{n+1}, ...) \tag{35}$$

其中，j_{n-1} of J_{n-1} 的实现是在第 $n-1$次迭代结束时的当前选项，i_n of I_n 的实现是在第 n 次迭代时的提案，而 t_n of T_n 的实现是第n次迭代的持续时间。停止数 N_t 的作用如下：

$$N_t = n \iff T_{-1} + T_0 + \cdots + T_{n-1} \leq t < T_{-1} + T_0 + \cdots + T_{n-1} + T_n$$

其中 $T_{-1} = 0$。在这种情况下，通常无法得到 p_{N_t} 的闭式表示，而且根据定义，$\tau_{N_t} = t$。不过，在以下假设下，我们可以给出一个与定理12思路相近的极限结果。

[21]当且仅当 ρ_{C} 具有传递性。

正则性 若二元选择模型 (C, RT) 满足以下条件，则称其具有正则性： ρ_{C} 为正且传递， τ_{RT} 为正，且 $\mathrm{RT} = [\mathrm{RT}_{i,\ j}]$ 由随机反应时间 $\mathrm{RT}_{i,\ j}$ 组成，其在 0 处具有连续分布且没有奇异部分。[22]

现在我们可以陈述极限结果。[23]

命题 16 如果一个具有不可约探索矩阵 Q 的神经 Metropolis 算法 (24) 基于正则二元选择模型 (C, 反应时间)，那么

$$\lim_{t\to\infty} p_{N_t}(i, A) = \frac{e^{v_{\mathrm{C}}(i)}\bar{\tau}_i}{\sum_{j\in A} e^{v_{\mathrm{C}}(j)}\bar{\tau}_j} \qquad \forall i \in A$$

随着时间压力减轻，选择备选项 i 的极限概率与 i 作为当前选项的极限概率，以及 i 作为当前选项时进行比较的平均持续时间成正比。这种直觉很自然：在截止时间 t 到来时，与其他备选项进行比较所花的时间越长，选择该备选项的概率就越高。

在 DDM 特例中，我们得到

$$\lim_{t\to\infty} p_{N_t}(i) = \frac{e^{\lambda\nu(i)}\bar{\tau}_i}{\sum_{j\in A} e^{\lambda\nu(j)}\bar{\tau}_j} = \frac{e^{\lambda\nu(i)+\alpha(i)}}{\sum_{j\in A} e^{\lambda\nu(j)+\alpha(j)}} \qquad \forall i \in A \tag{36}$$

因此，极限概率是具有神经效用 ν 和备选项特定偏差的 Softmax

$$\alpha(i) = \log \bar{\tau}_i \qquad \forall i \in A$$

此外，如果漂移扩散模型是对称的，且探索矩阵Q 的非对角元素与平均反应时间成反比（如 Cerreia-Vioglio 等人（2022），第 2 节所述），那么 $\bar{\tau}_i$近似为常数，并会出现多项 Logit 行为（32）。[24]

[22]当所有反应时间分布都存在密度时，这两个条件会自动满足。[23]本讨论部分聚焦于正的情形，更一般的情形留待未来深入分析。[24]详情请参阅附录 B.4。

A 附录：证据阈值模型

很快就会清楚，证据阈值模型最好以离散时间来引入。对于 A 中每一对备选项 i、j，设 $\{\mathrm{Z}_{i,\,j}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ 为一个离散时间随机过程，其中每个变量 $\mathrm{Z}_{i,\,j}(t)$ 表示神经系统在时间 t 纳入考量的、支持 i 而非 j 的净证据——累计证据或瞬时证据。给定两个证据阈值 λ、$\beta > 0$，当支持 i 的证据达到水平 λ，或支持 j 的证据达到水平 β 时，就会作出决策。这发生在（随机）时间

$$\mathrm{RT}_{i,j} = \min\left\{t : \mathrm{Z}_{i,j}(t) \geq \lambda \text{ or } \mathrm{Z}_{i,j}(t) \leq -\beta\right\} \tag{37}$$

由此，选择变量为

$$\mathrm{C}_{i,j} = \begin{cases} i & \text{if } \mathrm{Z}_{i,j}\left(\mathrm{RT}_{i,j}\right) \geq \lambda \\ j & \text{if } \mathrm{Z}_{i,j}\left(\mathrm{RT}_{i,j}\right) \leq -\beta \end{cases} \tag{38}$$

证据阈值模型涵盖积分模型（例如离散时间版本的漂移扩散模型），也包括 Stine 等人（2020）讨论的极值检测模型。要理解其中的原因，请考虑离散时间的 Ornstein-Uhlenbeck 过程

$$\mathrm{Z}_{i,j}(t) = \underbrace{(1-\eta)\,\mathrm{Z}_{i,j}(t-1)}_{\text{past evidence}} + \underbrace{\zeta_{i,j}(t)}_{\text{new evidence}} \qquad \forall t \geq 1$$

初始条件为 $\mathrm{Z}_{i,\,j}(0) = 0$。标量 $\eta \in [0,1]$ 表示过去证据的衰减，而变量

$$\zeta_{i,j}(t) = [\nu(i) - \nu(j)]\,\mu(t-1) + \sigma\varepsilon(t) \qquad \forall t \geq 1 \tag{39}$$

是在时间 t 为某个备选项收集到的瞬时噪声证据。[25] 冲击 ε 是高斯白噪声过程——即由独立同分布的高斯随机变量$\varepsilon(t) \sim N(0,1)$组成；与漂移扩散模型一样，$\nu(i)$是备选项 i的价值。当

$$\eta = 0 \quad , \quad \mu = 1 \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{2} \tag{40}$$

过程（39）简化为以下离散时间版本的漂移扩散模型

$$\mathrm{Z}_{i,j}(t) - \mathrm{Z}_{i,j}(t-1) = [\nu(i) - \nu(j)] + \sqrt{2}\,\varepsilon(t) \qquad \forall t \geq 1$$

通过离散时间维纳过程 $w(t) = \sum_{s=1}^{t}\varepsilon(s)$，可以立即看出，$\mathrm{Z}_{i,\,j}(t)$ 表示累积的噪声证据：

$$\mathrm{Z}_{i,j}(t) = \sum_{s=1}^{t}\zeta_{i,j}(s) = [\nu(i) - \nu(j)]\,t + \sqrt{2}w(t)$$

相比之下，当 $\eta = 1$ 该过程（39）采用极值检测形式时

$$\mathrm{Z}_{i,j}(t) = \zeta_{i,j}(t) = [\nu(i) - \nu(j)]\,\mu(t-1) + \sigma\varepsilon(t) \qquad \forall t \geq 1 \tag{41}$$

[25]证据支持在 $\zeta_{i,j}(t) \geq 0$ 时选择 i 而非 j，并支持在 $\zeta_{i,j}(t) \leq 0$时选择 j 而非 i。μ 对 $t-1$ 的可能依赖性使得紧急信号得以发挥作用。

现在，$Z_{i,\ j}(t)$ 表示瞬时噪声证据，而非 DDM 中累积的证据。在连续时间下，Ornstein-Uhlenbeck 过程变为

$$\mathrm{d}Z_{i,j}(t) = -\eta Z_{i,j}(t)\,\mathrm{d}t + [\nu(i) - \nu(j)]\,\mu(t)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{dW}$$

含解答

$$Z_{i,j}(t) = [\nu(i) - \nu(j)]\,\mu(t)\,\frac{1 - e^{-\eta t}}{\eta} + \int_0^t e^{-\eta(t-s)}\sigma \mathrm{dW}(s) \tag{42}$$

DDM（21）仍是特例（40）。由于连续时间白噪声会引发技术问题，极值检测模型（41）的连续对应形式更难确定。鉴于这些问题似乎并无实质性的神经基础，我们引入了离散时间的证据阈值模型。[26]

尽管如此，Bogacz 等人（2006年）给出了连续时间 Ornstein-Uhlenbeck 过程的公式，这些公式推广了命题 7 所依据的漂移扩散模型公式。然而，目前尚不清楚这些推广后的公式能否对该命题给出精确的 Ornstein-Uhlenbeck 扩展。尽管如此，公式（42）是对漂移扩散模型的重要推广；通过将公式（37）和（38）显而易见地改写为连续时间版本，它可以发挥 BCM 的作用。

[26]积分模型（如漂移扩散模型）所使用的累积证据，可以用维纳过程恰当地形式化。极值检测模型所涉及的瞬时证据，则需要为维纳过程定义一种“导数”；这是个公认的微妙问题，因为维纳过程的轨迹处处不可微。

B 附录：证明及相关分析

B.1 第3节

本节有时使用 Fenchel 效用 v 的指数变换 $u = e^v$。我们将 u 称为严格效用。

B.1.1 引理1的证明

(i) 非对称性很容易验证。反设 $\succ^*$ 不是负传递的。那么，存在 i、j 和 k，使得 $i \not\succ^* k \not\succ^* j$ 但 $i \succ^* j$。备选项 i、k 和 j 必定各不相同：$i \succ^* j$ 意味着 $i \neq j$，而 $i = k$ 则意味着 $i \not\succ^* j$，$k = j$也同样如此。此外，

(a) $i \not\succ^* k$ 意味着 $\rho(i \mid k) < 1$ 和 $\rho(k \mid i) > 0$，(b) $k \not\succ^* j$ 意味着 $\rho(k \mid j) < 1$ 和 $\rho(j \mid k) > 0$，(c) $i \succ^* j$ 意味着 $\rho(i \mid j) = 1$ 和 $\rho(j \mid i) = 0$。

因此，

$$\rho(j \mid i)\,\rho(k \mid j)\,\rho(i \mid k) = 0 \quad \text{and} \quad \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(i \mid j) \neq 0$$

这与 ρ 的传递性相矛盾。因此，我们得出结论：$\succ^*$ 是负传递的。

(ii) 鉴于 (i)，由 Fishburn (1970) 第 13 页可知。

(iii) 完全性很容易得到证明。反设 $\succsim$ 不具有传递性。那么存在 i、j 和 k，使得 $i \succsim k \succsim j$，但 $i \not\succsim j$。备选项 i、k 和 j 必须互不相同：$i \not\succsim j$ 意味着 $i \neq j$，而 $i = k$ 会推出 $i \succsim j$，$k = j$也会推出这一结论。此外，

(a) $i \succsim k$ 意味着 $\rho(i \mid k) \geq \rho(k \mid i)$，
(b) $k \succsim j$ 意味着 $\rho(k \mid j) \geq \rho(j \mid k)$，
(c) $i \not\succsim j$ 意味着 $\rho(j \mid i) > \rho(i \mid j)$。

成立 $\rho(i \mid k) > 0$。事实上，若 $\rho(i \mid k) = 0$，则会推出 $\rho(k \mid i) = 1$，这与 (a) 矛盾。类似地，$\rho(k \mid j) > 0$。于是，

$$\rho(i \mid k)\,\rho(k \mid j) \geq \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k) \quad ; \quad \rho(j \mid i) > \rho(i \mid j) \quad ; \quad \rho(i \mid k)\,\rho(k \mid j) > 0$$

如果 $\rho(i \mid k)\ \rho(k \mid j) = \rho(k \mid i)\ \rho(j \mid k)$，那么这两项都严格为正，并且

$$\rho(i \mid k)\,\rho(k \mid j)\,\rho(j \mid i) > \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(i \mid j)$$

否则 $\rho(i \mid k)\ \rho(k \mid j) > \rho(k \mid i)\ \rho(j \mid k)$，然后

$$\rho(i \mid k)\,\rho(k \mid j)\,\rho(j \mid i) > \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(j \mid i) \geq \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(i \mid j)$$

在这两种情况下，ρ 的传递性都遭到了反驳。由此我们得出结论：$\succsim$ 是传递的。

(iv) $\succsim^\circ$ 的自反性显而易见。设 $i \succsim^\circ j$ 和 $j \succsim^\circ k$。根据定义，$i \succsim j$ 和 $i \parallel^* j$，以及 $j \succsim k$ 和 $j \parallel^* k$。由于 $\succsim$ 和 $\parallel^*$ 都是传递的，因此可得 $i \succsim k$ 和 $i \parallel^* k$，也就是说，$i \succsim^\circ k$。由此可知，$\succsim^\circ$ 是传递的。最后，假设 $i \parallel^* j$，并注意到 $j \parallel^* i$也成立。由于 $\succsim$ 是完全的，因此要么 $i \succsim j$，要么 $j \succsim i$，于是要么 $i \succsim^\circ j$，要么 $j \succsim^\circ i$。■

B.1.2 引理 2 的证明

(i) 显而易见。

(ii) 设 i 和 j 为任意两个备选项，满足 $w(i) = w(j)$，并设 $\tilde{u}: A \to (0, \infty)$ 使得

$$\rho(i \mid j) = s(i,j) \frac{\tilde{u}(i)}{\tilde{u}(i) + \tilde{u}(j)}$$

我们有

$$\frac{\rho(i \mid j)}{\rho(j \mid i)} = \frac{s(i,j) \dfrac{\tilde{u}(i)}{\tilde{u}(i) + \tilde{u}(j)}}{s(j,i) \dfrac{\tilde{u}(j)}{\tilde{u}(i) + \tilde{u}(j)}} = \frac{\tilde{u}(i)}{\tilde{u}(j)}$$

