两种传感方案对高阶厄米-高斯模式的失准与模式失配误差信号

LiuTao* 和 Paul Fulda佛罗里达大学，美国佛罗里达州盖恩斯维尔市博物馆路 *2001* 号，邮编 *32611*

AnnaC. Green*Nikhef*，荷兰阿姆斯特丹科学园 *105* 号，邮编 *1098 XG*

在精密干涉测量领域，例如 Advanced LIGO，将激光器锁定到光学腔是实现最佳灵敏度的普遍要求。由于高阶厄米-高斯（HG）模式有望降低测试质量块的热噪声，近期研究开始探讨将其用于主干涉仪光束。然而，研究表明，高阶 HG 模式更容易在耦合进入光学腔时产生耦合损耗：由失准和模式失配引起的功率损耗分别随 $2n+1$ 和 n^2+n+1变化，其中 n为模式指标。本文首次对任意高阶 HG 模式进行了解析计算，得出了采用传统传感方案（使用古伊相位望远镜和象限光电探测器）以及近期提出的基于射频抖动的传感方案（仅使用单元光电二极管）时的对准和模式失配传感信号。我们表明，高阶 HG 模式的传感信号以及信号与散粒噪声比均高于基模。具体而言，传统传感方案中的对准和模式失配传感信号分别近似按 $\sqrt{n}$和 n变化；而基于抖动的传感方案中的信号则分别严格按 $2n+1$ 和 n^2+n+1 变化，_这恰好与相应容差的降低幅度一致。这有望减轻高阶 HG 模式因遭受过大的失准和模式失配引起的功率损耗而带来的不利影响。

arXiv:2305.03658v1 [astro-ph.IM] 5 May 2023

I. 引言

Advanced LIGO 和先进Virgo 等所有领先的引力波探测器 [1–3] 在约 100 Hz 的信号频率下，其灵敏度受测试质量块光学器件的热噪声限制。对于 Cosmic Explorer 和爱因斯坦望远镜等下一代探测器，情况很可能也是如此 [4, 5]。为了降低这种噪声，从而提高探测器灵敏度，人们提出以高阶光学模式（如拉盖尔-高斯（LG）模式或厄米-高斯（HG）模式）取代目前使用的基模高斯激光束。与基模高斯光束相比，强度分布更均匀的高阶模式能够更好地“平均掉”这种热噪声的影响 [6, 7]。通过数值模拟^{3,3} 和桌面实验研究高阶LG [8, 9] 模式的潜在应用发现，即使是最先进的反射镜，其表面面形缺陷也会在真实的高精细度光学腔中导致LG模式出现显著的模式不纯度和损耗 [10–12]。然而，研究也表明 [13, 14] ，通过有意在测试质量块上引入像散，可以使 HG$_{3,3}$ 等高阶HG模式几乎像目前使用的HG$_{0,0}$ 模式一样，能够抵抗反射镜表面变形。

A. Jones 等人 [15] 以及本文作者 [16]然而已经证明，由失准和模式失配引起的功率耦合损耗会随模式阶数增加。因此，与基模相比，高阶 HG 模式对失准和模式失配等光束畸变更为敏感。然而，本文表明，高阶 HG 模式也具有更强的对准和模式失配传感信号，因此具备更好的传感与控制能力。这对于实现高阶 HG 模式在未来引力波探测器中的应用，以发挥其热噪声方面的优势，以及在许多其他利用有益的高阶空间激光模式的领域中的应用，至关重要；例如多模光学量子信息系统 [17] 以及各种用于高分辨率成像的显微镜相关系统 [18]。我们通过计算所谓的相对传感增益来证明这一结果，该增益定义为高阶模相对于基模的误差信号比。本文将通过解析方法和 Finesse [19–22]仿真，研究单个对称法布里–珀罗光腔在不同探测方案下，对准和模式失配传感增益随 HG 模式指标的变化。

我们研究传统的外差波前传感（WFS）方案 [23, 24] 以及近期提出的射频抖动调制传感（RFJ）方案 [25]，用于对准传感；同时研究模式转换器传感（MCS）方案 [26] 和射频透镜调制传感（RFL）方案 [25, 27——29]用于模式失配传感，如图1所示。具体而言，WFS 使用两个分立光电探测器，二者的古伊相位相差$\frac{\pi}{2}$ 弧度，分别测量每个轴上两个正交失准自由度，即倾斜和横向位移。另一方面，用于对准传感的 RFJ 利用电光光束偏转器（EOBD），产生与载波频率相差光学腔高阶模差频的射频抖动边带。在正交解调相位（即相差$\frac{\pi}{2}$ 弧度）下，使用单元光电二极管对射频抖动调制产生的偏置模边带与失准产生的载波频率偏置模式之间的拍频信号进行解调，可得到入射光束相对于腔轴的倾斜和平移的线性误差信号。对于 MCS，我们使用像散模式转换器和两个 45°旋转的象限

