arXiv:2305.03657v1 [math.DG] 5 May 2023

¨Astheno-Kähler度量的变形

TOMMASO SFERRUZZA

Abstract. 紧复流形具备 Astheno-K¨ahler 度量这一性质，在复结构的小变形作用下并不稳定。本文证明了若要沿着从一个配备 Astheno-K¨ahler 度量的初始紧复流形出发的变形曲线，存在 Astheno-K¨ahler 度量曲线，则必须满足的上同调条件。此外，我们将结果应用于两个不同的实 8 维幂零流形族；这些幂零流形都配备了不变幂零复结构。由此，我们为这些流形上 Astheno-K¨ahler 度量曲线的存在性给出了障碍。

1. Introduction

对紧复流形的复结构进行小变形的研究，为其同伦不变量和复不变量提供了许多有趣的见解。Kodaira 和 Spencer 在 [19] 中取得了一项重要成果，证明了 K¨ahler 条件在小变形下具有稳定性，即存在一个基本形式为闭形式的厄米度量这一性质。事实上，K¨ahler 条件与紧致偶数维流形的拓扑结构密切相关，例如，它对 Betti数（即 de Rham上同调空间的维数）施加了诸多限制，并蕴含了 Sullivan 意义下的形式性，即微分形式代数与其 de Rham 上同调代数等价（[30, 31, 8]）。变形下的稳定性也已在一些与流形复结构直接相关的重要不变量上得到证明，例如，满足$\partial\bar\partial$-引理这一性质，即每个 d-闭 d-恰当形式同时也是 $\partial\bar\partial$-恰当形式，以及近期提出并研究的不同版本（参见[5, 24, 29]）。

关于特殊厄米结构的稳定性，即基本形式属于依赖于流形复结构的微分算子核的厄米度量，已证明具有*Gauduchon*意义下的标准度量这一性质是稳定的。事实上，根据著名的Gauduchon定理（见 [15]），给定复流形上的任意厄米度量，其基本形式都与Gauduchon意义下的标准度量共形。然而，这类度量仅代表一种非常特殊的情形，因为对于 n维复流形上的许多其他特殊度量概念，例如，

- 强 *K¨ahler*（带挠率）度量，即其基本形式 ω 满足 $\partial\bar\partial\omega = 0$,
- *asteno-K¨ahler* 度量，即其基本形式 ω 满足 $\partial\bar\partial\omega^{n-2} = 0$ 的度量,
- *astheno-K¨ahler* 度量，即其基本形式 ω 满足 $d\omega^{n-1} = 0$的度量,

稳定性通常并不成立（分别参见 [12, 2]）。另一方面，平衡度量和 SKT 度量的稳定性充分条件已在 [5, 21, 25]中得到证明。因此，自然会想到探究：对于紧复流形，是否存在关于初始流形或所进行的复结构变形的假设，使得 astheno-K¨ahler 条件具有稳定性。

弱 K¨ahler 度量这一概念最早由 Jost 和 Yau 在研究某些非线性椭圆方程组 [17] 的解时引入，后来又被用于证明关于射影平坦流形的刚性定理 [20]。根据定义，显然在一个复的

Date：2023年5月8日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 53C55；32C10。*Key words and phrases.* astheno-K¨ahler 度量；复结构变形；Bott-Chern上同调。作者获得了 INdAM 旗下 GNSAGA 的资助。

复维数小于 2 的流形上，每个厄米度量都是 astheno-K¨ahler 度量。在复维数为 3 时，astheno-K¨ahler 的概念与带挠率的强 K¨ahler 的概念相同，因此，适用于后一类度量的结果也适用于前一类。例如，在赋有不变复结构的 6 维实幂零流形上，不变 SKT（因而也即 astheno-K¨ahler）度量是否存在仅取决于复结构（见[10]）。不过，对于 $n > 3$，这两个概念并无关联，即存在带有 astheno-K¨ahler 度量、但不属于带挠率强 K¨ahler 的流形，反之亦然（见 [13, 26]）。

此外，尽管已有猜想认为，对于同一个非 K¨ahler 紧复流形，不可能在同一个复结构下同时存在 SKT 度量和平衡度量（见 [14]），但在 [22] 中已证明，一个强 K¨ahler 度量是平衡的，当且仅当该度量同时也是 K¨ahler 度量。然而，在 [11] 中，作者证明了存在一个紧复非 K¨ahler 流形，它同时承认一个平衡度量和一个强 K¨ahler 度量。此外，SKT 度量或平衡度量的存在，分别等价于流形上 1-多重闭结构和 $(n-1)$-K¨ahler 结构的存在（见 [1]），因此，在紧流形上，它们的存在性可以通过流的语言进行内在刻画（见 [9]），这与 K¨ahler 情形类似（见 [16]）。尽管对于强 K¨ahler 度量而言，这样的刻画并不成立，但强 K¨ahler 度量的存在仍然会对流形施加一定限制，即存在一个 $(n-2)$-多重闭形式，并且任意全纯 1-形式都关于外微分而闭。在 [13]，中，作者研究了强 K¨ahler 度量在复爆破下的性质，并确定了一个保证稳定性的充分微分条件；在 [28] 中则表明，在较弱的微分条件下，稳定性并不能得到保证。

本文中，我们沿用与 [23] 和 [27], 类似的方法，证明了从紧复流形上的固定 astheno-K¨ahler 度量出发，存在 astheno-K¨ahler 度量曲线所需的上同调类型必要条件。更具体地说，若 $e^{\iota_\varphi|\iota_\varphi}$ 表示 [25] 中引入并在第2节回顾的延拓映射，且 ι_ψ 表示由取值于某个全纯向量丛的$(0,1)$-向量形式所诱导的缩并，正如我们在第3节回顾的那样，则可得到以下结果。

定理。设 (M, J) 是一个 n 维紧复流形，配备 *astheno-K¨ahler* 度量 g 及其对应的基本形式 ω。设 $\{M_t\}_{t\in I}$ 是一个紧复流形的可微族，满足 $M_0 = M$，并由 $\varphi(t) \in A^{0,1}(T^{1,0}(M))$ 参数化，其中 $t \in I := (-\epsilon, \epsilon)$，$\epsilon > 0$。设 $\{\omega_t\}_{t\in I}$ 是沿 $\{M_t\}_{t\in I}$ 的 *Hermitian*度量光滑族，记作

$$\omega_t = e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}(\omega(t)),$$

其中，在局部坐标下，$\omega(t) = \omega_{ij}(t)\, dz^i \wedge dz^j \in \mathcal{A}^{1,1}(M)$ 以及 $\omega_0 = \omega$。

若 ω_t^{n-2} 的局部表达式为 $e^{\iota_\varphi|\iota_\varphi}(\overline{\omega}^{n-2}(t)) = e^{\iota_\varphi|\iota_\varphi}(f_v(t)\, dz^{i_1} \wedge dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_{n-2}} \wedge dz^{j_{n-2}})$，令

$$(\omega^{n-2}(t))' := \frac{\partial}{\partial t}(f_v(t))\, dz^{i_1} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots dz^{i_{n-2}} \wedge d\bar{z}^{j_{n-2}} \in \mathcal{A}^{n-2,n-2}(M).$$

那么，如果每个度量 ω_t 都是 *astheno-K¨ahler* 度量，对于 $t \in I$，则必有

$$2i\mathfrak{Im}(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)(\omega^{n-2}) = \partial\overline{\partial}(\omega^{n-2}(0))'.$$

因此，我们立即得到以下推论。

推论。 设(M, J) 是一个配备了 *astheno-K¨ahler* 度量 g及其关联基本形式 ω的紧*Hermitian*流形。如果存在一个 *astheno-K¨ahler* 度量的光滑族，它在 $t = 0$处与 ω 重合，沿着变形族$\{M_t\}_t$，其中 $M_0 = M$，并由 M 上的$(0, 1)$-向量形式 $\varphi(t)$ 参数化，那么下列方程必定成立

$$\left[(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)(\omega^{n-2})\right]_{H_{BC}^{n-1,n-1}(M)} = 0.$$

我们注意到，主定理的证明用到了在 $t = 0$ 处展开的泰勒级数展开，以及 [25] 中证明的公式，这些公式适用于作用于每个 M_t 上的 (p, q)-形式的微分算子 ∂_t 和 ∂_t，$t \in I$。

作为我们研究成果的一项应用，我们刻画了从两族赋有不变幂零复结构的四维幂零流形出发，沿某些变形曲线存在 Astheno-K¨ahler 度量曲线所面临的障碍。得益于一般性结果（例如，参见 [6, 4, 3]），赋有不变复结构的幂零流形（例如，参见 [7]）是紧致非 K¨ahler 复流形的一类天然例子，在这些流形上，可以通过不变张量明确验证上同调性质和度量性质。

本文的结构如下。在第2节中，我们确定全文将使用的记号。在第3节中，我们简要回顾变形理论所需的工具，其中包括延拓映射，以及作用于变形族上的微分形式的微分算子 ∂_t 和 ∂_t 的公式。在第4节中，我们将陈述并证明主定理。在第5节中，我们回顾幂零流形和特殊复结构几何的主要事实；在第6 节中，我们从两个具有不变幂零复结构的四维幂零流形族出发，刻画定理4.1 和推论4.2 所产生的障碍。

致谢。 作者谨此感谢 Adriano Tomassini 提出的许多有益建议和评论。

2. Notation

设（M, J）为一个复维数为 n 的紧复流形，其中 M 是一个 $2n$ 维紧可微流形， J 是 M 上的可积几乎复结构，即 TM 的一个端omorphism，满足 $J^2 = -\mathrm{id}_{TM}$，且*Nijenhuis*张量 N_J 恒等于零，也就是说，

$$N_J(X,Y) = [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [JX,JY] = 0$$

对每个 X， $Y \in TM$。

将复结构 J扩展到丛 TM的复化版本后，我们得到如下分解

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

根据 J的 $\pm i$-特征子空间进行分解。考虑 J 在复形式上的诱导作用时，也有类似的分解，即

$$T^*_{\mathbb{C}}M = (T^{1,0}M)^* \oplus (T^{0,1}M)^*$$

因此，在外幂 $\bigwedge^k_{\mathbb{C}} M := \bigwedge^k(T^*_{\mathbb{C}}M)$ 上有

$$\bigwedge^k_{\mathbb{C}} M = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} M,$$

其中 $\bigwedge^{p,\,q} M := \bigwedge^p(T^{1,\,0}M)^* \otimes \bigwedge^q(T^{0,\,1}M)^*$ 是 M上 $(p,\ q)$-形式的丛。令 $\mathrm{A}^k_{\mathbb{C}}(M)$ 和 $\mathrm{A}^{p,\,q}(M)$ 分别表示丛的整体截面，即复 k-形式以及 $(p,\ q)$-形式在 $(M,\ J)$ 上的整体截面。于是，由于 J是可积的，微分 d在 M上的 $(p,\ q)$-形式上的作用为

$$d\colon \mathcal{A}^{p,q}(M) \to \mathcal{A}^{p+1,q}(M) \oplus \mathcal{A}^{p,q+1}(M),$$