同理,

$$\frac{\rho(i \mid j)}{\rho(j \mid i)} = \frac{s(i,j) \dfrac{u(i)}{u(i) + u(j)}}{s(j,i) \dfrac{u(j)}{u(i) + u(j)}} = \frac{u(i)}{u(j)}$$

因此，对于任意 $j^* \in A$,

$$\tilde{u}(i) = \frac{\tilde{u}(j^*)}{u(j^*)} u(i)$$

对于所有 $i \in A$，我们得出结论： u 在正比例因子意义下是唯一的。

(iii) 设 i 和 j 为任意两个备选项，且 $w(i) = w(j)$。根据 s 的对称性 ,

$$\rho(i \mid j) + \rho(j \mid i) = s(i,j) \frac{u(i)}{u(i) + u(j)} + s(j,i) \frac{u(j)}{u(i) + u(j)} = s(i,j) \tag{43}$$

然后， s 在 $w(i)$的水平集上是唯一的。因此，(11) 中的关系式成立。 ■

B.1.3 引理3的证明

设 ρ 是一个二元选择概率。假设 ρ 是狄拉克且传递的。令 $i \neq j$。由于 ρ 是狄拉克， $\rho(i \mid j) \in \{0, 1\}$。如果 $\rho(i \mid j) = 1$，那么 $i \succ^* j$。如果 $\rho(i \mid j) = 0$，那么 $\rho(j \mid i) = 1$，因此 $j \succ^* i$。由此我们得出 $\succ^*$ 是弱完备的。

令 $i \succ^* j$ 和 $j \succ^* k$。因此，我们有 $j \not\succ^* i$、 $k \not\succ^* j$和 $k \neq i$。由于 ρ 是传递的，根据引理1， $\succ^*$ 是负传递的。因此， $k \not\succ^* i$ 从而 $\rho(i \mid k) \neq 0$。根据狄拉克的定义，并且由于 $i \neq k$，我们有 $\rho(i \mid k) = 1$，从而 $i \succ^* k$。我们得出结论， $\succ^*$ 是传递的。

关于逆命题，设 $\succ^*$ 是弱完备且传递的。令 $i \neq j$。由于 $\succ^*$ 是弱完备的，因此 $i \succ^* j$ 或 $j \succ^* i$。如果 $i \succ^* j$，那么 $\rho(i \mid j) = 1$；如果 $j \succ^* i$，那么 $\rho(j \mid i) = 1$，因此 $\rho(i \mid j) = 0$。由此我们得出结论： $\rho(i \mid j) \in \{0, 1\}$。这证明了 ρ 是狄拉克。反过来，假设 ρ 不具有传递性。那么，存在三个互不相同的备选项 i、 j 和 k，使得

$$\rho(j \mid i) \rho(k \mid j) \rho(i \mid k) \neq \rho(k \mid i) \rho(j \mid k) \rho(i \mid j)$$

这是 不可能两边都含有一个零因子。由于 ρ 是狄拉克，因此要么

$$\rho(j \mid i) \rho(k \mid j) \rho(i \mid k) = 1$$

or

$$\rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(i \mid j) = 1$$

在前一种情况下， $i \succ^* k \succ^* j \succ^* i$ ，因此 $\succ^*$ 不是传递的。在后一种情况下， $i \succ^* j \succ^* k \succ^* i$ ，因此同样， $\succ^*$ 不是传递的。我们由此得出， ρ 必须是传递的。■

B.1.4 定理4

我们证明一个更一般的结果，它为偏好 $\succsim$ 提供效用表示 $\bar{u}: A \to \mathbb{R}$ 。

定理 17 给定二元选择概率 ρ，以下条件等价:

(i) ρ 是传递的;

(ii) 存在 w、 $u: A \to (0,\infty)$，以及一个对称的 $s: A^2 \to (0,\infty)$，使得

$$\rho(i \mid j) = \begin{cases} 1 & if\ w(i) > w(j) \\ s(i,j)\dfrac{u(i)}{u(i)+u(j)} & if\ w(i) = w(j) \\ 0 & if\ w(i) < w(j) \end{cases}$$

对所有 i、 $j \in A$;

(iii) 存在 $\bar{u}: A \to (0,\infty)$、 $f: \text{Im}\ \bar{u} \to (0,\infty)$ 递增，且存在一个对称的 $s: A^2 \to (0,\infty)$，使得

$$\rho(i \mid j) = \begin{cases} 1 & if\ f(\bar{u}(i)) > f(\bar{u}(j)) \\ s(i,j)\dfrac{\bar{u}(i)}{\bar{u}(i)+\bar{u}(j)} & if\ f(\bar{u}(i)) = f(\bar{u}(j)) \\ 0 & if\ f(\bar{u}(i)) < f(\bar{u}(j)) \end{cases}$$

对于所有 $i, j \in A$。

通过设置 $v = \log u$ ，我们可以得到定理4（注意，由于 w 是序数唯一的，我们始终可以假设它是严格 正 的）。

证明 (i) 蕴含 (iii)。由于 A 是有限的，因此存在 $w: A \to (0,\infty)$，它按照 (9) 的意义表示 $\succ^*$ 。然后，

$$\begin{aligned} w(i) > w(j) &\iff i \succ^* j \iff \rho(i \mid j) = 1 \\ w(i) < w(j) &\iff j \succ^* i \iff \rho(i \mid j) = 0 \\ w(i) = w(j) &\iff i \parallel^* j \iff \rho(i \mid j) \in (0,1) \end{aligned}$$

根据引理1， $\parallel^*$ 是 A上的等价关系。由于 w 在严格递增变换下唯一，如果 $|\text{Im}\ w| = m$，我们可以假设 $\text{Im}\, w = \{1, 2, ..., m\}$。对于所有 $h = 1$、2、...、 m，我们

可以选择$i_h^* \in w^{-1}(h)$。这样，$[i_1^*]$、...、$[i_m^*]$就是由$\|^*$诱导的A的划分。对于每个$h=1$、...、m，设

$$u_h^*(j) = \frac{\rho(j \mid i_h^*)}{\rho(i_h^* \mid j)} \qquad \forall j \in [i_h^*]$$

该比率定义良好，因为$w(j) = w(i_h^*)$意味着$\rho(j \mid i_h^*) \ \rho(i_h^* \mid j) \in (0,1)$。由此，

$$\frac{u_h^*(j)}{u_h^*(k)} = \frac{\dfrac{\rho(j \mid i_h^*)}{\rho(i_h^* \mid j)}}{\dfrac{\rho(k \mid i_h^*)}{\rho(i_h^* \mid k)}} = \frac{\rho(j \mid i_h^*)}{\rho(i_h^* \mid j)} \frac{\rho(i_h^* \mid k)}{\rho(k \mid i_h^*)} \qquad \forall j,k \in [i_h^*]$$

根据传递性，我们有

$$\rho(j \mid i)\,\rho(k \mid j)\,\rho(i \mid k) = \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(i \mid j)$$

对于所有i、j、$k \in A$、[27]和

$$\frac{\rho(j \mid i_h^*)}{\rho(i_h^* \mid j)} \frac{\rho(i_h^* \mid k)}{\rho(k \mid i_h^*)} = \frac{\rho(j \mid k)}{\rho(k \mid j)}$$

对于所有j、$k \in [i_h^*]$。因此，

$$\frac{u_h^*(j)}{u_h^*(k)} = \frac{\rho(j \mid i_h^*)}{\rho(i_h^* \mid j)} \frac{\rho(i_h^* \mid k)}{\rho(k \mid i_h^*)} = \frac{\rho(j \mid k)}{\rho(k \mid j)} \qquad \forall j,k \in [i_h^*]$$

对于所有$h=1$、...、m。

设$\sigma_1 = 1$并且对于每个$h = 2, ..., m$，选择一个严格为正的常数σ_h，使得

$$\max_{j \in [i_{h-1}^*]} \sigma_{h-1} u_{h-1}^*(j) < \min_{j \in [i_h^*]} \sigma_h u_h^*(j)$$

也就是说，

$$\sigma_h > \sigma_{h-1} \frac{\max_{j \in [i_{h-1}^*]} u_{h-1}^*(j)}{\min_{j \in [i_h^*]} u_h^*(j)}$$

定义

$$\bar{u}(j) = \sigma_h u_h^*(j) \qquad \forall j \in [i_h^*], \forall h = 1, ..., m$$

注意，对于所有$h = 2, ..., m$、所有$j_{h-1} \in [i_{h-1}^*]$和所有$j_h \in [i_h^*]$

$$\bar{u}(j_{h-1}) < \bar{u}(j_h)$$

也就是说，

$$\bar{u}(j_1) < \bar{u}(j_2) < \cdots < \bar{u}(j_m)$$

每当$j_h \in [i_h^*]$对所有$h = 1, 2, ..., m$。那么，如果$\bar{u}(k) \geq \bar{u}(j)$，其中$k \in [i_{h_k}^*]$和$j \in [i_{h_j}^*]$，则不可能出现这种情况：

$$h_j > h_k$$

[27]如前所述，传递性意味着上述“乘积规则”适用于A中的所有三元备选项，不仅仅是由不同备选项组成的三元组。

因此，$h_k \geq h_j$、$w\left(i^*_{h_k}\right) \geq w\left(i^*_{h_j}\right)$ 和 $w(k) \geq w(j)$。所以存在 $f\colon \bar{u}(A) \to (0,\infty)$ 递增，并且满足

$$f \circ \bar{u} = w$$

因此，

$$\begin{aligned} &f(\bar{u}(i)) > f(\bar{u}(j)) \iff \rho(i \mid j) = 1 \quad ; \quad f(\bar{u}(i)) = f(\bar{u}(j)) \iff \rho(i \mid j) \in (0,1) \\ &f(\bar{u}(i)) < f(\bar{u}(j)) \iff \rho(i \mid j) = 0 \end{aligned}$$

对于所有满足 $f(\bar{u}(j)) = f(\bar{u}(k))$ 的 $j \neq k$ in A，我们有 $\rho(j \mid k) \in (0,1)$，因此 $j \parallel^* k$，则存在 $h = 1, ..., m$，使得对于每个 $j, k \in [i^*_h]$，

$$\frac{\bar{u}(j)}{\bar{u}(j) + \bar{u}(k)} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{u}(k)}{\bar{u}(j)}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_h u^*(k)}{\sigma_h u^*(j)}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho(k|j)}{\rho(j|k)}} = \frac{\rho(j \mid k)}{\rho(j \mid k) + \rho(k \mid j)}$$

and

$$\rho(j \mid k) = \underbrace{(\rho(j \mid k) + \rho(k \mid j))}_{=s(j,k)} \frac{\bar{u}(j)}{\bar{u}(j) + \bar{u}(k)}$$

通过设置 $s(j,k) = 1$ if $f(\bar{u}(i)) \neq f(\bar{u}(j))$，我们得出了论证结论。

由于 (iii) 显然蕴含 (ii)，因此只需证明 (ii) 蕴含 (i)。设 u、w 和 s 如 (ii) 中所述表示 ρ。我们已经观察到，w 表示 $\succ^*$。

对于 A 中任意三个互不相同的元素 i、j、k，考虑以下两个乘积。

$$\rho(j \mid i)\rho(k \mid j)\rho(i \mid k) \qquad \text{and} \qquad \rho(k \mid i)\rho(j \mid k)\rho(i \mid j)$$

首先，假设 i、j、k 不属于 w 的同一个水平集。不失一般性，我们可以令 $\rho(j \mid i) = 0$。因此，$\rho(i \mid j) = 1$，从而得到 $i \succ^* j$，即 $w(i) > w(j)$。需要考虑两种情况。

(1) 如果 $w(k) \geq w(i)$，那么 $w(k) > w(j)$，因此 $\rho(j \mid k) = 0$。

(2) 否则，如果 $w(i) > w(k)$，那么 $\rho(k \mid i) = 0$。

在这两种情况下，两个乘积都为零，因此相等。接下来，假设 i、j、k 属于 w 的同一水平集。那么，

$$\begin{aligned} \rho(j \mid i)\rho(k \mid j)\rho(i \mid k) &= s(j,i)\frac{u(j)}{u(j)+u(i)} s(k,j)\frac{u(k)}{u(k)+u(j)} s(i,k)\frac{u(i)}{u(i)+u(k)} \\ &= s(k,i)\frac{u(i)}{u(k)+u(i)} s(j,k)\frac{u(k)}{u(j)+u(k)} s(i,j)\frac{u(j)}{u(i)+u(j)} \\ &= s(k,i)\frac{u(k)}{u(k)+u(i)} s(j,k)\frac{u(j)}{u(j)+u(k)} s(i,j)\frac{u(i)}{u(i)+u(j)} \\ &= \rho(k \mid i)\rho(j \mid k)\rho(i \mid j) \end{aligned}$$