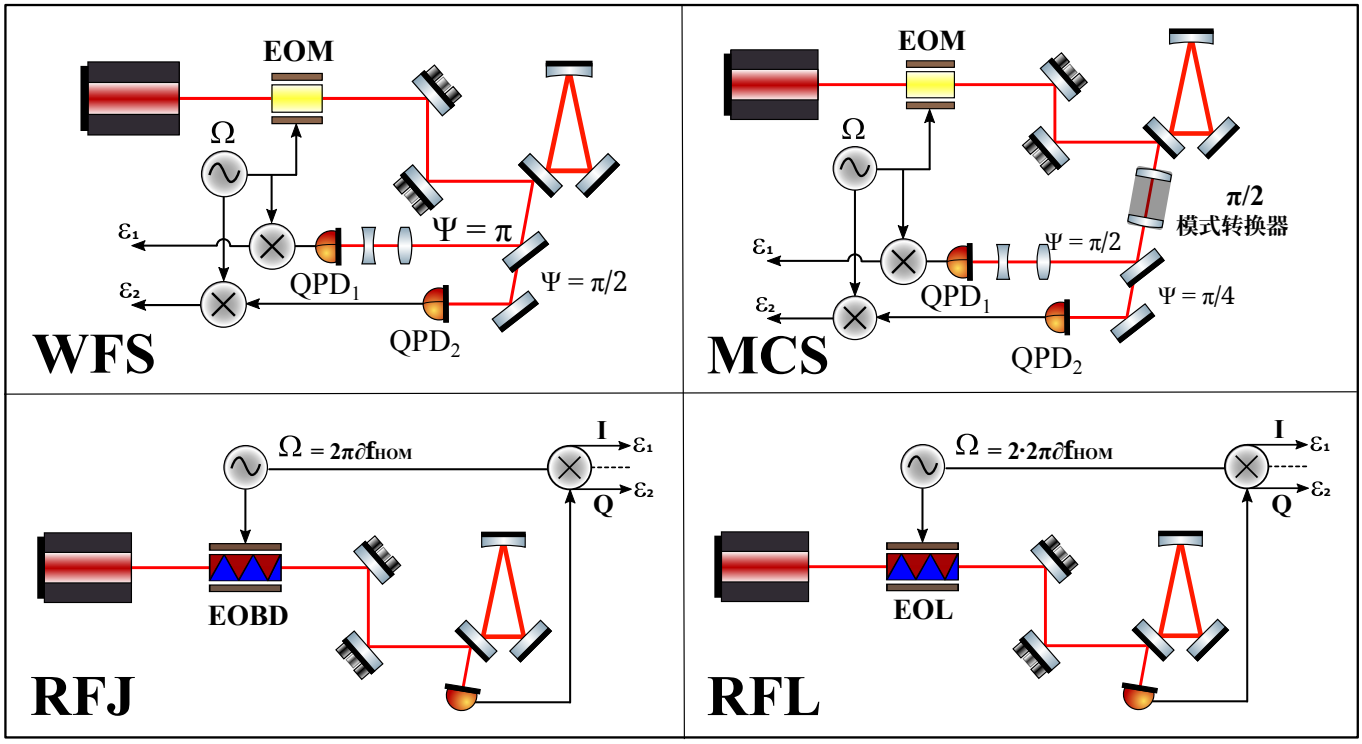


图1. 本文所考察的各种对准与模式失配传感方案示意图。传统传感方案位于上排，近期提出的基于抖动的传感方案则显示在下排。

光电探测器，二者相隔 $\frac{\pi}{4}$ 弧度的古伊相位，以测量两个正交模式失配自由度，即束腰尺寸和束腰位置失配。另一方面，用于模式失配传感的 RFL 使用电光透镜器件（EOL），产生与载波频率相差光学腔高阶模差频两倍的射频离焦边带，从而通过单个光电二极管，在正交解调相位下同时提取完整的模式失配误差信号。我们表明，在上述所有传感方案中，高阶 HG 模式的传感信号始终强于基模。尤其是，RFJ/L 方案的传感增益和信号与散粒噪声比均有所提高，其幅度恰好与相应容差的降低相匹配 [15, 16], ，这有望缓解高阶 HG 模式在传感噪声受限干涉仪中因失准和模式失配导致过度功率损耗所带来的不利影响。我们还进行了相应的 Finesse 仿真，并与传感增益的解析结果进行比较。Finesse仿真结果与解析模型高度吻合。

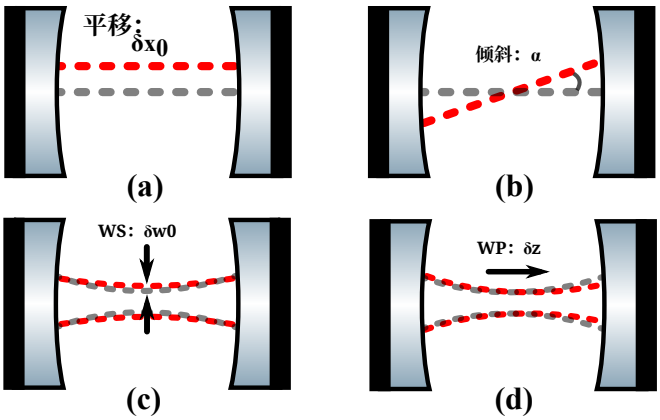


图 2. 输入激光模式（红色）与腔本征模（灰色）之间失准（上）和模式失配（下）的示意图。上图左侧面板显示横向平移 δx_0，右侧面板显示倾斜 α。下图左侧面板显示大小为 δw_0 的束腰尺寸失配，右侧面板显示大小为 δz 的束腰位置失配。

本文结构如下：在第 II 节和 III节中，我们分别逐步推导了对称腔中任意厄米-高斯模式的对准与模式失配传感信号。我们还将理论结果与相应的 Finesse 仿真结果进行了比较。我们在第 IV节中报告结论并进行讨论。

II. 对准传感

在接下来的两个小节中，我们将分别计算传统波前传感方案（WFS）中的对准传感误差信号 [23, 24] 以及近期提出的射频抖动调制传感方案（RFJ）中的对准传感误差信号 [25] 其中采用任意高阶HG模式作为

载波。

沿z轴传播的 HG 模式的一般表达式为 [30]

$$\mathcal{U}_{n,m}(x,y,z) = \mathcal{U}_n(x,z)\mathcal{U}_m(y,z) \tag{1}$$

with

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_n(x,z) = &\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{\exp(\mathrm{i}(2n+1)\Psi(z))}{2^n n! w(z)}\right)^{1/2} \\ &\times H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{kx^2}{2R_c(z)} - \frac{x^2}{w^2(z)}\right),\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\Psi(z) = \arctan\left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)$ 为古伊相位，$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$为瑞利长度。$k$ 为波数，λ 为波长，$w(z)$ 为光束半径，$R_c(z)$ 为波前曲率半径。它们与束腰尺寸 w_0和束腰位置 z_0 的关系为

$$\begin{aligned}w(z) &= w_0 + \sqrt{1 + \left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)^2} \\ R_c(z) &= z - z_0 + \frac{z_R^2}{z-z_0}\end{aligned} \tag{3}$$

因此，单模电场在进入光腔之前可写为

$$E(x,y,z) = E_0\mathcal{U}_{n,m}(x,y,z)e^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} \tag{4}$$

