arXiv:2305.03656v1 [math.FA] 5 May 2023

积分算子在 H¨older 空间中连续时奇异核的一个必要条件

Massimo Lanza de Cristoforis 帕多瓦大学数学系，‘Tullio Levi-Civita’数学系，Trieste 路 63 号，帕多瓦 35121，意大利。电子邮箱：mldc@math.unipd.it

摘要：我们证明，关于奇异积分算子的极大函数有界性的一个条件，已知该条件足以保证相应积分算子在 H¨older 空间中的连续性；实际上，当积分算子的作用不会降低函数的正则性时，该条件也是必要的。我们在度量测度空间的框架下证明这一点，其中的测度满足某些增长条件，这些条件也涵盖非倍增测度。随后，我们将这一结论应用于定义在紧致可微流形上的积分算子。

关键词：非倍增测度、度量空间、H¨older 空间、奇异积分与弱奇异积分、度量空间中的位势理论。
数学主题分类（2010）：主要分类 42B20、47G10、47G40；次要分类 31B10。

1 引言

本文研究度量空间子集上 H¨older 空间中的奇异积分算子的分析，其中的测度可能不是倍增测度。这项研究延续了 Garc´ıa-Cuerva 和 Gatto 发起的研究计划，并在此基础上进一步发展，旨在具体应用于位势理论。设 (M, d) 为一个度量空间，且 X, Y 是 M 的子集。

$$\begin{aligned} &\text{Let } \mathcal{N} \text{ be a } \sigma\text{-algebra of parts of } Y\,, \mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{N}\,. \\ &\text{Let } \nu \text{ be measure on } \mathcal{N}\,. \\ &\text{Let } \nu(B(x,r)\cap Y) < +\infty \qquad \forall (x,r) \in X \times]0,+\infty[\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $\mathcal{B}_Y$ 表示 Y 的 Borel 子集的 σ-代数，且

$$B(\xi, r) \equiv \{\eta \in M : d(\xi, \eta) < r\}\,, \quad B(\xi, r] \equiv \{\eta \in M : d(\xi, \eta) \leq r\}\,, \tag{1.2}$$

对于所有 $(\xi, r) \in M\times]0,+\infty[$。我们假设 $\upsilon_Y \in]0,+\infty[$，并考虑关于 ν的两种假设。第一种假设是， Y 相对于 X是上界 υ_Y-阿尔福斯正则的，即

$$\begin{aligned}&\text{there exist } r_{X,Y,\upsilon_Y} \in]0,+\infty]\,,\ c_{X,Y,\upsilon_Y} \in]0,+\infty[\text{ such that}\\ &\nu(B(x,r)\cap Y) \le c_{X,Y,\upsilon_Y} r^{\upsilon_Y}\\ &\text{for all } x \in X \text{ and } r \in]0, r_{X,Y,\upsilon_Y}[\,.\end{aligned} \tag{1.3}$$

在 $X = Y$ 的情况下，我们称 Y 为上 υ_Y-阿尔福斯正则，这也是 Garc´ıa-Cuerva 和 Gatto [7], [8], Gatto [9], [10] 在 $X = Y = M$ 情况下所采用的假设。另请参见 Edmunds、Kokilashvili 和 Meskhi [5, 第 6] 章中关于勒贝格空间的讨论。

然后，我们考虑 [12] 中上阿尔福斯正则性的一个更强版本。具体而言，我们假设 Y 关于 X 是强上 υ_Y- 阿尔福斯正则的，即:

$$\begin{aligned}&\text{there exist } r_{X,Y,\upsilon_Y} \in]0,+\infty]\,,\ c_{X,Y,\upsilon_Y} \in]0,+\infty[\text{ such that}\\ &\nu((B(x,r_2)\setminus B(x,r_1))\cap Y) \le c_{X,Y,\upsilon_Y}(r_2^{\upsilon_Y} - r_1^{\upsilon_Y})\\ &\text{for all } x \in X \text{ and } r_1, r_2 \in [0, r_{X,Y,\upsilon_Y}[\text{ with } r_1 < r_2\,,\end{aligned} \tag{1.4}$$

其中我们约定， $B(x, 0) \equiv \emptyset$ （若 $X = Y$，我们就称 Y为强上 υ_Y-阿尔福斯正则）。例如，若 Y 是 $M = \mathbb{R}^n$中某个有界开Lipschitz子集的边界，则 Y关于 $\mathbb{R}^n$是上（$n-1$）-阿尔福斯正则；若 Y 是 $M = \mathbb{R}^n$ 中一个 C^1类有界开子集的边界，则 Y关于 Y是强上（$n-1$）-阿尔福斯正则。本文中及下文中，

$$n \in \mathbb{N}, n \ge 2\,.$$

我们计划考虑从 $X \times Y$ 到 $\mathbb{C}$ 的非对角核 K，其中

$$D_{X\times Y} \equiv \{(x, y) \in X \times Y : x = y\}$$

表示 $X \times Y$ 的对角集，并引入以下一类“势型”核（另见 [3]）。

定义 1.5 设 (M, d) 为一个度量空间。设 $X, Y \subseteq M$。设 $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$。我们用符号 $\mathcal{K}_{s_1,s_2,s_3}(X \times Y)$ 表示从 $(X \times Y) \setminus D_{X\times Y}$ 到 $\mathbb{C}$ 的连续函数 K 的集合，使得

$$\begin{aligned}\|K\|_{\mathcal{K}_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y)} \equiv{}& \sup\left\{ d(x,y)^{s_1}|K(x,y)| : (x,y) \in X \times Y, x \ne y \right\}\\ &+ \sup\left\{ \frac{d(x',y)^{s_2}}{d(x',x'')^{s_3}}|K(x',y) - K(x'',y)| : \right.\\ &\left. x', x'' \in X, x' \ne x'', y \in Y \setminus B(x', 2d(x',x'')) \right\} < +\infty\,.\end{aligned}$$

对于 $s_2 = s_1 + s_3$，存在所谓的标准核类，即 Garcı́a-Cuerva 和 Gatto [7], [8], Gatto [10] 已经证明 $T1$ 定理的情形：对于核为 K 的积分算子，涵盖具有 $X = Y$ 的弱奇异、奇异和超奇异积分算子。我们计划分析该积分算子

$$Q[Z,g,1](x) \equiv \int_Y Z(x,y)(g(x)-g(y))\,d\nu(y) \qquad \forall x \in X\,. \tag{1.6}$$