我们得出结论：ρ 具有传递性。 ■

B.1.5 定理 5

“仅当。”如果一个串联体具有二元价值表示（v、 w、 s、 φ），那么 ρ 具有传递性（见定理4）。考虑集合

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &= \{(i,j) : \tau(i \mid j) \neq 0\} = \{(i,j) : \rho(i \mid j) \in (0,1)\} \\ &= \{(i,j) : i \parallel^* j\} = \{(i,j) : w(i) = w(j)\}\end{aligned}$$

注意，对所有 $(i,j) \in \mathbb{D}$,

$$\ell_{ij} = \ln \frac{\rho(i \mid j)}{\rho(j \mid i)} = v(i) - v(j)$$

因此 (16) 给出

$$\ell_{ij} = \ell_{hk} \implies v(i) - v(j) = v(h) - v(k) \implies \tau(i \mid j) = \tau(h \mid k)$$

对所有 (i,j)，$(h,k) \in \mathbb{D}$。因此 (17) 得以满足。

由于 φ 是严格拟凹且单峰的，因此存在唯一的 $l \in \mathbb{R}$，使得 φ在 $(-\infty, l]$ 上严格递增，并在 $[l, \infty)$上严格递减，于是

$$\begin{aligned}l \leq \ell_{ij} < \ell_{hk} &\implies l \leq v(i) - v(j) < v(h) - v(k) \\ &\implies \varphi(v(i) - v(j)) > \varphi(v(h) - v(k)) \implies \tau(i \mid j) > \tau(h \mid k)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\ell_{ij} < \ell_{hk} \leq l &\implies v(i) - v(j) < v(h) - v(k) \leq l \\ &\implies \varphi(v(i) - v(j)) < \varphi(v(h) - v(k)) \implies \tau(i \mid j) < \tau(h \mid k)\end{aligned}$$

对所有 (i,j)，$(h,k) \in \mathbb{D}$。因此 (18) 和 (19) 得以满足，证毕。

“如果。”如果一个串联体是计时的，那么 ρ 是传递的，并且存在 $v, w : A \to \mathbb{R}$ 以及一个对称的 $s : A^2 \to (0, \infty)$，使得（8）成立。考虑集合

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &= \{(i,j) : \tau(i \mid j) \neq 0\} = \{(i,j) : \rho(i \mid j) \in (0,1)\} \\ &= \{(i,j) : i \parallel^* j\} = \{(i,j) : w(i) = w(j)\}\end{aligned}$$

注意，对于所有 $(i,j) \in \mathbb{D}$,

$$\ell_{ij} = \ln \frac{\rho(i \mid j)}{\rho(j \mid i)} = v(i) - v(j)$$

并令 $L = \{\ell_{ij} : (i,j) \in \mathbb{D}\} = \{v(i) - v(j) : (i,j) \in \mathbb{D}\}$。由此，（17）意味着存在 $\psi : L \to (0, \infty)$，使得

$$\tau(i \mid j) = \psi(\ell_{ij}) = \psi(v(i) - v(j))$$

对所有（i， j）$\in \mathbb{D}$均成立。此外，根据（18），如果 x、$y \in L$ 满足 $l \leq x < y$，取 $\mathbb{D}$ 中的（i， j）和（h， k），使得 $x = \ell_{ij}$ 且 $y = \ell_{hk}$，则可得

$$l \leq \ell_{ij} < \ell_{hk} \implies \tau(i \mid j) > \tau(h \mid k) \implies \psi(\ell_{ij}) > \psi(\ell_{hk}) \implies \psi(x) > \psi(y)$$

类似地，根据（19），如果 x、$y \in L$ 满足 $x < y \leq l$，取 $\mathbb{D}$ 中的（i，j）和（h，k），使得 $x = \ell_{ij}$ 且 $y = \ell_{hk}$，则可得

$$\ell_{ij} < \ell_{hk} \leq l \implies \tau(i \mid j) < \tau(h \mid k) \implies \psi(\ell_{ij}) < \psi(\ell_{hk}) \implies \psi(x) < \psi(y)$$

综上所述，L 是 $\mathbb{R}$ 和 ψ 的有限子集：$L \to (0,\infty)$满足存在 $l \in \mathbb{R}$ 使得

$$l \leq x < y \implies \psi(x) > \psi(y)$$
$$x < y \leq l \implies \psi(x) < \psi(y)$$

对于所有 $x, y \in L$。

这使得可以将 ψ 扩展为函数 φ：$\mathbb{R} \to (0,\infty)$，使得 φ 在 $(-\infty, l]$ 上严格递增，并在 $[l,\infty)$ 上严格递减。因此，存在一个严格拟凹且单峰的 φ：$\mathbb{R} \to (0,\infty)$，使得

$$\tau(i \mid j) = \varphi(v(i) - v(j))$$

如果 $w(i) = w(j)$】【。

最后，如果 $w(i) \neq w(j)$，由 (8) 可得 $\rho(i \mid j) \in \{0,1\}$，根据串联体的定义，$\tau(i \mid j) = 0$.■

B.1.6 定理 6

注意，如果（ρ，τ）具有二元价值表示，或者它是心理测量的，那么 ρ 是传递的，并且存在 v、w：$A \to \mathbb{R}$ 以及一个对称的 s：$A^2 \to (0,\infty)$，使得（8）成立。因此，反应时间非零的备选项对的集合是

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &= \{(i,j) : \tau(i \mid j) \neq 0\} = \{(i,j) : \rho(i \mid j) \in (0,1)\} \\ &= \{(i,j) : i \parallel^* j\} = \{(i,j) : w(i) = w(j)\}\end{aligned}$$

任意选择（i，j）$\in \mathbb{D}$，由于 $i \parallel^* j$，根据引理1，我们可以在不失一般性的情况下假设 $i \succsim^\circ j$，因此

$$\rho(i \mid j) \geq \rho(j \mid i) \quad \text{and} \quad 1 - \rho(j \mid i) \geq 1 - \rho(i \mid j)$$

A 第二类错误是指接受较差提案的概率，即，

$$\mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{i,j} = \rho(j \mid i) = \min\{\rho(i \mid j), \rho(j \mid i)\}$$

第一类错误是拒绝较优提案的概率，也就是说，

$$\mathrm{ER}^{\mathrm{I}}_{i,j} = 1 - \rho(i \mid j) = \min\{1 - \rho(i \mid j), 1 - \rho(j \mid i)\}$$

由于（8）成立，$i \succsim^\circ j$ 当且仅当 $v(i) \geq v(j)$。因此：

$$\begin{aligned}\mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{i,j} &= \rho(j \mid i) = s(j,i) \frac{1}{1 + e^{-(v(j)-v(i))}} = s(j,i) \frac{1}{1 + e^{|v(j)-v(i)|}} \\ &= s(i,j) \frac{1}{1 + e^{|v(i)-v(j)|}} \\ \mathrm{ER}^{\mathrm{I}}_{i,j} &= 1 - \rho(i \mid j) = 1 - s(i,j) \frac{1}{1 + e^{-(v(i)-v(j))}} = 1 - s(i,j) \frac{1}{1 + e^{-|v(i)-v(j)|}} \\ &= 1 - \mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{i,j} \frac{1 + e^{|v(i)-v(j)|}}{1 + e^{-|v(i)-v(j)|}}\end{aligned}$$

综上，对于每个 $(i,j) \in \mathbb{D}$,

$$\mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{II}} = s(i,j)\frac{1}{1+e^{|v(i)-v(j)|}}$$
$$\mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{I}} = 1 - \mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{II}}\frac{1+e^{|v(i)-v(j)|}}{1+e^{-|v(i)-v(j)|}}$$

但是，对于 $\mathbb{D}$ 中满足 $\mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{I}} < \mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{I}}$ 且 $\mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{II}} < \mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{II}}$ 的所有 (i,j) 和 (h,k)，可推出

$$1 - \mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{II}}\frac{1+e^{|v(i)-v(j)|}}{1+e^{-|v(i)-v(j)|}} < 1 - \mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{II}}\frac{1+e^{|v(h)-v(k)|}}{1+e^{-|v(h)-v(k)|}}$$
$$\mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{II}}\frac{1+e^{|v(h)-v(k)|}}{1+e^{-|v(h)-v(k)|}} < \mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{II}}\frac{1+e^{|v(i)-v(j)|}}{1+e^{-|v(i)-v(j)|}}$$
$$\frac{\frac{1+e^{|v(h)-v(k)|}}{1+e^{-|v(h)-v(k)|}}}{\frac{1+e^{|v(i)-v(j)|}}{1+e^{-|v(i)-v(j)|}}} < \frac{\mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{II}}}{\mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{II}}} < 1$$
$$\frac{1+e^{|v(h)-v(k)|}}{1+e^{-|v(h)-v(k)|}} < \frac{1+e^{|v(i)-v(j)|}}{1+e^{-|v(i)-v(j)|}}$$
$$|v(h)-v(k)| < |v(i)-v(j)|$$

换句话说

$$\mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{I}} < \mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{I}} \quad \text{and} \quad \mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{II}} < \mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{II}} \Longrightarrow |v(i)-v(j)| > |v(h)-v(k)| \tag{44}$$

类似的论证表明

$$\mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{I}} \leq \mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{I}} \quad \text{and} \quad \mathrm{ER}_{i,j}^{\mathrm{II}} \leq \mathrm{ER}_{h,k}^{\mathrm{II}} \Longrightarrow |v(i)-v(j)| \geq |v(h)-v(k)| \tag{45}$$

“如果。”如果 (ρ,τ) 具有心理测量的性质，则 (44) 和 (45) 蕴含

$$\tau(i \mid j) < \tau(h \mid k) \Longrightarrow |v(i)-v(j)| > |v(h)-v(k)| \tag{46}$$

and

$$\tau(i \mid j) \leq \tau(h \mid k) \Longrightarrow |v(i)-v(j)| \geq |v(h)-v(k)| \tag{47}$$

对于所有 (i,j) 和 $(h,k) \in \mathbb{D}$。因此

$$|v(i)-v(j)| \geq |v(h)-v(k)| \Longleftrightarrow \tau(i \mid j) \leq \tau(h \mid k)$$

因此，令 $M = \{|v(i)-v(j)| : (i,j) \in \mathbb{D}\}$，则存在一个严格递减函数 $\psi : M \to (0,\infty)$，使得 $\tau(i \mid j) = \psi(|v(i)-v(j)|)$。我们可以先将 ψ 从 M 延拓到 $[0,\infty)$，使其成为严格递减函数，然后对所有 $x \in \mathbb{R}$ 令 $\varphi(x) = \psi(|x|)$。由此，存在一个严格拟凹、单峰且偶函数 $\varphi : \mathbb{R} \to (0,\infty)$，使得

$$\tau(i \mid j) = \varphi(v(i)-v(j))$$

如果 $w(i) = w(j)$。

最后，如果 $w(i) \neq w(j)$，根据（8），$\rho(i \mid j) \in \{0,1\}$，根据串联体的定义，$\tau(i \mid j) = 0$。

“仅当。”如果一个串联体具有二元价值表示（v、 w、 s、 φ），那么 ρ是传递的（见定理4）。现在， φ 是严格拟凹的、单峰的，甚至是 $\varphi:\ \mathbb{R}\to(0,\infty)$，在 0 处取得强极大值，并且在 $[0,\infty)$ 上严格递减。特别地，

$$\tau(i\mid j)=\tau(j\mid i)$$

对于所有备选项 i和 j。但此时 ρ是无偏的，因此，对于所有 $(i,j)\in\mathbb{D}$，都有 $s(i,j)=1$，所以

$$\mathrm{ER}^{\mathrm{I}}_{i,j}=\mathrm{ER}^{\mathrm{II}}_{i,j}=\frac{1}{1+e^{|v(i)-v(j)|}}$$

此外，对于 $\mathbb{D}$ 中的所有 (i,j) 和 (h,k)，

$$\begin{aligned}\tau(i\mid j)<\tau(h\mid k)&\iff\varphi(|v(i)-v(j)|)<\varphi(|v(h)-v(k)|)\\&\iff|v(i)-v(j)|>|v(h)-v(k)|\\&\iff\mathrm{ER}_{i,j}<\mathrm{ER}_{h,k}\end{aligned}$$

这证明 (ρ,τ) 是心理测量的。 ■

B.2 第 4 节

B.2.1 第 4.1 小节

为简化记号，我们将 $\Lambda_{ij}=\nu(i)-\nu(j)$ 设为，以及

$\rho_{\mathrm{C}}(i\mid j)=\rho_{ij}$； $\rho_{\mathrm{C}}(j\mid i)=\rho_{ji}$； $\tau_{\mathrm{RT}}(i\mid j)=\tau_{ij}$； $\tau_{\mathrm{RT}}(j\mid i)=\tau_{ji}$； $s_{\mathrm{C}}(i,j)=s_{ij}$根据 Pinsky 和 Karlin（2011年）的定理 8.1 和 8.2，

$$\rho_{ij}=\frac{1-e^{\beta\Lambda_{ij}}}{e^{-\lambda\Lambda_{ij}}-e^{\beta\Lambda_{ij}}}\quad\text{and}\quad\tau_{ij}=\frac{1}{\Lambda_{ij}}\left[\rho_{ij}(\lambda+\beta)-\beta\right]\tag{48}$$

