# 具有分段点火温度动力学和分数反应级数的预混火焰中行波前的唯一性。

AmandaMatson * Claude-Michel Brauner † Peter V. Gordon ‡

2023年5月8日

arXiv:2305.03654v1 [math.AP] 5 May 2023

**摘要**

本文研究一个描述火焰传播的反应扩散系统，并假设其具有点火温度动力学和分数反应级数。文献 [3]已证明，该系统存在一个行波前解。在本研究中，我们证明该行波前解在平移意义下唯一。我们还结合形式渐近分析和数值计算，研究了该解的一些定性性质。我们的研究结果使我们可以推测，火焰前沿的传播速度是问题中所有参数——点火温度、反应级数以及刘易斯数的倒数——的减函数。

**关键词：** 反应扩散系统，行波前解，解的唯一性，解对参数的定性依赖关系。

**美国数学学会学科分类：** 35K57, 35C07, 34B08, 34E05, 80A25。

## 1 引言

火焰传播的一维表述中的经典恒密度近似模型为[1, 7, 13, 15]:

$$\begin{cases} T_{\bar{t}} = T_{\bar{x}\bar{x}} + \Omega(T, C), \\ C_{\bar{t}} = \Lambda C_{\bar{x}\bar{x}} - \Omega(T, C), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $T$ 和 $C$ 分别为不足反应物的归一化温度和浓度， $\bar{x} \in \mathbb{R}$， $\bar{t} > 0$ 为归一化时空坐标， $\Lambda > 0$ 为刘易斯数的倒数，Ω为反应速率。反应速率通常定义为:

$$\Omega(T, C) := \begin{cases} C^{\alpha} F(T) & T \geq \theta \quad \text{and} \quad C > 0, \\ 0 & T < \theta \quad \text{and/or} \quad C = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， $\alpha \geq 0$为反应级数， $\theta \in (0, 1)$为点火温度， $F(T)$为一个正的非递减函数，用于表征温度升高时化学反应的增强。

系统（1.1）的研究可追溯至 Frank-Kamenetskii、Semenov 和 Zeldovich 在20世纪30年代和20世纪40年代的开创性工作 [4, 12, 15]。此后，数学家和物理学家都对这一系统进行了分析。大量关于系统（1.1）的文献致力于行波前解的分析，即具有如下形式的特殊解:

$$T(\bar{x}, \bar{t}) := u(\xi), \quad C(\bar{x}, \bar{t}) := v(\xi), \quad \xi = \bar{x} + c\bar{t}, \tag{1.3}$$

*美国俄亥俄州肯特市肯特州立大学数学科学系，邮编 44242。电子邮箱： amatson2@kent.edu

†法国波尔多大学波尔多数学研究所（UMR CNRS5251），法国塔朗斯，邮编 33405。电子邮箱：claude-michel.brauner@u-bordeaux.fr

‡数学科学系，肯特州立大学，美国俄亥俄州肯特市 44242。电子邮箱： gordon@math.kent.edu

其中， $c>0$ 是一个先验未知的传播速度。在燃烧背景下，此类解表示火焰前沿以恒定速度传播，其右侧远处为燃烧态，左侧远处为未燃态。

当 $\alpha \geq 1$ 系统 (1.1) 代入试探解 (1.3) 后，化为实轴上的以下常微分方程组：

$$u_{\xi\xi} - cu_\xi + \Omega(u,v) = 0, \quad \Lambda v_{\xi\xi} - cv_\xi - \Omega(u,v) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

并附有类似边界的条件：

$$u \to 1, \quad v \to 0 \quad \text{as} \quad \xi \to \infty, \quad \text{and} \quad u \to 0, \quad v \to 1 \quad \text{as} \quad \xi \to -\infty. \tag{1.5}$$

条件 (1.5) 规定了火焰前沿前方 ($\xi \to -\infty$) 和后方 ($\xi \to \infty$) 的稳态温度与反应物浓度。

由于解 (1.4)、(1.5) 具有平移不变性，我们通过施加一个约束来固定平移 t:

$$u(\xi_{ign}) = \theta, \tag{1.6}$$

其中 $\xi_{ign}$ 是任意给定的数。

约束条件 (1.6) 固定了点火界面的位置，即温度等于点火温度 $\theta$ 的唯一位置。因此，穿过点火界面时，反应速率会从某个正值跳变为零，同时保持温度和反应物浓度及其通量的连续性。因此，点火界面前方（$\xi < \xi_{ign}$）的混合物处于非反应状态，而在点火界面处及其后方（$\xi \geq \xi_{ign}$），化学反应则会发生。我们注意到，点火界面的唯一性源于问题 (1.4)、(1.5) 的任意解所具有的单调性；这种单调性是由 $\Omega(u,\ v) \geq 0$ 这一事实导致的，并且可以直接验证。

根据上述讨论，系统 (1.4) 等价于以下系统：

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} - cu_\xi = 0, & \Lambda v_{\xi\xi} - cv_\xi = 0, & \xi \in (-\infty, \xi_{ign}), \\ u_{\xi\xi} - cu_\xi + v^\alpha F(u) = 0, & \Lambda v_{\xi\xi} - cv_\xi - v^\alpha F(u) = 0, & \xi \in (\xi_{ign}, \infty), \end{cases} \tag{1.7}$$

并附加条件：解及其一阶导数穿过界面时保持连续：

$$[u] = [v] = [u_\xi] = [v_\xi] = 0 \quad \text{at} \quad \xi = \xi_{ign}. \tag{1.8}$$

此处及下文中，$[\cdot]$ 表示该量的跳跃。图 1 描绘了反应级数为 $\alpha \geq 1$ 时系统 (1.1) 的一个行波前解示意图。

系统 (1.4)、(1.5)、(1.6)（等价地，系统 (1.5)、(1.6)、(1.7)、(1.8)）已在文献中得到广泛研究。在 $\Lambda = 1$, 这一特殊情况下，该系统可化为单个方程。如今，这个方程已广为人知，相关细节可见于许多关于该主题的书籍和综述文章，例如[6, 10, 14, 15]。特别是，众所周知，在这种情况下，对于任意固定的 $\Lambda \in (0,\ \infty)$，(1.4)、(1.5)、(1.6) 都存在唯一的行波前解。$\Lambda \neq 1$ 的一般情形则复杂得多，对这一情形的全面认识仍不充分。关于这一一般情形的许多相关结果，可参见 [10, 11]。特别是，[1] 证明，当反应速率 $\alpha$ 为正整数时，系统 (1.4)、(1.5)、(1.6) 存在行波前解。此外，当 $\alpha = 1$ 且 $\Lambda \in (0, 1]$ 时，该解唯一 [5]。对于 $\alpha = 1$ 和 $\Lambda > 1$，解是否具有唯一性仍是一个悬而未决的问题。

当 $0 < \alpha < 1$时，非线性项 (1.2) 在 $C = 0.$ 处变为非利普希茨。因此，描述 (1.1) 行波前沿的系统发生了显著变化。将试探解 (1.3) 代入 (1.1) 后，该系统为：

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} - cu_\xi = 0, & \Lambda v_{\xi\xi} - cv_\xi = 0, & \xi \in (-\infty, \xi_{ign}), \\ u_{\xi\xi} - cu_\xi + v^\alpha F(u) = 0, & \Lambda v_{\xi\xi} - cv_\xi - v^\alpha F(u) = 0, & \xi \in (\xi_{ign}, \xi_{tr}), \\ u_{\xi\xi} - cu_\xi = 0, & v = 0, & \xi \in (\xi_{tr}, \infty), \end{cases} \tag{1.9}$$

其中，$\xi_{tr} > \xi_{ign}$ 是一个先验未知常数，我们将其称为后沿界面的位置。在燃烧的语境下，后沿界面表示反应所需的全部反应物被完全消耗的最左端点。因此，容易验证，后沿界面处以及其右侧所有点的温度均等于完全反应混合物的温度。

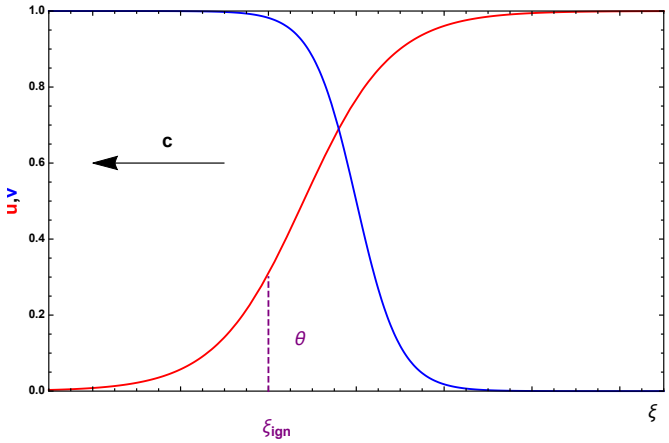



图 1：系统 (1.1) 在 $\alpha \geq 1$ 下行波前解的示意图。火焰前沿（红色）和不足反应物前沿（蓝色）分别以恒定速度 $c > 0$ 从已燃状态（$(u,\ v) = (1,\ 0)$）向未燃状态（$(u,\ v) = (0,\ 1)$）传播，位置分别为 $\xi \to \infty$ 和 $\xi \to -\infty$。箭头表示传播方向。温度等于点火温度的点火界面（$u = \theta$）的位置以 $\xi_{ign}$ 表示。

（$u = 1,\ \xi \geq \xi_{tr}$）。因此，点火界面与后沿界面之间的距离 $R = \xi_{tr} - \xi_{ign}$ 就是反应区的长度。

鉴于上述讨论，可以显式求解 (1.9) 中的最后一个方程，其解为：

$$u = 1, \quad v = 0, \quad \xi \in (\xi_{tr}, \infty). \tag{1.10}$$

因此，系统 (1.9) 可化简为

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} - cu_\xi = 0, & \Lambda v_{\xi\xi} - cv_\xi = 0, & \xi \in (-\infty, \xi_{ign}), \\ u_{\xi\xi} - cu_\xi + v^\alpha F(u) = 0, & \Lambda v_{\xi\xi} - cv_\xi - v^\alpha F(u) = 0, & \xi \in (\xi_{ign}, \xi_{tr}), \end{cases} \tag{1.11}$$

并辅以以下后沿界面处的边界条件：

$$u = 1, \quad u_\xi = 0, \quad v = v_\xi = 0 \quad \text{at} \quad \xi = \xi_{tr}, \tag{1.12}$$