其中，E_0 为初始场振幅，ω 为场的角频率。

对于对准传感，如图 2上方各图所示，由于 HG 模式在 x 和 y方向上可分离，因此，一个轴上的失准传感增益与正交轴上的模式指标无关，所以一般只需考虑单轴行为，例如 $\mathrm{HG}_{n,0}$ 模式在 xz 平面内的失准，而不失一般性 [16]。根据对称性，同样的论证也适用于 $\mathrm{HG}_{0,m}$模式在yz 平面内的失准，以及一般情况下的 $\mathrm{HG}_{n,m}$ 模式。

本节中，我们考虑一个一般的 $\mathrm{HG}_{n,\,0}$ 模式，光束在对称腔中心的xz 平面内发生失准。我们将该中心设为坐标系原点，即$z_0 = 0$。因此，初始光束可简化为

$$E(x,z) = E_0\mathcal{U}_n(x,z)e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{5}$$

A. 对准传感：波前传感（WFS）

在 WFS 方案中，我们使用两个象限光电探测器对光腔反射光进行探测，它们分别位于距腔束腰 π 和 $\pi/2$ 古伊相位的位置，用于测量倾斜和横向偏移自由度。

1. WFS：倾斜

我们先来看倾斜自由度。我们以调制指数 m 、频率为 Ω的相位调制作用于 $\mathrm{HG}_{n,0}$ 模式的载波场。仅保留一阶边带后，光束 5 变为

$$E = E_0\mathcal{U}_n e^{\mathrm{i}\omega t}\left(1 + \mathrm{i}\frac{m}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\Omega t} + e^{\mathrm{i}\Omega t}\right)\right) \tag{6}$$

根据论文 [16], 中的结果，当入射光束轴与光腔光轴之间存在失准角 α （绕腔束腰）时，光腔输入镜处的场在一阶近似下变为

$$\mathcal{U}_n^{\alpha} \approx \mathcal{U}_n + \mathrm{i}\frac{\alpha}{\Theta}\left(\sqrt{n+1}\mathcal{U}_{n+1}e^{-\mathrm{i}\Psi} + \sqrt{n}\mathcal{U}_{n-1}e^{\mathrm{i}\Psi}\right) \tag{7}$$

其中$\Theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ 是远场发散角， Ψ 是从输入镜到腔束腰的累积古伊相位。将式6中的输入调制光束写为

$$\begin{aligned}E = E_0&\left(\mathcal{U}_n + \frac{\mathrm{i}\alpha}{\Theta}\left(\sqrt{n+1}\mathcal{U}_{n+1}e^{-\mathrm{i}\Psi} + \sqrt{n}\mathcal{U}_{n-1}e^{\mathrm{i}\Psi}\right)\right)e^{\mathrm{i}\omega t} \\ &\times\left(1 + \mathrm{i}\frac{m}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\Omega t} + e^{\mathrm{i}\Omega t}\right)\right)\end{aligned} \tag{8}$$

为检测光腔反射中的对准误差信号，我们必须考虑光腔的反射场 $\mathrm{E}_{\mathrm{refl}}$。在反射过程中，式8 中的每一项都乘以腔复反射率函数$F(\omega,\ n)$，其中 n 是模式指标。一般而言，复反射率为

$$F(\omega,n) = r_1 - \frac{r_2 t_1^2 \exp\left(-\mathrm{i}\left(D\frac{\omega}{c} + (n+1)\Psi_{rt}\right)\right)}{1 - r_1 r_2 \exp\left(-\mathrm{i}\left(D\frac{\omega}{c} + (n+1)\Psi_{rt}\right)\right)} \tag{9}$$

其中，r_1, t_1, r_2, 和 t_2 分别是输入测试质量和端测试质量的振幅反射率和透射率；D 是光腔的精确往返长度； Ψ_{rt} 是在光腔内沿往返路径累积的古伊相位。通常，腔复反射率函数 $F(\omega,n)$ 较为复杂。然而，对于高精细度、完全过耦合且几何稳定的光腔，所有反射率系数均为实数；对于非共振场分量，系数为 1；对于共振场分量，系数为 -1。例如，Advanced LIGO 中的光腔具有类似特性，因此我们可以在全文中采用这些假设，使解析结果更直观易懂。因此，我们有 $F(\omega,n) = -1$ ，而非共振场分量的反射率函数，例如$F(\omega,n \pm 1)$、$F(\omega \pm \Omega, n)$ 和 $F(\omega \pm \Omega, n \pm 1)$，均为 1。

在上述假设下，反射场 $\mathrm{E}_{\mathrm{refl}}$ 为

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{\mathrm{refl}} = &\left(-\mathcal{U}_n + \frac{\mathrm{i}m}{2}\left(\mathcal{U}_n e^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathcal{U}_n e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right) - \frac{\mathrm{i}\alpha}{\Theta}\left(\mathcal{U}_{n+1}\sqrt{n+1} + \right.\right. \\ &\left.\mathcal{U}_{n-1}\sqrt{n}\right) + \frac{\alpha}{\Theta}\frac{m}{2}\left(\mathcal{U}_{n+1}\sqrt{n+1}e^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathcal{U}_{n+1}\sqrt{n+1}e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right. \\ &\left.\left. + \mathcal{U}_{n-1}\sqrt{n}e^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathcal{U}_{n-1}\sqrt{n}e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right)\right)\cdot E_0 e^{\mathrm{i}\omega t}\end{aligned} \tag{10}$$

其中，我们将从腔束腰到 QPD 的累积古伊相位设为 π。由于倾斜，原始模式散射出的相邻上模和下模会产生一个额外因子 $e^{i\pi\cdot(\pm1)} = -1$。

由光腔反射中的分割式光电探测器产生的光电流为

$$\mathrm{I}_{PD} = \left(\int_0^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{0} dx\right) E_{\mathrm{refl}} \cdot E_{\mathrm{refl}}^{*} \tag{11}$$

对于理想的分割式光电探测器，假设其响应度适当，为 1 A/W。E_{refl} 和 E^{*} refl 各有 9 项，因此在乘积 $E_{\mathrm{refl}}E^{*}$ refl 中共有 81 项需要计算。然而，大多数项对信号没有贡献。具体而言，只有关于 x 为奇函数的项才对分割式光电探测器信号有贡献。我们还知道，只有以调制频率 Ω 振荡的项，才会在以 Ω 解调并进行低通滤波后对光电探测器信号有贡献。因此，非零光电流为

$$\mathrm{I}_{PD} = -2\mathrm{E}_0^2 \frac{\alpha}{\Theta} m \left(e^{\mathrm{i}\Omega t} + e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right)\left(\sqrt{n+1}\beta_{n,n+1} + \sqrt{n}\beta_{n,n-1}\right) \tag{12}$$