因此 $d = \partial + \partial$,− 其中我们设 $\partial := \pi^{p+1,\,q}$ 和 $\partial := \pi^{p,\,-q+1}$。显然， $\partial^2 = \partial^{2} = 0$ 和 $\partial\partial = -\partial\partial$。 −

设 g 是 (M, J) 上的厄米度量，即 M 上满足以下条件的黎曼度量：对任意 $X, Y \in TM$，均有 $g(JX, JY)$ =$g(X, Y)$。设 $\omega(X, Y)$:= $g(JX, Y)$ 对任意 $X, Y \in TM$ 均成立，则它是与 g 关联的基本形式。将 ω 延拓为 $\mathrm{A}^2_{\mathbb{C}}M$ 上的形式后，它是 M 上的正 (1,1) 形式。 n 维复流形 (M, J) 上的 Astheno-K ¨ahler 度量是指满足其基本形式符合以下条件的厄米度量 g。

$$\partial\overline{\partial}\omega^{n-2} = 0.$$

一个带挠率的强 *K ¨ahler* 度量在 (M, J) 上是一个厄米度量 g，其基本形式满足

$$\partial\overline{\partial}\omega = 0.$$

(M, J) 的 *Bott-Chern*上同调由以下空间给出

$$H^{p,q}_{BC}(M) := \frac{\mathrm{Ker}\left(d\colon \mathcal{A}^{p,q}(M) \to \mathcal{A}^{p+1,q}(M) \oplus \mathcal{A}^{p,q+1}(M)\right)}{\mathrm{Im}\left(\partial\overline{\partial}\colon \mathcal{A}^{p-1,q-1}(M) \to \mathcal{A}^{p,q}(M)\right)},$$

而我们称 α 是 M 上的一个 (p,q)-形式，若 $\Delta_{BC}\alpha = 0$，则称其为 *Bott-Chern*调和，其中 *Bott-Chern Laplacian*

$$\Delta_{BC} = \partial\overline{\partial}\overline{\partial}^*\partial^* + \overline{\partial}^*\partial^*\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}^*\partial\partial^*\overline{\partial} + \partial^*\overline{\partial}\partial^*\partial + \overline{\partial}^*\overline{\partial} + \partial^*\partial$$

是四阶自伴椭圆算子。由于 M 被假设为紧致的， α 是Bott-Chern调和的，当且仅当 $d\alpha = 0$ 且 $\partial\partial * \alpha = 0$，其中 $*$ 是关于 $\mathbb{C}$的 $*$-反线性的Hodge g算子。记 $\mathcal{H}^{p,q}_{\Delta_{BC}}(M)$ 为Bott-Chern调和 (p,q)-形式空间。Schweitzer在 [32] 中建立的适用于Bott-Chern上同调的Hodge理论表明，存在以下向量空间同构：

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\Delta_{BC}}(M) \xrightarrow{\sim} H^{p,q}_{BC}(M).$$

设 $\pi\colon E \to M$ 为 M 上的一个秩为 r 的全纯向量丛。于是，我们记 $\bigwedge^{p,q}(M,E) := \bigwedge^{p,q} M \otimes E$ 为取值于 E 的 (p,q)-形式的丛，而 $A^{p,q}(M,E)$ 表示其整体截面。

我们可以如下定义 $\mathrm{A}^{p,q}(M,E)$ 上的 ∂_E算子。令 $\varphi = \sum_i \eta^i \otimes s_i \in \mathrm{A}^{p,q}(M,E)$，其中每个 $\eta^i \in \mathrm{A}^{p,q}(M)$ 和 $(s_1, \ldots, s_r)$ 都是 s 在 E 上的局部平凡化中的表达式。于是

$$\overline{\partial}_E\varphi := \sum_i \overline{\partial}\eta^i \otimes s_i. \tag{2.1}$$

本文中，我们主要考虑 E 全纯切丛 $T^{1,0}_M$及其共轭 $T^{0,1}M$，并将 $\mathrm{A}^{0,q}(M, T^{1,0}M)$ 的截面称为 M 上的 $(0,q)$-向量形式；在含义明确时，我们会在记号中省略“M”一词。

我们也可以在任意全纯向量丛 E 上定义由 $(0,r)$-向量形式诱导的缩并。令 $\xi = \alpha \otimes s \in \mathrm{A}^{p,q}(E)$ 和 $\varphi = \eta \otimes Z \in \mathrm{A}^{0,r}(T^{1,0}M)$。那么，由 φ 诱导的缩并定义为

$$\begin{aligned} \iota_\varphi\colon \mathcal{A}^{p,q}(E) &\to \mathcal{A}^{p-1,q+r}(E) \\ \xi &\mapsto \iota_\varphi(\xi) := \overline{\eta} \wedge \iota_Z(\alpha) \otimes s. \end{aligned}$$

根据线性性，我们可以将这样的定义分别扩展到 $\mathrm{A}^{p,\,q}(E)$ 和 $\mathrm{A}^{0,\,s}(T^{1,\,0}M)$。若考虑 M 上一个 $(0,\,q)$-向量形式的共轭 $\overline{\varphi}$，即 $\varphi \in \mathrm{A}^{q,\,0}(T^{0,\,1}M)$，则可类似地定义缩并：对每个 $\xi \in \mathrm{A}^{p,\,q}(E)$，令 $\iota_\varphi(\xi) := \eta \wedge \iota_Z(\alpha) \wedge s$。我们将交替使用记号 $\overline{\varphi}\lrcorner$ 表示 ι_φ，以及 $\varphi\lrcorner$ 表示 ι_φ。

3. Review of deformation theory and the operators ∂_t and $\overline{\partial}_t$ along curves ofdeformations

本节回顾微分算子 ∂_t 和 $\overline{\partial}_t$ 作用于紧复流形 $(M,\ J)$ 的可微变形族 $\{M_t\}$ 中每个元素时所用的公式；我们采用 [25], 中的方法，其中这类算子用 $(M,\ J)$ 上的算子 ∂ 和 $\overline{\partial}$，以及参数化微分族 $\{M_t\}_t$ 的 $(0,1)$-向量形式来表示。

设 B 是实维数为 m 的微分流形。

定义 3.1 ([18])**.** 紧复流形的可微族是一个微分流形$\mathcal{M}$ 以及一个可微真映射 $\pi\colon\mathcal{M} \to B$，满足

- 对于每个 $t \in B$，纤维 $M_t := \pi^{-1}(t)$ 都具有复流形结构；
- 在M的每一点 $p \in$， π 的雅可比矩阵的秩恒等于 m。

如果 (M,J) 是一个紧复流形，那么如果存在 $t_0 \in B$ 使得 $M_{t_0} =$，则紧复流形的可微族是 (M,J) 的微分变形族

(M,J)。我们将族中的这个固定元素称为中心纤维。不失一般性，我们可以假设参数空间 B 是 $\mathbb{R}^m$中的一个多圆盘，即，

$$B := \{(t_1,\dots,t_m)\in\mathbb{R}^m : |t_j|<\epsilon, j\in\{1,\dots,m\}\},$$

对于 $\epsilon>0$，而 t_0 始终为 $0\in\mathbb{R}^m$。

反过来，从紧复流形 $(M,\ J)$出发，在 [18] 中证明，可以通过设定来构造 $\{M_t\}_{t\in B}$族，其为 $(M,\ J)$ 的变形

$$M_t := (M, J_t), \qquad \text{for every} \quad t\in B,$$

其中，J_t 是可微流形 M 上的可积复结构，由中心纤维 $(M,\ J)$ 上的 $(0,\ 1)$-向量形式 $\varphi(t)$ 参数化，即 $\varphi(t)\in A^{0,1}(T^{1,\ 0}M)$。由 $M_0=(M,\ J)$ 可得 $\varphi(0)=0$。我们指出，为使每个 J_t 在 M 上定义一个可积复结构，$(0,\ 1)$-向量形式 $\varphi(t)$ 必须满足 *Maurer-Cartan*方程，即

$$\overline{\partial}\varphi(t)-\frac{1}{2}[\varphi(t),\varphi(t)]=0, \qquad \text{for every} \quad t\in B. \tag{3.1}$$

为简便起见，我们将参数空间 B 的维数设为 $m=1$，即$B=I=(-\epsilon,\ \epsilon)$，其中 $\epsilon>0$。

设（$M,\ J$）为一个紧致的 n维复流形，并设 $\varphi(t)\in A^{0,1}(T^{1,\ 0}(M))$，$t\in I$，参数化了（$M,\ J$）的一个可微变形族$\{M_t\}_{t\in I}$。我们将区间 I 上的可微族称为变形曲线。

现在回顾一个映射，它将中心纤维（$M,\ J$）上的（$p,\ q$）形式与变形族 $M_t=(M,\ J_t)$中每个元素上的（$p,\ q$）形式联系起来。首先，定义映射

$$e^{\iota_{\varphi(t)}} := \sum_{j=1}^{\infty}\iota^k_{\varphi(t)}, \qquad e^{\iota_{\overline{\varphi(t)}}} := \sum_{j=1}^{\infty}\iota^k_{\overline{\varphi(t)}}, \tag{3.2}$$

其中 i^k_ψ 表示由向量形式 ψ 重复 k 次进行的缩并。注意，由于 M 是紧致的，每个求和都是有限的。

如果 $\alpha=\alpha_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{i_p}\wedge dz^{j_1}\wedge\cdots\wedge dz^{j_q}$ 是定义在 (M,J) 上的 (p,q)-形式 α 的局部表达式，那么延拓映射 $e^{\iota_{\varphi(t)}|\iota_{\varphi(t)}}$ 定义为

$$e^{\iota_{\varphi(t)}|\iota_{\overline{\varphi(t)}}}(\alpha)=\alpha_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}e^{\iota_{\varphi(t)}}(dz^{i_1}\wedge dz^{i_p})\wedge e^{\iota_{\overline{\varphi}(t)}}(d\bar{z}^{j_1}\wedge d\bar{z}^{j_q}).$$

注意，这样的映射定义了一个全局对象，因为 $\varphi(t)$ 是 (M,J) 上的全局 $(0,1)$-向量形式。在每个 (p,q)-形式空间的层面上，我们有以下结果，参见 [25, 引理 2.9]

Le引理 3.2。对于固定的 $t\in I$，指数映射定义了如下同构。 s

$$e^{\iota_{\varphi(t)}|\iota_{\overline{\varphi(t)}}}:\mathcal{A}^{p,q}(M)\to\mathcal{A}^{p,q}(M_t).$$