还需注意，

$$\rho_{ij}=\frac{1-e^{-\beta\Lambda_{ij}}}{1-e^{-(\lambda+\beta)\Lambda_{ij}}}$$

我们先给出一些预备引理。

引理 18 对每个 $(i,j)\in A^2$，都有

$$\lambda\Lambda_{ij}=\ln\frac{\rho_{ij}}{\rho_{ji}}\quad;\quad\beta\Lambda_{ij}=\ln\frac{1-\rho_{ji}}{1-\rho_{ij}}\tag{49}$$

证明 令 $(i,j)\in A^2$。我们有

$$\frac{\rho_{ij}}{\rho_{ji}}=\frac{\frac{1-e^{\beta\Lambda_{ij}}}{e^{-\lambda\Lambda_{ij}}-e^{\beta\Lambda_{ij}}}}{\frac{1-e^{-\beta\Lambda_{ij}}}{e^{\lambda\Lambda_{ij}}-e^{-\beta\Lambda_{ij}}}}=e^{\lambda\Lambda_{ij}}$$

因此 $\lambda\Lambda_{i,\ j}=\ln\ \rho_{ij}/\rho_{ji}$。我们还有

$$\frac{1-\rho_{ji}}{1-\rho_{ij}}=\frac{1-\frac{1-e^{-\beta\Lambda_{ij}}}{e^{\lambda\Lambda_{ij}}-e^{-\beta\Lambda_{ij}}}}{1-\frac{1-e^{\beta\Lambda_{ij}}}{e^{-\lambda\Lambda_{ij}}-e^{\beta\Lambda_{ij}}}}=\frac{\frac{e^{\lambda\Lambda_{ij}}-1}{e^{\lambda\Lambda_{ij}}-e^{-\beta\Lambda_{ij}}}}{\frac{1-e^{-\lambda\Lambda_{ij}}}{e^{\beta\Lambda_{ij}}-e^{-\lambda\Lambda_{ij}}}}=e^{\beta\Lambda_{ij}}$$

因此 $\beta\Lambda_{i,\ j}=\ln(1-\rho_{ji})\ /(1-\rho_{ij})$。 ■

引理 19 设 $(i,j) \in A^2$ 满足 $\Lambda_{ij} \neq 0$。则有

$$\tau_{ij} = \frac{\lambda^2}{\ln \rho_{ij} - \ln \rho_{ji}} \left[\rho_{ij} + \frac{\ln(1-\rho_{ji}) - \ln(1-\rho_{ij})}{\ln \rho_{ij} - \ln \rho_{ji}} (\rho_{ij} - 1) \right] \tag{50}$$

证明 由 (49),

$$\frac{\beta}{\lambda} = \frac{\beta \Lambda_{ij}}{\lambda \Lambda_{ij}} = \frac{\ln \frac{1-\rho_{ji}}{1-\rho_{ij}}}{\ln \frac{\rho_{ij}}{\rho_{ji}}} = \frac{\ln(1-\rho_{ji}) - \ln(1-\rho_{ij})}{\ln \rho_{ij} - \ln \rho_{ji}} \tag{51}$$

因此,

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{1}{\Lambda_{ij}} \left[\rho_{ij} (\lambda + \beta) - \beta \right] = \frac{\lambda^2}{\lambda \Lambda_{ij}} \left[\rho_{ij} \left(1 + \frac{\beta}{\lambda} \right) - \frac{\beta}{\lambda} \right] = \frac{\lambda^2}{\lambda \Lambda_{ij}} \left[\rho_{ij} + \frac{\beta}{\lambda} (\rho_{ij} - 1) \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{\ln \rho_{ij} - \ln \rho_{ji}} \left[\rho_{ij} + \frac{\ln(1-\rho_{ji}) - \ln(1-\rho_{ij})}{\ln \rho_{ij} - \ln \rho_{ji}} (\rho_{ij} - 1) \right] \end{aligned}$$

如所期望。 ■

引理 20 设 $(i,j) \in A^2$ with $\Lambda_{ij} \neq 0$。若 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$，则 $\beta = \lambda$。

证明 为了进一步简化记号，令 $x = \rho_{ij}$ and $y = \rho_{ji}$。由于 $\Lambda_{ij} \neq 0$，由 (49) 得 $x \neq y$。由 (50)，我们有

$$\begin{aligned} &\tau_{ij} = \tau_{ji} \\ &\iff \frac{\lambda^2}{\ln \frac{x}{y}} \left[x + \frac{\ln \frac{1-y}{1-x}}{\ln \frac{x}{y}} (x-1) \right] = \frac{\lambda^2}{\ln \frac{y}{x}} \left[y + \frac{\ln \frac{1-x}{1-y}}{\ln \frac{y}{x}} (y-1) \right] \\ &\iff \frac{\ln \frac{y}{x}}{\ln \frac{x}{y}} \left[x + \frac{\ln \frac{1-y}{1-x}}{\ln \frac{x}{y}} (x-1) \right] = y + \frac{\ln \frac{1-x}{1-y}}{\ln \frac{y}{x}} (y-1) \\ &\iff -x - \frac{\ln \frac{1-y}{1-x}}{\ln \frac{x}{y}} (x-1) = y + \frac{\ln \frac{1-x}{1-y}}{\ln \frac{y}{x}} (y-1) \\ &\iff \frac{\ln \frac{1-y}{1-x}}{\ln \frac{y}{x}} (y-1) + \frac{\ln \frac{1-y}{1-x}}{\ln \frac{y}{x}} (x-1) = y + x \iff \frac{2}{x+y} + \frac{\ln \frac{y}{x}}{\ln \frac{1-y}{1-x}} = 1 \end{aligned}$$

满足该方程的对 $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$ 的轨迹，其中 $x \neq y$，为

$$\left\{ (x,y) \in (0,1)^2_{\neq} : x = 1 - y \right\}$$

因此，$\rho_{ij} = 1 - \rho_{ji}$。根据（49），

$$\frac{\beta}{\lambda} = \frac{\beta \Lambda_{ij}}{\lambda \Lambda_{ij}} = \frac{\ln \frac{1-\rho_{ji}}{1-\rho_{ij}}}{\ln \frac{\rho_{ij}}{\rho_{ji}}} = \frac{\ln \frac{\rho_{ij}}{\rho_{ji}}}{\ln \frac{\rho_{ij}}{\rho_{ji}}} = 1$$

我们得出结论：$\beta = \lambda$。 ■

命题 7 的证明 $\rho = \rho_{\mathrm{C}}$ 的正性由 (48) 立即得出，因此 ρ 是二元选择概率。要确定 (ρ, τ) 是否为串联体，我们只需检验条件 (15)。当 $\beta = \lambda$ 时，该条件显然成立，因为 ρ 是无偏的，且 τ 是对称的。由于 ν 是单射，对于 A 中任意两个不同的 i 和 j，都有 $\Lambda_{ij} \neq 0$。根据引理 20，必有 $\tau_{ij} \neq \tau_{ji}$；因此，条件 (15) 此时真空成立。我们得出结论：(ρ, τ) 是串联体。最后，根据定理15，ρ 的传递性由此得出，因为 Baldassi 等（2020）证明，对于任意给定的良好探索矩阵 Q，转移矩阵 M 是可逆的。[28]

现在我们转向二元价值表示。根据正性，w_{C} 是常数。对于所有属于 A的 i 和j，

$$s_{ij} = \rho_{ij} + \rho_{ji} = \frac{1 - e^{-\beta\Lambda_{ij}}}{1 - e^{-(\lambda+\beta)\Lambda_{ij}}} + \frac{1 - e^{\beta\Lambda_{ij}}}{1 - e^{(\lambda+\beta)\Lambda_{ij}}} = 1 + \frac{e^{\lambda\Lambda_{ij}} - e^{\beta\Lambda_{ij}}}{1 - e^{(\lambda+\beta)\Lambda_{ij}}}$$

由对称性毛片免费
视频观看

$$s_{ij} = s_{ji} = 1 + \frac{e^{\lambda(-\Lambda_{ij})} - e^{\beta(-\Lambda_{ij})}}{1 - e^{(\lambda+\beta)(-\Lambda_{ij})}}$$

等等。

$$s_{\mathrm{C}}(i,j) = s_{ij} = 1 + \frac{e^{\lambda\Lambda_{ij}} - e^{\beta\Lambda_{ij}}}{1 - e^{(\lambda+\beta)\Lambda_{ij}}} = 1 + \frac{e^{\lambda|\Lambda_{ij}|} - e^{\beta|\Lambda_{ij}|}}{1 - e^{(\lambda+\beta)|\Lambda_{ij}|}}$$

此外,

$$s_{ij}\frac{1}{1 + e^{-\lambda\Lambda_{ij}}} = \left(1 + \frac{e^{\lambda\Lambda_{ij}} - e^{\beta\Lambda_{ij}}}{1 - e^{(\lambda+\beta)\Lambda_{ij}}}\right)\frac{1}{1 + e^{-\lambda\Lambda_{ij}}} = \frac{1 - e^{-\beta\Lambda_{ij}}}{1 - e^{-(\lambda+\beta)\Lambda_{ij}}} = \rho_{ij}$$

这证明了 $v_{\mathrm{C}} = \lambda\nu$，从而完成了式 (22) 的证明。

关于（23），

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \frac{\lambda^2}{\lambda\Lambda_{ij}}\left[\rho_{ij}\left(1 + \frac{\beta}{\lambda}\right) - \frac{\beta}{\lambda}\right] = \frac{\lambda^2}{\lambda\Lambda_{ij}}\left[\frac{1 - e^{\beta\Lambda_{ij}}}{e^{-\lambda\Lambda_{ij}} - e^{\beta\Lambda_{ij}}}\left(1 + \frac{\beta}{\lambda}\right) - \frac{\beta}{\lambda}\right] \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda\Lambda_{ij}}\left[\frac{1 - e^{\frac{\beta}{\lambda}\lambda\Lambda_{ij}}}{e^{-\lambda\Lambda_{ij}} - e^{\frac{\beta}{\lambda}\lambda\Lambda_{ij}}}\left(1 + \frac{\beta}{\lambda}\right) - \frac{\beta}{\lambda}\right]\end{aligned}$$

但 $\lambda\Lambda_{ij} = v_{\mathrm{C}}(i) - v_{\mathrm{C}}(j)$。然后我们可以定义 φ_{RT}： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，方法是

$$\varphi_{\mathrm{RT}}(x) = \frac{\lambda^2}{x}\left[\frac{1 - e^{\frac{\beta}{\lambda}x}}{e^{-x} - e^{\frac{\beta}{\lambda}x}}\left(1 + \frac{\beta}{\lambda}\right) - \frac{\beta}{\lambda}\right]$$

并得到 $\tau_{ij} = \varphi_{\mathrm{RT}}(v_{\mathrm{C}}(i) - v_{\mathrm{C}}(j))$。 ■

命题8的证明 根据(50),

$$\tau_{ij} = \frac{\lambda^2}{\ell_{ij}}\left[\rho_{ij} + \frac{\bar{\ell}_{ij}}{\ell_{ij}}(\rho_{ij} - 1)\right] = \frac{\lambda^2}{\ell_{ij}^2}\left[\ell_{ij}\rho_{ij} + \bar{\ell}_{ij}(\rho_{ij} - 1)\right]$$

thus

$$\lambda = |\ell_{ij}|\sqrt{\frac{\tau_{ij}}{\ell_{ij}\rho_{ij} + \bar{\ell}_{ij}(\rho_{ij} - 1)}}$$

[28]当然，也可以通过对式（48）进行穷举验证。

¯按需。根据 (51)，$\beta = \lambda \ell_{ij} / \ell_{ij}$。最后，令 $\nu(j^*) = 0$ 取某个备选项 j^*。根据 (49)，对于每个 i，我们有

$$\nu(i) = \nu(i) - \nu(j^*) = \Lambda_{ij^*} = \frac{1}{\lambda} \ell_{ij^*}$$

证明结束。 ■

Pro命题9的证明。根据命题 7，串联体 $(\rho_{\mathrm{C}}, \tau_{\mathrm{RT}})$ 是 chronometri c.