这些条件体现了温度、反应物及其通量穿过后沿界面时的连续性。问题 (1.11)、(1.12) 应结合约束条件 (1.6)、点火界面处的连续性条件 (1.8)，以及点火界面前方远处的类似边界条件来考虑：

$$u \to 0, \quad v \to 1 \quad \text{as} \quad \xi \to -\infty. \tag{1.13}$$

我们注意到，描述系统 (1.1) 的行波前解的系统中，带有 $\alpha \geq 1$ 和 $0 < \alpha < 1$ 时主要的原理差异在于，后者包含一个位置先验未知的后沿界面。我们还注意到，(1.6)、(1.8)、(1.11)、(1.12)、(1.13) 的任意解都是单调的，因此对任何此类解，点火界面和后沿界面的位置都能唯一确定。该系统的行波前解示意图见图2。

尽管分数阶反应（$0 < \alpha < 1$）常见于各种燃烧应用中，例如高压燃烧系统（参见如 [7]），但问题 (1.6)、(1.8)、(1.11)、(1.12)、(1.13) 并未在数学文献中得到应有的关注，部分原因是非利普希茨反应速率给分析带来了多种技术难题。据我们所知，近期的一篇论文 [3] 是唯一一篇分析了该系统的数学论文。在 [3] 中，作者研究了具有分段点火温度动力学的 (1.6)、(1.8)、(1.11)、(1.12)、(1.13)，即 $F(T)$ 为赫维赛德阶跃函数的情形。

$$F(T) := \begin{cases} 1 & T \geq \theta, \\ 0 & T < \theta. \end{cases} \tag{1.14}$$

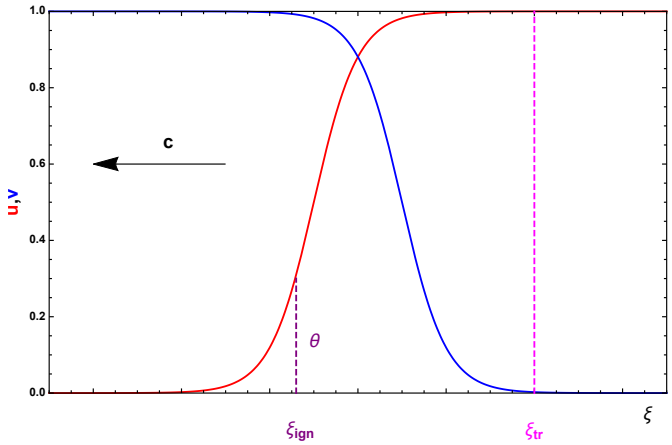



图2：对于具有 $0<\alpha<1$ 的系统 (1.1)，行波前解的示意图。火焰（红色）和不足反应物（蓝色）前沿分别以恒定速度 $c>0$ 从已燃烧状态 $((u,\ v)=(1,\ 0))$ 向未燃烧状态 $((u,\ v)=(0,\ 1))$ 传播，分别对应于 $\xi\to\infty$ 和 $\xi\to-\infty$。箭头表示传播方向。温度等于点火温度 $(u=\theta)$ 的点火界面位置由 $\xi_{ign}$. 表示。后沿界面的位置，即其右侧温度和不足反应物的浓度分别恒等于一和零的点 $(u=1,\ v=0)$，由 $\xi_{tr}$. 表示。

从应用角度来看，选择分段点火温度动力学是合理的，因为对于某些氢-氧/空气和乙烯-氧气混合物，这种动力学显然是总体反应动力学最合适的近似；这一点已由对这些混合物详细反应机理的大量理论和数值研究所证实，参见 [9] 及其中的参考文献。

在分段点火温度动力学的假设下，系统（1.11）简化为：

$$\begin{cases} u_{\xi\xi}-cu_\xi=0, & \Lambda v_{\xi\xi}-cv_\xi=0, & \xi\in(-\infty,\xi_{ign}),\\ u_{\xi\xi}-cu_\xi+v^\alpha=0, & \Lambda v_{\xi\xi}-cv_\xi-v^\alpha=0, & \xi\in(\xi_{ign},\xi_{tr}). \end{cases} \tag{1.15}$$

在 [3] 中，已证明问题 (1.6)、(1.8)、(1.15)、(1.12)、(1.13) 存在解，但其中并未探讨解的多重性。本文证明了在 [3] 中构造的解是唯一的，并讨论该解的一些定性性质。

本文的组织结构如下。第2节通过介绍一些预备知识并陈述主要结果，为后续内容奠定基础。第3节给出证明主要结果所需的引理和命题的证明。最后一节讨论行波前解的某些性质，并展示数值模拟的结果。特别地，我们基于该问题的渐近研究和数值研究给出了一些形式化论证，表明火焰前沿的传播速度是点火温度 $\theta$、刘易斯数的倒数 $\Lambda$ 和反应级数 $\alpha$ 的递减函数。

## 2 预备知识与主要结果的陈述。

本节将对问题 (1.6)、(1.8)、(1.15)、(1.12) 和 (1.13) 给出另一种表述，并陈述本文的主要结果。首先注意到，鉴于行波前沿具有平移不变性，我们可以固定后沿界面 $\xi_{tr}$ 的位置，并将 $\xi_{ign}$ 视为先验未知量。因此，我们令 $\xi_{tr}=0$ 和 $\xi_{ign}=-R$，其中 $R>0$ 是先验未知量。经过这一调整，引言中讨论的、描述满足 $\alpha\in(0,1)$ 且具有阶梯式反应动力学的 (1.1) 行波前解的问题可表述为：

$$\begin{cases} u_{\xi\xi}-cu_\xi=0, & \Lambda v_{\xi\xi}-cv_\xi=0, & v>0, & \xi\in(-\infty,-R),\\ u_{\xi\xi}-cu_\xi=-v^\alpha, & \Lambda v_{\xi\xi}-cv_\xi=v^\alpha, & v>0, & \xi\in(-R,0), \end{cases} \tag{2.1}$$

T该系统还需满足燃烧前沿远前方的类边界条件 t:

$$u \to 0 \quad v \to 1 \qquad \text{as} \quad \xi \to -\infty, \tag{2.2}$$

解及其一阶导数在点火界面处的连续性条件:

$$[u] = [v] = [u_\xi] = [v_\xi] = 0 \quad \text{at} \quad \xi = -R, \tag{2.3}$$

点火界面处的边界条件:

$$u = \theta, \quad \text{at} \quad \xi = -R, \tag{2.4}$$

以及后沿界面处的边界条件

$$u = 1, \quad u_\xi = 0, \quad v = v_\xi = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 0 \tag{2.5}$$

直接计算表明，对于满足（2.3）和（2.4）的任意问题（2.1）的解，有:

$$u(\xi) = \theta \exp(c(\xi + R)), \quad \xi \le -R, \tag{2.6}$$

从而

$$u = \theta, \quad u_\xi = c\theta \quad \text{at} \quad \xi = -R. \tag{2.7}$$

结合上述初等计算，我们得出，区间$[0, R]$ 上问题（2.1）–（2.5）的任意解都必须满足以下边值问题:

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} - cu_\xi = -v^\alpha, & \Lambda v_{\xi\xi} - cv_\xi = v^\alpha & v > 0, & \xi \in (-R, 0), \\ u = \theta, & u_\xi = c\theta & & \xi = -R, \\ u = 1 & u_\xi = 0, & v = v_\xi = 0, & \xi = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

因此，问题 (2.1)–(2.5) 有解的必要条件是问题 (2.8) 有解。需要指出的是，问题 (2.8) 有解并不能保证问题 (2.1)–(2.5) 有解。事实上，很容易验证，对于问题 (2.1)–(2.5) 的任意解，我们都必须满足

$$v(\xi) = 1 - a \exp\left(\frac{c}{\Lambda}(\xi + R)\right) \quad \xi \in (-\infty, -R), \tag{2.9}$$

其中某个常数 $a \in (0,1)$。根据连续性条件 (2.3)，该常数必须从以下超定系统中选取:

$$1 - a = \lim_{\xi \to -R^+} v(\xi), \quad -ca = \Lambda \lim_{\xi \to -R^+} v_\xi(\xi), \tag{2.10}$$

而该系统不一定相容。然而， [3, 定理 1.1]保证，对于任意一组相关参数（ $\theta \in (0,1)$， $\alpha \in (0,1)$， $\Lambda \in (0, \infty)$），系统 (2.1)–(2.5) 都存在一个解。由此可知，问题 (2.8) 有解；而问题 (2.8) 解的唯一性意味着问题 (2.1)–(2.5) 解的唯一性。本节的主要结果如下:

**理论** **引理 2.1**。 设 $\theta \in (0,1)$， $\alpha \in (0,1)$， $\Lambda \in (0, \infty)$。那么，问题 (2.8) 存在唯一解 .

现在我们来证明，定理 2.1 的证明可归结为分析一个单一的二阶常微分方程的解。首先，注意到对式 (2.8) 中关于温度 $u$ 的方程积分，以及对该方程乘以 $\exp(-c\xi)$ 后积分，并考虑边界条件，可得:

$$c = \int_{-R}^{0} v^\alpha(\xi) d\xi, \tag{2.11}$$

$$c\theta = \int_{-R}^{0} v^\alpha(\xi) \exp(-c(\xi + R)) d\xi. \tag{2.12}$$

接下来，我们引入如下重标度：

$$v(\xi) = A\tilde{w}(x), \tag{2.13}$$

其中

$$x := c\xi, \quad A := c^{-\frac{2}{1-\alpha}}. \tag{2.14}$$

将 (2.13)、(2.14) 代入 (2.8) 中关于反应物浓度 $v$ 的方程，并考虑边界条件，我们得到：

$$\begin{cases} \Lambda\tilde{w}'' - \tilde{w}' - \tilde{w}^{\alpha} = 0, & \tilde{w} > 0, \quad x \in (-cR, 0), \\ \tilde{w} = 0, & \tilde{w}' = 0, \quad x = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

其中，撇号表示对变量 $x$ 求导。

考虑 现在考虑（2.15）的第一个方程在半直线上的延拓，即以下问题：

$$\begin{cases} \Lambda w'' - w' - w^{\alpha} = 0, & x < 0, \\ w(0) = 0, & w'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

[3, 第 4] 节通过拓扑方法对（2.16）的性质进行了详尽研究，另见下文附录。特别地，以下结果直接由 [3], 的引理 4.7 和 4.8 得出，更多细节请见附录。

**引理 2.1**。 存在唯一的函数 $w$ ，其在$(-\infty,0)$ 上为正，并满足*(2.16)</style*】【。

显然，只要 $w$ 不为零，它就是光滑的。函数 $w$ 及其导数可以延拓为 0，直到 $0^{-}$。更确切地说，由于 [3, 引理 6.5 和 6.6] ，函数$w$在 $x = 0$附近的 H¨older 正则性为： $w \in C^{\infty}$（$-\infty$， 0)) $\cap\, C^{2+[\beta],\ \beta-[\beta]}$（$-\infty$， 0]），$\beta = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$， $0 < \alpha < 1$。此外， $w$在（$-\infty$， 0]上递减。

因此，对于任意 $c > 0, R > 0$ ，方程 (2.15) 有唯一的正递减解，且$\tilde{w}(x) = w(x)$ 在 $(-cR, 0]$.