因此，一旦固定 $t\in I$，我们便可将 M_t 上任意 (p,q)-形式 α_t 视为某个 $\alpha\in A^{p,q}(M)$ 的像 $e^{\iota_{\varphi(t)}|\iota_{\varphi(t)}}(\alpha)$。

利用引理 3.2，关于 J_t 可积性的 Maurer-Cartan方程 (3.1) 可以用以下灵活的术语重新表述。设 $\{\eta^1,\dots,\eta^n\}$ 是 (M,J) 上的 $(1,0)$-形式整体标架，且 $\{\eta^j_t := e^{\iota_{\varphi(t)}|\iota_{\varphi(t)}}(\eta^j)\}_{j=1}^n$ 是 M_t 上相应的 $(1,0)$-形式标架。那么，当满足以下条件时，J_t在 M 上定义了一个可积复结构

$$(d\eta^j_t)^{0,2}=0, \qquad \text{for every } j\in\{1,\dots,n\},$$

其中 $(d\eta^j_t)^{0,2}$ 表示相对于下式给出的分解，$d\eta^j_t$ 的 $(0,\ 2)$ 分量

$$\mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(M)=\bigoplus_{p+q=k}\mathcal{A}^{p,q}(M_t).$$

注意，该条件等价于（3.1）。

我们以回顾算子 ∂_t 和 ∂_t 作用于每个 M_t上的 (p,q)-形式的公式来结束本节。通常我们会省略 $(0,1)$-向量形式 $\varphi(t)$ 对 t 的依赖。

设 $\{M_t\}_{t\in I}$ 是 (M,J) 的一条变形曲线，使得每个 $M_t=(M,J_t)$ 以及每个复结构 J_t 均由 (M,J) 上的一个 $(0,1)$-向量形式 $\varphi(t)$，$t\in I$ 参数化。那么，由 d 在每个 M_t 上的 (p,q)-形式层级上的表达式可得，即，

$$d\colon \mathcal{A}^{p,q}(M_t)\to \mathcal{A}^{p+1,q}(M_t)\oplus \mathcal{A}^{p,q+1}(M_t)$$

这些算子 ∂_t 和 ∂_t 根据定义，分别为 $\partial_t:=\pi^{p+1,q}_t\circ d$ 和 $\partial_t:=\overline{\pi}^{p,q+1}_t\circ d$。在 [25], 作者给出了此类算子作用于函数和 (p,q)-形式时的公式。设 $f\colon M\to\mathbb{C}$ 是定义在 M 上的一个光滑函数。那么

$$\partial_t f=e^{i\varphi}\left((I-\varphi\overline{\varphi})^{-1}\lrcorner(\partial-\overline{\varphi}\lrcorner\overline{\partial})f\right)$$
$$\overline{\partial}_t f=e^{\iota\overline{\varphi}}\left((I-\overline{\varphi}\varphi)^{-1}\lrcorner(\overline{\partial}-\varphi\lrcorner\partial)f\right),$$

其中，我们使用记号 $\varphi\varphi=\varphi\sqcup\varphi$，$\overline{\varphi}\lrcorner\varphi=\overline{\varphi\lrcorner\overline{\varphi}}=\varphi\lrcorner\varphi$，而 I 是恒等映射（参见 [25, 公式 2.13]）。特别地，映射 $f\colon M\to\mathbb{C}$ 关于复结构 J_t 是全纯的，当且仅当，

$$\partial f-(\overline{\varphi(t)}\lrcorner\overline{\partial})f=0.$$

我们回顾一下，由一个 (0,1)-向量形式 φ（或任意算子）所定义的同时缩并 $\lrcorner$ 作用于一个 (p,q)-形式 α 时，其作用方式为

$$\varphi\lrcorner\alpha:=\alpha_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}\varphi\lrcorner dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi\lrcorner dz^{i_p}\wedge\varphi\lrcorner d\overline{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\varphi\lrcorner d\overline{z}^{j_q},$$

其中 $\alpha_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge dz^{j_1}\overline{\wedge}\cdots\wedge dz^{j_q}$ 是 α 的局部表达式。这种缩并定义良好，可用于将指数映射改写为

$$e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}=(I+\varphi+\overline{\varphi})\lrcorner. \tag{3.3}$$

于是，由 [25, 命题 2.13], 可知，∂_t 和 ∂_t 对任意 $e^{\iota_\varphi|\iota_\varphi}\alpha\in\mathrm{A}^{p,q}(M_t)$ 的作用，其中 $\alpha\in\mathrm{A}^{p,q}(M)$，定义为

$$\partial_t(e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}\alpha)=e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}\left((I-\varphi\overline{\varphi})^{-1}\lrcorner([\overline{\partial},\iota_{\overline{\varphi}}]+\partial)(I-\varphi\overline{\varphi})\lrcorner\alpha\right) \tag{3.4}$$
$$\overline{\partial}_t(e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}\alpha)=e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}\left((I-\overline{\varphi}\varphi)^{-1}\lrcorner([\partial,\iota_\varphi]+\overline{\partial})(I-\overline{\varphi}\varphi)\lrcorner\alpha\right). \tag{3.5}$$

4. Deformations of Astheno-Kähler metrics

设 $(M,\ J)$ 是复维数为 n 的紧复流形，赋有一个 astheno-K¨ahler 度量 g，即其相应的基本形式 ω 满足 $\partial\overline{\partial}\omega^{n-2}=0$；设 $\{M_t\}_{t\in I}$ 是 $(M,\ J)$ 的一条变形曲线，其中 $\{M_t\}_{t\in I}$ 由 M 上的一个 $(0,\ 1)$-向量形式 $\varphi(t)$ 参数化。另设 $\{\omega_t\}_{t\in I}$ 是沿着 $\{M_t\}_{t\in I}$ 的一族厄米度量，使得 $\omega_0=\omega$，并假设对每个 $t\in I,\ g_t$ 在 M_t 上是平衡的，即

$$\partial_t\overline{\partial}_t\omega_t^{n-2}=0,\quad\forall t\in I. \tag{4.1}$$

根据引理 3.2，我们可以将每个 ω_t 写成 $e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}\varpi(t)$，其中对每个 $t\in I,\ \omega(t)=\omega_{ij}(t)dz^i\wedge dz^j\in\mathcal{A}^{1,1}(M)$ 局部成立，并且

$$\omega_t^{n-2}=e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}(\omega^{n-2}(t))=e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}\left(f_v(t)dz^{i_1}\wedge d\overline{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_{n-2}}\wedge d\overline{z}^{j_{n-2}}\right), \tag{4.2}$$

其中 $f_v(t):=\omega_{i_1j_1}(t)\cdots\omega_{i_{n-2}j_{n-2}}(t)$，其中我们设定了 $v=(i_1,j_1,..,i_{n-2},j_{n-2})$，$i_k,j_k\in\{1,\dots,n\}$，以及 $k\in\{1,\dots,n-2\}$。

因此，我们可以将公式（3.4）和（3.5）应用于（4.1），并利用泰勒级数展开，对 t 在 $t=0$ 处进行微分，从而证明主定理。

定理4.1. 设（$M,\ J$）是一个 n 维紧复流形，赋有一个*astheno-K¨ahler*度量 g 及其相应的基本形式 ω。设 $\{M_t\}_{t\in I}$ 是紧复流形的可微族，带有 $M_0=M$ 并由 $\varphi(t)\in A^{0,1}(T^1,{}^0(M))$ 参数化，其中 $t\in I:=(-\epsilon,\ \epsilon)$，$\epsilon>0$。设 $\{\omega_t\}_{t\in I}$ 是沿着 $\{M_t\}_{t\in I}$ 的*Hermitian*度量光滑族，记作

$$\omega_t=e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}(\omega(t)),$$

其中，在局部地，$\omega(t) = \omega_{ij}(t)\, dz^i \wedge d\bar{z}^j \in \mathcal{A}^{1,1}(M)$ 且 $\omega_0 = \omega$。

如果 ω_t^{n-2} 具有局部表达式 $e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}(\omega^{n-2}(t)) = e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}(f_v(t)\, dz^{i_1} \wedge dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_{n-2}} \wedge dz^{j_{n-2}})$，*se* t

$$(\omega^{n-2}(t))' := \frac{\partial}{\partial t}(f_v(t))\, dz^{i_1} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots dz^{i_{n-2}} \wedge d\bar{z}^{j_{n-2}} \in \mathcal{A}^{n-2,n-2}(M).$$

那么，若每个度量 ω_t 都是 *astheno-K¨ahler* 度量，对 $t \in I$ 而言，必有

$$2i\mathfrak{Im}(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)(\omega^{n-2}) = \partial\overline{\partial}(\omega^{n-2}(0))'. \tag{4.3}$$

因此，我们立即得到以下推论。

推论4.2。令 (M, J) 为一个配备了 *astheno-K¨ahler* 度量 g 及其对应基本形式 ω的紧 *Hermitian*流形。若存在一个光滑族的 *astheno-K¨ahler* 度量，在 $t = 0$ 中与 ω 重合，沿着变形族 $\{M_t\}_t$，其中 $M_0 = M$，并由 M 上的 $(0,1)$-向量形式 $\varphi(t)$ 参数化，则以下方程必须成立

$$\left[(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)(\omega^{n-2})\right]_{H_{BC}^{n-1,n-1}(M)} = 0. \tag{4.4}$$

定理 *4.1* 的证明。对于每个 ω_t，这些度量都是 astheno-K¨ahler，即 $t \in I$，也就是说 $\partial_t\partial_t\omega_t^{n-2} = 0$。这意味着

$$\frac{\partial}{\partial t}(\partial_t\overline{\partial}_t\omega_t^{n-2}) = 0. \tag{4.5}$$

接下来，我们通过算子 ∂_t 和 ∂_t，利用公式 (4.5)、(3.4) 和 (3.5)，计算等式右边。由延拓映射可得

$$\partial_t\overline{\partial}_t(\omega_t^{n-2}) = \partial_t\overline{\partial}_t(e^{i_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}(\omega^{n-2}(t))),$$

然后，根据 (3.4) 和 (3.5)，我们有

$$\begin{aligned}
&\partial_t\overline{\partial}_t(e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}(\omega^{n-2}(t))) = \partial_t(e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}\left((I-\overline{\varphi}\varphi)^{-1}\lrcorner([\partial,\iota_\varphi]+\overline{\partial})(I-\overline{\varphi}\varphi)\lrcorner\omega^{n-2}(t)\right))\\
&= e^{\iota_\varphi|\iota_{\overline{\varphi}}}\Bigg(\Big((I-\varphi\overline{\varphi})^{-1}\lrcorner([\overline{\partial},\iota_{\overline{\varphi}}]+\partial)(I-\varphi\overline{\varphi})\Big)\lrcorner\Big((I-\overline{\varphi}\varphi)^{-1}\lrcorner([\partial,\iota_\varphi]+\overline{\partial})(I-\overline{\varphi}\varphi)\lrcorner\omega^{n-2}(t)\Big)\Bigg).
\end{aligned}$$