(i) 推出 (iii)。如果 φ_{RT} 是偶数，那么

$$\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j) = \varphi_{\mathrm{RT}}(v_{\mathrm{C}}(i) - v_{\mathrm{C}}(j)) = \varphi_{\mathrm{RT}}(v_{\mathrm{C}}(j) - v_{\mathrm{C}}(i)) = \tau_{\mathrm{RT}}(j \mid i)$$

对于所有 $i \neq j$。

(iii) 推出 (ii)。如果对于某个 $i \neq j$，$\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j) = \tau_{\mathrm{RT}}(j \mid i)$，由于 ν 是单射，因此 $\Lambda_{ij} \neq 0$，所以根据引理 20，$\beta = \lambda$。

(ii) 推出 (iv)。事实上，如果 $\beta = \lambda$，那么

$$s_{\mathrm{C}}(i, j) = 1 + \frac{e^{\lambda|\nu(i)-\nu(j)|} - e^{\beta|\nu(i)-\nu(j)|}}{1 - e^{(\lambda+\beta)|\nu(i)-\nu(j)|}} = 1$$

对于所有 i 和 j，因此 ρ_{C} 是无偏的。

(iv) 推出 (i) 若对某个 $i \neq j$，有 $\rho_{\mathrm{C}}(i \mid j) = 1 - \rho_{\mathrm{C}}(j \mid i)$，则 $\rho_{\mathrm{C}}(j \mid i) = 1 - \rho_{\mathrm{C}}(i \mid j)$，并且根据引理 18，

$$\lambda \Lambda_{ij} = \beta \Lambda_{ij}$$

由于 ν 是单射，因此 $\Lambda_{ij} \neq 0$ 和 $\beta = \lambda$。特别地，

$$\varphi_{\mathrm{RT}}(x) = \frac{\lambda^2}{x} \left(2 \frac{1 - e^x}{e^{-x} - e^x} - 1 \right) = \frac{\lambda^2}{x} \tanh\left(\frac{x}{2} \right)$$

是偶数。 ■

B.2.2 随机矩阵

∞若非负标量序列 $a = \{a_n\}$ 满足 $\sum a_n < \infty$，则称其可求和。其生成函数$_{n=0}$定义为

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{52}$$

在右侧的幂级数收敛处有定义。 $\{a_n\}$可求和保证收敛半径 R 满足 $R \geq 1$，且 $f_a(z)$ 在单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C}$ 上有定义并连续：$|z| \leq 1\}$。

引理 21 若 $a = \{a_n\}$ 是一个非负可求和序列，则对于所有随机矩阵 B，矩阵幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n B^n$ 逐项收敛。

证明 矩阵 B^n 的第（i，j）个元素 $b_{ij}^{(n)}$ 属于 $[0,1]$，因为 B^n 也是一个随机矩阵。于是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{ij}^{(n)}$ 是一个非负级数，满足 $0 \leq a_n b_{ij}^{(n)} \leq a_n$ ；由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，它也收敛。 ■

因此，函数

$$f_a(B) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B^n$$

按照 Weyr 的强意义（例如参见 Rinehart，1955年），对所有随机矩阵B均有良好定义。

将正文中定义的探索矩阵和转移矩阵分别记为 Q 和 M；如前所述，它们都是随机矩阵。

引理22 设 ρ_{C} 为正矩阵。若 Q 不可约（准正），则 M 是本原的（正的）。

证明 为简化记号，我们用 ρ 代替 ρ_{C}。设 Q 不可约。回顾

$$M(i \mid j) = Q(i \mid j)\,\rho(i \mid j) \qquad \forall i \neq j \tag{53}$$

并且对所有 $j \in A$，$M(j \mid j) = 1 - \sum_{k \neq j} Q(k \mid j)\,\rho(k \mid j)$。给定任意 $j \in A$，由于 Q 不可约，因此不可能对所有 $k \neq j$ 都有 $Q(k \mid j) = 0$。BCM 的正性意味着

$$M(j \mid j) = 1 - \sum_{k \neq j} Q(k \mid j)\,\rho(k \mid j) > 1 - \sum_{k \neq j} Q(k \mid j) \geq 1 - \sum_{k \in A} Q(k \mid j) = 0$$

因此，对所有 $j \in A$，$M(j \mid j) > 0$。

此外，如果 $i \neq j$，那么存在 $n \geq 1$ 和 k_0，……，k_n，属于 A，满足 $k_0 = i$、$k_n = j$，并且对所有 $h = 1$、……、n，都有 $k_h \neq k_{h-1}$，使得

$$Q(k_1 \mid k_0)\,Q(k_2 \mid k_1) \cdots Q(k_n \mid k_{n-1}) > 0$$

并且 BCM 的正性意味着

$$M(k_1 \mid k_0)\,M(k_2 \mid k_1) \cdots M(k_n \mid k_{n-1}) > 0$$

Tog再加上 M 在对角线上的正性，这就推出了 M 本身的本原性。[2] [9]

最后，如果 Q 是准正的，则上述论证表明 M 在对角线上为正，而 (53) 还表明 M 在非对角线上也为正。 ■

[29]因为 M 因而不可约且为非零迹。

B.2.3 命题 10 的证明

根据引理 21，这两个矩阵幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]M^{n}\qquad\text{and}\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N>n\right]M^{n}$$

收敛（注意 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N>n\right]=\mathbb{E}\left[N\right]<\infty$）。回想一下，如果算法在第 $n\in\mathbb{N}=\{0,1,...\}$ 次迭代时停止，它会选择当前选项 j_{n-1}。根据独立性，在第 n 次迭代停止并选择 $j\in A$ 的联合概率为

$$\mathbb{P}\left[N=n,J_{n-1}=j\right]=\mathbb{P}\left[N=n\right]\mathbb{P}\left[J_{n-1}=j\right]$$

现在，对于 $n=0$，我们有

$$\mathbb{P}\left[J_{-1}=j\right]=\mu_{j}=\left(M^{0}\mu\right)_{j}$$

假设对于 $n=m$，我们有

$$\mathbb{P}\left[J_{m-1}=j\right]=\left(M^{m}\mu\right)_{j}$$

那么，对于 $n=m+1$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[J_{(m+1)-1}=j\right]=\mathbb{P}\left[J_{m}=j\right]&=\sum_{i\in A}\mathbb{P}\left[J_{m}=j,J_{m-1}=i\right]=\sum_{i\in A}\mathbb{P}\left[J_{m}=j\mid J_{m-1}=i\right]\mathbb{P}\left[J_{m-1}=i\right]\\&=\sum_{i\in A}m_{ji}\left(M^{m}\mu\right)_{i}=\left(M\left(M^{m}\mu\right)\right)_{j}=\left(M^{m+1}\mu\right)_{j}\end{aligned}$$

我们已经通过归纳法证明

$$\mathbb{P}\left[J_{n-1}=j\right]=\left(M^{n}\mu\right)_{j}\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

因此，选择 j 的概率是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n,J_{n-1}=j\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\mathbb{P}\left[J_{n-1}=j\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\left(M^{n}\mu\right)_{j}$$

Then

$$\begin{aligned}p_{N}&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\left(M^{n}\mu\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\mathbb{P}\left[N=n\right]\left(M^{n}\mu\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\left[\sum_{n=0}^{k}\mathbb{P}\left[N=n\right]M^{n}\right]\mu\right)\\&=\left(\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{k}\mathbb{P}\left[N=n\right]M^{n}\right]\right)\mu\end{aligned}$$

因此，$p_{N}=f_{N}(M)\ \mu$ 成立。以当前选项 j开始的迭代的平均持续时间为

$$\tau_{j}=\sum_{i\in A}Q\left(i\mid j\right)\tau_{\mathrm{RT}}\left(i\mid j\right)$$

为简化记号，我们用 τ代替 $\bar{\tau}$。由于 $\mathbb{P}\left[J_{n-1}=j\right]=(M^n\mu)_j$，迭代 k 的平均持续时间（如果它确实发生，即如果 $N>k$）为

$$\sum_{j\in A}\tau_j\mathbb{P}\left[J_{k-1}=j\right]=\sum_{j\in A}\tau_j\left(M^k\mu\right)_j=\tau\cdot M^k\mu$$

若 $N=n$，则平均持续时间为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\tau\cdot M^k\mu=\tau\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1}M^k\right)\mu$$

-1，约定 $\sum M^k=0$（零矩阵）。由于在 n 停止的概率为$k=0\mathbb{P}\left[N=n\right]$，因此

$$\begin{aligned}\tau_N&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\tau\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1}M^k\right)\mu=\tau\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\left(\sum_{k=0}^{n-1}M^k\right)\right)\mu\\&=\tau\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\left(\sum_{k=0}^{n-1}M^k\right)\right)\mu\end{aligned}\tag{54}$$

-1，因为 $\sum M^k=0$。
现在$k=0$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\left(\sum_{k=0}^{n-1}M^k\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\left(\sum_{k=1}^{n}M^{k-1}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}1_{\{k\leq n\}}\mathbb{P}\left[N=n\right]M^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{k\leq n\}}\mathbb{P}\left[N=n\right]M^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}M^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{k\leq n\}}\mathbb{P}\left[N=n\right]=\sum_{k=1}^{\infty}M^{k-1}\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[N=n\right]\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[N\geq k\right]M^{k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N\geq n+1\right]M^n=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[N>n\right]M^n\end{aligned}$$

这证明 $\tau_N=\tau\cdot g_N(M)$ μ 成立。 ■

B.2.4 命题 11 的证明

如果 N 服从负二项分布，那么

$$f_N\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}\zeta^n\left(1-\zeta\right)^r z^n=\left(1-\zeta\right)^r\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}\left(\zeta z\right)^n=\frac{\left(1-\zeta\right)^r}{\left(1-\zeta z\right)^r}$$

$$g_N\left(z\right)=\frac{1-f_N\left(z\right)}{1-z}=\frac{1-\frac{\left(1-\zeta\right)^r}{\left(1-\zeta z\right)^r}}{1-z}=\frac{\frac{\left(1-\zeta z\right)^r}{\left(1-\zeta z\right)^r}-\frac{\left(1-\zeta\right)^r}{\left(1-\zeta z\right)^r}}{1-z}=\frac{\left(1-\zeta z\right)^r-\left(1-\zeta\right)^r}{\left(1-z\right)\left(1-\zeta z\right)^r}$$

对于 $r=1$，可得

$$f_N(z)=(1-\zeta)(1-\zeta z)^{-1}$$
$$g_N(z)=\frac{1-\zeta z-1+\zeta}{(1-z)(1-\zeta z)}=\frac{\zeta-\zeta z}{(1-z)(1-\zeta z)}=\frac{\zeta(1-z)}{(1-z)(1-\zeta z)}=\zeta(1-\zeta z)^{-1}$$

一般来说，注意到 $z=1$是（$1-\zeta z$）$^{r}-$（$1-\zeta$）^{r}的一个根。因此，该比值

$$\frac{(1-\zeta z)^r-(1-\zeta)^r}{1-z}$$

上面出现的关于 z的 $r-1$ 次多项式。接下来我们来计算它。可得

$$\begin{aligned}(1-\zeta z)^r-(1-\zeta)^r&=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\zeta z)^k-\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\zeta)^k\\&=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\zeta^k z^k-\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\zeta^k\\&=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\zeta^k\left(z^k-1\right)=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\zeta)^k(z-1)\sum_{j=0}^{k-1}z^j\end{aligned}$$

因为

$$z^k-1=(z-1)\left(1+z+\cdots+z^{k-1}\right)=(z-1)\sum_{j=0}^{k-1}z^j$$

按照约定 $\sum_{j=0}^{-1}z^j=0$。于是，

$$\begin{aligned}g_N(z)&=\frac{(1-\zeta z)^r-(1-\zeta)^r}{(1-z)(1-\zeta z)^r}=\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\zeta)^k(z-1)\sum_{j=0}^{k-1}z^j\right)\frac{1}{(1-z)(1-\zeta z)^r}\\&=-\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\zeta)^k\sum_{j=0}^{k-1}z^j\right)(1-\zeta z)^{-r}\end{aligned}$$

这表明（29）成立。

B.2.5 方程（33）和（34）

前言 可逆矩阵 B 可对角化且具有实特征值。事实上，由细致平衡条件 (1) 可直接得出，具有非对角元素$b_{ij}^{*}=b_{ij}\sqrt{p_j/p_i}$的矩阵 B^{*} 是对称的，并且与 B具有相同的特征值。因此，随机可逆矩阵B 的最大特征值 λ_1 等于 1，且其所有其他特征值的绝对值$\leq\lambda_1$，也就是说，它们属于 $[-1,1]$。此外，如果 B 是本原的，根据 Perron 定理，它们的绝对值实际上是 $<\lambda_1$，因此属于 (−1,1)。

方程 设转移矩阵 M 是可对角化的（例如，因为它是可逆的），并设 $\Lambda = \text{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right)$ 是其特征值的对角矩阵，每个特征值按照其重数重复。对于任何由非负标量构成的可求和序列 $a = \{a_n\}$，我们有

$$\begin{aligned} f_a(M) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n M^n = \lim_{l\to\infty} \sum_{n=0}^{l} a_n U \Lambda^n U^{-1} = \lim_{l\to\infty} \left[U \left(\sum_{n=0}^{l} a_n \Lambda^n \right) U^{-1} \right] \\ &= U \left[\lim_{l\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{l} a_n \Lambda^n \right) \right] U^{-1} = U \left[\text{diag} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_1^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_2^n, ..., \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_m^n \right) \right] U^{-1} \\ &= U \left[\text{diag} \left(f_a(\lambda_1), f_a(\lambda_2), ..., f_a\left(\lambda_{|A|}\right) \right) \right] U^{-1} \end{aligned}$$

由此立即得到（33）和（34）。

B.3 第 4.4 节

B.3.1 定理12、推论 13 和推论 14 的证明

命题 23 若 ρ_{C} 具有二元价值表示，且探索矩阵 Q 良好，则概率分布

$$\pi(i) = \begin{cases} \dfrac{u(i)}{\sum_{j\in \arg\max_A w} u(j)} & \text{if } i \in \arg\max_A w \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