其中 Z 属于定义 1.5 中所述的类 $\mathcal{K}_{s_1,s_2,s_3}(X \times Y)$，且 g 是 $\mathbb{C}$值函数，属于 $X \cup Y$。我们在分析双层势时利用算子 (1.6)，并指出，应用中也会出现形如 (1.6) 的算子（参见例如 [3,§8]）。与（参见 [12, 命题 6.3 (ii)]）一样，我们可以通过引入一个限制更严格的核类来估计 $Q[Z,g,1]$ 的 H¨older 商。具体如下。

定义 1.7 设 (M,d) 为度量空间。设 $X, Y \subseteq M$。设 ν 如 (1.1) 中所述。设 $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$。定义

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^\sharp_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y) \equiv \Big\{ & K \in \mathcal{K}_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y):\\ & K(x,\cdot)\ \textit{is}\ \nu-\textit{integrable in}\ Y\setminus B(x,r)\ \textit{for all}\ (x,r)\in X\times]0,+\infty[\,,\\ & \sup_{x\in X}\sup_{r\in]0,+\infty[}\left|\int_{Y\setminus B(x,r)} K(x,y)\,d\nu(y)\right| < +\infty\Big\}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|K\|_{\mathcal{K}^\sharp_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y)} \equiv{}& \|K\|_{\mathcal{K}_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y)}\\ &+\sup_{x\in X}\sup_{r\in]0,+\infty[}\left|\int_{Y\setminus B(x,r)} K(x,y)\,d\nu(y)\right| \quad \forall K\in\mathcal{K}^\sharp_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y)\,.\end{aligned}$$

显然，$(\mathcal{K}^\sharp_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y)\,\|\cdot\|_{\mathcal{K}^\sharp_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y)})$ 是赋范空间，且 $\mathcal{K}^\sharp_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y)$ 连续嵌入到 $\mathcal{K}_{s_1,s_2,s_3}(X\times Y)$ 中。接着，可以利用以下命题建立 $Q[Z,g,1]$ 在“奇异”情形 $s_1 = \upsilon_Y$ 下的 H¨older 连续性；该命题拓展了 Gatto 的一些工作 [10, 定理 3] 的证明（参见 [12, 命题 6.3 (ii)]）。

命题 1.8 设 (M,d) 是一个度量空间。设 $X, Y \subseteq M$。设

$$\upsilon_Y \in]0,+\infty[\,,\ \beta\in]0,1]\,,\ s_2\in[\beta,+\infty[\,,\ s_3\in]0,1]\,.$$

设 ν 如(1.1)所示，$\nu(Y) < +\infty$。则下述结论成立。

(b) 如果 $s_2-\beta > \upsilon_Y$、$s_2 < \upsilon_Y+\beta+s_3$ 和 Y 关于 X 是上 υ_Y-阿尔福斯正则的，那么从双线性映射到

$$\mathcal{K}^\sharp_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)\times C^{0,\beta}(X\cup Y) \quad to \quad C_b^{0,\min\{\beta,\upsilon_Y+s_3+\beta-s_2\}}(X)\,,$$

将 (Z,g) 映射到 $Q[Z,g,1]$ 的算子是连续的。

(bb) 如果 $s_2-\beta=\upsilon_Y$ 和 Y 关于 X 是强上 υ_Y-阿尔福斯正则的，那么从

$$\mathcal{K}^{\sharp}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)\times C^{0,\beta}(X\cup Y)\quad to\quad C_b^{0,\max\{r^\beta,\omega_{s_3}(r)\}}(X)\,,$$

将 (Z,g) 映射到 $Q[Z,g,1]$ 的映射是连续的。

(bbb) 若 $s_2-\beta<\upsilon_Y$ 和 Y 关于 X 是上 υ_Y-阿尔福斯正则的，则从

$$\mathcal{K}^{\sharp}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)\times C^{0,\beta}(X\cup Y)\quad to\quad C_b^{0,\min\{\beta,s_3\}}(X)\,,$$

将 (Z,g) 映射到 $Q[Z,g,1]$ 的映射是连续的。

这里， $C^{0,\,\beta}(X\cup Y)$ 表示 $X\cup Y$ 上 β-H¨older 连续函数的半范数空间； $C^{0,\,\gamma}_{b}(X)$ 表示 X 上有界 γ-H¨older 连续函数的赋范空间，对所有 $\gamma\in]0、\,1]$ 和 $C^{0,\,\max\{r^\beta,\omega_{s_3}\,r\,\}()}_{b}(X)$ 表示 X 上有界广义 H¨older 连续函数的赋范空间，其连续模为 $\max\{r^\beta,\omega_{s_3}(r)\}$（见下文 (2.4)–(2.5) 附近的记号）。现在，命题 1.8 的假设要求核 Z 属于 $\mathcal{K}^{\sharp}_{\upsilon_Y,\,s_2,\,s_3}(X\times Y)$，而属于 $\mathcal{K}^{\sharp}_{\upsilon_Y,\,s_2,\,s_3}(X\times Y)$ 则要求估计核 Z 的极大函数，即证明

$$\sup_{x\in X}\sup_{r\in]0,+\infty[}\left|\int_{Y\setminus B(x,r)}Z(x,y)\,d\nu(y)\right|<+\infty \tag{1.9}$$

在这里，我们想知道这样的假设是否确有必要。事实上，在唯一的假设——核 Z 属于 $\mathcal{K}_{\upsilon_Y,\,s_2,\,s_3}(X\times Y)$，且 g 是 β-H¨lder 连续的——之下，定义 $Q[Z,g,1]$ 的积分是弱奇异的。

因此，本文的主要目的是确定：当 $Z\in\mathcal{K}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)$ 时，为保证 $Q[Z,\cdot,1]$ 的连续性， Z 在 (1.9) 中的极大函数实际上必须满足哪些条件。具体而言，我们证明 (2.9)–(2.11) 成立；这些条件限制了当 r 较小时 (1.9) 左端的增长（见命题 2.6 (i)–(iii)）。为证明这些必要条件，我们对集合 X 提出一项额外假设，但不对测度 ν 提出任何额外假设（见条件 (2.7)）。

我们还注意到，可以对参数提出一些额外限制，使条件 (2.9)–(2.11) 能够推出条件 (1.9) 成立，并且 $Q[Z,\cdot,1]$ 的目标空间等于 $C^{0,\,\beta}_{b}(X)$。

为此，在命题 (b) 的情形下，还可以进一步要求 $s_2\le\upsilon_Y+s_3$，这一假设与标准核的条件 $s_2=\upsilon_Y+s_3$ 相容。

相反，在命题 (bb) 的情形下，还可以进一步要求 $s_3>\beta$；在命题 (bbb) 的情形下，还可以进一步要求 $s_3\ge\beta$，但这些要求与标准核的条件 $s_2=\upsilon_Y+s_3$ 不相容。