现在，我们将各项在 $t = 0$ 处展开为泰勒级数

$$\varphi(t) = t\varphi'(0) + o(t), \quad \omega^{n-2}(t) = \omega^{n-2}(0) + t\omega^{n-2}(0)' + o(t)$$

因此

$$(I-\varphi\overline{\varphi})^{-1} = (I-\overline{\varphi}\varphi)^{-1} = (I-\varphi\overline{\varphi}) = (I-\overline{\varphi}\varphi) = I + o(t)$$

结合 (3.3) 并采用记号 $\lrcorner$，我们得到

$$\begin{aligned}
\partial_t\overline{\partial}_t\omega_t^{n-2} &= \left(I + t\varphi'(0) + \overline{t\varphi}'(0)\right)\lrcorner\left([\overline{\partial},\overline{t\varphi'(0)}\lrcorner]+\partial\right)\left([\partial,t\varphi'(0)\lrcorner]+\overline{\partial}\right)\left(\omega^{n-2}(0) + t(\omega^{n-2}(0))'\right) + o(t)\\
&= \left(I + t\varphi'(0) + \overline{t\varphi}'(0)\right)\lrcorner\left([\overline{\partial},\overline{t\varphi'(0)}\lrcorner]+\partial\right)\left([\partial,t\varphi'(0)\lrcorner]\omega^{n-2}(0) + \overline{\partial}\omega^{n-2}(0) + t\overline{\partial}(\omega^{n-2}(0))'\right) + o(t)\\
&= \left(I + t\varphi'(0) + \overline{t\varphi}'(0)\right)\lrcorner\left(-t\partial(\varphi'(0)\lrcorner\omega^{n-2}(0)) + t\overline{\partial}(\overline{\varphi'(0)}\lrcorner\overline{\partial}\omega^{n-2}(0)) + t\partial\overline{\partial}(\omega^{n-2}(0))'\right) + o(t)\\
&= -t\partial(\varphi'(0)\lrcorner\partial\omega^{n-2}(0)) + t\overline{\partial}(\overline{\varphi'(0)}\lrcorner\overline{\partial}\omega^{n-2}(0)) + t\partial\overline{\partial}(\omega^{n-2}(0))' + o(t).
\end{aligned}$$

现在，由于 $\partial_t\partial_t\omega_t^{n-2} = 0$，对于每个 $t \in I$，还有 $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\partial_t\partial_t\omega_t^{n-2}) = 0$，因此

$$-\partial(\varphi'(0)\lrcorner\partial\omega^{n-2}(0)) + \overline{\partial}(\overline{\varphi'(0)}\lrcorner\overline{\partial}\omega^{n-2}(0)) + \partial\overline{\partial}(\omega^{n-2}(0))' = 0,$$

这等价于

$$-(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)\omega^{n-2} + (\overline{\partial} \circ \iota_{\overline{\varphi'(0)}} \circ \overline{\partial})\omega^{n-2} + \partial\overline{\partial}(\omega^{n-2}(0))' = 0,$$

至此，证明完毕。 □

5. Nilmanifolds with nilpotent complex structure

本节简要回顾赋有不变复结构的幂零流形几何中的基本概念。

一个幂零流形 M 是由单连通的连通李群G 与其离散余紧子群 Γ的商 $M = \Gamma/G$ 所构成的数据，其中与李群 G 相关联的李代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，即，级数$\{\mathfrak{g}^{(k)}\}$以$\{0\}$终止，其中

$$\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^{(1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^{(j)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(j-1)}].$$

一个不变复结构 J 在幂零流形 M 上是指 G上的一个左不变可积几乎复结构，它下降到商空间 M 上。 M 上的此类复结构可以通过李群 G 上的一组线性无关的左不变形式$\{\eta^j\}_j$ 来刻画，使得

$$\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle \eta^j \rangle_j \otimes \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle \overline{\eta}^k \rangle_k,$$

其中， $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ 是 G上左不变复形式的空间。由左不变性可知，余标架$\{\eta^j\}_j$因此下降到商空间 M上。

因此，可以通过设置来构造幂零流形。

$$\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle \eta^j \rangle_j \oplus \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle \overline{\eta}^j \rangle_j$$

其中 $\{\eta^j\}_j \subset \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ 是一组满足以下结构方程的线性无关复余向量

$$d\eta^j = \sum_{i<k} A^j_{ik}\eta^i \wedge \eta^k + \sum_{i,k} B^j_{i\bar{k}}\eta^i \wedge \overline{\eta}^k,$$

满足

- $d^2 \equiv 0$;
- 常数结构 A^j_{ik}， $B^j_{ik} \in \mathbb{Q}[i]$; –
- 若 $\{Z_j\}_j$ 是 $\{\eta^j\}_j$ 的对偶基，则通过以下关系

$$[Z_j, Z_k] = A^i_{jk}Z_i, \quad [Z_j, \overline{Z}_k] = (B^i_{j\bar{k}}Z_i - B^i_{k\bar{j}}\overline{Z}_i),$$

则有 $\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$，其中 k_0。

事实上，在这些假设下， $\mathfrak{g}$ 所对应的李代数 $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ 是幂零的，其对应的李群 G根据 Malcev 定理存在一个离散余紧子群 Γ，因此（$M = \Gamma/G$， J）是一个带有不变复结构 J 的幂零流形，并且

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}, \qquad \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{*(1,0)} \oplus \mathfrak{g}^{*(0,1)}$$

其中

$$\mathfrak{g}^{1,0} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle Z^j \rangle_j, \quad \mathfrak{g}^{0,1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle \overline{Z}^j \rangle_j, \quad \mathfrak{g}^{*(1,0)} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle \eta^j \rangle_j, \quad \mathfrak{g}^{*(0,1)} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle \overline{\eta}^j \rangle_j.$$

特别地，我们称 M 上的复结构 J 为

- 全纯平行化当且仅当

$$d\mathfrak{g}^{*(1,0)} \subset \mathfrak{g}^{*(2,0)}$$

- 若存在由 G 上的左不变 $(1,0)$-形式 $\{\eta^j\}$ 构成的余标架，使得对每个 j，则称其为幂零

$$d\eta^j = \sum_{i<k<j} A_{ij}\eta^i \wedge \eta^k + \sum_{i,k<j} B_{i\bar{k}}\eta^i \wedge \overline{\eta}^k, \qquad A^j_{ik}, B^j_{i\bar{k}} \in \mathbb{C},$$

- 阿贝尔当且仅当

$$d\mathfrak{g}^{*(1,0)} \subset \mathfrak{g}^{*(1,1)}.$$

6. Applications

现在我们应用推论 4.2，给出两个四维幂零流形族上不存在强凯勒度量曲线的障碍示例¨。

6.1. 例1. 设 $(M=\Gamma/G, J)$ 是一个四维幂零流形，其左不变复结构 J 由李代数$\mathfrak{g}$ G的复化对偶 $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ 上的余向量 $\{\eta^1,\eta^2,\eta^3,\eta^4\}$ 诱导，这些余向量满足结构方程

$$\begin{cases} d\eta^i &= 0, \quad i\in\{1,2,3\},\\ d\eta^4 &= a_1\eta^{12}+a_2\eta^{13}+a_3\eta^{1\overline{1}}+a_4\eta^{1\overline{2}}+a_5\eta^{1\overline{3}}\\ &\quad +a_6\eta^{23}++a_7\eta^{2\overline{1}}+a_8\eta^{2\overline{2}}+a_9\eta^{2\overline{3}}\\ &\quad +a_{10}\eta^{3\overline{1}}+a_{11}\eta^{3\overline{2}}+a_{12}\eta^{3\overline{3}}, \end{cases} \tag{6.1}$$

对于每个 $j\in${1、2、.....、12}，均有 $a_j\in\mathbb{Q}[i]$。注意， J是 M上的幂零复结构。

若 $\omega=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^4\eta^{jj}$是复流形 M上与对角度量 g相对应的基本形式，则 ω是 astheno-K¨ahler 度量，当且仅当

$$\partial\overline{\partial}\omega^2=0$$

当且仅当,

$$|a_1|^2+|a_2|^2+|a_4|^2+|a_5|^2+|a_6|^2+|a_7|^2+|a_9|^2+|a_{10}|^2+|a_{11}|^2=2\mathfrak{Re}(a_3\overline{a}_8+a_3\overline{a}_{12}+a_8\overline{a}_{12}).$$

注6.1。 若复流形 (M,J) 是全纯平行化的，即 ，

$$a_3=a_4=a_5=a_7=a_8=a_9=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=0,$$

则度量 g在 (M,J)上是 ***astheno K¨ahler*** 度量，当且仅当 $a_3=a_8=a_{12}=0$也成立，即 (M,J) 是一个复环面。这与更一般的论证一致：在紧致全纯平行化流形上，存在由全纯 (1,0)形式构成的全局余标架；然而，若流形具有 ***astheno-K¨ahler*** 度量，则每个全纯1形式都是 d-闭的。因此，在赋有 ***astheno-K¨ahler*** 度量的全纯平行化流形上，全局全纯余标架中的每个形式都是 d-闭的，故该流形是一个环面。

令 $\{Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\}$ 为 $\{\eta^1,\eta^2,\eta^3,\eta^4\}$ 的对偶标架，并在 (M,J) 上定义光滑的 (0,1)-向量形式$\varphi(\mathbf{t})$，其定义为

$$\varphi(\mathbf{t}):=t_1\overline{\eta}^1\otimes Z_1+t_2\overline{\eta}^2\otimes Z_2+t_3\overline{\eta}^3\otimes Z_3,\qquad \mathbf{t}\in B:=\{(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{C}^3:|t_j|<1\}, \tag{6.2}$$

它用于参数化一族（不一定可积的）变形 $\{(M,J_t)\}_{t\in B}$的 (M,J)。根据引理3.2，每个（近）复结构 J_t 都可以由余标架$\{\eta^1_{\mathbf{t}},\eta^2_{\mathbf{t}},\eta^3_{\mathbf{t}},\eta^4_{\mathbf{t}}\}$来刻画，其定义如下

$$\begin{cases} \eta^1_{\mathbf{t}}=\eta^1+t_1\overline{\eta}^1\\ \eta^2_{\mathbf{t}}=\eta^2+t_2\overline{\eta}^2\\ \eta^3_{\mathbf{t}}=\eta^3+t_3\overline{\eta}^3\\ \eta^4_{\mathbf{t}}=\eta^4, \end{cases} \tag{6.3}$$

由对该方程组求逆可得,

$$\begin{cases} \eta^1=\frac{1}{1-|t_1|^2}(\eta^1_{\mathbf{t}}-t_1\overline{\eta}^1_{\mathbf{t}})\\ \eta^2=\frac{1}{1-|t_2|^2}(\eta^2_{\mathbf{t}}-t_2\overline{\eta}^2_{\mathbf{t}})\\ \eta^3=\frac{1}{1-|t_3|^2}(\eta^3_{\mathbf{t}}-t_3\overline{\eta}^3_{\mathbf{t}})\\ \eta^4=\eta^4_{\mathbf{t}}. \end{cases} \tag{6.4}$$