是 M的唯一平稳分布，并且存在 $\varepsilon \in \in (0, 1)$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$和所有 $\mu \in \Delta(A)$,

$$\left\| M^n \mu - \pi \right\|_1 \leq 2(1-\varepsilon)^n \tag{55}$$

此外，若 $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是一个发散的停止数序列，则对于所有 $\mu \in \Delta(A)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[N_k = n\right] M^n \right) \mu \to \pi \qquad as\ k \to \infty \tag{56}$$

特别是，(55) 表明

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[J_n = i\right] = \pi(i)$$

而 (56) 表明

$$\lim_{N_k\to\infty} p_{N_k} = \pi \tag{57}$$

当停止数是简单的。因此,

$$\lim_{N_k\to\infty} p_{N_k}(i, A) = \lim_{n\to\infty} \Pr\left[J_n = i\right] = \begin{cases} \dfrac{u(i)}{\sum_{j\in \arg\max_A w} u(j)} & \text{if } i \in \arg\max_A w \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

这就证明了定理12。推论13和14可立即得出。

证明 为简化记号，我们用 ρ 代替 ρ_{C}。我们首先证明

$$M(k \mid j)\pi(j) = M(j \mid k)\pi(k) \tag{58}$$

对所有 j和 k属于 A。为简便起见，记 $W(A) = \arg\max_A w$。若 $j = k$，则等式显然成立。令 $j \neq k$ 属于 A。

- 若 j，$k \in W(A)$，则

$$\begin{aligned} M(k \mid j)\pi(j) &= Q(k \mid j)\rho(k \mid j)\frac{u(j)}{\sum_{i\in W(A)} u(i)} \\ &= Q(k \mid j)s(k,j)\frac{u(k)}{u(k)+u(j)}\frac{u(j)}{\sum_{i\in W(A)} u(i)} \\ &= Q(j \mid k)s(j,k)\frac{u(j)}{u(j)+u(k)}\frac{u(k)}{\sum_{i\in W(A)} u(i)} = Q(j \mid k)\rho(j \mid k)\pi(k) \\ &= M(j \mid k)\pi(k) \end{aligned}$$

- 若 j，$k \notin W(A)$，则 $\pi(j) = \pi(k) = 0$ 且

$$M(k \mid j)\pi(j) = M(j \mid k)\pi(k)$$

- 若 $j \in W(A)$ 和 $k \notin W(A)$，则 $w(j) > w(k)$，因此 $\rho(k \mid j) = 0 = \pi(k)$，从而

$$M(k \mid j)\pi(j) = Q(k \mid j)\rho(k \mid j)\frac{u(j)}{\sum_{i\in W(A)} u(i)} = 0 = M(j \mid k)\pi(k)$$

- 若 $j \notin W(A)$ 且 $k \in W(A)$，则 $w(k) > w(j)$，因此 $\rho(j \mid k) = 0 = \pi(j)$，从而

$$M(k \mid j)\pi(j) = 0 = Q(j \mid k)\rho(j \mid k)\pi(k) = M(j \mid k)\pi(k)$$

“细致平衡”条件（58）意味着

$$\sum_{j\in A} M(k \mid j)\pi(j) = \sum_{j\in A} M(j \mid k)\pi(k) = \pi(k)\sum_{j\in A} M(j \mid k) = \pi(k)$$

对于所有 $k \in A$，则有 $M\pi = \pi$。因此，π 是 M 的平稳分布。

取 $j_0 \in W(A)$。那么，对于所有 $i \neq j_0$，$w(j_0) \geq w(i)$，因此

$$M(j_0 \mid i) = Q(j_0 \mid i)\rho(j_0 \mid i) = \begin{cases} Q(j_0 \mid i) & \text{if } w(j_0) > w(i) \\ Q(j_0 \mid i)s(j_0,i)\dfrac{u(j_0)}{u(j_0)+u(i)} & \text{if } w(j_0) = w(i) \end{cases}$$

对于 $i = j_0$，我们有：若 $k \notin W(A)$，则 $\rho(k \mid j_0) = 0$；若 $k \in W(A)$（假设$k \neq j_0$），则 $\rho(k \mid j_0) \in (0,1)$，

$$M(j_0 \mid j_0) = 1 - \sum_{k\neq j_0} Q(k \mid j_0)\rho(k \mid j_0) > 1 - \sum_{k\neq j_0} Q(k \mid j_0) \geq 1 - \sum_{k\in A} Q(k \mid j_0) = 0$$

根据多布林定理， π 是 M 唯一的平稳分布，并且存在 $\varepsilon \in (0,1)$，使得

$$\left\|M^n\mu - \pi\right\|_1 \leq 2\left(1-\varepsilon\right)^n$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有 $\mu \in \Delta$（A）。

给定任意 $\mu \in \Delta(A)$，对每个 $k \in \mathbb{N}$，令，

$$P_k\left(n\right) = \mathbb{P}\left[N_k = n\right] \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

and

$$p_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_k\left(n\right) M^n\right)\mu$$

Then

$$p_k = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} P_k\left(n\right) M^n\mu \quad \text{and} \quad \pi = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} P_k\left(n\right)\pi$$

因此

$$p_k - \pi = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} P_k\left(n\right)\left(M^n\mu - \pi\right)$$

因此，

$$\begin{aligned}\left\|p_k - \pi\right\|_1 &= \lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{n=0}^{m} P_k\left(n\right)\left(M^n\mu - \pi\right)\right\|_1 \leq \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} P_k\left(n\right)\left\|M^n\mu - \pi\right\|_1 \\ &\leq \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} P_k\left(n\right)2\left(1-\varepsilon\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_k\left(n\right)2\left(1-\varepsilon\right)^n\end{aligned}$$

函数序列 $\left\{a_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$：$a_k$：$\mathbb{N} \to [0,\infty)$ 给定为

$$a_k\left(n\right) = P_k\left(n\right)2\left(1-\varepsilon\right)^n$$

由函数 a：$\mathbb{N} \to [0,\infty)$ 给出，其上界为

$$a\left(n\right) = 2\left(1-\varepsilon\right)^n$$

后者关于计数测度 γ 在 $\mathbb{N}$上可求和。此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\lim_{k\to\infty} a_k\left(n\right) = 0$。根据勒贝格控制收敛定理，

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_k\left(n\right)2\left(1-\varepsilon\right)^n = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{N}} a_k\left(n\right)\mathrm{d}\gamma\left(n\right) = 0$$

因此，$\lim_{k\to\infty}\left\|p_k - \pi\right\|_1 = 0$。 ■

B.3.2 定理15的证明

给定一个选项集 A，其典型元素为 i、 j 和 k，我们用 $P = [P(i \mid j)]_{i,\ j \in A}$ 表示一个随机矩阵 $|A| \times |A|$，其中 $P(i \mid j)$ 表示系统从状态 j 转移到状态 i的概率。显然，对于所有 $j \in A$， $P(\cdot \mid j) \in \Delta(A)$。

定义13 若随机矩阵 P 满足以下条件，则称其具有传递性：

$$P(j \mid i)\, P(k \mid j)\, P(i \mid k) = P(k \mid i)\, P(j \mid k)\, P(i \mid j) \qquad \forall i, j, k \in A \tag{59}$$

在马尔可夫链文献中，传递性被称为柯尔莫哥洛夫判据（例如参见 Kelly，1979年，第24页）；在随机选择文献中，则被称为乘积规则（Luce 和 Suppes，1965年，第341页）。

如果 A中的三个状态 i、 j和 k 中至少有两个重合，则传递性自动满足。事实上，

- 如果 $i = j$，则

$$P(j \mid i)\, P(k \mid j)\, P(i \mid k) = P(i \mid i)\, P(k \mid i)\, P(i \mid k)$$
$$P(k \mid i)\, P(j \mid k)\, P(i \mid j) = P(k \mid i)\, P(i \mid k)\, P(i \mid i)$$

- 如果 $i = k$，则

$$P(j \mid i)\, P(k \mid j)\, P(i \mid k) = P(j \mid i)\, P(i \mid j)\, P(i \mid i)$$
$$P(k \mid i)\, P(j \mid k)\, P(i \mid j) = P(i \mid i)\, P(j \mid i)\, P(i \mid j)$$

- 若 $j = k$，则

$$P(j \mid i)\, P(k \mid j)\, P(i \mid k) = P(j \mid i)\, P(j \mid j)\, P(i \mid j)$$
$$P(k \mid i)\, P(j \mid k)\, P(i \mid j) = P(j \mid i)\, P(j \mid j)\, P(i \mid j)$$

因此，传递性可以重新表述为

$$P(j \mid i)\, P(k \mid j)\, P(i \mid k) = P(k \mid i)\, P(j \mid k)\, P(i \mid j)$$

对于 A 中所有互不相同的 i、 j 和 k。[30]

下一个结果将可逆性与传递性联系起来，建立在 Kolmogorov（1936年）以及 Luce 和 Suppes （ 1965 年）的研究基础之上。

命题 24 设 P为一个正随机矩阵。以下条件等价。 t:

(i) P在某个 $\pi \in \Delta(A)$ 下是可逆的；
(ii) P 是传递的。

[30]这个论证 nt 适用于任何函数 P: $A \times A \to \mathbb{R}$，且独立于其“对角线”值 $P(i \mid i)$.

在这种情况下，对于任意 $i \in A$，均有以下结论。

$$\pi(j) = \frac{r(j \mid i)}{\sum_{k \in A} r(k \mid i)} \qquad \forall j \in A$$

其中 $r(j \mid i) = P(j \mid i) / P(i \mid j)$。特别地，$\pi$ 是唯一的。

证明 假设存在 $\pi \in \Delta(A)$，使得对于所有不同的 i、$j \in A$，$P(i \mid j)\pi(j) = P(j \mid i)\pi(i)$（注意，这比可逆性弱，因为不假设 π 为正），则

$$P(i \mid j)\pi(j) = P(j \mid i)\pi(i) \qquad \forall i, j \in A \tag{60}$$

如果对于某个 $i^* \in A$，$\pi(i^*) = 0$，那么（由于为正）

$$\pi(j) = \frac{P(j \mid i^*)}{P(i^* \mid j)}\pi(i^*) = 0 \qquad \forall j \in A \tag{61}$$

但是，这是不可能的，因为 $\sum_{j \in A} \pi(j) = 1$。因此，$\pi$ 为正。此外，由 (61) 可得

$$\frac{\frac{P(j \mid i^*)}{P(i^* \mid j)}}{\sum_{k \in A} \frac{P(k \mid i^*)}{P(i^* \mid k)}} = \frac{\frac{P(j \mid i^*)}{P(i^* \mid j)}\pi(i^*)}{\sum_{k \in A} \frac{P(k \mid i^*)}{P(i^* \mid k)}\pi(i^*)} = \frac{\pi(j)}{\sum_{k \in A} \pi(k)} = \pi(j) \qquad \forall j \in A$$

无论选择哪个 $i^* \in A$，结论均成立。因此，π 是唯一的。最后，给定任意 i、j、$k \in A$，由 (60) 可得：

$$\begin{aligned}
\frac{\pi(j)}{\pi(i)}\frac{\pi(k)}{\pi(j)}\frac{\pi(i)}{\pi(k)} = 1 &\implies \frac{P(j \mid i)}{P(i \mid j)}\frac{P(k \mid j)}{P(j \mid k)}\frac{P(i \mid k)}{P(k \mid i)} = 1 \\
&\implies \frac{P(j \mid i)\,P(k \mid j)\,P(i \mid k)}{P(k \mid i)\,P(j \mid k)\,P(i \mid j)} = 1 \\
&\implies P(j \mid i)\,P(k \mid j)\,P(i \mid k) = P(k \mid i)\,P(j \mid k)\,P(i \mid j)
\end{aligned}$$

因此，传递性成立。

反之，如果传递性成立，则任意选取 $i^* \in A$ 并设置

$$\pi^*(j) := \frac{\frac{P(j \mid i^*)}{P(i^* \mid j)}}{\sum_{k \in A} \frac{P(k \mid i^*)}{P(i^* \mid k)}} = \frac{P(j \mid i^*)}{P(i^* \mid j)}\zeta \qquad \forall j \in A \tag{62}$$

其中 $1/\zeta = \sum_{k \in A} P(k \mid i^*) / P(i^* \mid k) > 0$。根据传递性，对于所有 $i, j \in A$，

$$P(j \mid i)\,P(i^* \mid j)\,P(i \mid i^*) = P(i^* \mid i)\,P(j \mid i^*)\,P(i \mid j)$$

并且，由于 P 是正的，

$$P(j \mid i)\frac{P(i \mid i^*)}{P(i^* \mid i)} = P(i \mid j)\frac{P(j \mid i^*)}{P(i^* \mid j)}$$

因此，对于所有 i、$j \in A$，

$$P(j \mid i)\frac{P(i \mid i^*)}{P(i^* \mid i)}\zeta = P(i \mid j)\frac{P(j \mid i^*)}{P(i^* \mid j)}\zeta$$