其中，$\beta_{n,\ n+1}$ 为拍频系数。

$$\beta_{n,n+1} = \left(\int_0^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{0} dx\right) \mathcal{U}_n \cdot \mathcal{U}_{n+1} \tag{13}$$

一般而言，计算拍频系数较为复杂，但随着 n 增大$\beta_{n,\ n+1}$趋近于约 0.64 的常数值。更多详细信息请参见附录IV。

我们可以假设，光电流信号通过一个具有 1 V/A 增益的适当跨阻级转换为电压信号。使用相位$\phi = 0$ 对拍频信号进行解调（这种情况通常称为同相解调或 I 相解调），并通过低通滤波器去除频率为 2Ω 的信号分量后，我们得到在 $\mathrm{QPD_1}$ 处测得的倾斜误差信号的以下表达式：

$$\mathrm{V}_{\mathrm{WFS}}^{\Omega,\mathrm{QPD}_1} = -2\mathrm{E}_0^2 \frac{\alpha}{\Theta} m \left(\sqrt{n+1}\beta_{n,n+1} + \sqrt{n}\beta_{n,n-1}\right) \tag{14}$$

我们将相对传感增益 Σ_n 定义为高阶模 $\mathrm{HG}_{n,0}$ 与基模 $\mathrm{HG}_{0,0}$ 的误差信号之比

$$\Sigma_n \equiv \left(\sqrt{n+1}\beta_{n,n+1} + \sqrt{n}\beta_{n,n-1}\right)/\beta_{0,1} \tag{15}$$

传感增益随模式指标的增加而增大。

2. WFS：平移。

现在让我们来看看横向位移自由度。根据论文 [16]，中的结果，相对于光腔光轴发生横向位移后，在光腔输入镜处的光束变为

$$\mathcal{U}^{\delta x_0}(x,z) \approx \mathcal{U}_n + \frac{\delta x_0}{w_0}\left(\sqrt{n+1}\mathcal{U}_{n+1}e^{-\mathrm{i}\Psi} - \sqrt{n}\mathcal{U}_{n-1}e^{\mathrm{i}\Psi}\right) \tag{16}$$

其中，δx_0 是沿x 方向的横向位移。与前面路径的不同之处在于，从腔束腰到 QPD 的累积古伊相位改为 $\pi/2$。这会为从原始模式散射出的上下相邻模式产生一个额外因子$e^{i\frac{\pi}{2}\cdot(\pm1)} = \pm i$。因此我们有

$$\mathcal{U}^{\delta x_0}(x,z) \approx \mathcal{U}_n + \mathrm{i}\frac{\delta x_0}{w_0}\left(\sqrt{n+1}\mathcal{U}_{n+1}e^{-\mathrm{i}\Psi} + \sqrt{n}\mathcal{U}_{n-1}e^{\mathrm{i}\Psi}\right) \tag{17}$$

与公式7（对于相邻的上、下散射模式，还需额外乘以 -1 π 古伊相位）相比，我们可以看到，如果将展开参数$\frac{\alpha}{\Theta}$改为 $-\frac{\delta x_0}{w_0}$，倾斜和平移的对准信号计算实质上相同。因此，我们可以直接由公式14写出横向平移误差信号：

$$\mathrm{V}_{\mathrm{WFS}}^{\Omega,\mathrm{QPD}_2} = 2\mathrm{E}_0^2 \frac{\delta x_0}{w_0} m \left(\sqrt{n+1}\beta_{n,n+1} + \sqrt{n}\beta_{n,n-1}\right) \tag{18}$$

解调相位也设为零。在此平移路径中，我们得到的传感增益与公式15中倾斜情况的传感增益相同。

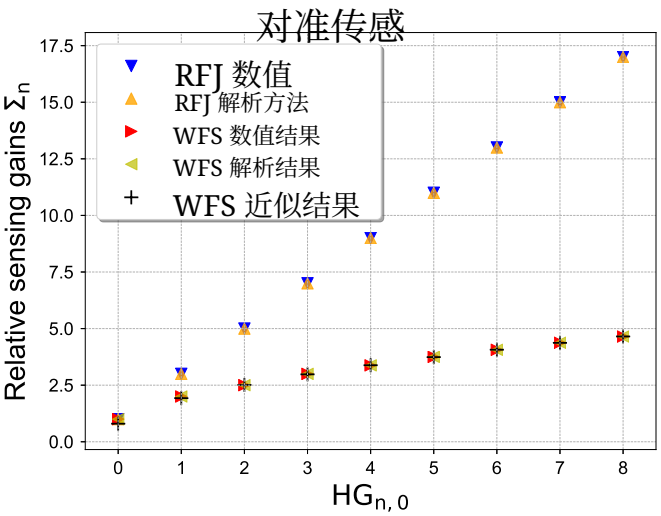


图 3. WFS 和 RFJ 方案中 HG Σ_n 模式的相对对准传感增益$_{n,\ 0}$。图中还包括公式15 和29 中的解析传感增益，以及公式19 中的近似结果。还列出了相应的 Finesse 数值结果以供比较。

如附录IV中的图5 所示，随着模式阶数增大，拍频系数收敛至约 0.64。因此，我们可以将复杂的高阶拍频系数（即不包括 $\beta_{0,1}$）替换为常数 0.64，从而近似得到式14 和18中的精确结果。经过上述近似后，我们得到

$$\Sigma_n \approx 0.64 \cdot \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)/\beta_{0,1} \tag{19}$$