设定 $T_j:=\frac{1}{1-|t_j|^2}$，其中 $j\in${1,2,3}。正如上一节所回顾的， $\varphi(\mathbf{t})$ 对一族紧复流形进行参数化，即每个 J_t 都在 M 上定义一个可积几乎复结构，当且仅当，

$$(d\eta^j_{\mathbf{t}})^{0,2}=0,\qquad j\in\{1,2,3,4\}.$$

根据关系式（6.3）、（6.4）以及结构方程（6.1），可知当且仅当满足以下条件时，这样的可积性条件成立

$$\begin{aligned}(d\eta^4_{\mathbf{t}})^{0,2} &= T_1T_2(a_1t_1t_2 - a_4t_1 + a_7t_2)\eta^{\overline{12}}_{\mathbf{t}}\\ &+ T_1T_2(a_2t_1t_3 - a_5t_1 + a_{10}t_3)\eta^{\overline{13}}_{\mathbf{t}}\\ &+ T_2T_3(a_6t_2t_3 - a_9t_2 + a_{11}t_3)\eta^{\overline{23}}_{\mathbf{t}} = 0,\end{aligned}$$

即，

$$\begin{cases} a_1t_1t_2 - a_4t_1 + a_7t_2 = 0\\ a_2t_1t_3 - a_5t_1 + a_{10}t_3 = 0\\ a_6t_2t_3 - a_9t_2 + a_{11}t_3 = 0.\end{cases} \tag{6.5}$$

现在固定 $a_j \in \mathbb{Q}[i]$ 的一个选择，并令 $S \subset B$ 为方程组 (6.5) 的解集。于是，对于每个 $\mathbf{t} \in S$，$\varphi(\mathbf{t})$ 都参数化了一个变形族 $\{(M, J_{\mathbf{t}})\}_{\mathbf{t}\in S}$。我们可以构造一条变形曲线 $\gamma\colon(-\epsilon,\epsilon) \to S$，其中 $\gamma(t) := (\varphi_1(t)\ \varphi_2(t)\ \varphi_3(t)) \in S$，使得对于每个 $t \in (-\epsilon,\epsilon)$，(0,1)-向量形式

$$\varphi(\gamma(t)) = \varphi_1(t)\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + \varphi_2(t)\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + \varphi_3(t)\overline{\eta}^3 \otimes Z_3$$

参数化（M, J）的一条变形曲线。（从现在起，稍微滥用一下记号，我们将写作 $\varphi(t) := \varphi(\gamma(t))$.）于是我们将记为

$$\varphi'(0) := \varphi_1'(0)\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + \varphi_2'(0)\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + \varphi_2'(0)\overline{\eta}^3 \otimes Z_3.$$

我们观察到以下事实。

引理6.2。*(1)* $(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)\omega^2 = C_{J,\ \varphi'(0)}\eta^{123123}$。

(2) 如果 J 是阿贝尔的，那么 $(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)\omega^2 = 0$。*(3) Bott-Chern* 上同调类 $[\eta^{123123}]_{BC} \neq 0$ 当且仅当 ω 是*SKT*。

证明。*(1)*。通过简单计算可得

$$(-2)\omega^2 = \eta^{1\overline{1}2\overline{2}} + \eta^{1\overline{1}3\overline{3}} + \eta^{1\overline{1}4\overline{4}} + \eta^{2\overline{2}3\overline{3}} + \eta^{2\overline{2}4\overline{4}} + \eta^{3\overline{3}4\overline{4}}.$$

将结构方程（6.1）改写为

$$\begin{cases} d\eta^j = 0, \quad j \in \{1,2,3\},\\ d\eta^4 = \sum_{1\le i<j\le 3} A_{ij}\eta^{ij} + \sum_{i,j=1}^3 B_{i\overline{j}}\eta^{i\overline{j}}.\end{cases}$$

为完整起见，我们写出

$$\partial\eta^4 = \sum_{1\le i<j\le 3} A_{ij}\eta^{ij}, \qquad \overline{\partial}\eta^4 = \sum_{i,j=1}^3 B_{i\overline{j}}\eta^{i\overline{j}}$$

$$\partial\overline{\eta}^4 = -\sum_{i,j=1}^3 \overline{B}_{i\overline{j}}\eta^{j\overline{i}}, \qquad \overline{\partial}\overline{\eta}^4 = \sum_{1\le i<j\le 3} \overline{A}_{ij}\eta^{\overline{ij}}.$$

那么，很容易看出

$$\begin{aligned}(-2)\partial\omega^2 &= (\eta^{1\overline{1}} + \eta^{2\overline{2}} + \eta^{3\overline{3}}) \wedge \partial\eta^{4\overline{4}}\\ &= (\eta^{1\overline{1}} + \eta^{2\overline{2}} + \eta^{3\overline{3}}) \wedge (A_{ij}\eta^{ij\overline{4}} + \overline{B}_{i\overline{j}}\eta^{4j\overline{i}})\\ &= (\eta^{1\overline{1}} + \eta^{2\overline{2}} + \eta^{3\overline{3}}) \wedge (A_{ij}\eta^{ij\overline{4}})\\ &+ (\eta^{1\overline{1}} + \eta^{2\overline{2}} + \eta^{3\overline{3}}) \wedge (\overline{B}_{i\overline{j}}\eta^{4j\overline{i}})\end{aligned}$$

现在，若 $\varphi'(0) = \varphi_1'(0)\eta^1 \otimes Z_1 + \varphi_2'(0)\eta^2 \otimes Z_2 + \varphi_3'(0)\eta^3 \otimes Z_3$，则有

$$\begin{aligned}(-2)(\iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)\omega^2 = (\eta^{1\bar{1}} + \eta^{2\bar{2}} + \eta^{3\bar{3}}) \wedge \left[A_{ij} \left(\sum_{k=1}^{3} \varphi_k'(0)\, \overline{\eta}^k \wedge i_{Z_k}(\eta^{ij}) \right) \right] \wedge \overline{\eta}^4 \\ - (\eta^{1\bar{1}} + \eta^{2\bar{2}} + \eta^{3\bar{3}}) \wedge \eta^4 \wedge \left[\overline{B}_{i\bar{j}} \left(\sum_{k=1}^{3} \varphi_k'(0)\, \overline{\eta}^k \wedge i_{Z_k}(\eta^{j\bar{i}}) \right) \right].\end{aligned}$$

注意，(1，1)-形式

$$\Omega_1 := A_{ij} \left(\sum_{k=1}^{3} \varphi_k'(0)\, \overline{\eta}^k \wedge i_{Z_k}(\eta^{ij}) \right)$$

and

$$\Omega_2 := \overline{B}_{i\bar{j}} \left(\sum_{k=1}^{3} \varphi_k'(0)\, \overline{\eta}^k \wedge i_{Z_k}(\eta^{j\bar{i}}) \right)$$

不含 η^4 也不含 η^4。于是，

$$\begin{aligned}(-2)(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)}) \circ \partial)(\omega^2) &= (\eta^{1\bar{1}} + \eta^{2\bar{2}} + \eta^{3\bar{3}}) \wedge \Omega_1 \wedge \partial\overline{\eta}^4 \\ &\quad + (\eta^{1\bar{1}} + \eta^{2\bar{2}} + \eta^{3\bar{3}}) \wedge \partial\eta^4 \wedge \Omega_2 \\ &= -(\eta^{1\bar{1}} + \eta^{2\bar{2}} + \eta^{3\bar{3}}) \wedge \Omega_1 \wedge \left(\overline{B}_{i\bar{j}} \eta^{j\bar{i}} \right) \\ &\quad + (\eta^{1\bar{1}} + \eta^{2\bar{2}} + \eta^{3\bar{3}}) \wedge \left(A_{ij} \eta^{ij} \right) \wedge \Omega_2,\end{aligned}$$

即，形式 $\partial \bigcirc \iota_{\varphi'(0)} \bigcirc \partial\omega^2$ 是 $(M,\ J)$ 上的一个 (3，3)-形式，且不含 η^4 也不含 η^4。因此，$(\partial \bigcirc \iota_{\varphi'(0)} \bigcirc \partial)\omega^2 = C_{J,\ \varphi'(0)}\eta^{123\bar{1}23}$，其中 $C_{J,\ \varphi'(0)} \in \mathbb{C}$ 是一个常数，取决于定义复结构 J 的结构方程以及 $\varphi(t)$ 在 $t = 0$ 中的导数。

(2). 若 J 是阿贝尔的，则对每个 i，j，都有 $A_{ij} = 0$，其中 $1 \leq i < j \leq 3$。于是，根据上一点，$\Omega_1 = 0$，并且显然 $(\partial \bigcirc \iota_{\varphi'(0)} \bigcirc \partial)\omega^2 = 0$。

(3). 注意到，由于形式 $\eta^{123\bar{1}23}$ 是 ∂-闭的，Bott-Chern上同调类 $[\eta^{123\bar{1}23}]$ 定义良好。假设度量 ω 是SKT，即 $\partial\partial\omega = 0$。由结构方程 (6.1) 可知，这等价于 $\partial\partial\eta^{44} = 0$。此外，由于 $\partial\partial *_g \eta^{123\bar{1}23} = \partial\partial\eta^{44} = 0$，形式 $\eta^{123\bar{1}23}$ 是Bott-Chern调和的，因此 $[\eta^{123\bar{1}23}]_{BC} \neq 0$。

反之，假设 ω 不是SKT，即 $\partial\partial\omega \neq 0$；根据结构方程，这等价于 $\partial\partial\eta^{44} \neq 0$。注意，$\partial\partial\eta^{44}$ 是 M 上的一个 $(2, 2)$-形式，因此 $\partial\partial\eta^{44} = \sum_{i<j,\ k<l} A_{ijkl}\eta^{ijkl}$，其中 $i,\ j,\ k,\ \in \{1, 2, 3\}$。于是，可以在 M 上选取一个不含 η^4、η^4 和 $\partial\partial\eta^{44} \wedge \alpha = C\eta^{123\bar{1}23}$ 的不变 (1，1)-形式 α，其中 $0 \neq C \in \mathbb{C}$ 为常数。特别地，$\partial\alpha = \bar{\partial}\alpha = 0$。但是，

$$\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{C}\eta^{4\bar{4}} \wedge \alpha\right) = \frac{1}{C}\partial\bar{\partial}(\eta^{4\bar{4}}) \wedge \alpha = \eta^{123\bar{1}23}, \tag{6.6}$$