鉴于 o f (62)，关于 π^* 的可逆性成立（注意 π^* 严格为正）。 ■

定理15的证明 为简化记号，我们用 ρ 代替 ρ_{C}。

“若。”根据引理22，由于 Q 是准正的，因此 M 是正的。根据假设， M 是可逆的。但由此，根据命题24， M 是传递的，因此

$$M(j \mid i)\,M(k \mid j)\,M(i \mid k) = M(k \mid i)\,M(j \mid k)\,M(i \mid j)$$

对于 A 中所有互不相同的 i、 j 和 k。根据 M 的定义，

$$\begin{aligned} &Q(j \mid i)\,\rho(j \mid i)\,Q(k \mid j)\,\rho(k \mid j)\,Q(i \mid k)\,\rho(i \mid k) \\ &= Q(k \mid i)\,\rho(k \mid i)\,Q(j \mid k)\,\rho(j \mid k)\,Q(i \mid j)\,\rho(i \mid j) \end{aligned}$$

对所有互不相同的 i、 j 和 k，且它们属于 A。由 Q 的对称性和准正性可知

$$\rho(j \mid i)\,\rho(k \mid j)\,\rho(i \mid k) = \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(i \mid j)$$

对所有互不相同的 i、 j 和 k，且它们属于 A。因此， ρ 是传递的，并且根据定理4，它具有二元价值表示，因此神经 Metropolis 算法是基于价值的。

“仅当”。如果神经 Metropolis 算法是基于价值的，那么根据定义， ρ 具有二元价值表示；根据定理4，它是传递的。因此

$$\rho(j \mid i)\,\rho(k \mid j)\,\rho(i \mid k) = \rho(k \mid i)\,\rho(j \mid k)\,\rho(i \mid j)$$

对所有互不相同的 i、 j 和 k，且它们属于 A。由于 Q 是对称且准正的，因此

$$\begin{aligned} &Q(j \mid i)\,\rho(j \mid i)\,Q(k \mid j)\,\rho(k \mid j)\,Q(i \mid k)\,\rho(i \mid k) \\ &= Q(k \mid i)\,\rho(k \mid i)\,Q(j \mid k)\,\rho(j \mid k)\,Q(i \mid j)\,\rho(i \mid j) \end{aligned}$$

对所有互不相同的 i、 j 和 k，且它们属于 A。根据 M 的定义，

$$M(j \mid i)\,M(k \mid j)\,M(i \mid k) = M(k \mid i)\,M(j \mid k)\,M(i \mid j)$$

对于 A 中所有互不相同的 i、 j 和 k。根据引理22，由于 Q 是准正的，因此 M 是正的。但根据命题24， M 是可逆的。■

B.4 第 5 节

命题 16 是以下结果的推论。

命题 25 给定任意正的 ρ_{C} 和任意不可约探索矩阵 Q，转移矩阵 M 是本原的。此外，将 M 的平稳分布记为 π，可得

$$\lim_{t\to\infty} p_{N_t}(j) = \frac{\pi(j)\,\bar{\tau}_j}{\sum_{k\in A}\pi(k)\,\bar{\tau}_k} \qquad \forall j \in A$$

前提是，$\mathrm{RT}_{i,j}$ 的分布对所有（i，j）$\in A^2$都具有（严格）正期望，在 0 处连续，且没有奇异部分。

命题 25 的证明 为简化记号，我们用 ρ 代替 ρ_{C}。随机过程 (I, J, T) 生成序列

$$\left(\underbrace{j_{-1}, i_0}_{\text{state } x_0}, t_0, \underbrace{j_0, i_1}_{\text{state } x_1}, t_1, ..., \underbrace{j_{n-1}, i_n}_{\text{state } x_n}, t_n, \underbrace{j_n, i_{n+1}}_{\text{state } x_{n+1}}, ...\right)$$

因此，它可以被视为一个具有状态空间的半马尔可夫链。

$$\mathcal{X} = \left\{(j,i) \in A^2 : Q(i \mid j) > 0\right\}$$

其中，状态 $x = (j,i) \in \mathcal{X}$ 表示当前选项 j 与提案 i之间的比较。由于对 j 和 i 的比较以概率 $\rho(i \mid j)$产生当前解 $k = i$，以概率 $1 - \rho(i \mid j)$产生$k = j$，并以概率 0 产生所有其他当前解，因此，从比较 (j,i) 切换到比较 (k,h) 的概率为

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} = (k,h) \mid X_n = (j,i)\right] = \left(\delta_i(k)\,\rho(i \mid j) + \delta_j(k)\,(1 - \rho(i \mid j))\right) Q(h \mid k)$$

事实上，

- 如果 $i = j$，那么 j 与 i 之间的比较必定会产生新的当前选项 i，并且
  - 如果 $k = i$，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_{n+1} = (k,h) \mid X_n = (i,i)\right] &= Q(h \mid i) \\ &= \left(\underbrace{\delta_i(k)}_{=1}\rho(i \mid j) + \underbrace{\delta_j(k)}_{=1}(1 - \rho(i \mid j))\right) Q(h \mid k)\end{aligned}$$

  - 否则 $k \neq i$，并且

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_{n+1} = (k,h) \mid X_n = (i,i)\right] &= 0 \\ &= \left(\underbrace{\delta_i(k)}_{=0}\rho(i \mid j) + \underbrace{\delta_j(k)}_{=0}(1 - \rho(i \mid j))\right) Q(h \mid k)\end{aligned}$$

• 如果 $i \neq j$，那么 j 与 i 之间的比较会以概率 $\rho(i \mid j)$ 产生新的当前选项 $k = i$，并以概率 $1 - \rho(i \mid j)$ 产生 $k = j$，并且

◦ 如果 $k = i$，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_{n+1} = (k,h) \mid X_n = (j,i)\right] &= \rho(i \mid j)\, Q(h \mid i) \\ &= \left(\underbrace{\delta_i(k)}_{=1}\rho(i \mid j) + \underbrace{\delta_j(k)}_{=0}(1 - \rho(i \mid j))\right) Q(h \mid k)\end{aligned}$$

◦ 如果 $k = j$，那么，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X_{n+1} = (k,h) \mid X_n = (j,i)\right] &= (1 - \rho(i \mid j))\, Q(h \mid j) \\ &= \left(\underbrace{\delta_i(k)}_{=0}\rho(i \mid j) + \underbrace{\delta_j(k)}_{=1}(1 - \rho(i \mid j))\right) Q(h \mid k)\end{aligned}$$

◦ 否则 $k \neq i$ 且 $k \neq j$，因此

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} = (k,h) \mid X_n = (j,i)\right] = 0 = \left(\underbrace{\delta_i(k)}_{=0}\rho(i \mid j) + \underbrace{\delta_j(k)}_{=0}(1 - \rho(i \mid j))\right) Q(h \mid k)$$

Set

$$\hat{M}((k,h) \mid (j,i)) = (\delta_i(k)\,\rho(i \mid j) + \delta_j(k)\,(1 - \rho(i \mid j)))\, Q(h \mid k) \qquad \forall (k,h), (j,i) \in \mathcal{X}$$

ˆ 接下来我们证明，M确实是一个随机矩阵。给定任意 $(j,i) \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}\sum_{(k,h)\in\mathcal{X}} \hat{M}((k,h) \mid (j,i)) &= \sum_{(k,h)\in\mathcal{X}} (\delta_i(k)\,\rho(i \mid j) + \delta_j(k)\,(1 - \rho(i \mid j)))\, Q(h \mid k) \\ &= \sum_{(k,h)\in A^2} (\delta_i(k)\,\rho(i \mid j) + \delta_j(k)\,(1 - \rho(i \mid j)))\, Q(h \mid k) \\ &= \sum_{h\in A}\left(\sum_{k\in A} (\delta_i(k)\,\rho(i \mid j) + \delta_j(k)\,(1 - \rho(i \mid j)))\, Q(h \mid k)\right)\end{aligned}$$

第二行中的等号源于以下事实：如果 $(k,h) \in A^2 \setminus \mathcal{X}$，那么 $Q(h \mid k) = 0$。我们将反复使用这一事实。现在,

• 如果 $i = j$，那么

$$\sum_{k\in A} (\delta_i(k)\,\rho(i \mid j) + \delta_j(k)\,(1 - \rho(i \mid j)))\, Q(h \mid k) = Q(h \mid i)$$

因此

$$\sum_{(k,h)\in\mathcal{X}} \hat{M}((k,h) \mid (j,i)) = \sum_{h\in A} Q(h \mid i) = 1$$

- 否则

$$\sum_{k\in A}\left(\delta_i(k)\rho(i\mid j)+\delta_j(k)(1-\rho(i\mid j))\right)Q(h\mid k)=\rho(i\mid j)Q(h\mid i)+(1-\rho(i\mid j))Q(h\mid j)$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{(k,h)\in\mathcal{X}}\hat{M}((k,h)\mid(j,i))&=\sum_{h\in A}\left(\rho(i\mid j)Q(h\mid i)+(1-\rho(i\mid j))Q(h\mid j)\right)\\&=\rho(i\mid j)\sum_{h\in A}Q(h\mid i)+(1-\rho(i\mid j))\sum_{h\in A}Q(h\mid j)=1\end{aligned}$$

接下来我们将证明，如果 $\pi\in\Delta(A)$ 且 $M\pi=\pi$，那么设置

$$\hat{\pi}(j,i)=Q(i\mid j)\pi(j)\qquad\forall(j,i)\in\mathcal{X}$$

$\hat{}\pi$ 定义了 $\Delta(\mathcal{X})$ 的一个元素，使得 $M\hat{}\pi=\hat{}\pi$。显然

$$\sum_{(j,i)\in\mathcal{X}}\hat{\pi}(j,i)=\sum_{(j,i)\in\mathcal{X}}Q(i\mid j)\pi(j)=\sum_{(j,i)\in A^2}Q(i\mid j)\pi(j)=\sum_{j\in A}\left(\sum_{i\in A}Q(i\mid j)\pi(j)\right)=1$$

此外，对于所有 $\forall(k,h)\in\mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}\left(\hat{M}\hat{\pi}\right)_{(k,h)}&=\sum_{(j,i)\in\mathcal{X}}\hat{M}((k,h)\mid(j,i))\hat{\pi}(j,i)=\\&=\sum_{(j,i)\in\mathcal{X}}\left(\delta_i(k)\rho(i\mid j)+\delta_j(k)(1-\rho(i\mid j))\right)Q(h\mid k)Q(i\mid j)\pi(j)\\&=\sum_{(j,i)\in A^2}\left(\delta_i(k)\rho(i\mid j)+\delta_j(k)(1-\rho(i\mid j))\right)Q(h\mid k)Q(i\mid j)\pi(j)\\&=Q(h\mid k)\sum_{(j,i)\in A^2}\left(\delta_i(k)\rho(i\mid j)+\delta_j(k)(1-\rho(i\mid j))\right)Q(i\mid j)\pi(j)\end{aligned}$$

接下来我们将证明，对于所有 $k\in A$,

$$\sum_{(j,i)\in A^2}\left(\delta_i(k)\rho(i\mid j)+\delta_j(k)(1-\rho(i\mid j))\right)Q(i\mid j)\pi(j)=\pi(k)$$

得到 $\left(\hat{}M\hat{}\pi\right)_{(k,\ h)}=Q(h\mid k)\ \pi(k)\ =\hat{}\pi_{(k,h)}$。事实上

$$\begin{aligned}&\sum_{(j,i)\in A^2}\left(\delta_i(k)\rho(i\mid j)+\delta_j(k)(1-\rho(i\mid j))\right)Q(i\mid j)\pi(j)\\&=\sum_{(j,i)\in A^2}\delta_i(k)\rho(i\mid j)Q(i\mid j)\pi(j)+\sum_{(j,i)\in A^2}\delta_j(k)Q(i\mid j)\pi(j)-\sum_{(j,i)\in A^2}\delta_j(k)\rho(i\mid j)Q(i\mid j)\pi(j)\\&=\sum_{j\in A}\rho(k\mid j)Q(k\mid j)\pi(j)+\sum_{i\in A}Q(i\mid k)\pi(k)-\sum_{i\in A}\rho(i\mid k)Q(i\mid k)\pi(k)\end{aligned}$$

现在中心加项 $\sum Q(i \mid k)\ \pi(k)$ 是 $\pi(k)$，我们通过证明 $M\pi = \pi_{i\in A}$蕴含这一点来得出结论

$$\sum_{j\in A}\rho(k \mid j)\, Q(k \mid j)\, \pi(j) = \sum_{i\in A}\rho(i \mid k)\, Q(i \mid k)\, \pi(k)$$