如图3所示，除了下模 $\mathrm{HG}_{0,0}$，之外，近似结果相当好。这是因为对于较低的模式指标，拍频系数 $\beta_{0,\ 1}$ 例如，相当

diff与我们的近似值 0.64 不同。我们还在图 3 中以黑色展示了相应的精细度（Finesse）仿真结果。3它们与黄色所示的精确解析结果高度吻合。

因此我们得出结论，在这种传统的 WFS 方案中，高阶模 $\mathrm{HG}_{n,0}$ 的对准传感增益近似按 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$变化。计算假设一般的 $\mathrm{HG}_{n,0}$（即二维）模式在xz 平面内失准；不过，由于 HG 模式在x 轴和y 轴上是可分离的，且任意离轴失准均可分解为各轴上的倾斜，因此很容易将其推广到任意三维情形。

B. 对准传感：射频抖动传感（RFJ）

对于采用射频抖动调制方案的对准传感，我们使用电光偏转器（EOBD）施加射频抖动调制边带，使其与载波频率之间的频差等于光学腔的高阶模差频。该方案在正交解调相位下，利用单元光电探测器对射频抖动调制产生的偏移模边带与失准产生的载波频率偏移模之间的拍频信号进行解调。这样便可同时产生对应两个正交失准自由度的线性误差信号。对于单元光电探测器，例如，$\mathrm{HG}_{n、m}$ 模与 $\mathrm{HG}_{n'、m'}$ 模之间的拍频系数将简单地等于克罗内克δ函数

$$\beta_{(n,m),(n',m')} \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, \mathcal{U}_{nm}\cdot\mathcal{U}_{n'm'} = \delta_{n,n'}\cdot\delta_{m,m'} \quad (20)$$

我们将通过正交解调相位明确展示，该拍频信号可同时为两个轴的倾斜和平移提供线性误差信号。

与 WFS 方案类似，我们考虑一般的 $\mathrm{HG}_{n,0}$ 光束在 xz 平面内失准，并沿 z 轴传播。式5 中的初始场变为

$$\mathcal{U}(x,z) = \mathrm{E}_0\mathcal{U}_n(x,z)e^{\mathrm{i}\omega t} \quad (21)$$

经过电光偏转器调制器（EOBD）后的场变为 [25]

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{\mathrm{EOBD}} \approx \mathrm{E}_0\mathcal{U}_n e^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{i}\frac{m_\alpha}{2\Theta_m}\mathrm{E}_0\Big(&\sqrt{n+1}\,\mathcal{U}_{n+1}e^{-\mathrm{i}\Psi_1} \\ &+ \sqrt{n}\,\mathcal{U}_{n-1}e^{\mathrm{i}\Psi_1}\Big)\left(e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t}+e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t}\right)\end{aligned} \quad (22)$$

其中m_α 为射频抖动调制深度， Θ_m 为倾斜调制器所在位置处的远场光束发散角，Ψ_1 为从调制器到腔束腰的累积古伊相位。

1. RFJ：倾斜

下面我们来考察倾斜自由度。当在 EOBD 出射光束与光腔束腰处的光腔光轴之间施加一个角度为 α 的倾斜时，式 22 变为

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{\alpha} \approx{}& \mathrm{E}_0\mathcal{U}_n e^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{i}\frac{\alpha}{\Theta_c}\mathrm{E}_0\Big(\sqrt{n+1}\,\mathcal{U}_{n+1}e^{-\mathrm{i}\Psi_2} + \sqrt{n}\,\mathcal{U}_{n-1}e^{\mathrm{i}\Psi_2}\Big) + \mathrm{i}\frac{m_\alpha}{2\Theta_m}\Big[\sqrt{n+1}\Big(\mathcal{U}_{n+1} + \mathrm{i}\frac{\alpha}{\Theta_c}\Big(\sqrt{n+2}\,\mathcal{U}_{n+2}e^{-\mathrm{i}\Psi_2} + \sqrt{n+1}\,\mathcal{U}_n e^{\mathrm{i}\Psi_2}\Big)\Big) \\ &\times e^{-\mathrm{i}\Psi_1} + \sqrt{n}\Big(\mathcal{U}_{n-1} + \mathrm{i}\frac{\alpha}{\Theta_c}\Big(\sqrt{n}\,\mathcal{U}_n e^{-\mathrm{i}\Psi_2} + \sqrt{n-1}\,\mathcal{U}_{n-2}e^{\mathrm{i}\Psi_2}\Big)\Big)e^{\mathrm{i}\Psi_1}\Big]\left(e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t}+e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t}\right)\end{aligned} \quad (23)$$

其中， Ψ_2 是从腔束腰到光电探测器的累积古伊相位。此后我们可以放心地忽略 Ψ_2 ，因为假设光电探测器的孔径远大于光束尺寸，单元光电探测器只能检测相同模式边带之间的拍频（例如 $\mathrm{HG}_{n+1,\,0}$ 与 $\mathrm{HG}_{n+1,\,0}$，$\mathrm{HG}_{n-1,\,0}$ 与 $\mathrm{HG}_{n-1,\,0}$）。这些相同模式的边带具有相同的累积古伊相位 Ψ_2。然而，这个整体相位因子对光电流 $\mathrm{E}\cdot\mathrm{E}^*$ 没有贡献，因为它会相互抵消。稍后我们还会看到，边带模式额外的累积古伊相位 Ψ_1 也可以被“吸收”到一个整体解调相位中，因此与我们无关。

为了提取光腔反射中的误差信号，我们需要将式23 中的每一项乘以适当的反射率函数$F(\omega,n)$（光腔的），从而得到 $\mathrm{E}_{\mathrm{refl}}$。一般而言，光腔的反射率函数$F(\omega,n)$ 在公式 9 较为复杂。然而，在高精细度的完全过耦合腔情况下，所有共振分量的反射率函数均为 -1，而非共振场分量的反射率函数均为 1。RFJ方案依赖于在高阶模差频处进行调制，这使得上边带中的上模和下边带中的下模在光学腔中共振。因此，我们有 $F(\omega,\ n)=F(\omega+\Omega,\ n+1)=F(\omega-\Omega,\ n-1)=-1$ 而非共振场分量（例如 $F(\omega,\ n\pm1)$）的其余反射率值均为 1。单元光电探测器上的光电流信号定义为

$$\mathrm{I}_{PD} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, E_{\mathrm{refl}}\cdot E_{\mathrm{refl}}^{*} \quad (24)$$