I鉴于上述观察，我们注意到，用重标度变量表示时，(2.11)、(2.12) 写为：

$$c^{\frac{2}{1-\alpha}} = \int_{-cR}^{0} w^{\alpha}(s)ds, \tag{2.17}$$

$$\theta c^{\frac{2}{1-\alpha}} = \int_{-cR}^{0} w^{\alpha}(s)\exp(-(s+cR))ds, \tag{2.18}$$

这尤其意味着

$$\theta = \frac{\int_{-cR}^{0} w^{\alpha}(s)\exp(-(s+cR))ds}{\int_{-cR}^{0} w^{\alpha}(s)ds}. \tag{2.19}$$

引入以下函数：

$$\phi(x) := \frac{\int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s)\exp(-(s+x))ds}{\int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s)ds}, \quad x \in (0,\infty). \tag{2.20}$$

使我们能够证明主定理 2.1 的关键观察如下。

**命题 2.1.** 设 $w$ 为$(2.16)$ 的解，并令

$$\phi(x) := \frac{\int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s)\exp(-(s+x))ds}{\int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s)ds}, \quad x \in (0,\infty). \tag{2.21}$$

由$(2.21)$ 定义的函数 $\phi$ 在$(0,\infty)$ 上严格递减，并且

$$\lim_{x\to 0}\phi(x) = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0. \tag{2.22}$$

命题 2.1 的证明将在下一节给出。该命题使得下面给出的定理 2.1 的证明变得简单。

定理 *2.1* 的证明。 由 (2.17) 和 (2.18) 可得

$$c = \left( \int_{-cR}^{0} w^{\alpha}(s) ds \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}, \tag{2.23}$$

$$\theta = \frac{\int_{-cR}^{0} w^{\alpha}(s) \exp(-(s+cR)) ds}{\int_{-cR}^{0} w^{\alpha}(s) ds}. \tag{2.24}$$

根据 $\phi$ （命题 2.1）的严格单调性，存在一个唯一值 $\sigma^* \in (0, \infty)$，使得 $\phi(\sigma^*) = \theta$. 因此，在 (2.23) 中我们必须有 $cR = \sigma^*$. 这一观察以及 (2.16) 的解的唯一性意味着速度 $c = c^*$ 的唯一性，其中

$$c^* = \left( \int_{-\sigma^*}^{0} w^{\alpha}(s) ds \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}. \tag{2.25}$$

后者立即推出点火界面 $R = R^* = \sigma^*/c^*$. 的位置唯一性。 □

# 3 命题 2.1 的证明

本节给出命题 2.1 的证明，该证明基于以下三个引理。

**引理 3.1**。 由 $(2.21)$ 定义的函数 $\phi(x)$ 具有以下性质：

$$\lim_{x \to 0} \phi(x) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} \phi(x) = 0. \tag{3.1}$$

证明。 我们首先证明式 (3.1) 中的第一个等式。注意到

$$e^{-x} \int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) ds < \int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) e^{-(s+x)} ds < \int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) ds, \quad x > 0. \tag{3.2}$$

因此，

$$e^{-x} < \phi(x) < 1, \quad x > 0. \tag{3.3}$$

令 $x$ 趋于零，在上述不等式中即可得到（3.1）中的第一个等式。

现在，让我们证明式 (3.1) 中的第二个等式。对方程 (2.16) 进行积分，并考虑边界条件，我们得到：

$$-\Lambda w'(-x) + w(-x) = \int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) ds. \tag{3.4}$$

由于 $w'(-x) < 0$ 对于 $x > 0$，我们有：

$$w(-x) < \int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) ds. \tag{3.5}$$

Let

$$\rho(x) = \frac{\int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) ds}{w^{\alpha}(-x)}. \tag{3.6}$$

鉴于上述不等式，我们有：

$$\rho(x) > w^{1-\alpha}(-x), \tag{3.7}$$

因此

$$\rho(x) \to \infty \quad \text{as} \quad x \to \infty, \tag{3.8}$$

作为 $w(-x) \to \infty$ 作为 $x \to \infty$。

接下来观察到

$$\int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) e^{-(s+x)} ds = \int_{-x+\sqrt{\rho(x)}}^{0} w^{\alpha}(s) e^{-(s+x)} ds + \int_{-x}^{-x+\sqrt{\rho(x)}} w^{\alpha}(s) e^{-(s+x)} ds \leq$$

$$e^{-\sqrt{\rho(x)}} \int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) ds + w^{\alpha}(-x)\sqrt{\rho(x)} \tag{3.9}$$

将上面的表达式除以 $\int_{-x}^{0} w^{\alpha}(s) ds$，并利用 $\phi(x)$ 和 $\rho(x)$ 的定义，我们得到:

$$\phi(x) \leq e^{-\sqrt{\rho(x)}} + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}. \tag{3.10}$$

将 $x \to \infty$ 代入此不等式并结合 (3.8)，我们得到 (3.1) 中的第二个方程。 □

**引理 3.2**。 设 $Y$ 是一个非负解。

$$\Lambda Y'' - Y' - Y^{\alpha} = 0. \tag{3.11}$$

假设存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$Y(x_0) > 0, \quad Y'(x_0) < 0, \quad Y''(x_0) Y(x_0) > \left(Y'(x_0)\right)^2. \tag{3.12}$$

那么，

$$\inf_{x \in [x_0, \infty)} Y(x) > 0. \tag{3.13}$$

证明。设

$$Y(x_0) = Y_0, \quad Y'(x_0) = Y_0', \tag{3.14}$$

并假设 (3.12) 成立。于是，由 (3.11) 和 (3.12) 中最后一个不等式可得

$$\Lambda \frac{(Y_0')^2}{Y_0} - Y_0' - Y_0^{\alpha} < \Lambda Y''(x_0) - Y_0' - Y_0^{\alpha} = 0, \tag{3.15}$$

因此

$$\Lambda \left(\frac{Y_0'}{Y_0}\right)^2 - \left(\frac{Y_0'}{Y_0}\right) - Y_0^{\alpha-1} < 0. \tag{3.16}$$

因此,

$$\mu_- < \frac{Y_0'}{Y_0} < 0 < \mu_+, \tag{3.17}$$

其中

$$\mu_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\Lambda Y_0^{\alpha-1}}}{2\Lambda}, \tag{3.18}$$

是二次方程的根

$$\Lambda \mu^2 - \mu - Y_0^{\alpha-1} = 0. \tag{3.19}$$

接下来注意，线性方程

$$\Lambda Z'' - Z' - Y_0^{\alpha-1} Z = 0, \tag{3.20}$$

满足

$$Z(x_0) = Y_0, \quad Z'(x_0) = -\gamma Y_0, \tag{3.21}$$

有如下解

$$Z(x) = \left( \frac{2\Lambda Y_0}{\sqrt{1 + 4\Lambda Y_0^{\alpha-1}}} \right) \exp\left( \frac{x - x_0}{2\Lambda} \right) \cosh\left( \frac{\sqrt{1 + 4\Lambda Y_0^{\alpha-1}}}{2\Lambda} (x - x_0) \right) \times$$
$$\left\{ |\mu_-| + \frac{1}{2\Lambda} - \left( \frac{1}{2\Lambda} + \gamma \right) \tanh\left( \frac{\sqrt{1 + 4\Lambda Y_0^{\alpha-1}}}{2\Lambda} (x - x_0) \right) \right\}. \tag{3.22}$$

鉴于对于 $x \geq 0$ $\cosh(x) \geq 1$, $0 \leq \tanh(x) < 1$ , 由 (3.22) 可得

$$Z(x) > Z_0 = \frac{2\Lambda Y_0}{\sqrt{1 + 4\Lambda Y_0^{\alpha-1}}} \left( |\mu_-| - \gamma \right), \quad x \in [x_0, \infty). \tag{3.23}$$

因此， $Z(x)$ 在 $[x_0, \infty)$ 上一致地远离零，前提是

$$\gamma < |\mu_-|. \tag{3.24}$$

令 $x_M$ 为满足下式的最大 $x > x_0$

$$0 < Y(x) < Y_0 \quad x \in I = (x_0, x_M). \tag{3.25}$$

注意，这样的 $x_M$ 的存在性得以保证，因为 $Y(x_0) = Y_0$ 且 $Y'(x_0) < 0$.

我们声称，对于满足 (3.12) 的 (3.11) 的任意解，以下不等式成立

$$Y(x) > Z(x), \quad Y'(x) > Z'(x), \tag{3.26}$$

对于 $x \in I$. 这里， $Z$ 是方程 (3.20)、(3.21) 的解，其中任意

$$\gamma \in \left( \frac{|Y_0'|}{Y_0}, |\mu_-| \right), \tag{3.27}$$

固定。事实上，鉴于 $Y(x_0) = Z(x_0)$ 且 $Z'(x_0) < Y'(x_0) < 0$ （这由我们对参数 $\gamma$ 的选取保证），我们首先注意到，当 $\delta > 0$ 足够小时，(3.26) 对 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 成立。现在假设 $x^*$ 是 $x \in I$ 违反 (3.26) 时的最小值。考虑可能发生的两种情况。第一种情况是

$$Y(x^*) = Z(x^*) \quad \text{and} \quad Y'(x^*) > Z'(x^*), \tag{3.28}$$

但这样一来

$$Y(x^* - \varepsilon) < Z(x^* - \varepsilon), \tag{3.29}$$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时。这与 $x^*$ 的定义矛盾，因此这种情况不可能发生。第二种可能性是

$$Y(x^*) \geq Z(x^*) \quad \text{and} \quad Y'(x^*) = Z'(x^*), \tag{3.30}$$

在这种情况下，我们有

$$\Lambda Y''(x^*) = Y'(x^*) + Y^\alpha(x^*) > Y'(x^*) + Y_0^{\alpha-1} Y(x^*) \geq Z'(x^*) + Y_0^{\alpha-1} Z(x^*) = \Lambda Z''(x^*), \tag{3.31}$$