在所有情形 (b)—(bbb) 中，我们所说的是：当 $Q[Z,\cdot,1]$ 有界且正则性没有降低时，必要条件 (1.9) 成立。相反，当 $Q[Z,\cdot,1]$ 是

有界且正则性有所降低时，条件 (1.9) 就由关于变量 r的极大函数增长条件取代。

在第 3 节中，我们将展示命题 2.6 (i) 在 Y 是紧致可微流形时的一个应用。

2 算子 Q 的分析

我们首先引入以下两个技术引理，它们将 Gatto [10, 第 104] 页中的相应结论推广到 $X \neq Y$ 的情形。证明请参见 [12, 引理 3.2、3.4、3.6]。

引理 2.1 设 (M, d) 为度量空间。设 $X, Y \subseteq M$。设 $\upsilon_Y \in]0, +\infty[$。设 ν 如 (1.1) 所示。设 Y 关于 X 是上 υ_Y-阿尔福斯正则的。则以下结论成立。

(i) $\nu(\{x\}) = 0$ *for all* $x \in X \cap Y$.

(ii) 设 $\nu(Y) < +\infty$。若 $s \in]0, \upsilon_Y[$，则

$$c'_{s,X,Y} \equiv \sup_{x \in X} \int_Y \frac{d\nu(y)}{d(x,y)^s} \leq \nu(Y) a^{-s} + c_{X,Y,\upsilon_Y} \frac{\upsilon_Y}{\upsilon_Y - s} a^{\upsilon_Y - s} \tag{2.2}$$

对所有 $a \in]0, r_{X,\ Y,\ \upsilon_Y}[$。若 $s = 0$，则

$$c'_{0,X,Y} \equiv \sup_{x \in X} \int_Y \frac{d\nu(y)}{d(x,y)^0} = \nu(Y)\,.$$

(iii) 若 $\nu(Y) < +\infty$ 当 $r_{X,\ Y,\ \upsilon_Y} < +\infty$。若 $s \in]-\infty, \upsilon_Y[$, 则

$$c''_{s,X,Y} \equiv \sup_{(x,t) \in X \times]0, +\infty[} t^{s - \upsilon_Y} \int_{B(x,t) \cap Y} \frac{d\nu(y)}{d(x,y)^s} < +\infty\,.$$

于是我们得到以下引理。

引理 2.3 设 (M, d) 为度量空间。设 $X, Y \subseteq M$。设 $\upsilon_Y \in]0, +\infty[$。设 ν 如 (1.1) 所示，$\nu(Y) < +\infty$。则下列结论成立。

(i) 设 Y相对于 X是上 υ_Y-阿尔福斯正则的。若 $s \in]\upsilon_Y, +\infty[$，则

$$c'''_{s,X,Y} \equiv \sup_{(x,t) \in X \times]0, +\infty[} t^{s - \upsilon_Y} \int_{Y \setminus B(x,t)} \frac{d\nu(y)}{d(x,y)^s} < +\infty\,.$$

(ii) 设 Y关于 X是强上 υ_Y-阿尔福斯正则的。那么

$$c^{iv}_{X,Y} \equiv \sup_{(x,t) \in X \times]0, 1/e[} |\log t|^{-1} \int_{Y \setminus B(x,t)} \frac{d\nu(y)}{d(x,y)^{\upsilon_Y}} < +\infty\,.$$

由于我们计划在 H¨older 空间中分析 (1.6) 的算子 Q ，现在引入一些记号。设 X 为一个集合。那么我们定义

$$B(X) \equiv \left\{ f \in \mathbb{C}^X : f \text{ is bounded} \right\}, \quad \|f\|_{B(X)} \equiv \sup_X |f| \qquad \forall f \in B(X).$$

若（M, d）是一个度量空间，则 $C^0(M)$ 表示从 M 到 $\mathbb{C}$ 的连续函数集合，并且我们引入 $C_b^0(M) \equiv C^0(M) \cap B(M)$ 作为 $B(M)$ 的子空间。设 ω 是一个从 $[0, +\infty[$ 到其自身的函数，使得

$$\begin{aligned} &\omega(0) = 0, \qquad \omega(r) > 0 \qquad \forall r \in]0, +\infty[, \\ &\omega \text{ is increasing}, \ \lim_{r \to 0^+} \omega(r) = 0, \\ &\text{and} \sup_{(a,t) \in [1, +\infty[\times]0, +\infty[} \frac{\omega(at)}{a\omega(t)} < +\infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

若 f 是从度量空间（M, d）的子集 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{C}$ 的函数，则我们用 $|f : \mathbb{D}|_{\omega(\cdot)}$ 表示 f 的 $\omega(\cdot)$-H¨lder 常数，其由以下公式给出

$$|f : \mathbb{D}|_{\omega(\cdot)} \equiv \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(d(x, y))} : x, y \in \mathbb{D}, x \neq y \right\}.$$

若 $|f : \mathbb{D}|_{\omega(\cdot)} < \infty$，则称 f 是 $\omega(\cdot)$-H¨lder 连续的。有时，我们简单地写作 $|f|_{\omega(\cdot)}$，而不写 $|f : \mathbb{D}|_{\omega(\cdot)}$。$C^0(\mathbb{D})$ 中函数为 $\omega(\cdot)$-H¨lder 连续的子集记作 $C^{0,\,\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$，且 $|f : \mathbb{D}|_{\omega(\cdot)}$ 是 $C^{0,\,\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ 上的半范数。然后我们考虑空间 $C_{\,b}^{0,\,\omega(\cdot)}(\mathbb{D}) \equiv C^{0,\,\omega(\cdot)}(\mathbb{D}) \cap B(\mathbb{D})$，其范数为

$$\|f\|_{C_b^{0,\omega(\cdot)}(\mathbb{D})} \equiv \sup_{x \in \mathbb{D}} |f(x)| + |f|_{\omega(\cdot)} \qquad \forall f \in C_b^{0,\omega(\cdot)}(\mathbb{D}).$$