变为

$$\mathrm{I}_{PD} = \frac{m_\alpha \alpha}{\Theta_m \Theta_c} \mathrm{E}_0^2 (2n+1) \left(e^{\mathrm{i}\Psi_1} e^{\mathrm{i}\Omega t} + e^{-\mathrm{i}\Psi_1} e^{-\mathrm{i}\Omega t} \right) \tag{25}$$

其中我们再次假设响应度为 1 A/W，并在式20中对单元光电二极管使用了正交归一条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \mathcal{U}_n \cdot \mathcal{U}_{n'} = \delta_{n,n'} \tag{26}$$

现在，让我们执行与解调过程等效的数学运算。在解调过程中，我们将上述光电流信号（经过增益为 $1V/W$ 的跨阻级转换为电压信号后）与本地振荡器 $\cos(\Omega t + \delta\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}(\Omega t+\delta\phi)} + e^{-\mathrm{i}(\Omega t+\delta\phi)}\right)$ 相乘，然后通过低通滤波提取直流项。

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_{\mathrm{RFJ}}^{\Omega} &= \mathrm{I}_{PD} \times \cos(\Omega t + \delta\phi) \\ &= \frac{m_\alpha \alpha \mathrm{E}_0^2 (2n+1) \left(e^{\mathrm{i}\Psi_1} e^{\mathrm{i}\Omega t} + e^{-\mathrm{i}\Psi_1} e^{-\mathrm{i}\Omega t} \right)}{\Theta_m \Theta_c} \times \frac{e^{\mathrm{i}(\Omega t+\delta\phi)} + e^{-\mathrm{i}(\Omega t+\delta\phi)}}{2} \\ &= \frac{m_\alpha \alpha \mathrm{E}_0^2 (2n+1)}{2\Theta_m \Theta_c} \left(e^{\mathrm{i}(\Psi_1-\delta\phi)} + e^{\mathrm{i}(-\Psi_1+\delta\phi)} \right) + (\text{terms in } 2\Omega) \end{aligned} \tag{27}$$

通过将整体解调相位偏移量 $\delta\phi$ 设置为 Ψ_1，可以使直流项最大化。因此我们已经看到，如果相应地调整整体解调相位（并且我们确切知道应调整多少），上、下边带中累积古伊相位的差异在这里并不会影响我们。将解调相位设置为 Ψ_1 （即同相解调）进行解调，我们得到误差信号

$$\mathrm{V}_{\mathrm{RFJ}}^{\Omega,\mathrm{I}} = \frac{m_\alpha \alpha}{\Theta_m \Theta_c} \mathrm{E}_0^2 (2n+1) \tag{28}$$

因此，相对传感增益 simply 为

$$\Sigma_n = 2n + 1 \tag{29}$$

2. RFJ：横向偏移

现在考虑横向偏移误差信号。施加大小为 δx_0，的横向位移后，式22变为 [16]

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\delta x_0} \approx\ & \mathrm{E}_0 \mathcal{U}_n e^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{\delta x_0}{w_0} \mathrm{E}_0 e^{\mathrm{i}\omega t} \left(\sqrt{n+1}\, \mathcal{U}_{n+1} e^{-\mathrm{i}\Psi_2} - \sqrt{n}\, \mathcal{U}_{n-1} e^{\mathrm{i}\Psi_2} \right) + \mathrm{i} \frac{m_\alpha}{2\Theta_m} \mathrm{E}_0 \Bigg[\sqrt{n+1} \Bigg(\mathcal{U}_{n+1} - \frac{\delta x_0}{w_0} \Big(\sqrt{n+2}\, \mathcal{U}_{n+2} e^{-\mathrm{i}\Psi_2} \\ & - \sqrt{n+1}\, \mathcal{U}_n e^{\mathrm{i}\Psi_2} \Big) \Bigg) e^{-\mathrm{i}\Psi_1} + \sqrt{n} \Bigg(\mathcal{U}_{n-1} - \frac{\delta x_0}{w_0} \Big(\sqrt{n}\, \mathcal{U}_n e^{-\mathrm{i}\Psi_2} - \sqrt{n-1}\, \mathcal{U}_{n-2} e^{\mathrm{i}\Psi_2} \Big) \Bigg) e^{\mathrm{i}\Psi_1} \Bigg] \left(e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t} \right) \end{aligned} \tag{30}$$

同样可以忽略 Ψ_2，因为对单元光电探测器信号有贡献的场分量具有相同的累积古伊相位 Ψ_2。这一整体相位因子会抵消，对光电流没有贡献。利用 $F(\omega,n) = F(\omega+\Omega, n+1) = F(\omega-\Omega, n-1) = -1$，并且对于高 Finesse、完全过耦合的光腔中的所有其他项，$F = 1$，由式24定义的单元光电探测器信号变为

$$\mathrm{I}_{PD} = \frac{\mathrm{i} m_\alpha}{\Theta_m} \frac{\delta x_0}{w_0} \mathrm{E}_0^2 (2n+1) \left(e^{\mathrm{i}\Psi_1} e^{\mathrm{i}\Omega t} - e^{-\mathrm{i}\Psi_1} e^{-\mathrm{i}\Omega t} \right) \tag{31}$$

其中我们在式中使用了单元光电二极管的正交归一条件。26。对于解调过程，与式 27类似，我们可以将整体解调相位调整为 $\Psi_1 + \pi/2$（这种条件通常称为正交相位或 Q 相位解调），以提取最佳误差信号

$$\mathrm{V}_{\mathrm{RFJ}}^{\Omega,\mathrm{Q}} = -\frac{m_\alpha \delta x_0}{\Theta_m w_0} \mathrm{E}_0^2 (2n+1) \tag{32}$$

因此，我们可以同时提取方程中的两个正交对准传感误差信号。28 和32 同时具有正交解调相位的单个光电探测器 Ψ_1 和 $\Psi_1 + \pi/2$。由此产生的误差信号彼此成正比，并且随 $2n+1$变化，其中 n 是载波 $\mathrm{HG}_{n,0}$的模式阶数，见图 3。这种对 n 的线性依赖源于以下事实：“有效”EOBD 调制深度（式 22 ）大致按$\sqrt{n}$缩放。它与静态失准导致的散射模式（其振幅也大致按 $\sqrt{n}$ 缩放，如式 23所示）拍频后，便产生了此处 RFJ 感测增益的线性依赖关系。我们还进行了相应的 Finesse 仿真。如图 3中蓝色曲线所示，仿真结果与橙色的解析结果高度吻合。