因此

$$Y''(x^*) > Z''(x^*). \tag{3.32}$$

但是

$$Y'(x^* - \varepsilon) < Z'(x^* - \varepsilon). \tag{3.33}$$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，这再次与 $x^*$. 的定义矛盾

因此，对于 $x \in I$，有 $Y_0 > Y(x) \geq Z_0 > 0$，故由连续性

$$Z_0 \leq Y(x) \leq Y_0 \quad x \in [x_0, x_M]. \tag{3.34}$$

显然，在 $x = x_M$ 处必有

$$Y(x_M) = Y_0, \quad Y'(x_M) \geq 0. \tag{3.35}$$

由 (3.11)，对于 $x > x_M$，有

$$Y'(x) = Y'(x_M)e^{\frac{x-x_M}{\Lambda}} + \Lambda^{-1}\int_{x_M}^{x} Y^{\alpha}(s)e^{\frac{x-s}{\Lambda}}ds. \tag{3.36}$$

现在我们断言，对于 $x > x_M.$，有 $Y(x) > Y_0$。事实上，由连续性，当 $x \in [x_M, x_M + \delta]$ 时，对于某个可能很小的 $\delta > 0.$，有 $Y(x) > Y_0/2$。于是由 (3.36) 可得

$$Y'(x) \geq \left(\frac{Y_0}{2}\right)^{\alpha}\left(e^{\frac{x-x_M}{\Lambda}} - 1\right) \quad x \in (x_M, x_M + \delta]. \tag{3.37}$$

这意味着

$$Y'(x) > 0 \quad \text{on} \quad (x_M, x_M + \delta], \tag{3.38}$$

因此

$$Y(x) > Y_0 \quad \text{on} \quad (x_M, x_M + \delta]. \tag{3.39}$$

于是,

$$Y(x_M + \delta) > Y_0, \quad Y'(x_M + \delta) > 0. \tag{3.40}$$

现在假设 t $x_M^*$ 是大于 $x_M + \delta$ 的第一个满足 $Y'(x_M^*) = 0,$ 的点，但根据 (3.36) 和 (3.40)

$$Y'(x_M^*) \geq Y'(x_M + \delta)e^{\frac{x_M^* - (x_M+\delta)}{\Lambda}} + Y_0^{\alpha}\left(e^{\frac{x_M^* - (x_M+\delta)}{\Lambda}} - 1\right) > 0, \tag{3.41}$$

因此 $Y(x)$ 在 $(x_M, \infty)$ 上严格递增. 于是

$$Y(x) > Y_0 \quad x \in (x_M, \infty). \tag{3.42}$$

结合（3.34）和（3.42），我们得到

$$Y(x) \geq Z_0 > 0 \quad x \in [x_0, \infty), \tag{3.43}$$

这意味着（3.13），从而完成证明。

□

**推论 3.1**。 由引理 *3.2* 可立即推出，（*2.16*）的解必须满足

$$w''(x)w(x) \leq (w'(x))^2, \quad \forall x \in (-\infty, 0). \tag{3.44}$$

事实上，如果存在某个点 $x_0 < 0$ 使得(3.44) 不成立，那么这将意味着 $w(x) > 0$ 对于 $x \in [x_0, 0]$.成立。因此，这样的 $w$ 将不满足边界条件 $w(0) = 0$，因而无法求解(2.16)，这就产生了矛盾。

我们注意到，公式 (3.44) 具有明确的几何解释。将问题 (2.16) 视为平面上的一个动力系统。引入变量代换。

$$t = x, \quad q(t) = w(x), \quad p(t) = w'(x), \tag{3.45}$$

我们得到以下由两个一阶常微分方程组成的系统:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t), \\ \Lambda \dot{p}(t) = p(t) + q^{\alpha}(t). \end{cases} \tag{3.46}$$

其中点号表示关于 $t$ 的导数。该问题在 $t < 0$ 所示的象限$Q = \{q \geqslant 0, p \leqslant 0\}$. 中考虑。将 $p$ 和 $q$ 改写为极坐标，我们得到

$$q(t) := r(t)\cos(\vartheta(t)), \quad p(t) := r(t)\sin(\vartheta(t)), \tag{3.47}$$

其中，$t \in (-\infty,\ 0)$ $r > 0$, $\theta \in (-\pi/2,\ 0)$。用新变量表示，条件 (3.44) 等价于 to

$$\dot{\vartheta}(t) \leq 0. \tag{3.48}$$

我们在附录中给出该公式的推导。

**引理 3.3**。令 $w$ 为 $(2.16)$ 的解，并令

$$f(x) := \begin{cases} w^{\alpha}(x), & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \tag{3.49}$$

对于任意固定的 $y > 0$，函数

$$\psi(x, y) = \frac{\int_{-x+y}^{\infty} f(s)ds}{\int_{-x}^{\infty} f(s)ds}, \tag{3.50}$$

是 $x$ 在 $(0, \infty)$ 上的非递减函数，并在 $(y, \infty)$上严格递增。

证明。首先我们注意到

$$\psi(x, y) \equiv 0 \quad \text{for} \quad x \leq y. \tag{3.51}$$

因此，对于 $x \in (0, y]$.， $\psi(x, y)$随 $x$ 单调不减。

对于 $x > y$，我们有,

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, y) = \frac{f(y - x)\int_{-x}^{\infty} f(s)ds - f(-x)\int_{y-x}^{\infty} f(s)ds}{\left(\int_{-x}^{\infty} f(s)ds\right)^2}. \tag{3.52}$$

因此，为了证明 th 在 $\psi(x,\ y)$ 处关于 $x$ 对于 $x \in (y,\ \infty)$ 严格递增这一性质，我们需要证明以下不等式

$$\frac{\int_{y-x}^{\infty} f(s)ds}{f(y - x)} < \frac{\int_{-x}^{\infty} f(s)ds}{f(-x)} \qquad x \in (y, \infty). \tag{3.53}$$

定义

$$g(x) := \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha\frac{w'(x)}{w(x)} \quad x \in (-\infty, 0). \tag{3.54}$$

注意到

$$g'(x) = \frac{\alpha}{w^2(x)}\left(w''(x)w(x) - (w'(x))^2\right), \tag{3.55}$$

因此由推论 3.1

$$g'(x) \leq 0 \quad \text{on} \quad (-\infty, 0). \tag{3.56}$$

这尤其意味着，对于 $x > y > 0$，我们有

$$g(s+y-x) \le g(s-x) \quad s \in (0, x-y). \tag{3.57}$$

因此,

$$\int_0^s g(\tau+y-x)d\tau \le \int_0^s g(\tau-x)d\tau. \tag{3.58}$$

根据函数 $g$ 的定义（见式（3.54））, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^s g(\tau+y-x)d\tau &= \int_0^s \frac{\frac{d}{d\tau}f(\tau+y-x)}{f(\tau+y-x)}d\tau = \int_0^s \left(\frac{d}{d\tau}\log f(\tau+y-x)\right)d\tau = \log\left(\frac{f(s+y-x)}{f(y-x)}\right), \\
\int_0^s g(\tau-x)d\tau &= \int_0^s \frac{\frac{d}{d\tau}f(\tau-x)}{f(\tau-x)}d\tau = \int_0^s \left(\frac{d}{d\tau}\log f(\tau-x)\right)d\tau = \log\left(\frac{f(s-x)}{f(-x)}\right).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

因此，由 (3.58) 和 (3.59) 可知，对于 $x > y > 0$ 和 $s \in (0, x-y)$

$$\log\left(\frac{f(s+y-x)}{f(y-x)}\right) \le \log\left(\frac{f(s-x)}{f(-x)}\right), \tag{3.60}$$

即

$$\frac{f(s+y-x)}{f(y-x)} \le \frac{f(s-x)}{f(-x)}. \tag{3.61}$$

利用 $f(x) \equiv 0$ 当 $x > 0$ 时，以及 $f(x) > 0$ 当 $s \in (-y, 0)$ 时这些事实，我们注意到，当 $y > 0$ 时，

$$\begin{aligned}
\int_0^{x-y} f(s+y-x)ds &= \int_{y-x}^0 f(s)ds = \int_{y-x}^\infty f(s)ds, \\
\int_0^{x-y} f(s-x)ds &= \int_{-x}^{-y} f(s)ds < \int_{-x}^0 f(s)ds = \int_{-x}^\infty f(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

因此，对 $s$ 从 0 到 $x-y$ 积分 (3.61)，并考虑到 (3.62)，我们得出结论，(3.53) 对任意 $x > y > 0$ 都成立，因此 $\psi(x, y)$ 确实关于 $x$ 严格递增，其中 $x > y > 0$. □

现在我们可以给出该命题的证明了

命题 *2.1* 的证明。设

$$\chi(x,y) = 1 - \psi(x,y) = \frac{\int_{-x}^{y-x} f(s)ds}{\int_{-x}^\infty f(s)ds}. \tag{3.63}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left\{\int_{-x}^{y-x} f(s)ds\right\} e^{-y}dy = \int_0^\infty \left\{\int_0^y f(s-x)e^{-y}ds\right\} dy = \int_0^\infty \left\{\int_s^\infty f(s-x)e^{-y}dy\right\} ds \\
&= \int_0^\infty \left\{\int_s^\infty e^{-y}dy\right\} f(s-x)ds = \int_0^\infty f(s-x)e^{-s}ds = \int_{-x}^\infty f(s)e^{-(s+x)}ds.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

因此,

$$\int_0^\infty \chi(x,y)e^{-y}dy = \frac{\int_{-x}^\infty f(s)e^{-(s+x)}ds}{\int_{-x}^\infty f(s)ds} = \frac{\int_{-x}^0 w^\alpha(s)e^{-(s+x)}ds}{\int_{-x}^0 w^\alpha(s)ds} = \phi(x). \tag{3.65}$$

在上述计算中，我们使用了 $f$ 的定义（见式 (3.49)）和 $\psi$ 的定义（见式 (3.50)）。

鉴于引理 3.3 的陈述， $\chi(x, y)$ 是 $x$ 在 $(0, \infty)$ 上的非递增函数，并且是 $x$ 在 $[y, \infty)$ 上的严格递减函数。因此， $\int_0^\infty \chi(x, y)e^{-y}dy$ 是严格递减函数；由 (3.65) 可知，$\phi(x)$ 也是严格递减的。