在 $\omega(\cdot)$ 为某个固定的 $\alpha \in]0, 1]$ 所对应的函数 r^α 的情况下，其中 $1]$ 是一个所谓的 H¨older 指数，我们简单地记作 $|\cdot : \mathbb{D}|_\alpha$，而不再记作 $|\cdot : \mathbb{D}|_{r^\alpha}$，$C^{0,\alpha}(\mathbb{D})$，而不再记作 $C^{0,r^\alpha}(\mathbb{D})$，$C_{\,b}^{0,\,\alpha}(\mathbb{D})$，而不再记作 $C_{\,b}^{0,\,r^\alpha}(\mathbb{D})$，并且我们称 f 是 α-H¨older 连续的，如果 $|f : \mathbb{D}|_\alpha < \infty$。接下来，我们引入一个用于广义 H¨older 范数的函数。对于每个 $\theta \in]0, 1]$，我们通过如下方式定义从 $[0, +\infty[$ 到其自身的函数 $\omega_\theta(\cdot)$。

$$\omega_\theta(r) \equiv \begin{cases} 0 & r = 0, \\ r^\theta |\ln r| & r \in]0, r_\theta], \\ r_\theta^\theta |\ln r_\theta| & r \in]r_\theta, +\infty[, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中，对于所有 $\theta \in]0、\ 1]$，$r_\theta \equiv e^{-1/\theta}$。显然，$\omega_\theta(\cdot)$ 是凹函数，并满足条件 (2.4)。我们还注意到，若 $\mathbb{D} \subseteq M$，则连续嵌入

$$C_b^{0,\theta}(\mathbb{D}) \subseteq C_b^{0,\omega_\theta(\cdot)}(\mathbb{D}) \subseteq C_b^{0,\theta'}(\mathbb{D})$$

对所有 $\theta' \in]0, \theta[$ 均成立。现在我们转而分析式 (1.6) 中的积分算子 Q。正如我们已经提到的，命题 1.8 的充分条件要求核

Z 属于 $\mathcal{K}^{\sharp}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)$，而属于 $\mathcal{K}^{\sharp}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)$ 则需要对核 Z 的极大函数进行估计，也就是说，需要证明条件 (1.9) 成立。现在我们证明以下“逆命题”，说明在某些假设下，条件 (1.9) 实际上是必要的。

命题 2.6 设 (M,d) 是一个度量空间。设 $X, Y\subseteq M$。假设

$$\begin{aligned}&\textit{there exists } a\in]0,+\infty[\textit{ such that for each } \rho\in]0,a[\textit{ and } x'\in X,\\ &\textit{there exists } x''\in X \textit{ such that } d(x',x'')=\rho\,.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Let

$$\upsilon_Y\in]0,+\infty[\,,\ \beta\in]0,1]\,,\ s_2\in[\beta,+\infty[\,,\ s_3\in]0,1]\,.$$

设 ν 如 (1.1) 所示，$\nu(Y)<+\infty$。设 $Z\in\mathcal{K}_{\upsilon_Y,\,s_2,\,s_3}(X\times Y)$。则

$$Z(x,\cdot)\ \textit{is } \nu-\textit{integrable in } Y\setminus B(x,r)\ \textit{for all } (x,r)\in X\times]0,+\infty[\tag{2.8}$$

并且以下结论成立。

(i) 设 $s_2-\beta>\upsilon_Y$、$s_2<\upsilon_Y+\beta+s_3$。设 Y 关于 X 是上 υ_Y-阿尔福斯正则的。如果从 $C^{0,\beta}(X\cup Y)$ 到 $C^{0}_{\cdot,b}{}^{\min\{\beta,\upsilon_Y+s_3+\beta-s_2\}}(X)$ 的将 g 映射为 $Q[Z,g,1]$ 的线性映射是连续的，那么

$$\sup_{x\in X}\sup_{r\in]0,e^{-1/s_3}[}\left|\int_{Y\setminus B(x,r)}Z(x,y)\,d\nu(y)\right|\frac{r^{\beta}}{\max\{r^{\beta},r^{\upsilon_Y+s_3+\beta-s_2}\}}<+\infty\,.\tag{2.9}$$

特别地，如果 $s_2\le\upsilon_Y+s_3$，则 $\min\{\beta,\upsilon_Y+s_3+\beta-s_2\}=\beta$，且不等式 (1.9) 成立。

(ii) 设 $s_2-\beta=\upsilon_Y$。设 Y 关于 X 满足强上 υ_Y-阿尔福斯正则。若将 g 映射为 $Q[Z,g,1]$ 的从 $C^{0,\beta}(X\cup Y)$ 到 $C^{0}_{\cdot,\ b}{}^{\max\{r^{\beta},\omega_{s_3}\ r\ \}()}(X)$ 的线性映射是连续的，则

$$\sup_{x\in X}\sup_{r\in]0,e^{-1/s_3}[}\left|\int_{Y\setminus B(x,r)}Z(x,y)\,d\nu(y)\right|\frac{r^{\beta}}{\max\{r^{\beta},\omega_{s_3}(r)\}}<+\infty\,.\tag{2.10}$$

特别地，如果 $s_3>\beta$，那么 $C^{0}_{\cdot,\ b}{}^{\max\{r^{\beta},\omega_{s_3}\ r\ \}()}(X)=C^{0}_{\cdot,\ b}{}^{\beta}(X)$，且不等式 (1.9) 成立。

(iii) 设 $s_2-\beta<\upsilon_Y$。设 Y 关于 X 是上 υ_Y-阿尔福斯正则的。如果将 g 映射到 $Q[Z,g,1]$ 的线性映射 $C^{0,\ \beta}(X\cup Y)$ 到 $C^{0}_{\cdot,\ b}{}^{\min\{\beta,s_3\}}(X)$ 是连续的，那么

$$\sup_{x\in X}\sup_{r\in]0,e^{-1/s_3}[}\left|\int_{Y\setminus B(x,r)}Z(x,y)\,d\nu(y)\right|\frac{r^{\beta}}{\max\{r^{\beta},r^{s_3}\}}<+\infty\,.\tag{2.11}$$

特别地，若 $s_3\ge\beta$，则 $C^{0}_{\cdot,\ b}{}^{\min\{\beta,s_3\}}(X)=C^{0}_{\cdot,\ b}{}^{\beta}(X)$，并且不等式 (1.9) 成立。

证明。由于 $Z \in \mathcal{K}_{\upsilon_Y,\ s_2,\ s_3}(X \times Y)$，我们有

$$|Z(x,y)| \le \frac{\|Z\|_{\mathcal{K}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)}}{d(x,y)^{\upsilon_Y}} \le \frac{\|Z\|_{\mathcal{K}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)}}{r^{\upsilon_Y}} \qquad \forall y \in Y \setminus B(x,r) \tag{2.12}$$