事实上

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in A}\rho(k \mid j)\, Q(k \mid j)\, \pi(j) &= \sum_{j\neq k}\rho(k \mid j)\, Q(k \mid j)\, \pi(j) + \rho(k \mid k)\, Q(k \mid k)\, \pi(k) \\
&= \sum_{j\neq k} M(k \mid j)\, \pi(j) + \rho(k \mid k)\, Q(k \mid k)\, \pi(k) \\
&= -M(k \mid k)\, \pi(k) + \sum_{j\in A} M(k \mid j)\, \pi(j) + \rho(k \mid k)\, Q(k \mid k)\, \pi(k) \\
&= -M(k \mid k)\, \pi(k) + \pi(k) + \rho(k \mid k)\, Q(k \mid k)\, \pi(k) \\
&= (1 - M(k \mid k))\, \pi(k) + \rho(k \mid k)\, Q(k \mid k)\, \pi(k) \\
&= \left(\sum_{i\neq k}\rho(i \mid k)\, Q(i \mid k)\right)\pi(k) + \rho(k \mid k)\, Q(k \mid k)\, \pi(k) \\
&= \sum_{i\in A}\rho(i \mid k)\, Q(i \mid k)\, \pi(k)
\end{aligned}$$

ˆ到目前为止，我们尚未用到 M 是本原的这一事实；接下来将利用这一点证明 M 也是本原的。由 M的不可约性可知，对于所有 i、$k \in A$，都存在一个有限序列

$$i = i_0, i_1, i_2, ..., i_n = k \tag{63}$$

满足 $i_{a+1} \neq i_a$和 $M\ (i_{a+1} \mid i_a)\ > 0$，对于所有 $a = 0$，...，$n-1$，根据 M的定义，可得

$$Q(i_{a+1} \mid i_a) > 0 \tag{64}$$

对于所有 $a = 0$，...，$n-1$。

任取（j，i）、（k，h）$\in \mathcal{X}$以及一条满足（63）和（64）的链 i_0、i_1、i_2、...、i_n。导出的链

$$(j,i) = (j,i_0), (i_0,i_1), (i_1,i_2) ..., (i_{n-1},i_n), (i_n,h) = (k,h)$$

属于 $\mathcal{X}$，因为（j，i_0）=（j，i）$\in \mathcal{X}$，（i_n，h）=（k，h）$\in \mathcal{X}$，并且（i_a，i_{a+1}）$\in \mathcal{X}$也因（64）而成立。现在

$$\hat{M}((i_0,i_1) \mid (j,i_0)) = (\delta_{i_0}(i_0)\,\rho(i_0 \mid j) + \delta_j(i_0)\,(1 - \rho(i_0 \mid j)))\, Q(i_1 \mid i_0)$$

该值严格为正，因为，$\rho(i_0 \mid j) = \rho(i \mid j) > 0$（因为 ρ为正）且 $Q(i_1 \mid i_0) > 0$。此外，

ˆ$M((i_{a+1}, i_{a+2})\ \mid (i_a, i_{a+1})) = \left(\delta_{i_{a+1}}(i_{a+1})\,\rho(i_{a+1} \mid i_a)\ + \delta_{i_a}(i_{a+1})\,(1 - \rho(i_{a+1} \mid i_a))\right) Q($ $i_{a+2} \mid i_{a+1})$ 对 $a = 0, ..., n-2$ 严格为正，因为 $\rho(i_{a+1} \mid i_a) > 0$ 且 $Q(i_{a+2} \mid i_{a+1}) > 0$。最后，

$$\hat{M}((i_n,h) \mid (i_{n-1},i_n)) = \left(\delta_{i_n}(i_n)\,\rho(i_n \mid i_{n-1}) + \delta_{i_{n-1}}(i_n)\,(1 - \rho(i_n \mid i_{n-1}))\right) Q(h \mid i_n)$$

它严格为正，因为 $\rho(i_n \mid i_{n-1}) > 0$ 且 $Q(h \mid i_n) = Q(h \mid k) > 0$。

这表明 $\hat{M}$ 不可约性后，可通过展示转移矩阵 M 中存在一个非零对角元素来确立本原性。根据定义，对于所有 $(j,i) \in \mathcal{X}$

$$\hat{M}((j,i) \mid (j,i)) = (\delta_i(j)\rho(i \mid j) + \delta_j(j)(1 - \rho(i \mid j)))\, Q(i \mid j)$$

ρ 的正性保证 $\delta_j(j)(1-\rho(i \mid j)) > 0$，而根据 $\mathcal{X}$ 的定义，$Q(i \mid j) > 0$。

于是，嵌入马尔可夫链为 $\hat{M}((k,h) \mid (j,i))$、持有时间为 $\hat{T}((k,h) \mid (j,i)) =$ 反应时间$_{i,j}$.[31] 的半马尔可夫链满足 Howard（1971）第 713 页中的所有假设。因此，当 $t \to \infty$ 时，比较 (j,i) 在时间 t 进行的概率 $\phi_{(j,i)}(t)$ 的极限为

$$\begin{aligned}
\phi_{(j,i)} &= \frac{\hat{\pi}(j,i)\,\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)}{\sum_{(k,h)\in\mathcal{X}} \hat{\pi}(k,h)\,\tau_{\mathrm{RT}}(h \mid k)} = \frac{Q(i \mid j)\,\pi(j)\,\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)}{\sum_{(k,h)\in\mathcal{X}} Q(h \mid k)\,\pi(k)\,\tau_{\mathrm{RT}}(h \mid k)} \\
&= \frac{Q(i \mid j)\,\pi(j)\,\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)}{\sum_{(k,h)\in A^2} Q(h \mid k)\,\pi(k)\,\tau_{\mathrm{RT}}(h \mid k)} \qquad \forall (j,i) \in \mathcal{X}
\end{aligned}$$

若 $(j,i) \notin \mathcal{X}$，结论也成立，因为此时对于所有 t，$\phi_{(j,i)}(t) = 0$，且 $Q(i \mid j) = 0$。因此

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} p_{N_t}(j) &= \lim_{t\to\infty} \sum_{i\in A} \phi_{(j,i)}(t) = \sum_{i\in A} \lim_{t\to\infty} \phi_{(j,i)}(t) = \sum_{i\in A} \phi_{(j,i)} \\
&= \frac{\sum_{i\in A} Q(i \mid j)\,\pi(j)\,\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)}{\sum_{(k,h)\in A^2} Q(h \mid k)\,\pi(k)\,\tau_{\mathrm{RT}}(h \mid k)} = \frac{\pi(j)\sum_{i\in A} Q(i \mid j)\,\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)}{\sum_{k\in A}\pi(k)\sum_{h\in A} Q(h \mid k)\,\tau_{\mathrm{RT}}(h \mid k)} \\
&= \frac{\pi(j)\,\tau_j}{\sum_{k\in A}\pi(k)\,\tau_k}
\end{aligned}$$

正如所期望的。 ■

如 Cerreia-Vioglio 等人（2022，第 2 节）所述，考虑一个对称的漂移扩散模型，以及一个非对角元素与平均反应时间成反比的探索矩阵。这意味着存在 $w > 0$，使得

$$Q(i \mid j) = \frac{w}{\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)} \qquad \forall i \neq j$$

从而

$$Q(j \mid j) = 1 - \sum_{i\neq j} \frac{w}{\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)} \qquad \forall j$$

[31]请注意，停留时间与“下一个状态”(k,h) 相互独立，因此“平均等待时间”就是平均停留时间（见 Howard，1971，第 691 页）。

还假设，对于所有 $j \in A$，$\tau_{\mathrm{RT}}(j \mid j) < \delta$（较小）。[32] 据此，对于所有 $j \in A$，

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_j &= \sum_{i \in A} Q(i \mid j)\, \tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j) \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{w}{\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)} \tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j) + \left(1 - \sum_{i \neq j} \frac{w}{\tau_{\mathrm{RT}}(i \mid j)}\right) \tau_{\mathrm{RT}}(j \mid j) = (|A| - 1)\, w + \delta_j\end{aligned}$$

与 $0 \leq \delta_j < \delta$。由于 δ 很小，因此

$$\bar{\tau}_j \approx (|A| - 1)\, w$$

与 j 无关，因此 $\alpha(j)$ 在式（36）中近似为常数，并且

$$\lim_{t \to \infty} p_{N_t}(j) \approx \frac{e^{\lambda v(j)}}{\sum_{k \in A} e^{\lambda v(k)}} \qquad \forall j \in A$$

也就是说，极限概率近似为多项 Logit 类型。

[32] 漂移扩散模型无法预测将备选项与其自身进行比较时的反应时间。不过，可以合理地假设，决策单元几乎不需要花时间就能意识到无需进行实际比较。

参考文献

[1] S. P. Anderson、J. K. Goeree 和 C. A. Holt，《噪声方向学习与logit均衡》，《斯堪的纳维亚经济学杂志》，106，581-602，2004年。[2] C. Baldassi、S. Cerreia-Vioglio、F. Maccheroni、M. Marinacci 和 M. Pirazzini，《漂移扩散模型及其用于时间压力下选择的多选项扩展的行为特征》，《管理科学》，66，5075-5093，2020。[3] H. D. Block 和 J. Marschak，《随机排序与反应的随机理论》，载于《概率与统计学论文集》（I. Olkin 等编），斯坦福大学出版社，斯坦福，1960年。[4] R. Bogacz、E. Brown、J. Moehlis、P. Holmes 和 J. D. Cohen，《最优决策的物理学：对双备选项强迫选择任务中表现模型的形式分析》，《心理学评论》，113，700-765，2006年。[5] R. Bogacz、M. Usher、J. Zhang 和 J. L. McClelland，《扩展生物启发式选择模型：多选项、非线性与基于价值的多维选择》，《伦敦皇家学会哲学汇刊B辑：生物科学》，362，1655-1670，2007年。[6] S. Cerreia-Vioglio、F. Maccheroni、M. Marinacci 和 A. Rustichini，《多项logit过程与偏好发现：黑箱内外》，《经济学研究评论》，即将出版。[7] J. Ditterich，《多选项知觉决策机制的比较：解释人类行为的能力、对神经生理学的预测及其与决策理论的关系》，《神经科学前沿》，4，2010年。[8] W. Feller，《概率论及其应用导论》，第1卷，Wiley，纽约，1968年。[9] P. C. Fishburn，《决策效用理论》，Wiley，纽约，1970年。[10] N. J. Higham，《矩阵函数：理论与计算》，工业与应用数学学会（SIAM），费城，2008年。[11] R. A. Howard，《动态概率系统》，第2卷，Wiley，纽约，1971年。[12] N. L. Johnson、A. W. Kemp 和 S. Kotz，《一元离散分布》，Wiley，纽约，2005年。[13] F. P. Kelly，《可逆性与随机网络》，Wiley，纽约，1979年。[14] A. N. Kolmogorov，《关于马尔可夫链理论》，《数学年刊》，112，155-160，1936年（译文载于《A. N. Kolmogorov文选》，施普林格，1992年）。

[15] I. Krajbich、C. Armel 和 A. Rangel，简单选择中的视觉注视以及价值的计算与比较，《自然·神经科学》13，1292-1298，2010年[16] I. Krajbich 和 A. Rangel，多选项漂移扩散模型预测基于价值的决策中视觉注视与选择之间的关系，《美国国家科学院院刊》108，13852-13857，2011年。[17] D. M. Kreps，《选择理论札记》，Westview，博尔德，1988年。[18] R. D. Luce，《个体选择行为：理论分析》，Wiley，纽约，1959年。[19] R. D. Luce 和 P. Suppes，偏好、效用与主观概率，载于《数学心理学手册》（R. D. Luce、R. R. Bush 和 E. Galanter 编），第3卷，Wiley，纽约，1965年。[20] J. Marschak，二元选择约束与随机效用指标，载于《社会科学中的数学方法》（K. J. Arrow、S. Karlin 和 P. Suppes 编），斯坦福大学出版社，斯坦福，1960年。[21] T. McMillen 和 P. Holmes，多个备选项之间的选择动态，《数学心理学杂志》50，30-57，2006年。[22] N. Metropolis、A. W. Rosenbluth、M. N. Rosenbluth、A. H. Teller 和 E. Teller，使用高速计算机计算状态方程，《化学物理学杂志》21，1087-1092，1953年。[23] M. Milosavljevic、J. Malmaud、A. Huth、C. Koch 和 A. Rangel，漂移扩散模型能够解释高、低时间压力下基于价值的选择的准确率与反应时间，《判断与决策》5，437-449，2010年。[24] M. Pinsky 和 S. Karlin，《随机建模导论》，4th 版，学术出版社，伯灵顿，2011年。[25] R. Ratcliff，记忆提取理论，《心理学评论》85，59-108，1978年。[26] E. Reutskaja、R. Nagel、C. F. Camerer 和 A. Rangel，时间压力下消费者选择的搜索动态：一项眼动追踪研究，《美国经济评论》101，900-926，2011年。[27] R. F. Rinehart，矩阵函数定义的等价性，《美国数学月刊》62，395-414，1955年。[28] R. M. Roe、J. R. Busemeyer 和 J. T. Townsend，多选项决策场理论：一种决策的动态连接主义模型，《心理学评论》108，370，2001年。[29] J. E. Russo 和 L. D. Rosen，多选项选择的眼动注视分析，《记忆与认知》3，267-276，1975年。

[30] G. M. Stine、A. Zylberberg、J. Ditterich 和 M. N. Shadlen，《区分知觉决策中的整合策略与非整合策略》，eLife，9，e55365，2020。

[31] K. Valkanova，《马尔可夫随机选择》，油印稿，2020年。