这意味着形式 $\eta^{123\bar{1}23}$ 是 $\partial\partial$-恰当的。因此 $[\eta^{123\bar{1}23}]_{BC} = 0$。 □

注6.3. 根据引理 *6.2* 和注 *6.1*，可知推论 *4.2*可以对这族 4 维幂零流形沿由 $\varphi(t)$参数化的变形曲线给出障碍，前提是初始复结构 J 既非全纯平行化也非阿贝尔，并且 (M, J) 上的初始对角度量同时是 *astheno-K¨ahler* 度量和 *SKT* 度量。

对于高维情形中的计算，很容易看出，根据注释6.1、引理6.2和注释6.3，类似的论证对于任意 n维幂零流形$(M,\ J)$ 及其左不变复结构 J同样成立，其中该复结构由类似的结构方程刻画，即满足以下条件。

引理 6.4。 设$(M=\Gamma\backslash G,J)$为一个幂零流形，其复结构由李代数 $\mathfrak{g}$ 的复化对偶的一组基$\{\eta^1,\dots,\eta^n\}$确定，使得

$$\begin{cases} d\eta^i = 0, \quad i\in\{1,\dots n-1\},\\ d\eta^n \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\eta^{ij},\eta^{k\bar{l}}\}, \quad i,j,k,l\in\{1,\dots,n-1\},\end{cases}$$

且其结构常数属于 $\mathbb{Q}[i]$。更具体地说，若 $\omega=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \eta^{jj}$ 是与对角度量 g 相关联的基本形式，且 $\varphi(t)=\sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\eta^k\otimes Z_k$，对于 $t\in(-\epsilon,\epsilon)$ 是 (M,J) 的变形曲线，则

(1) $(\partial\circ\iota_{\varphi'(0)}\circ\partial)\omega^{n-2}=C_{J,\varphi'(0)}\,\eta^{1\dots n-1\bar{1}\dots\bar{n-1}}$. *(2)* 如果 J 是阿贝尔的，那么 $(\partial\circ\iota_{\varphi'(0)}\circ\partial)\omega^{n-2}=0$. *(3) Bott-Chern* 上同调类 $[\eta^{1\dots n-1\,\bar{1}\dots\bar{n-1}}]\neq 0$ 当且仅当 ω 是 *SKT*。

与四维情形一样，沿着由 ¨参数化的变形族，可能不存在亚强凯勒度量，推论 4.2 表明，若典范对角度量 g 也是 SKT，且复结构 J 既非阿贝尔也非全纯平行化，则可能受到阻碍。

在四维例子中，考虑四维幂零流形族中的一个元素（M， J），其中 $a_2=a_5=a_6=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=0$。此时，结构方程变为

$$\begin{cases} d\eta^i &= 0, \quad i\in\{1,2,3\},\\ d\eta^4 &= a_1\eta^{12}+a_3\eta^{1\bar{1}}+a_4\eta^{1\bar{2}}\\ &\quad +a_7\eta^{2\bar{1}}+a_8\eta^{2\bar{2}}.\end{cases} \tag{6.7}$$

注意，流形（M， J）可表示为一个复一维环面与一个三维幂零流形的直积。

具有基本形式 $\omega=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^4\eta^{jj}$ 的对角度量 g 是亚强凯勒度量，当且仅当它是 SKT，当且仅当，

$$|a_1|^2+|a_4|^2+|a_7|^2=2\mathfrak{Re}(a_3\bar{a}_8). \tag{6.8}$$

接下来，我们考虑定义在 (M,J) 上的 (0, 1)-向量形式 φ(t)，其中 t $\in B$，如式 (6.2) 所示。这样的向量形式以参数化的方式给出了 (M,J) 的一个变形族 $\{(M,J_{\mathrm{t}})\}_{\mathrm{t}\in B}$。此外，如果 t $=(t_1,t_2,t_3)$ 满足相应条件，那么每个 J_{t} 都是 M 上的一个可积几乎复结构。

$$a_1t_1t_2-a_4t_1+a_7t_2=0. \tag{6.9}$$

令 $F(t_1,t_2,t_3):=a_1t_1t_2-a_4t_1+a_7t_2$，$(t_1,t_2,3)\in B$。那么， F 在 $(0,0,0)$ 处的梯度为

$$\nabla F|_{(0,0,0)}=\begin{pmatrix}-a_4\\ a_7\\ 0\end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

通过区分 在 $\nabla F|_{(0,0,0)}=0$ 或 $\nabla F|_{(0,0,0)}\neq 0$ 的情形下，我们得到如下结果。 .

6.1.1. 情形 *(i)*： $\nabla F|_{(0,0,0)}=0$.。在这种情况下，有 $a_4=a_7=0$。因此，(6.7) 中唯一的非平凡方程变为

$$d\eta^4=a_1\eta^{12}+a_3\eta^{1\bar{1}}+a_8\eta^{2\bar{2}},$$

并设 ω 是 astheno-K¨ahler（且为 SKT），即满足

$$|a_1|^2=2\mathfrak{Re}(a_3\bar{a}_8).$$

我们将假设 $a_1\neq 0$。

(6.9) 的解集为

$$S=\{(t_1,t_2,t_3)\in B : t_1t_2=0\}.$$

因此，将 M 的可积变形参数化的 (0,1)-向量形式 $\varphi(\mathbf{t})$ 为

$$\varphi(\mathbf{t}) = t_1\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + t_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + t_3\overline{\eta}^3 \otimes Z_3, \quad (t_1,t_2,t_3) \in S,$$

然后我们可以考虑曲线

$$\varphi(t) = t\cdot u_1\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + t\cdot u_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + t\cdot u_3\overline{\eta}^3 \otimes Z_3, \quad t \in (-\epsilon,\epsilon),$$

对于固定的（u_1, u_2, u_3）$\in S$ 以及充分小的 $\epsilon > 0$。因此，

$$\varphi'(0) = u_1\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + u_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + u_3\overline{\eta}^3 \otimes Z_3.$$

然后我们可以应用我们的条件并计算

$$(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)\omega^2 = 0,$$

因此，推论 4.2和定理 4.1 都不会产生障碍。

6.1.2. 情形（*ii*）：$\nabla F|_{(0,0,0)} \neq 0$。在这种情况下，要么 $a_4 \neq 0$ 要么 $a_7 \neq 0$。假设$a_4 \neq 0$。

因此，结构方程（6.7）以及关于 ¨ 的 astheno-Kähler（及 SKT）条件 ω （6.8）仍然成立。因此，方程（6.9）的解集为

$$S = \left\{(t_1,t_2,t_3) \in \mathbb{C}^3 : \ t_1 = \frac{a_7t_2}{a_4 - a_1t_2}, \ |t_2| < \delta\right\},$$

当 $\delta > 0$ 充分小时。

因此 参数化（M, J）的可积变形的 (0, 1)-向量形式 $\varphi(\mathbf{t})$ 为

$$\varphi(\mathbf{t}) = \frac{a_7t_2}{a_4 - a_1t_2}\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + t_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + t_3\overline{\eta}^3 \otimes Z_3, \quad \left(\frac{a_7t_2}{a_4 - a_1t_2}, t_2, t_3\right) \in S,$$

因此可以考虑变形曲线

$$\varphi(t) = \frac{ta_7u_2}{a_4 - ta_1u_2}\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + tu_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + tu_3\overline{\eta}^3 \otimes Z_3, \quad (u_2,u_3) \in \mathbb{C}^2, \ t \in (-\epsilon,\epsilon),$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时，从而

$$\varphi'(0) = \frac{a_7u_2}{a_4}\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + u_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + u_3 \otimes Z_3.$$

通过直接计算，我们得到

$$\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial\omega^2 = 2(|a_7|^2 - |a_4|^2)\frac{a_1u_2}{a_4}\eta^{123\overline{123}}.$$

因此，由于 Bott-Chern 上同调类 $[\eta^{123123}] \neq 0$ 根据引理 6.2，条件（4.4）成立当且仅当

$$\left(|a_4|^2 - |a_7|^2\right)\mathfrak{Re}\left(\frac{a_1u_2}{a_4}\right) = 0.$$

考虑 $a_7 \neq 0$的情形。方程（6.9）的解集为

$$S = \left\{(t_1,t_2,t_3) \in B : \ t_2 = \frac{a_4t_1}{a_7 + a_1t_1}, \ |t_1| < \delta\right\},$$

当 $\delta > 0$ 充分小时。

于是，我们可以选取如下变形曲线

$$\varphi(t) = tu_1\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + \frac{ta_4u_1}{a_7 + ta_1u_1}\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + tu_3\overline{\eta}^3 \otimes Z_3, \quad (u_1,u_3) \in \mathbb{C}^2, \ t \in (-\epsilon,\epsilon),$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时，使得

$$\varphi'(0) = u_1\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + \frac{a_4u_1}{a_7}\overline{\eta}^2 \otimes Z_2 + u_3\overline{\eta}^3 \otimes Z_3.$$

然后，通过与前一种情况类似的计算，我们得到

$$[\mathfrak{Im}(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial(\omega^2))]_{BC} = 0 \iff \left(|a_4|^2 - |a_7|^2\right)\mathfrak{Re}\left(\frac{a_1u_1}{a_7}\right) = 0.$$

将推论4.2 应用于每种情况，可得以下定理。

定理 6.5. 设$(M=\Gamma\backslash G, J)$ 是由李代数 $\mathfrak{g}$ 的复化对偶上的余向量$\{\eta^1,\eta^2,\eta^3,\eta^4\}$ 确定的、带有复结构 J 的 4 维幂零流形族中的一个元素，其中李代数对应于 G，其结构方程为

$$\begin{cases} d\eta^i = 0, \quad i\in\{1,2,3\} \\ d\eta^4 = a_1\eta^{12}+a_3\eta^{1\bar{1}}+a_4\eta^{1\bar{2}}+a_7\eta^{2\bar{1}}+a_8\eta^{2\bar{2}}, \end{cases}$$

其中 $a_1,a_3,a_4,a_7,a_8\in\mathbb{Q}[i]$。设 $\omega=\frac{i}{2}\sum_{j=1}\eta^{j\bar{j}}$ 为与对角度量对应的基本形式，并假设它是 *astheno-K¨ahler* 的，即

$$|a_1|^2+|a_4|^2+|a_7|^2=2\mathfrak{Re}(a_3\bar{a}_8).$$

于是，

- 若 $a_4\neq 0$ 且 $(u_2,u_3)\in\mathbb{C}^2$，则不存在这样的 *astheno-K¨ahler* 度量变形曲线 ω_t，使得沿变形曲线 $t\mapsto\varphi(t)=\frac{ta_7u_2}{a_4-ta_1u_2}\eta^1\otimes Z_1+tu_2\eta^2\otimes Z_2+\overline{tu_3\eta^3\otimes Z_3}$，对于 $t\in(-\epsilon,\epsilon)$，若

$$\left(|a_4|^2-|a_7|^2\right)\mathfrak{Re}\left(\frac{a_1u_2}{a_4}\right)\neq 0.$$