对所有 $(x,r) \in X\times]0,+\infty[$。另一方面，$Z$ 是连续的，且 $\nu(Y)$是有限的，因此条件 (2.8) 得到满足。不等式 (2.12) 还表明，只需证明对于 $r \in]0、\min\{a, e^{-1/s_3}\}/2[\ (\subseteq]0, \min\{a, e^{-1}\}/2[)$，不等式 (1.9)、(2.9)–(2.11) 成立即可。我们发现，将其设为.....较为方便。

$$\phi(r) \equiv \begin{cases} \max\{r^\beta, r^{\upsilon_Y+s_3+\beta-s_2}\} & \text{if } s_2-\beta > \upsilon_Y, s_2 < \upsilon_Y+\beta+s_3\,, \\ \max\{r^\beta, \omega_{s_3}(r)\} & \text{if } s_2-\beta = \upsilon_Y\,, \\ \max\{r^\beta, r^{s_3}\} & \text{if } s_2-\beta < \upsilon_Y \end{cases}$$

对所有 $r \in [0,+\infty[$。其思路在于证明一个上界估计。

$$\left|\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))} Z(x',y)\,d\nu(y)\right| |g(x')-g(x'')|$$

以 $\phi(d(x',x''))$、核 Z 的范数以及 g 的半范数表示，其中 $g \in C^{0,\beta}(X\cup Y)$，$x'$，$x'' \in X$, $d(x',x'') \le \min\{a, e^{-1/s_3}\}/2$；接着选择适当的 g，以便建立 $\left|\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))} Z(x',y)\,d\nu(y)\right|$ 的上界，该上界与 x' 和 x'' 无关；然后选择 x''，使得 $2d(x',x'') = r$，并得到我们所需的 $\left|\int_{Y\setminus B(x',r)} Z(x',y)\,d\nu(y)\right|$ 的上界。为此，我们首先考察下面的初等等式。

$$\begin{aligned} &Q[Z,g,1](x') - Q[Z,g,1](x'') \\ &\quad = \int_Y Z(x',y)(g(x')-g(y))\,d\nu(y) - \int_Y Z(x'',y)(g(x'')-g(y))\,d\nu(y) \\ &\quad = \int_{Y\cap B(x',2d(x',x''))} Z(x',y)(g(x')-g(y))\,d\nu(y) \\ &\qquad - \int_{Y\cap B(x',2d(x',x''))} Z(x'',y)(g(x'')-g(y))\,d\nu(y) \\ &\qquad + \int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))} Z(x',y)[(g(x')-g(y))-(g(x'')-g(y))]\,d\nu(y) \\ &\qquad + \int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))} [Z(x',y)-Z(x'',y)](g(x'')-g(y))\,d\nu(y) \end{aligned}$$

对所有 $x'、x'' \in X、d(x'、x'') \le \min\{a, e^{-1/s_3}\}/2$ 和 $g \in C^{0,\beta}(X\cup Y)$。接下来我们注意到，在陈述 (i)–(iii) 的每个假设下，线性算子 $Q[Z,\cdot,1]$ 是从 $C^{0,\beta}(X\cup Y)$ 到 $C^{0,\phi(\cdot)}_b(X)$ 的连续算子。于是，我们引入下列记号

：$\mathcal{L}(C^{0,\beta}(X\cup Y)\ C^{0,\ \phi(\cdot)}(X))$ 表示从 $C^{0,\beta}(X\cup Y)$ 到 $C^{0,\ \phi(\cdot)}(X)$ 的线性连续算子赋范空间。于是，引理 2.1 以及包含关系$B(x',2d(x',x''))^{b}\subseteq B(x'',3d(x',x''))$ 推出

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))} Z(x',y)[g(x'')-g(x')]\,d\nu(y)\right| \qquad (2.13)\\
&\quad\le \|Q[Z,\cdot,1]\|_{\mathcal{L}(C^{0,\beta}(X\cup Y),C_b^{0,\phi(\cdot)}(X))}|g:\ X\cup Y|_\beta\phi(d(x',x''))\\
&\qquad+\int_{Y\cap B(x',2d(x',x''))}|Z(x',y)|\,|g(x')-g(y)|\,d\nu(y)\\
&\qquad+\int_{Y\cap B(x',2d(x',x''))}|Z(x'',y)|\,|g(x'')-g(y)|\,d\nu(y)\\
&\qquad+\|Z\|_{\mathcal{K}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)}|g:X\cup Y|_\beta\\
&\qquad\quad\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}\frac{d(x',x'')^{s_3}}{d(x',y)^{s_2}}d(y,x'')^\beta\,d\nu(y)\\
&\quad\le \|Q[Z,\cdot,1]\|_{\mathcal{L}(C^{0,\beta}(X\cup Y),C_b^{0,\phi(\cdot)}(X))}|g:\ X\cup Y|_\beta\phi(d(x',x''))\\
&\qquad+\|Z\|_{\mathcal{K}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)}|g:X\cup Y|_\beta\Big\{\int_{Y\cap B(x',2d(x',x''))}\frac{d\nu(y)}{d(x',y)^{\upsilon_Y-\beta}}\\
&\qquad+\int_{Y\cap B(x'',3d(x',x''))}\frac{d\nu(y)}{d(x'',y)^{\upsilon_Y-\beta}}\Big\}\\
&\qquad+\|Z\|_{\mathcal{K}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)}|g:X\cup Y|_\beta\\
&\qquad\quad\times\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}\frac{d(x',x'')^{s_3}}{d(x',y)^{s_2}}d(y,x'')^\beta\,d\nu(y)\\
&\quad\le \|Q[Z,\cdot,1]\|_{\mathcal{L}(C^{0,\beta}(X\cup Y),C_b^{0,\phi(\cdot)}(X))}|g:\ X\cup Y|_\beta\phi(d(x',x''))\\
&\qquad+\|Z\|_{\mathcal{K}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)}|g:X\cup Y|_\beta c''_{\upsilon_Y-\beta,X,Y}\\
&\qquad\quad\times\Big\{(2d(x',x''))^{\upsilon_Y-(\upsilon_Y-\beta)}+(3d(x',x''))^{\upsilon_Y-(\upsilon_Y-\beta)}\Big\}\\
&\qquad+\|Z\|_{\mathcal{K}_{\upsilon_Y,s_2,s_3}(X\times Y)}|g:X\cup Y|_\beta\\
&\qquad\quad\times\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}\frac{d(x',x'')^{s_3}}{d(x',y)^{s_2}}d(y,x'')^\beta\,d\nu(y)
\end{aligned}
$$

对于所有 $x',x''\in X$, $d(x',x'')\le\min\{a,e^{-1/s_3}\}/2$ 和 $g\in C^{0,\beta}(X\cup Y)$。接下来我们注意到，三角不等式意味着

$$d(y,x'')\le d(y,x')+d(x',x'')\le 2d(x',y)\qquad \forall y\in Y\setminus B(x',2d(x',x''))$$