因此我们看到，RFJ方案中的对准感测误差信号随模式指标线性增加，如图所示。3。由于基于抖动的方案中 EOBD 的有效调制深度额外包含因子 $\sqrt{n}$，这一增长甚至快于公式 14中传统 WFS技术的标度关系。

III. 模式失配传感

对于模式失配传感，如图 2底部各图所示，我们无法将问题简化为单轴情形，因此必须同时考虑 x 轴和 y 轴 [16]。在本节中，我们将计算以任意高阶 HG模式 HG$_{n,m}$ 分别作为载波时，模式转换器传感方案（MCS）和较新提出的射频透镜调制传感方案（RFL）中的模式失配传感误差信号。为简洁起见，我们将考虑模式失配发生在对称腔中心的情形，并令其与坐标系原点重合，即 $z_0 = 0$。因此，我们可以将公式 4中的初始光束简化为

$$E(x,y,z) = E_0 \mathcal{U}_{n,m}(x,y,z) e^{i\omega t} \tag{33}$$

其中 $\mathcal{U}_{n,m}(x, y, z)$ 是式 nm 1 中表示 HG$_{nm}$ 模式的横向函数1。

A. M式失配传感：模式转换器传感（ MCS)

对于 MCS 方案，我们使用一个 $\pi/2$ 模式转换器，以及两个相对于光腔束腰位置偏移 45°-角度旋转的象限光电探测器，分别对应于两个正交的束腰尺寸失配和束腰位置失配自由度，其古伊相位分别为 $\pi/4$ 和 $\pi/2$。该方案最初由 Maga˜na-Sandoval 等人 [26] 针对 HG$_{0,0}$ 模式失配传感提出。然而，在本节中，我们将把该方案扩展到通用的 HG$_{n,m}$ 模式失配传感。与对准误差信号的计算类似，我们首先对载波 HG$_{n,m}$ 模式施加调制指数为 m、频率为 Ω 的相位调制。仅保留一阶边带后，电场变为

$$E = E_0 \mathcal{U}_{n,m} e^{i\omega t}\left(1 + i\frac{m}{2}\left(e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}\right)\right) \tag{34}$$

1. MCS：束腰尺寸失配

我们首先考虑束腰尺寸失配这一自由度。当入射光束与腔本征模之间存在束腰尺寸失配时，入射光束变为 [16]

$$\mathcal{U}^{\epsilon}_{n,m}(x,y,z) \approx \mathcal{U}_{n,m} - i\frac{\epsilon}{2}\Big(A_n \mathcal{U}_{n+2,m} + B_n \mathcal{U}_{n-2,m} + A_m \mathcal{U}_{n,m+2} + B_m \mathcal{U}_{n,m-2}\Big) \tag{35}$$

其中 $\epsilon = \frac{w-w_0}{w_0}$ 是相对束腰尺寸失配，$A_n = \sqrt{(n+2)(n+1)}$ 和 $B_n = \sqrt{n(n-1)}$。上式还利用了这样一个事实：对于每个模式阶数，从光腔中心到 QPD 的累积古伊相位为 $\pi/4$。这会使模式失配导致的原始模式散射出的上下相邻两个模式阶数的模式分别获得因子 $e^{i\frac{\pi}{4}\cdot(\pm 2)} = \pm i$。如上所示，在采用 WFS 方案进行模式失配传感时，我们使用 $\pi/2$ 模式转换器，这会额外累积 $\pi/2$ 古伊相位，因此聚焦轴（y 轴）上的每个模式阶数都会获得因子 $e^{i\pi/2} = i$，而非聚焦轴（x 轴）经历正常的古伊相位累积 [26]。上述失配光束经过模式转换器后变为

$$\mathcal{U}^{\epsilon}_{n,m}(x,y,z) \approx i^m\Big(\mathcal{U}_{n,m} - i\frac{\epsilon}{2}\Big(A_n \mathcal{U}_{n+2,m} + B_n \mathcal{U}_{n-2,m} - A_m \mathcal{U}_{n,m+2} - B_m \mathcal{U}_{n,m-2}\Big)\Big) \tag{36}$$

其中，y方向上的每个模式阶数都会因该 $\pi/2$ 模式转换器而额外累积一个因子 $e^{i\pi/2} = i$。

与对准传感的情况类似，我们将入射光束中的每一项乘以对应的腔反射率函数，得到反射光束 E$_{\text{refl}}$。假设光腔具有高 Finesse 且完全过耦合，因此只有 $F(\omega, n + m) = -1$ while$F = 1$，而其他所有项均满足此条件，以简化解析结果，我们得到

$$\begin{aligned} E_{refl} = E_0 i^m e^{i\omega t}\Big(&- \mathcal{U}_{n,m} + \frac{im}{2}\Big(\mathcal{U}_{n,m}e^{i\Omega t} + \mathcal{U}_{n,m}e^{-i\Omega t}\Big) - \frac{i\epsilon}{2}\Big(\mathcal{U}_{n+2,m}A_n - \mathcal{U}_{n,m+2}A_m + \mathcal{U}_{n-2,m}B_n - \mathcal{U}_{n,m-2}B_m\Big) + \frac{\epsilon m}{4}\Big(\mathcal{U}_{n+2,m}A_n e^{i\Omega t} \\ &+ \mathcal{U}_{n+2,m}A_n e^{-i\Omega t} - \mathcal{U}_{n,m+2}A_m e^{i\Omega t} - \mathcal{U}_{n,m+2}A_m e^{-i\Omega t} + \mathcal{U}_{n-2,m}B_n e^{i\Omega t} + \mathcal{U}_{n-2,m}B_n e^{-i\Omega t} - \mathcal{U}_{n,m-2}B_m e^{i\Omega t} - \mathcal{U}_{n,m-2}B_m e^{-i\Omega t}\Big)\Big) \end{aligned} \tag{37}$$