- 若 $a_7\neq 0$ 且 $(u_1,u_3)\in\mathbb{C}^2$，则不存在这样的 *Astheno-K¨ähler* 度量变形曲线 ω_t，使得 $\omega_0=\omega$ 沿着变形曲线 $t\mapsto\varphi(t)=u_1\eta^1\otimes Z_1+\frac{ta_4u_1}{a_7+ta_1u_1}\eta^2\otimes\bar{Z}_2+tu_3\eta^3\otimes\overline{Z_3}$，对于 $t\in(-\epsilon,\epsilon)$，若

$$\left(|a_4|^2-|a_7|^2\right)\mathfrak{Re}\left(\frac{a_1u_1}{a_7}\right)\neq 0.$$

6.2. **例 2**。现在我们将推论 4.2 应用于另一族具有不变复结构的 4 维幂零流形。设 $(M=\Gamma\backslash G,\ J)$ 为具有复结构的幂零流形 J，该复结构由复化对偶的基 $\{\eta^1,\ \eta^2,\ \eta^3,\ \eta^4\}$ 确定；该复化对偶属于李代数 $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$，而该李代数属于 $\mathfrak{g}$ G，其结构方程为

$$\begin{cases} d\eta^1=0, \\ d\eta^2=0, \\ d\eta^3=a_1\eta^{12}+a_2\eta^{1\bar{1}}+a_3\eta^{1\bar{2}}+a_4\eta^{2\bar{1}}+a_5\eta^{2\bar{2}} \\ d\eta^4=b_1\eta^{12}+b_2\eta^{1\bar{1}}+b_3\eta^{1\bar{2}}+b_4\eta^{2\bar{1}}+b_5\eta^{2\bar{2}} \end{cases} \tag{6.11}$$

与 $a_j,\ b_j\in\mathbb{Q}[i]$。与例 6.1 中一样，复结构 J 是 2 步幂零的。然而，流形 $(M,\ J)$ 并不具有一个 1 维复环面与一个 3 维幂零流形的直积结构。

令 $\omega=\sum_{j=1}^4\eta^{j\bar{j}}$ 为与对角度量 g 相伴的基本形式。通过直接计算可知，g 是 astheno-K¨ahler 当且仅当

$$\begin{cases} 2\mathfrak{Re}(b_5\bar{b}_2)-|b_1|^2-|b_3|^2-|b_4|^2=0 \\ |b_1|^2+|b_3|^2-|b_4|^2-b_5\bar{a}_2-b_2\bar{a}_5=0 \\ 2\mathfrak{Re}(a_5\bar{a}_2)-|b_1|^2-|b_3|^2-|b_4|^2=0. \end{cases} \tag{6.12}$$

当且仅当 $\partial\partial\omega=0$

$$\mathfrak{Re}(a_5\bar{a}_2)+\mathfrak{Re}(b_5\bar{b}_2)-|b_1|^2-|b_3|^2-|b_4|^2=0,$$

如果度量 g 是 astheno-K¨ahler 度量，那么它也是 SKT 度量。

让我们考虑由 $(0,J_t)_{t\in B}$ 参数化的 (M,J) 的变形族，其参数为 $(0,1)$-向量形式

$$\varphi(\mathbf{t})=t_1\overline{\eta}^1\otimes Z_1+t_2\overline{\eta}^2\otimes Z_2,$$

伴随 $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in B := \{\mathbf{t} \in \mathbb{C}^2 : |t_j| < 1,\ j \in \{1,2\}\}$。余标架 $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4\}$ 随后在$\varphi(\mathbf{t})$ 下变化为

$$\begin{cases} \eta^1_{\mathbf{t}} = \eta^1 - t_1\overline{\eta}^1 \\ \eta^2_{\mathbf{t}} = \eta^2 - t_2\overline{\eta}^2 \\ \eta^3_{\mathbf{t}} = \eta^3 \\ \eta^4_{\mathbf{t}} = \eta^4 \end{cases}$$

因此，通过对该方程组求逆，我们得到

$$\begin{cases} \eta^1 = \frac{1}{1-|t_1|^2}(\eta^1_{\mathbf{t}} - t_1\overline{\eta}^1_{\mathbf{t}}) \\ \eta^2 = \frac{1}{1-|t_2|^2}(\eta^2_{\mathbf{t}} - t_2\overline{\eta}^2_{\mathbf{t}}) \\ \eta^3 = \eta^3_{\mathbf{t}} \\ \eta^4 = \eta^4_{\mathbf{t}}. \end{cases}$$

设定 $T_j := \frac{1}{1-|t_j|^2}$，其中 $j \in \{1,\ 2\}$。

当且仅当 $\varphi(\mathbf{t})$ 定义了一个复流形族时， $d(\eta^j{}_{\mathbf{t}})^{0,2} = 0$ 对于每个$j \in \{1,2,3,4\}$，这样的可积性条件成立，当且仅当 $(d\eta^3_{\mathbf{t}})^{0,2} = 0$，由此得到

$$T_1T_2(a_1t_1t_2 - a_3t_1 + a_4t_2)\eta^{\overline{12}}_{\mathbf{t}} = 0$$

以及 $(d\eta^4_{\mathbf{t}})^{0,\ 2} = 0$，由此得到

$$T_1T_2(b_1t_1t_2 - b_3t_1 + b_4t_2)\eta^{\overline{12}}_{\mathbf{t}} = 0.$$

在假设 $a_1 = b_1$、 $a_3 = b_3$ 和 $a_4 = b_4$ 的条件下，对于 $t \in S$，可积性条件成立，其中 S 是方程的解集。

$$b_1t_1t_2 - b_3t_1 + b_4t_2 = 0, \quad (t_1, t_2) \in B. \tag{6.13}$$

现在我们按照前一个例子的做法，来考虑这个映射。

$$F(t_1, t_2) = b_1t_1t_2 - b_3t_1 + b_4t_2,$$

并讨论 $\nabla F|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ 是否为零的情形。

6.2.1. 情形 ***(i)***： $\nabla F|_{(0,0)} = 0$。 这是 $b_3 = b_4 = 0$ 的情况。于是结构方程变为

$$\begin{cases} d\eta^1 = 0, \\ d\eta^2 = 0, \\ d\eta^3 = b_1\eta^{12} + a_2\eta^{1\overline{1}} + a_5\eta^{2\overline{2}} \\ d\eta^4 = b_1\eta^{12} + b_2\eta^{1\overline{1}} + b_5\eta^{2\overline{2}} \end{cases} \tag{6.14}$$

且对角度量 g 是 astheno-K¨ahler 度量，当且仅当满足以下条件。

$$\begin{cases} 2\mathfrak{Re}(b_5\overline{b}_2) = |b_1|^2 \\ b_2\overline{a}_5 + b_5\overline{a}_2 = |b_1|^2 \\ 2\mathfrak{Re}(a_5\overline{a}_2) = |b_1|^2 \end{cases}$$

我们假设 $b_1 \neq 0$。方程的解集 S 对于方程 (6.13) 因此为

$$S = \{(t_1, t_2) \in B : t_1t_2 = 0\}$$

因此，作为满足 $t \in S$ 的变形曲线 $\varphi(t)$，我们可以选择

$$\varphi(t) = tu_1\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + tu_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2, \quad (u_1, u_2) \in S,\ t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时。然后，

$$\varphi'(0) = u_1\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + u_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2.$$

然而，通过计算可以发现，

$$\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial\omega^2 = 0,$$

因此推论 4.2不会产生任何障碍。

6.2.2. 情形 ***(ii)***: $\nabla F|_{(0,0)} \neq 0$。在这种情况下，要么是 $b_3 \neq 0$，要么是 $b_4 \neq 0$。不妨假设 $b_3 \neq 0$; 另一种情形完全类似。

我们有以下结构方程

$$\begin{cases} d\eta^1 = 0 \\ d\eta^2 = 0 \\ d\eta^3 = b_1\eta^{12} + a_2\eta^{1\overline{1}} + b_3\eta^{1\overline{2}} + b_4\eta^{2\overline{1}} + a_5\eta^{2\overline{2}} \\ d\eta^4 = b_1\eta^{12} + b_2\eta^{1\overline{1}} + b_3\eta^{1\overline{2}} + b_4\eta^{2\overline{1}} + b_5\eta^{2\overline{2}} \end{cases}$$

以及亚纯-K¨ahler 条件（6.12）在对角度量 g 上仍然成立。因此，方程（6.13）的解集为

$$S = \left\{(t_1, t_2) \in B : t_1 = \frac{b_4 t_2}{b_3 - b_1 t_2},\ |t_2| < \delta\right\}$$

当 $\delta > 0$ 充分小时。一旦固定 $u_2 \in \mathbb{C}$，我们就可以选取变形曲线 s

$$\varphi(t) = \frac{t b_4 u_2}{b_3 - t b_1 u_2}\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + t u_2 \overline{\eta}^2 \otimes Z_2, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时，使得

$$\varphi'(0) = \frac{b_4 u_2}{b_3}\overline{\eta}^1 \otimes Z_1 + u_2\overline{\eta}^2 \otimes Z_2.$$

然后，我们计算

$$\begin{aligned}(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial)\omega^2 = &((|b_3|^2 - |b_4|^2)\frac{b_1}{b_4}u_2)\eta^{123\overline{123}} + ((|b_4|^2 - |b_3|^2)\frac{b_1}{b_4}u_2)\eta^{123\overline{124}} \\ &+((|b_4|^2 - |b_3|^2)\frac{b_1}{b_4}u_2)\eta^{124\overline{123}} + ((|b_3|^2 - |b_4|^2)\frac{b_1}{b_4}u_2)\eta^{124\overline{124}}\end{aligned}$$

现在，由结构方程可知，形式 $\eta^{123\overline{123}}, \eta^{123\overline{124}}, \eta^{124123}, \eta^{124124}$ 均为 d-闭的。此外，考虑相对于 g 的 $\mathbb{C}$-反线性 $*$-算子，我们得到

$$\begin{aligned}\partial\overline{\partial} * \eta^{123\overline{123}} = 0 &\iff 2\mathfrak{Re}(b_5\overline{b}_2) - |b_1|^2 - |b_3|^2 - |b_4|^2 = 0 \\ \partial\overline{\partial} * \eta^{123\overline{124}} = 0 &\iff |b_1|^2 + |b_3|^2 + |b_4|^2 - b_5\overline{a}_2 - b_2\overline{a}_5 = 0 \\ \partial\overline{\partial} * \eta^{124\overline{123}} = 0 &\iff |b_1|^2 + |b_3|^2 + |b_4|^2 - a_2\overline{b}_5 - a_5\overline{b}_2 = 0 \\ \partial\overline{\partial} * \eta^{124\overline{124}} = 0 &\iff 2\mathfrak{Re}(a_5\overline{a}_2) - |b_1|^2 - |b_3|^2 - |b_4|^2 = 0\end{aligned}$$