因此，相应地

$$\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x'')}\frac{d(x',x'')^{s_3}}{d(x',y)^{s_2}}d(y,x'')^\beta\,d\nu(y) \qquad (2.14)$$

$$\leq 2^{\beta}\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}\frac{d\nu(y)}{d(x',y)^{s_2-\beta}}d(x',x'')^{s_3}$$

对所有满足 x'、$x''\in X$、$d(x',x'')$ 且 $\leq \min\{a,e^{-1/s_3}\}/2$ 的情形。现在我们区分三种情况。若 $s_2-\beta>\upsilon_Y$ 如陈述 (i) 中所述，则引理 2.3 (i) 意味着，

$$\begin{aligned}\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}&\frac{d\nu(y)}{d(x',y)^{s_2-\beta}}d(x',x'')^{s_3} \\ &\leq c'''_{s_2-\beta,X,Y}(2d(x',x''))^{\upsilon_Y-(s_2-\beta)}d(x',x'')^{s_3} \\ &\leq c'''_{s_2-\beta,X,Y}d(x',x'')^{\upsilon_Y+s_3+\beta-s_2}\end{aligned} \tag{2.15}$$

对所有 x'、$x''\in X$、$d(x',x'')$，$\leq \min\{a,e^{-1/s_3}\}/2$。若 $s_2-\beta=\upsilon_Y$ 如断言 (ii) 中所述，则引理 2.3 (ii) 推出

$$\begin{aligned}\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}&\frac{d\nu(y)}{d(x',y)^{s_2-\beta}}d(x',x'')^{s_3} \\ &\leq c^{iv}_{X,Y}|\log(2d(x',x''))|\,d(x',x'')^{s_3} \\ &\leq c^{iv}_{X,Y}|\log d(x',x'')|\,d(x',x'')^{s_3}\left(1+\frac{\log 2}{|\log d(x',x'')|}\right) \\ &\leq 2c^{iv}_{X,Y}|\log d(x',x'')|\,d(x',x'')^{s_3}\end{aligned} \tag{2.16}$$

对所有 x'、$x''\in X$、$d(x',x'')$，$\leq \min\{a,e^{-1/s_3}\}/2$。若 $s_2-\beta<\upsilon_Y$ 如断言 (iii) 中所述，则引理 2.1 (i) 推出

$$\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}\frac{d\nu(y)}{d(x',y)^{s_2-\beta}}d(x',x'')^{s_3}\leq c'_{s_2-\beta,X,Y}d(x',x'')^{s_3} \tag{2.17}$$

对所有 x'、$x''\in X$、$d(x',x'')$，$\leq \min\{a,e^{-1/s_3}\}/2$。

在断言 (i) 的假设下，我们有 $s_2-\beta>\upsilon_Y$，且不等式 (2.13)、(2.14)、(2.15) 表明存在 $c_{(i)}\in]0,+\infty[$，使得

$$\begin{aligned}\left|\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}Z(x',y)[g(x'')-g(x')]\,d\nu(y)\right| &\\ \leq c_{(i)}|g:X\cup Y|_{\beta} &\\ \times\max\left\{\phi(d(x',x'')),d(x',x'')^{\beta},d(x',x'')^{\upsilon_Y+s_3+\beta-s_2}\right\} &\\ = c_{(i)}|g:X\cup Y|_{\beta}\phi(d(x',x'')), &\end{aligned}$$

对于所有 x'、$x''\in X$、$d(x',x'')$，$\leq \min\{a,e^{-1/s_3}\}/2$ 和 $g\in C^{0,\beta}(X\cup Y)$。

在命题 (ii) 的假设下，我们有 $s_2-\beta=\upsilon_Y$，且不等式 (2.13)、(2.14)、(2.16) 表明存在 $c_{(ii)}\in]0,+\infty[$，使得

$$\left|\int_{Y\setminus B(x',2d(x',x''))}Z(x',y)[g(x'')-g(x')]\,d\nu(y)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le c_{(ii)}|g : X \cup Y|_\beta \\
&\quad \times \max\left\{\phi(d(x', x'')), d(x', x'')^\beta, |\log d(x', x'')|\, d(x', x'')^{s_3}\right\} \\
&= c_{(ii)}|g : X \cup Y|_\beta \phi(d(x', x''))
\end{aligned}
$$

对于所有 x'、$x'' \in X$、$d(x', x'') \le \min\{a, e^{-1/s_3}\}/2$ 以及 $g \in C^{0,\,\beta}(X \cup Y)$。

在命题 (iii) 的假设下，我们有 $s_2 - \beta < \upsilon_Y$，且不等式 (2.13)、(2.14)、(2.17) 表明存在 $c_{(iii)} \in]0, +\infty[$，使得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{Y \setminus B(x', 2d(x', x''))} Z(x', y)[g(x'') - g(x')]\, d\nu(y)\right| \\
&\qquad \le c_{(iii)}|g : X \cup Y|_\beta \\
&\qquad\quad \times \max\left\{\phi(d(x', x'')), d(x', x'')^\beta, d(x', x'')^{s_3}\right\} \\
&\qquad = c_{(iii)}|g : X \cup Y|_\beta \phi(d(x', x''))
\end{aligned}
$$

对所有 x'、$x'' \in X$、$d(x', x'') \le \min\{a, e^{-1/s_3}\}/2$ 且 $g \in C^{0,\,\beta}(X \cup Y)$。

因此，在所有情形 (i)–(iii) 下，都存在 $c \in]0, +\infty[$，使得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{Y \setminus B(x', 2d(x', x''))} Z(x', y)\, d\nu(y)\right| |g(x'') - g(x')| \\
&\qquad \le c|g : X \cup Y|_\beta \phi(d(x', x''))
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

对所有 x'、$x'' \in X$、$d(x', x'') \le \min\{a, e^{-1/s_3}\}/2$ 且 $g \in C^{0,\,\beta}(X \cup Y)$。接下来，我们选择一个依赖于 x' 的 g。具体而言，令

$$
g_{x'}(y) \equiv d(x', y)^\beta \qquad \forall y \in X \cup Y
$$

对所有 $x' \in X$。根据初等不等式

$$
|g_{x'}(u_1) - g_{x'}(u_2)| = |d(x', u_1)^\beta - d(x', u_2)^\beta| \le d(u_1, u_2)^\beta \qquad \forall u_1, u_2 \in X \cup Y\,,
$$