□

# 4 传播速度对参数的依赖关系：渐近分析与数值计算。

在前面的章节中，我们确立了问题 (2.8) 的解的唯一性。我们的主要结果表明，对于任意固定的 $\theta \in (0,1)$ $\Lambda \in (0,\infty)$ 和 $\alpha \in (0,1)$，存在唯一的一组数对 $(c^*, R^*)$，使得该问题存在一个解。这一数对分别表示这组参数下的传播速度和反应区宽度。因此，一个自然的问题是研究这些量对问题参数的依赖关系，即依赖关系 $c^*(\theta,\Lambda,\alpha)$ 和 $R^*(\theta,\Lambda,\alpha)$。特别值得关注的是传播速度如何随问题参数变化，因为这一量是火焰前沿的主要特征。

正如我们在前几节所示，$(c^*, R^*)$ 可由问题 (2.16) 的解唯一确定，该解表示反应区内不足反应物的缩放分布。因此，我们先讨论 (2.16) 的解的定性性质。虽然这个问题的解无法以闭式形式求得，但可以通过数值计算获得。图 3 展示了 $w$ 在$\alpha$ 和 $\Lambda = 1.$ 取不同值时的函数。我们注意到，当 $\Lambda \neq 1$ 时，(2.16) 的解可以由该方程的解

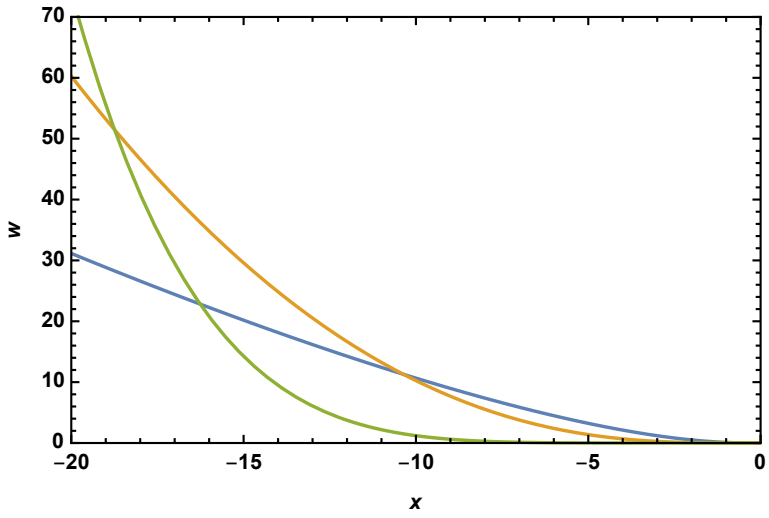



图 3：问题 (2.16) 的数值解，其中 $\alpha = 1/4$ （蓝色）、 $\alpha = 1/2$ （橙色）和 $\alpha = 3/4$ （绿色）。

通过重标度得到。事实上，通过直接代入可以验证

$$w(x|\Lambda,\alpha) = \Lambda^{\frac{1}{1-\alpha}} w\left(\frac{x}{\Lambda}\middle|\Lambda = 1,\alpha\right). \tag{4.1}$$

注意， $\alpha$ 的不同取值所对应的 (2.16) 的解并非有序。事实上，当 $|x| > 0$ 足够小时， $w(x|\Lambda,\ \alpha)$ 是 $\alpha.$ 的减函数；而当 $|x|$ 足够大时， $w(x|\Lambda,\ \alpha)$ 是 $\alpha$ 的增函数。形式上的推导（可使之严格化）表明，(2.16) 的解的渐近行为如下：

$$\begin{aligned} w(x) &= \left[\frac{(1-\alpha)^2}{2\Lambda(1+\alpha)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} (-x)^{\frac{2}{1-\alpha}}(1+o(1)) \quad |x| \ll 1, \\ w(x) &= (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (-x)^{\frac{1}{1-\alpha}}(1+o(1)) \quad |x| \gg 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

也就是说，随着 $\alpha$ 增加， $w$ 在原点附近变得越来越平坦，而当 $|x|$取较大值时增长得越来越快。另一个重要的观察是，原点附近的解 (2.16) 深受刘易斯数具体取值的影响，因为在这一区域，解（在第一阶近似下）由扩散与反应的平衡决定，而输运项可以忽略。相反，在远离原点处，关键因素是输运和反应，而扩散在这一区域可以忽略。因此，当 $|x| \gg 1.$

我们还来讨论函数 $w$ 在 $\alpha \to 0$ 和 $\alpha \to 1$时的极限行为。容易验证，当 $\alpha \to 0$ 时，(2.16) 的解在紧集上一致趋于极限轮廓

$$w_0(x) = -x + \Lambda\left(\exp\left(\frac{x}{\Lambda}\right) - 1\right), \tag{4.3}$$

它满足极限问题

$$\begin{cases} \Lambda w_0'' - w_0' - 1 = 0, & x < 0, \\ w_0(0) = 0, & w_0'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

现在我们声称，当 $\alpha \to 1$ 时，函数 $w$ 在紧集上趋于零。事实上，令 $\eta = w - \Lambda w'$。鉴于 $w(x) > 0$ 且 $w'(x) < 0$ 在 $(-\infty,0)$ 上，并且 $w(0) = w'(0) = 0,$，当 $\eta(0) = 0.$时，由此可知 $\eta(x) > 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 上。由 (2.16) 得

$$\begin{cases} -\eta' = w^\alpha, & x < 0, \\ \eta(0) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

考虑到 $\eta, w$ 在 $(-\infty,0)$ 上为正，我们便有

$$-\eta' = w^\alpha \le \eta^\alpha \tag{4.6}$$

对这个不等式积分，并考虑初始条件，得到

$$\eta(x) \le [(1-\alpha)(-x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x \le 0 \tag{4.7}$$

由于 $w < \eta$，我们得出结论

$$w(x) \le [(1-\alpha)(-x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x \le 0. \tag{4.8}$$

固定 $x < 0$，并令上面不等式中的 $\alpha \to 1$ 取极限，我们得出：当 $\alpha \to 0$ 时， $w \to 0$ 在紧集上。

现在我们转向求值数对 $c^*(\theta,\ \Lambda,\ \alpha)$、 $R^*(\theta,\ \Lambda,\ \alpha)$。寻找这个数对的算法相当直接。首先，我们固定 $\Lambda$ 和 $\alpha$，并求解问题 (2.16)。然后，我们按照主定理 2.1 的证明中所概述的步骤进行。具体而言，利用 (2.16) 的解，我们求值由 (2.21) 给出的 $\phi(x)$，以及如下给出的函数 $\zeta(x)$:

$$\zeta(x) = \left(\int_{-x}^{0} w^\alpha(s)ds\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}. \tag{4.9}$$

接下来固定 $\theta$，并找到唯一的数 $\sigma^* > 0$，使得

$$\phi(\sigma^*) = \theta. \tag{4.10}$$

此类 $\sigma^*$ 的存在性和唯一性由命题 2.1 得出。因此由 (2.24) 可知

$$c^* = \zeta(\sigma^*), \tag{4.11}$$

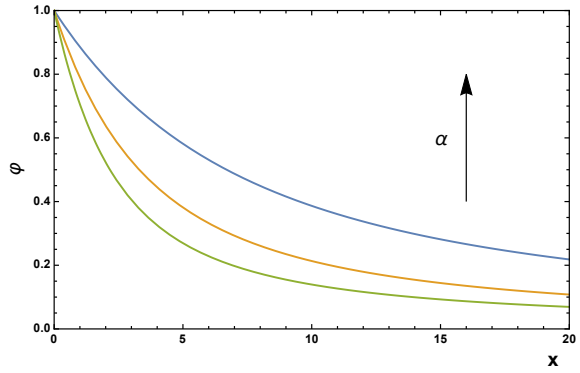
然后由（2.25）得到

$$R^* = \sigma^*/c^*. \tag{4.12}$$

函数 $\phi(x)$ 递减，而函数 $\zeta(x)$ 在 $x \in (0, \infty)$. 上递增。此外，由 (4.1) 可得

$$\zeta(x|\Lambda,\alpha) = \sqrt{\Lambda}\zeta\left(\frac{x}{\Lambda}\middle|\Lambda = 1, \alpha\right). \tag{4.13}$$

现在我们来讨论 $\phi,\ \zeta$ 对参数 $\alpha$ 的依赖关系。图 4 展示了若干取不同 $\alpha$ 和 $\Lambda = 1$ 值时函数 $\phi$ 和 $\zeta$ 的轮廓。对于固定的 $x \in (0,\ \infty)$，函数 $\phi$ 似乎随 $\alpha$ 增大而增大，而函数 $\zeta$ 随 $\alpha.$ 增大而减小。还容易验证，在紧集 $\phi(x) \to \frac{1-e^{-x}}{x}$ 上以及



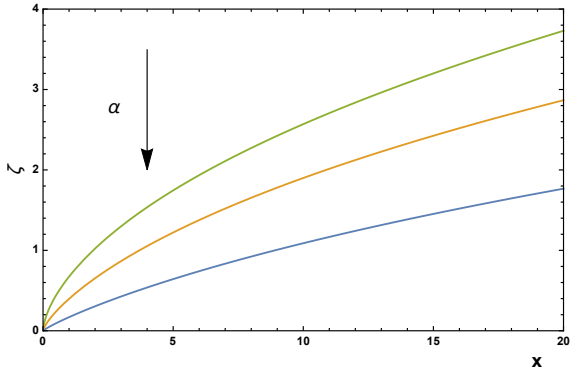




图4: $\alpha = 0.75$ （蓝色）、 $\alpha = 0.5$ （橙色）和 $\alpha = 0.25$ （绿色）时的函数 $\phi$ 和 $\zeta$，以及 $\Lambda = 1$。箭头表示 $\alpha$的增大方向。

$\zeta(x) \to \sqrt{x}$, 当 $\alpha \to 0$ 时，这直接源于在此极限下 $w$ 趋近于 $w_0$ 这一事实。现在我们断言，随着 $\alpha \to 1.$， $\phi(x)$ 趋近于 1，而 $\zeta(x)$ 在 $x \in (0, \infty)$ 的任意固定紧子集上一致趋近于 0。为此，首先注意到，根据 (2.16) 和 (2.21)，分部积分后可得:

$$\phi(x) = 1 - \tilde{\phi}(x), \tag{4.14}$$

with

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{\Lambda + (1-\Lambda)\int_{-x}^{0} w(s)\exp(-(s+x))ds/w(-x)}{1+\Lambda|w'(-x)/w(-x)|} \leq \frac{\Lambda + |1-\Lambda|}{1+\Lambda|w'(-x)/w(-x)|}, \quad x > 0, \tag{4.15}$$

where 最后一个不等式由 $w$的单调性得出。接下来，由 (2.16) 和 (3.44) 可得 ain

$$w''(x)w(x) = \frac{1}{\Lambda}\left(w'(x) + w^{\alpha}(x)\right)w(x) \leq (w'(x))^2, \quad x < 0. \tag{4.16}$$