由于 ω 是 astheno-K¨ahler，即条件（6.12）成立，因此 $\partial\overline{\partial} * \eta^{123\overline{123}} = \partial\overline{\partial} * \eta^{123\overline{124}} = \partial\overline{\partial} * \eta^{124\overline{123}} = \partial\overline{\partial} * \eta^{124\overline{124}} = 0$，也就是说，形式 $\eta^{\overline{123}123}, \eta^{\overline{123}124}, \eta^{\overline{124}123}, \eta^{\overline{124}124}$。因此，

$$\begin{aligned}[\mathfrak{Im}(\partial \circ \iota_{\varphi'(0)} \circ \partial\omega^2)]_{BC} = &- i(|b_3|^2 - |b_4|^2)\mathfrak{Re}(\frac{b_1 u_2}{b_4})[\eta^{123\overline{123}}]_{BC} + i(|b_3|^2 - |b_4|^2)\mathfrak{Re}(\frac{b_1 u_2}{b_4})[\eta^{123\overline{124}}]_{BC} \\ &+ i(|b_3|^2 - |b_4|^2)\mathfrak{Re}(\frac{b_1 u_2}{b_4})[\eta^{124\overline{123}}]_{BC} - i(|b_3|^2 - |b_4|^2)\mathfrak{Re}(\frac{b_1 u_2}{b_4})[\eta^{124\overline{124}}]_{BC}\end{aligned}$$

当且仅当在 $H^{3,3}_{BC}(M)$ 中消失时，

$$(|b_3|^2 - |b_4|^2)\mathfrak{Re}(\frac{b_1 u_2}{b_4}) = 0. \tag{6.15}$$

我们在下面的定理中总结所得结果。

定理 6.6. 设(M,J)是由左不变$(1,0)$-形式的余标架$\{\eta^1,\eta^2,\eta^3,\eta^4\}$及其结构方程所确定的4维流形族中的一个元素

$$\begin{cases} d\eta^1 = 0 \\ d\eta^2 = 0 \\ d\eta^3 = b_1\eta^{12} + a_2\eta^{1\bar{1}} + b_3\eta^{1\bar{2}} + b_4\eta^{2\bar{1}} + a_5\eta^{2\bar{2}} \\ d\eta^4 = b_1\eta^{12} + b_2\eta^{1\bar{1}} + b_3\eta^{1\bar{2}} + b_4\eta^{2\bar{1}} + a_5\eta^{2\bar{2}}, \end{cases}$$

其中 $a_2,a_5,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 \in \mathbb{Q}[i]$。设 $\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{4}\eta^{j\bar{j}}$为与对角度量 g 相关联的基本形式，并假设 g 是 *Astheno-K¨ahler* （因而也是 *SKT*），即，

$$\begin{cases} 2\mathfrak{Re}(b_5\bar{b}_2) - |b_1|^2 - |b_3|^2 - |b_4|^2 = 0 \\ |b_1|^2 + |b_3|^2 - |b_4|^2 - b_5\bar{a}_2 - b_2\bar{a}_5 = 0 \\ 2\mathfrak{Re}(a_5\bar{a}_2) - |b_1|^2 - |b_3|^2 - |b_4|^2 = 0. \end{cases}$$

那么，

- 若 $b_3 \neq 0$ 和 $u_2 \in \mathbb{C}$，则不存在一条 *Astheno-K¨ahler*度量变形曲线 ω_t，使得沿变形曲线 $\varphi(t) = \frac{tb_4u_2}{b_3 - tb_1u_2}\eta^1 \otimes Z_1 + tu_2\eta^2 \otimes Z_2$, $t \in (-\epsilon,\epsilon)$满足 $\omega_0 = \omega$，如果

$$(|b_3|^2 - |b_4|^2)\mathfrak{Re}(\frac{b_1u_2}{b_4}) \neq 0.$$

- 若 $b_4 \neq 0$ 和 $u_1 \in \mathbb{C}$，则沿变形曲线 $\varphi(t) = tu_1\eta^1 \otimes Z_1 + t\frac{tb_3u_1}{tb_1u_1 + b_4}\eta^2 \otimes Z_2$, $t \in (-\epsilon,\epsilon)$，不存在满足 $\omega_0 = \omega$ 的 ω_t 渐近 *K¨ahler* 度量曲线，若

$$(|b_3|^2 - |b_4|^2)\mathfrak{Re}(\frac{b_1u_1}{b_3}) \neq 0.$$

References

[1] L. Alessandrini, M. Andreatta，紧复流形上的闭横向 (p p *Compositio Math.*，)-形式，（），–；勘误（），。（引自第 .）

61 1987 181 200 **63** 1987 143 2

[2] L. Alessandrini, G. Bassanelli，某类紧非 K¨ahler 流形的小变形，*Proc . Amer. Math. Soc.* **109** (1990)，第 4 期，1059–1062。（引自第 1.）

[3] D. Angella，[2013]，[1355]变形的上同调，3 *J . Geom. Anal.*

[4] D. Angella, H可解流形变形的上同调及某些性质的闭性，*North-West. Eur. J. Math.* **3** 2017 75 105 3 （），–。（引于第 页。）

[5] D. Angella，L. Ugarte，平衡流形的小变形，*Differential Geom. Appl.* **54** (2017)，464– 474。（引自第 1 页。）

[6] S. Console，A. Fino，紧致幂零流形的 Dolbeault上同调，*Transformation Groups* **6** (2001)，111–124。（引自第 3 页。）

[7] L.A. Cordero，M. Fernandez，A. Gray，L. Ugarte，幂零复结构，*Rev. R. Acad. Cien. Serie A.* ()，–。*Mat.* **95** 2001 45 55 3 （引自第 页。）

[8] P. Deligne，P.A. Griffiths，J. Morgan，D.P. Sullivan，K¨ahler 流形的实同伦理论，()()，第 – 页。（引自第 页。）*Invent. Math.* **29** 3 1975 245 274 1

[9] N. Egidi，紧复流形上的特殊度量，*Diff. Geom. Appl.* **14** (2001)，217–234。（引自第 2 页。）

[10] A. Fino，M. Parton，S. Salamon，六维强KT结构族，*Comment. Math. Helv.* **79** (2004)，317–340。（引自第 2 页。）

[11] A. Fino，G. Grantcharov，L. Vezzoni，纤维化上的 Astheno-K¨ahler 与平衡结构，()，第 – 期。（引自第 页。）*International Mathematics Research Notice* **2019** 2018 22, 7093 7117 2

[12] A. Fino，A. Tomassini，带挠率强 K¨ahler 度量的膨胀与解消，*Adv. Math.* **221** (2009)，第 3 期，914–935。（引自第 1 页。）

[13] A. Fino，A Tomassini，关于 Astheno-K¨ahler 度量，*J. London Math. Soc. (2)* **83** (2011)，290–308。（引自第 2 页。）

[14] A. Fino，L. Vezzoni，紧致可解流形上的特殊 Hermitian度量，*J. Geom. Phys.* **91** (2015)，40–53。（引自第 2 页。）

[15] P. Gauduchon，紧致厄米流形的挠率 1-形式， *Math. Ann.* **267** (8) (1984)，495–518。（引自第 1 页。）[16] R. Harvey，J.B. Lawson，K¨ahler 流形的内蕴刻画， *Inv. Math.* **74** (1983)，169–198。（引自第 2 页。）[17] J. Jost，S. -T. Yau，从厄米流形到黎曼流形的映射所满足的非线性椭圆系统及厄米几何中的刚性定理， *Acta Math.* **170** (1993)，221–254；勘误 *Acta Math.* **173** (1994)，307。（引自第 1 页。）[18] K. Kodaira，J. Morrow，*Complex Manifolds*，《复流形》，AMS Chelsea 出版社，2006。（引自第 4、5 页。）[19] K. Kodaira，D.C. Spencer，复解析结构的变形，III. 复结构的稳定性定理， *Ann. of Math.* **71** (1960)，43–76。（引自第 1 页。）[20] J. Li，S.-T. Yau，F. Zheng，关于射影平坦厄米流形， *Comm. Anal. Geom.* **2** (1994)，第 1 期，103–109。[21] Y. Ma，通过 Aeppli 类对 SKT Calabi-Yau $\partial\partial$-流形进行极化，arXiv : 2206.12459v2 [math.CV]。（引自第 1 页。）[22] K. Matsuo，T. Takahashi，关于紧致 Astheno-K¨ahler 流形，( )，第 – 期。（引自第 页。）[23] R. Piovani，T. Sferruzza，带挠率强 K¨ahler 度量的变形，*Colloquium mathematicum* **89** 2001 2, 213 221 2 – *Complex Manifolds* **8** (2021)，286–301。（引自第 2 页。）[24] S. Rao，X. Wan，Q. Zhao，利用幂级数证明具有温和$\partial\partial$-引理的 K¨ahler 结构和平衡结构的局部稳定性，待发表于 *Nagoya J. Math.* (2021)，1–50。（引自第 1 页。）[25] S. Rao，Q. Zhao，若干特殊复结构及其变形性质， *J. Geom. Anal.* **28** (2018)，2984–3047。（引自第 1 、 2 、4、5、_6 页。）[26] F.A. Rossi，A. Tomassini，幂零流形上的强 K¨ahler 度量与 Astheno-K¨ahler 度量，*Adv. Geom.* **12** (2012)，431–446。（引自第 2 页。）[27] T. Sferruzza，平衡度量的变形， *Bul. Sci. Math.* **178** (2022)，103143。（引自第 2 页。）[28] T. Sferruzza，A. Tomassini，关于带挠率强 K¨ahler 度量和 Astheno- K¨ahler 度量的上同调与形式性质，arXiv : 2206.06904v1, [math.DG]。（引自第 2 页。）[29] J. Stelzig，S.O. Wilson，一种超越 K¨ahler 范畴的 dd^c-型条件，arXiv : 2208.01074v1 [math.DG]。（引自第 1 页。）[30] D. Sullivan，*Differential Forms and the Topology of Manifolds*，《流形》（东京，1973），A. Hattori 编，东京大学出版社，东京，1975，第 37–49 页。（引自第 1 页。）[31] D. Sullivan，拓扑学中的无穷小计算，*Publ. Mat. Inst. Hautes Études Sci.* **47** (1977)，第 269–331 页。（引自第 1 页。）[32] M, Schweitzer，围绕 Bott–Chern 上同调，arXiv : 0709.3528v1, [math.AG]。（引自第 4 页。）

（Tommaso Sferruzza）Dipartimento di Scienze Matematiche、Fisiche e Informatiche、Unità di Matematica e Informatica、Università degli studi di Parma*Email address*: tommaso.sferruzza@unipr.it