由 Yensen 不等式可得，我们有

$$
|g_{x'} : X \cup Y|_\beta \le 1 \qquad \forall x' \in X\,.
$$

（参见，例如，Folland [6, 命题 6.11]）。于是 $g_{x'} \in C^{0,\beta}(X \cup Y)$，且不等式 (2.18) 表明，

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{Y \setminus B(x', 2d(x', x''))} Z(x', y)\, d\nu(y)\right| d(x', x'')^\beta \\
&\qquad = \left|\int_{Y \setminus B(x', 2d(x', x''))} Z(x', y)\, d\nu(y)\right| |g_{x'}(x'') - g_{x'}(x')| \\
&\qquad \le c|g_{x'} : X \cup Y|_\beta \phi(d(x', x'')) \le c\phi(d(x', x''))
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

对于所有 $x', x'' \in X$, $d(x', x'') \leq \min\{a, e^{-1/s_3}\}/2$。因此，如果 (x', r) 属于 $X \times]0, \min\{a, e^{-1/s_3}\}/2[$我们的假设意味着存在 $x'' \in X$，使得 $d(x', x'') = r/2$，从而不等式 (2.18) 意味着

$$\left| \int_{Y \setminus B(x', r)} Z(x', y)\, d\nu(y) \right| r^{\beta} 2^{-\beta} \leq c\phi(r/2) \leq c\phi(r)$$

因此证明完成。断言 (i)–(iii) 的最后部分是相应前半部分的直接推论。□

我们注意到，a 存在的条件意味着 X中的每个点都是 X 的聚点。

3 当 Y 为紧致可微流形时的一种应用

由于嵌入在 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 类紧致流形 Y 是 $(n-1)$-上阿尔福斯正则的，现我们给出命题 2.6 (i) 在 Y 是嵌入于 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 类紧致流形时的一个应用。为此，我们需要以下初等引理，它表明 Y 满足技术条件 (2.7)。

引理 3.1 设 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。设 Y 是 C^0 类的紧致流形，嵌入于 $\mathbb{R}^n$ 中，且维数为 m。设 $m \geq 1$。则 Y 满足条件 (2.7)，其中 $X = Y$。

证明。由于 Y 是 C^0 类的紧致流形，Y 可由有限个开连通坐标域覆盖，其中每个坐标域都不等于 Y。于是，取 a 为这一有限开覆盖的勒贝格数的一半，则对每个 $x' \in Y$ 和 $\rho \in]0$，集合 $Y \cap \mathbb{B}_n(x', \rho)$ 都包含于 Y 的有限覆盖中的至少一个开连通坐标域内，记为 A（例如参见 Dugundji [4, 定理 4.5，第 XI 章]）。由于 A 与 $\mathbb{R}^m$ 的一个非空开子集同胚，A 不可能是紧致的。由于 $Y \cap \mathbb{B}_n(x', \rho)$ 是紧致的，$Y \cap \mathbb{B}_n(x', \rho)$ 不可能等于 A，因此集合 $A \setminus (Y \cap \mathbb{B}_n(x', \rho))$ 非空。由于 $Y \cap \mathbb{B}_n(x', \rho)$ 包含 x'，它非空。由于 $Y \cap \mathbb{B}_n(x', \rho)$ 是 A 中的非空开集，且 A 连通，我们得出 $Y \cap \partial\mathbb{B}_n(x', \rho)$ 非空，并且条件 (2.7) 对 $X = Y$ 成立。□

接下来我们引入以下内容。关于切向梯度 grad_Y 的定义，例如可参见 Kirsch 和 Hettlich [11, A.5], Chavel [1, 第 1] 章。证明可参见[13, 定理 6.2]

定理 3.2 设 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$。设 Y 是嵌入于 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 类紧致流形。设 $s_1 \in [0, (n-1)[$。设 $\beta \in]0, 1]$, $t_1 \in]0, (n-1) + \beta[$。设核 $K \in \mathcal{K}_{s_1,\ s_1+1,\ 1}(Y \times Y)$ 满足以下假设

$$K(\cdot, y) \in C^1(Y \setminus \{y\}) \qquad \forall y \in Y\,, \qquad \int_Y K(\cdot, y)\, d\sigma_y \in C^1(Y)\,,$$

$$\mathrm{grad}_{Y,x} K(\cdot,\cdot) \in (\mathcal{K}_{t_1,Y\times Y})^n \ .$$

设 $\mu \in C^{0,\ {}_b\beta}(Y)$。则函数 $\int_Y K(\cdot,y)\mu(y)\,d\sigma_y$ 属于 $C^1(Y)$ 类，函数 $[\mathrm{grad}_{Y,\ x}K(x,y)](\mu(y)-\mu(x))$ 对所有 $x \in Y$ 在 $y \in Y$ 中均可积，且公式

$$\begin{aligned} &\mathrm{grad}_{Y,x} \int_Y K(x,y)\mu(y)\,d\sigma_y \\ &\quad = \int_Y [\mathrm{grad}_{Y,x}K(x,y)](\mu(y)-\mu(x))\,d\sigma_y + \mu(x)\mathrm{grad}_Y \int_Y K(x,y)\,d\sigma_y \,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

对于所有 $x \in Y$， $\int_Y K(\cdot,y)\mu(y)$ 的切向梯度均成立。

结合命题 1.8 (b) 和定理 3.2，可以证明以下关于积分算子的连续性定理 3.4：该积分算子的核为 K，其值属于紧致流形 Y 上的 Schauder 空间，其中流形为 C^1 类（参见 [13, Thm. 6.3 (ii) (b)]）。关于 Schauder 空间 $C^{1,\beta}(Y)$ 的定义——其中的函数 μ 为 C^1 类，定义于 Y 上，且 μ 的切向梯度是 β-H¨older 连续的——或者关于基于 Y 的有限参数化族的等价定义，例如参见 [2, §2.20]。

定理 3.4 设 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$。设 Y 是嵌入于 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 类紧致流形。设 $s_1 \in [0,(n-1)[$。设 $\beta \in]0,1]$, $t_1 \in [\beta,(n-1)+\beta[$, $t_2 \in [\beta,+\infty[$,$t_3 \in]0,1]$。设核 $K \in \mathcal{K}_{s_1,s_1+1,1}(Y\times Y)$ 满足以下假设

$$K(\cdot,y) \in C^1(Y\setminus\{y\}) \quad \forall y \in Y \,.$$

设 $t_1 = (n-1)$、$\mathrm{grad}_{Y,x}K(\cdot,\cdot) \in \left(\mathcal{K}^\sharp_{t_1,t_2,t_3}(Y\times Y)\right)^n$, $t_2-\beta > (n-1)$, $t_2 < (n-1)+\beta+t_3$ 以及

$$\int_Y K(\cdot,y)\,d\nu(y) \in C^{1,\min\{\beta,(n-1)+t_3+\beta-t_2\}}(Y) \,.$$