将上面的表达式除以 $w^2$，并考虑到 $w' < 0$，可得

$$\Lambda\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2 + \left|\frac{w'(x)}{w(x)}\right| \geq \frac{1}{w^{1-\alpha}(x)}, \quad x < 0. \tag{4.17}$$

结合这一观察与 (4.8)，可得

$$\Lambda\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2 + \left|\frac{w'(x)}{w(x)}\right| \geq \frac{1}{(1-\alpha)(-x)}, \quad x < 0. \tag{4.18}$$

固定 $x < 0$，并令上式中 $\alpha \to 1$ 趋于极限，可得当 $\alpha \to 1$ 在 ˜的紧集上时， $|w'/w| \to \infty$。这一观察意味着，当 $\alpha \to 1$ 时， $\phi(x) \to 0$，因此在此极限下， $\phi(x) \to 1$。最后，由 (4.8) 和 (4.9) 可得

$$\zeta(x) \leq \sqrt{(1-\alpha)}\sqrt{x}. \tag{4.19}$$

令 $\alpha \to 1$ 趋于 $\zeta \to 0$，同时固定 $x > 0$，我们得到：当 $\alpha \to 1$ 时，在紧集上一致成立。

现在我们将讨论 $\alpha$ 对 $\phi$, $\zeta$ 的依赖关系。图5展示了若干 $\Lambda$ 和 $\alpha = 1/2.$ 取值下的函数 $\phi$ 和 $\zeta$。对于固定的 $x \in (0, \infty)$, 函数 $\phi$ 随 $\Lambda$ 增大，而函数 $\zeta$ 随 $\Lambda.$ 减小

由 $\phi$ 的单调性可直接得出一个显而易见的结论： $\sigma^*$ 是 $\theta$ 的减函数。结合 $\zeta$ 的单调性，可以立即推出 $c^*$ 是 $\theta$ 的减函数。这个结果

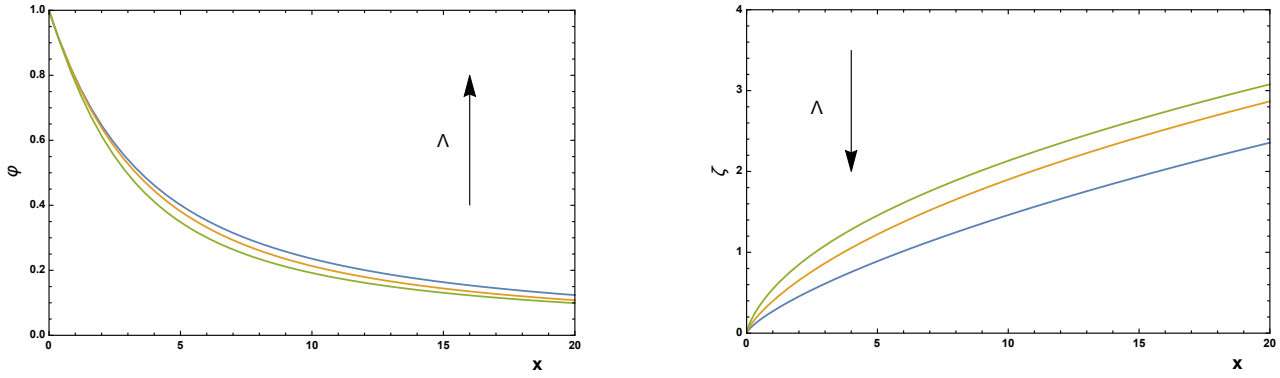



图5： $\Lambda = 5$ （蓝色）、 $\Lambda = 1$ （橙色）和 $\Lambda = 0.2$ （绿色）时的函数 $\phi$ 和 $\zeta$，以及 $\alpha = 1/2$。箭头表示 $\Lambda$ 的增大方向。

在该问题的物理背景下，这一点非常自然：点火温度升高会降低传播速度。

现在我们来讨论 $\phi(x)$ $\zeta(x)$ 在原点附近的行为，这将使我们能够得到点火温度接近 1 时 $(c^*,\ R^*)$ 的渐近表达式。这种情形尤其值得关注，因为已知当点火温度趋近于 1 时，火焰前沿会变得不稳定。关于零阶和一阶动力学情况下该情形中的火焰前沿不稳定性的讨论，参见 [2]。

函数 $\phi(x)$ 和 $\zeta(x)$ 在 $x$ 取较小值时的行为，可以根据渐近公式 (4.2) 重构。经过相当繁琐但直接的计算，我们得到：

$$\phi(x|\Lambda,\alpha) \approx 1 - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) x, \quad \zeta(x|\Lambda,\alpha) = (2\Lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{(1-\alpha)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{1+\alpha}}\right) x^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{for} \quad x \ll 1. \tag{4.20}$$

这一观察立即意味着，当点火温度接近 1 时，我们有：

$$c^*(\theta,\Lambda,\alpha) \simeq \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} \Lambda^{-\frac{\alpha}{2}} (1-\theta)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad R^*(\theta,\Lambda,\alpha) \simeq \frac{\sqrt{2(1+\alpha)}}{1-\alpha} \Lambda^{\frac{\alpha}{2}} (1-\theta)^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad |1-\theta| \ll 1. \tag{4.21}$$

直接验证表明，在这一参数范围内， $c^*$ 是关于 $\alpha$ 和 $\Lambda$的减函数，而 $R^*$ 则是关于这两个参数的增函数。此外， $R^*$ 是关于 $\theta$的减函数。图6展示了在 $\theta = 0.98$，条件下，取若干不同的 $\Lambda$ 值时， $c^*$ 和 $R^*$ 对 $\alpha$ 的依赖关系；图7展示了速度 $c^*$ 对 $\alpha$ 和 $\Lambda$的依赖关系。这些图是利用渐近公式（4.21）生成的，其结果与相应的数值对应结果极为接近。

此外，可以验证，由 (4.21) 给出的 $c^*$ 和 $R^*$ 完全再现了这些函数在 $\alpha \to 0$ 和 $\alpha \to 1$ 极限下的极限行为。事实上，当 $\alpha = 1$， 传播速度和反应区宽度由 [2] 给出。

$$c^*(\theta,\Lambda,\alpha=1) = \left(\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \Lambda\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad R^*(\theta,\Lambda,\alpha=1) = \infty. \tag{4.22}$$

而当 $\alpha = 0$，我们有 [2]

$$c^*(\theta,\Lambda,\alpha=0) = R^*(\theta,\Lambda,\alpha=0) = \sqrt{\kappa}. \tag{4.23}$$

其中， $\kappa$ 隐式定义为以下方程的正解:

$$e^{\kappa} = \frac{1}{1-\theta\kappa}. \tag{4.24}$$

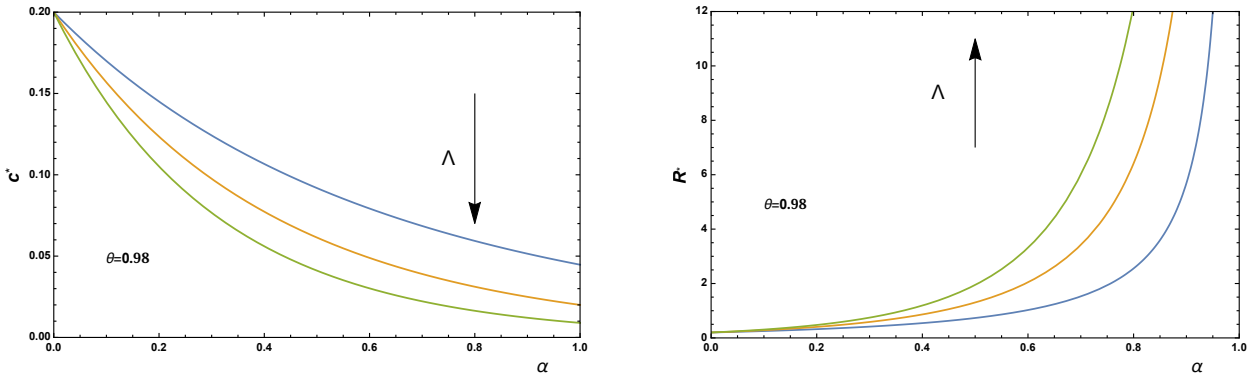



图6：传播速度 $c^*$ 和反应区宽度 $R^*$ 对 $\alpha$ 的依赖关系，其中 $\Lambda = 0.2$（蓝色）、 $\Lambda = 1$ （橙色）和 $\Lambda = 5$ （绿色）对应点火温度 $\theta = 0.98$。箭头表示 Λ.增加的方向

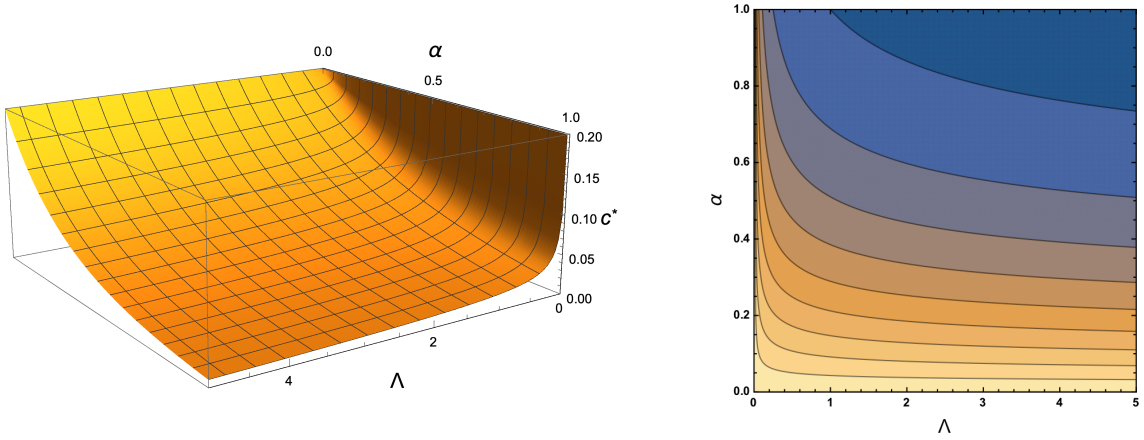



图7：传播速度 $c^*$ 对 $\alpha$ 和 $\Lambda$ 的依赖关系，其中 $\theta = 0.98$。左图为 $c^*(\theta = 0.98,\ \Lambda,\ \alpha)$ 的三维图，右图展示了该函数的等值集