那么，从 $C^{0,\ {}_b\beta}(Y)$ 到 $C^{1,\ {}_b\min\{\beta,(n-1)+t_3+\beta-t_2\}}(Y)$ 的映射将 μ 映射为函数 $\int_Y K(\cdot,y)\mu(y)\,d\sigma_y$，该映射是线性且连续的。

结合命题 2.6 (i) 和定理 3.2，我们现在可以证明定理 3.4（连续性定理）的以下逆命题，并附加限制条件 $t_2 \leq (n-1)+t_3$；在此情形下， $C^{1,\min\{\beta,(n-1)+t_3+\beta-t_2\}}(Y) = C^{1,\beta}(Y)$。我们还设

$$\mathbb{B}_n(x,\rho) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \rho\}$$

对所有 $\rho > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$。

定理 3.5 设 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$。设 Y 是嵌入于 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 类紧致流形。设 $s_1 \in [0,(n-1)[$。设 $\beta \in]0,1]$, $t_1 \in [\beta,(n-1)+\beta[$, $t_2 \in [\beta,+\infty[$,$t_3 \in]0,1]$。设核 $K \in \mathcal{K}_{s_1,s_1+1,1}(Y\times Y)$ 满足以下假设。

$$K(\cdot,y) \in C^1(Y\setminus\{y\}) \quad \forall y \in Y \,.$$

设 $t_1 = (n-1)$、$\mathrm{grad}_{Y,x} K(\cdot,\cdot) \in (\mathcal{K}_{t_1,t_2,t_3}(Y \times Y))^n$, $t_2 - \beta > (n-1)$、 $t_2 \le (n-1) + t_3$。如果将 μ 映射为函数 $\int_Y K(\cdot, y)\mu(y)\, d\sigma_y$ 的映射，从 $C^{0,\beta}(Y)$ 到 $C^{1,\beta}(Y)$ 是线性且连续的，那么不等式

$$\sup_{x \in Y} \sup_{r \in]0,+\infty[} \left| \int_{Y \setminus \mathbb{B}_n(x,r)} \mathrm{grad}_{Y,x} K(x,y)\, d\sigma_y \right| < +\infty \tag{3.6}$$

成立。

证明。容易验证， Y 关于 Y 是上（$n-1$）阿尔福斯正则的。根据引理 3.1， Y 满足条件 (2.7)。由于 $1 \in C^{0,\beta}(Y)$，我们的假设意味着 that

$$\int_Y K(\cdot, y)\, d\sigma_y \in C^{1,\beta}(Y)\,.$$

根据定理 3.2，对于所有 $\mu \in C^{0,\beta}(Y)$，函数 $\int_Y K(\cdot, y)\mu(y)\, d\sigma_y$ 属于 $C^1(Y)$ 类，并且关于 $\int_Y K(\cdot, y)\mu(y)\, d\sigma_y$ 的切向梯度的公式 (3.3) 成立。 $C^{0,\beta}(Y)$ 中逐点乘积的连续性确保映射从

$$C^{0,\beta}(Y) \qquad \text{to} \qquad C^{0,\beta}(Y)\,,$$

它将 μ 映射为 $\mu(\cdot)\mathrm{grad}_Y \int_Y K(\cdot, y)\, d\sigma_y$，是线性且连续的。于是公式 (3.3) 表明，该映射从

$$C^{0,\beta}(Y) \qquad \text{to} \qquad C^{0,\beta}(Y)\,,$$

它将 μ 映射为函数 $\int_Y [\mathrm{grad}_{Y,\ x} K(x,y)](\mu(y)\ - \mu(x))\ d\sigma_y$ 是线性且连续的。由于核 $Z(x,y) \equiv \mathrm{grad}_{Y,\ x} K(x,y)$ 满足命题 2.6 (i) 的假设，我们得出不等式 (1.9) 对于 $X = Y$, $Z(x,y) \equiv \mathrm{grad}_{Y,\ x} K(x,y)$ 成立，因此证明完成。□

致谢 作者感谢 Istituto Nazionale di Alta Matematica 下属的 Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilit`a e le loro Applicazioni 提供的支持。

参考文献

[1] I. Chavel，《黎曼几何中的特征值》。包括 Burton Randol 撰写的一章，以及 Jozef Dodziuk 撰写的附录。纯粹与应用数学，第115卷。学术出版社公司，佛罗里达州奥兰多，1984年。

[2]M. Dalla Riva、M. Lanza de Cristoforis 和 P. Musolino，《奇异摄动边值问题：泛函分析方法》，施普林格，查姆，2021。[3] F. Dondi 和 M. Lanza de Cristoforis，《二阶椭圆微分算子双层势的正则化性质》， Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 71 (2017), 69–110。

[4] J. Dugundji, 《拓扑学》。Allyn and Bacon, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿—伦敦—悉尼，1978。重印1966年原版，Allyn and Bacon 高等数学系列。[5] D.E. Edmunds、V. Kokilashvili 和 A. Meskhi, 《有界与紧致积分算子》，Kluwer，荷兰多德雷赫特，2002。[6] G.B. Folland, 《实分析：现代方法及其应用》。第二版。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1999。[7] J. Garc´ıa-Cuerva 和 A.E. Gatto, 《与非倍增测度相关的分数积分算子的有界性》。Studia Math. 162(3) (2004), 245–261。[8] J. Garc´ıa-Cuerva 和 A.E. Gatto, 《与非倍增测度相关的 Lipschitz 空间与 Calder´on-Zygmund 算子》。Publ. Mat. 49 (2005), no. 2, 285–296。[9] A.E. Gatto, 《与倍增及非倍增测度相关的分数阶微积分》。载于《调和分析》，15–37，Contemp. Math., 411, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006。[10] A.E. Gatto, 《与非倍增测度相关的分数积分、奇异积分和超奇异积分在非齐次 Lipschitz 空间上的有界性》。Collect. Math. 60, 1 (2009), 101–114。[11] A. Kirsch 和 F. Hettlich, 《时谐 Maxwell 方程的数学理论：展开法、积分法与变分法》，施普林格，2015。[12] M. Lanza de Cristoforis, 《阿尔福斯正则集上 H ¨older 空间中的积分算子》，即将发表于 Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. (2023)。[13] M. Lanza de Cristoforis, 《流形上 H ¨older 空间中核的类别与积分算子的切向梯度的连续性性质》，已投稿，(2022)。