当 $\theta$ 接近 1 时，这些公式给出：

$$c^*(\theta, \Lambda, \alpha = 1) \simeq \frac{1-\theta}{\sqrt{\Lambda}}, \quad c^*(\theta, \Lambda, \alpha = 0) \simeq \sqrt{2(1-\theta)} \quad \text{for} \quad |\theta - 1| \ll 1. \tag{4.25}$$

因此

$$\begin{aligned} &c^*(\theta, \Lambda, \alpha \to 1) \to c^*(\theta, \Lambda, \alpha = 1), \quad R^*(\theta, \Lambda, \alpha \to 1) \to \infty, \\ &c^*(\theta, \Lambda, \alpha \to 0) \to c^*(\theta, \Lambda, \alpha = 0), \quad R^*(\theta, \Lambda, \alpha \to 0) \to R^*(\theta, \Lambda, \alpha = 0). \end{aligned} \tag{4.26}$$

现在考虑 $\theta$的中间值情况，我们通过数值计算研究这一情况。图8、图9、图10展示了当$\Lambda = 0.2, 1, 5$ 和 $\theta = 0.75, 0.5, 0.25,$时，传播速度和反应区宽度对反应级数 $\alpha$ 的依赖关系；图11展示了当 $\theta = 0.5$时，传播速度对 $\alpha$和 Λ的依赖关系。根据 $\theta$, 取中间值时的数值计算结果， $c^*$ 和 $R^*$对 $\alpha$ 和 $\Lambda$ 的依赖特征与 $\theta$ 接近 1 时的情况相似。不过，随着 $\theta$ 减小， $c^*$ 对 $\alpha$ 和 $\Lambda$ 的依赖性都减弱了。在这一情况下， $R^*$ 对 $\alpha$ 的依赖仍然很强，但随着 $\theta$ 减小，其对 Λ的依赖性减弱。

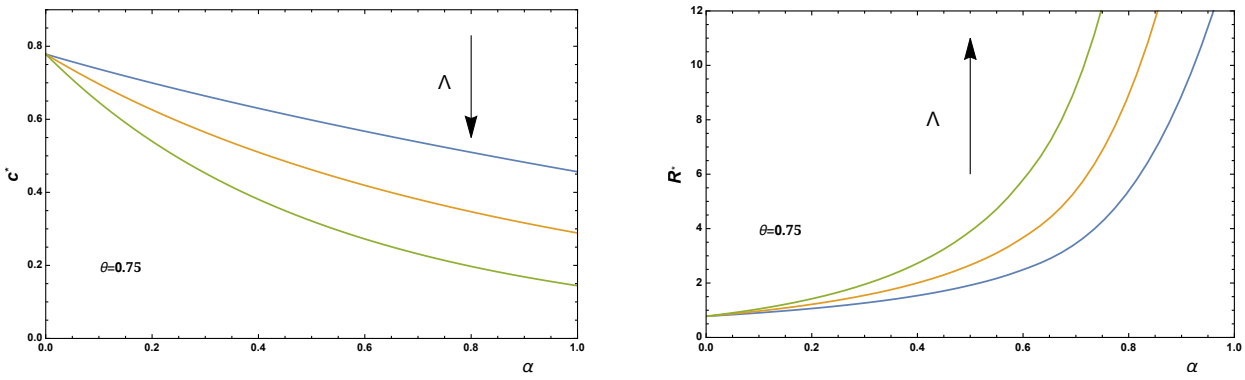



图8：传播速度 $c^*$ 和反应区宽度 $R^*$ 对 $\alpha$ 的依赖关系，其中 $\Lambda = 0.2$（蓝色）、 $\Lambda = 1$ （橙色）和 $\Lambda = 5$（绿色）对应点火温度 $\theta = 0.75$。箭头表示 Λ.增大的方向

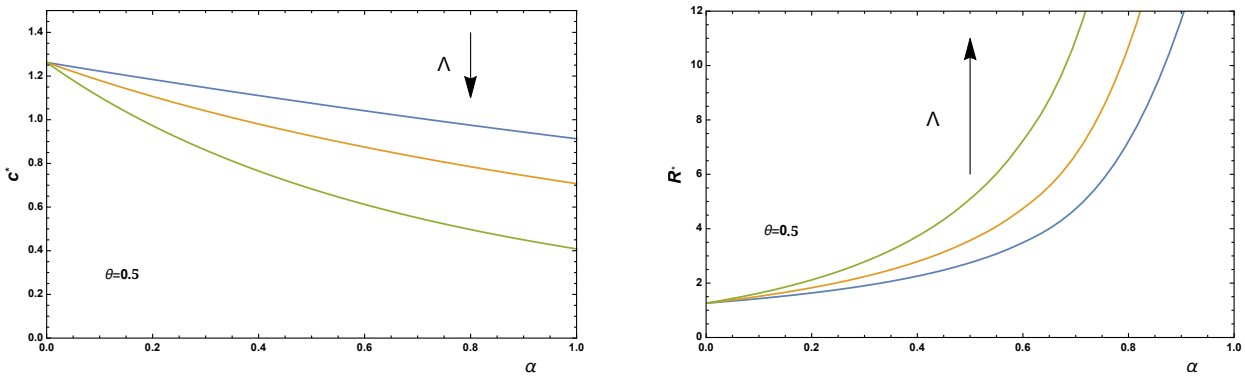



图9：传播速度 $c^*$ 和反应区宽度 $R^*$ 对 $\alpha$ 的依赖关系，其中 $\Lambda = 0.2$（蓝色）、 $\Lambda = 1$ （橙色）和 $\Lambda = 5$（绿色）对应点火温度 $\theta = 0.5$。箭头表示 Λ.增大的方向

当 $\theta$ 变得足够小时， $\phi(x)$ 和 $\zeta(x)$ 的渐近行为可以再次通过渐近公式 (4.2) 得到，其形式为：

$$\phi(x|\Lambda,\alpha) \approx \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\frac{1}{x}, \quad \zeta(x|\Lambda,\alpha) = \left(\sqrt{1-\alpha}\right)\sqrt{x} \quad \text{for} \quad x \gg 1. \tag{4.27}$$

因此，在此情形下，我们有：

$$c^*(\theta) \approx \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad R^*(\theta) \approx \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad \theta \ll 1. \tag{4.28}$$

因此，在此状态下，传播速度（在一阶近似下）仅取决于点火温度 $\theta$，而反应宽度与 $\Lambda$ 无关，并且是 $\alpha$ 的增函数。与 $\theta$ 接近于 1 的状态一样，当 $\alpha \to 0$ 和 $\alpha \to 1$ 时，传播速度和反应区宽度趋近于形式极限。

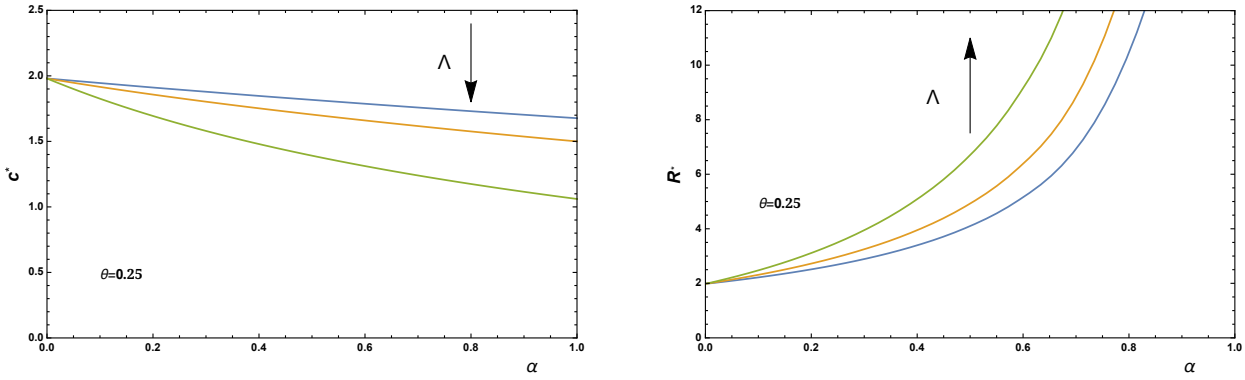



图10：传播速度 $c^*$ 和反应区宽度 $R^*$ 对 $\alpha$ 的依赖关系，其中 $\Lambda = 0.2$（蓝色）、 $\Lambda = 1$ （橙色）和 $\Lambda = 5$（绿色），点火温度为 $\theta = 0.25$。箭头表示 Λ.的增大方向

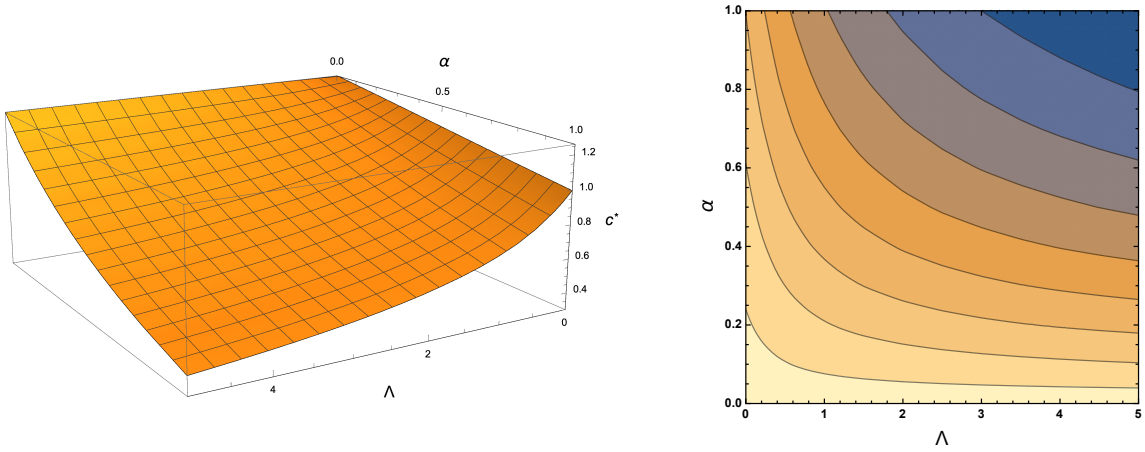



图11：传播速度 $c^*$ 对 $\alpha$ 和 $\Lambda$ 的依赖关系，其中 $\theta = 0.5$。左图为 $c^*(\theta = 0.5, \Lambda, \alpha)$ 的三维图，右图描绘了该函数的等值集。

上述讨论有力地表明，传播速度会随着反应级数的增加而降低。因此，反应级数为 $\alpha \in$ （0，1）的传播速度，其下界是反应级数为 1 时的传播速度，上界则是反应级数为 0 时的传播速度。这一并不显而易见的观察结果与物理直觉十分一致：反应级数增加会降低反应速率，进而减缓火焰前沿。另一个不那么令人意外的观察是，相对于热扩散率而言，分子扩散率的增加会降低火焰前沿的速度。对于一级反应，情况显然如此；而对于反应级数为 $\alpha \in$ （0，1）时，这一结论仍然成立。

因此，我们提出以下猜想：

**猜想4.1**。 传播速度 $c^*(\theta, \Lambda, \alpha)$ 是其所有自变量的递减函数，而反应宽度 $R^*(\theta, \Lambda, \alpha)$ 是 $\theta$ 的递减函数，并且是 $\Lambda$ 和 $\alpha$ 的递增函数。

**致谢**。AM 和 PVG 的部分工作得到了美以双边科学基金资助，项目编号为 2020005。PVG 谨此感谢 Fedor Nazarov 提供的多次宝贵讨论，并在证明本文主要结果方面给予的大力帮助。

# 5 附录

在本附录中　　我们证明不等式 (3.44) 等价于 (3.47)，并简要讨论问题的解
　　系统的角度来看。
题 (2.16)。从动力
In what follo下文将 (3.46) 右端的向量场记为 $\mathbf{X}_c$。该向量场的唯一临界点　　nt
该向量场的彩在线 d 中的 $Q$ 是原点 $O = (0, 0)$。

系统（3.46）已在 [3, 章节 4]中通过庞加莱-本迪克森定理的一个弱化版本进行了深入研究（参见 [8]）。以下命题概述了 [3] 中引理 4.7 和 4.8 的结果。

**命题 5.1**。存在一个唯一的原点全局稳定流形，它由一条 $c$ 中的 $\mathbf{X}$ $Q$ 轨线给出；当 $t \to 0^-$ 时，该轨线趋向原点，且由该轨线定义的轨道是函数 $p^\star = p^\star(q)$ 的图像，其中 $q \in (0, +\infty)$。此外，$p^\star$ 在 $q > 0$ 时为解析函数，并在 0 处连续延拓，取值为 $p^\star(0) = 0$。

系统（3.46）的轨线可以通过数值方法求得。图 12 和图 13 分别展示了该轨线在相平面上的笛卡尔坐标和极坐标表示。对于参数 $\Lambda$，$\alpha$ 的其他取值，轨线的定性行为也类似。

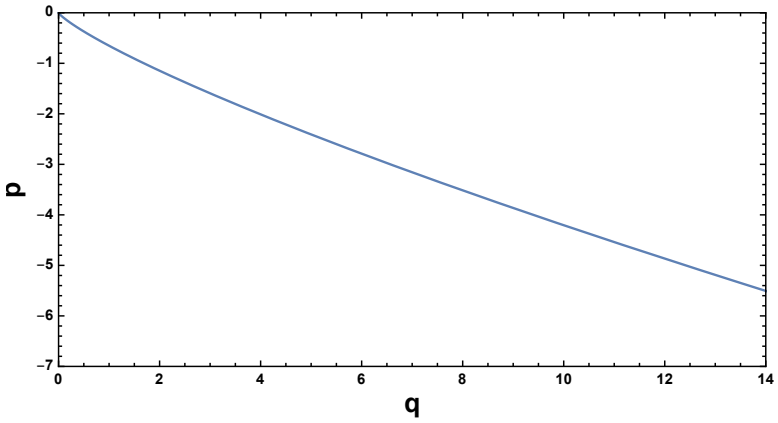
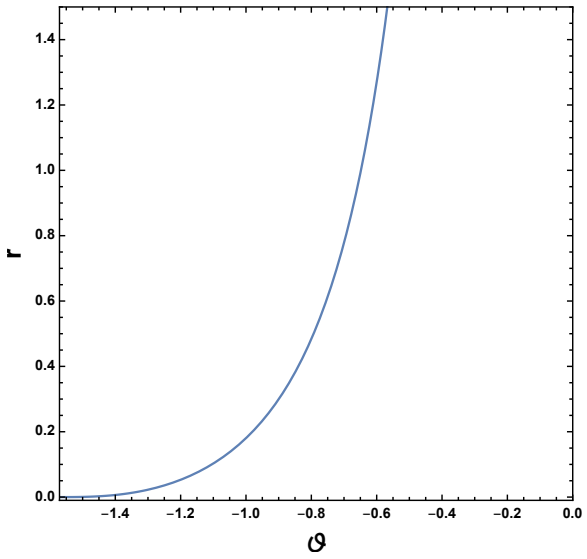



图　图 12：笛卡尔坐标（$q$，$p$）下，$\Lambda = 1$ 和 $\alpha = 1/2$ 时系统（3.46）的相图　　).




Fig图 13：系统（3.46）的相图，其中 $\Lambda = 1$ 和 $\alpha = 1/2$ 采用极坐标（$\vartheta$，$r$）　　.

接下来注意到，由（3.47）可得

$$\tan(\theta(t)) = \frac{p(t)}{q(t)}. \tag{5.1}$$

根据命题 5.1，轨线 $(q,\ p)(t)$ 是光滑的，因此（对上式求导）可得

$$\dot{\vartheta}(t) \quad = \quad \frac{q(t)\dot{p}(t) - p(t)\dot{q}(t)}{r^2(t)}. \tag{5.2}$$

由于

$$q(t)\dot{p}(t) - p(t)\dot{q}(t) = w(x)w''(x) - (w'(x))^2, \tag{5.3}$$

由（3.44）可得（3.48）。 $\Lambda = 1$ 和 $\alpha = 1/2$ 时， $\vartheta(t)$的图像如图 14 所示。函数$\vartheta(t)$在$(-\infty,\ 0)$上递减，并且当 $t \to 0$ 时趋近于 $-\pi/2$ ，当 $t \to -\infty$ 时趋近于零，而不受参数 $\Lambda$， $\alpha$ 具体取值的影响，这可由 $w$ 的渐近表达式（见方程（4.2））得出。

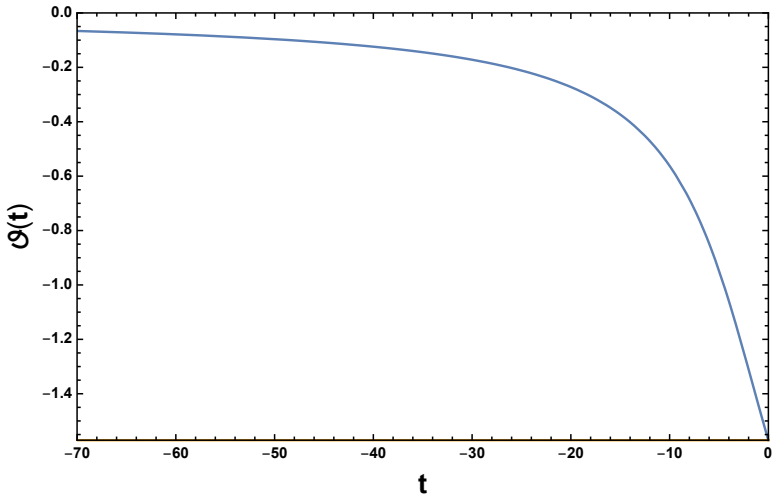



图 14：系统（3.46）的解对应的极角 $\vartheta$ 随时间的变化， $\Lambda = 1$ 和 $\alpha = 1/2$.时

**声明** **利益冲突声明：**作者声明不存在任何利益冲突 s.

**数据可用性：** 本文所述研究未使用任何数据。

# 参考文献

[1] H. Berestycki、B. Nicolaenko 和 B. Scheurer， *Traveling wave solutions to combustion models and their singular limits*，《SIAM 数学分析杂志》**16** （1985），第 6 期，1207–1242，DOI 10.1137/0516088。MR807905[2] I. Brailovsky、Gordon. P.V.、L. Kagan 和 G. Sivashinsky， *Diffusive-thermal instabilities in premixed flames: Stepwise ignition-temperature kinetics* **162** 2015 2077 2086 ，《燃烧与火焰》（），–。[3] C.-M. Brauner、R. Roussarie、P. Shang 和 L. Zhang， *Existence of a traveling wave solution in a free interface problem with fractional order kinetics* **281** 2021 105 147 ，《微分方程杂志》（），–。[4] D. A. Frank-Kamenetskii， *Diffusion and heat transfer in chemical kinetics*，普林纽姆出版社，纽约，1969 年。[5] Ja. I. Kanel’： *A stationary solution to a system of equations in the theory of burning*，《苏联科学院院刊》**149** （1963），第 2 期，367–369。[6] B. H. Gilding 和 R. Kersner， *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*，《非线性微分方程及其应用进展》，第 60 卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2004 年。[7] C. K. Law， *Combustion Physics*，剑桥大学出版社，剑桥，2010 年。

[8] R. Roussarie, *Some Applications of the Poincaré-Bendixson Theorem*, Qual. Theory Dyn. Syst. **20** (2021), 第64期, DOI 10.1007/s12346-021-00498-2.[9] A. L. S´anchez 和F. A. Williams, *Recent advances in understanding of flammability characteristics of hydrogen*, Prog. Energy Combust. Sci. **41** (2014), 1–55.[10] A. I. Volpert、V. A. Volpert 和 V. A. Volpert, *Traveling wave solutions of parabolic systems*, 数学专著译丛，第140卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。[11] V. Volpert, *Elliptic partial differential equations. Vol. 2*, 数学专著，第104卷，Birkh¨auser/Springer 巴塞尔股份公司，巴塞尔，2014年。反应-扩散方程。[12] N. N. Semenov, *Thermal theory of combustion and explosion*, Physics-Uspekhi **23** (1940), 251-292.[13] F. Williams, *Combustion theory*, Perseus Books，雷丁，马萨诸塞州，1985年。[14] J. Xin, *Front propagation in heterogeneous media*, SIAM Rev. **42** (2000), 第2期，161–230. [15] Ya. B. Zel′dovich、G. I. Barenblatt、V. B. Librovich 和 G. M. Makhviladze, *The mathematical theory of combustion and explosions* [ ], 1985 ,

Consultants Bureau Plenum 纽约，。