E_{refl} 和 $E^*_{\text{反射}}$ 各有 15 项，因此在计算光电流的乘积 $E_{\text{refl}}E^*_{\text{反射}}$ 中共有 225 项需要评估。然而，只有关于 $y = \pm x$呈奇对称的项才会对我们所使用的 45° 旋转 QPD 产生贡献。我们还知道，只有以调制频率 Ω 振荡的项，才能在射频调制频率 Ω 下进行解调后对光电探测器信号产生贡献，并且低通滤波。随后，光电流

$$I_{QPD} = E_0^2 \epsilon m\Big(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}\Big)\Big(-A_n\beta_{(n,m),(n+2,m)} + A_m\beta_{(n,m),(n,m+2)} - B_n\beta_{(n,m),(n-2,m)} + B_m\beta_{(n,m),(n,m-2)}\Big) \tag{38}$$

其中，$\beta_{(n,m),(n',m')}$ 是旋转了 45° 的拍频系数

象限光电探测器

$$\beta_{(n,m),(n',m')} = \Big(\int_0^{\inf} dy \int_{-y}^{y} dx + \int_{-\inf}^{0} dy \int_{y}^{-y} dx - \int_0^{\inf} dx \int_{-x}^{x} dy - \int_{-\inf}^{0} dx \int_{x}^{-x} dy \Big) \mathcal{U}_{n,m} \cdot \mathcal{U}_{n',m'} \tag{39}$$

很容易验证，拍频系数 $\beta_{(n,m),(n',m')}$ 满足

$$\beta_{(n,m),(n',m')} = \beta_{(n',m'),(n,m)} = -\beta_{(m,n),(m',n')} \tag{40}$$

在相位 $\phi = 0$ 处进行解调，我们得到 I相位信号

$$\mathrm{V}_{\mathrm{MCS}}^{\Omega,\,\mathrm{QPD}_1} = \mathrm{E}_0^2 \epsilon m \Big(- A_n \beta_{(n,m),(n+2,m)} + A_m \beta_{(n,m),(n,m+2)} - B_n \beta_{(n,m),(n-2,m)} + B_m \beta_{(n,m),(n,m-2)} \Big) \tag{41}$$

有时，人们通常使用瑞利长度 $z_R = \pi w_\lambda^{\,2} \approx z_{R0} + {}^{2\pi}w_{\frac{2}{0}} \cdot \epsilon$ 来表征束腰尺寸失配的程度。以瑞利范围失配 $\delta z_R = {}^{2\pi}w_{\lambda}{}^{\,2}_{0} \cdot \epsilon$ 作为展开参数，我们可以将误差信号改写为

$$\mathrm{V}_{\mathrm{MCS}}^{\Omega,\,\mathrm{QPD}_1} = \mathrm{E}_0^2 \frac{\lambda m}{2\pi\omega_0^2} \delta z_R \Big(- A_n \beta_{(n,m),(n+2,m)} + A_m \beta_{(n,m),(n,m+2)} - B_n \beta_{(n,m),(n-2,m)} + B_m \beta_{(n,m),(n,m-2)} \Big) \tag{42}$$

我们将相对传感增益 $\Omega_{n,m}$ 定义为高阶模 $\mathrm{HG}_{n,m}$ 与基模 $\mathrm{HG}_{0,0}$的误差信号之比。

$$\Omega_{n,m} \equiv \Big(- A_n \beta_{(n,m),(n+2,m)} + A_m \beta_{(n,m),(n,m+2)} - B_n \beta_{(n,m),(n-2,m)} + B_m \beta_{(n,m),(n,m-2)} \Big) / \Big(2\sqrt{2} \beta_{(0,0),(0,2)} \Big) \tag{43}$$

为了更精确地说明，我们来考虑以下情况：$n = m$，即我们考虑对称高阶HG模，例如$\mathrm{HG}_{0,0}$, $\mathrm{HG}_{1,1}$, $\mathrm{HG}_{2,2}$, $\mathrm{HG}_{3,3}$, 等。因此，利用$\beta_{(n,m),\ (n',m')}$ 在式40中的性质，我们可以将相对传感增益简化为

$$\Omega_{n,n} = \Big(A_n \beta_{(n,n),(n,n+2)} + B_n \beta_{(n,n),(n,n-2)} \Big) / \Big(\sqrt{2} \beta_{(0,0),(0,2)} \Big) \tag{44}$$

因此，对于高阶模，模式失配传感增益呈现递增趋势。

2. MCS：束腰位置失配

现在来看束腰位置失配的误差信号。根据论文 δ中的结果，束腰位置位移$_0$, z [16], 后的光束为

$$\mathcal{U}_{n,m}^{\delta z_0}(x,y,z) \approx \mathcal{U}_{n,m} - \mathrm{i} \frac{\lambda \delta z_0}{4\pi w_0^2} \Big(A_n \mathcal{U}_{n+2,m} + B_n \mathcal{U}_{n-2,m} + A_m \mathcal{U}_{n,m+2} + B_m \mathcal{U}_{n,m-2} - (C_n + C_m) \cdot \mathcal{U}_{n,m} \Big) \tag{45}$$

其中 $C_n = 2n + 1$，并且我们利用了这样一个事实：在这条路径中，对于每个模式阶数，从光腔束腰到 QPD 的累积古伊相位为- $\pi/2$。这会为偏移模带来一个额外因子 $e^{i\frac{\pi}{2}\cdot(\pm 2)} = -1$。经过$\pi/2$ 模式转换器后，光束变为

$$\mathcal{U}_{n,m}^{\delta z_0}(x,y,z) = \mathrm{i}^m \Big(\mathcal{U}_{n,m} - \mathrm{i} \frac{\lambda \delta z_0}{4\pi w_0^2} \Big(A_n \mathcal{U}_{n+2,m} + B_n \mathcal{U}_{n-2,m} - A_m \mathcal{U}_{n,m+2} - B_m \mathcal{U}_{n,m-2} - (C_n + C_m) \cdot \mathcal{U}_{n,m} \Big) \Big) \tag{46}$$

比较方程 36 和 46 可知，从方程 41 中的束腰尺寸失配误差信号结果推导出我们正在计算的未知束腰位置失配误差信号，只需跟踪两处变化：(a) 将 $\mathcal{U}_{n,m}$ 系数从 1 替换为 $(1 + \mathrm{i}\,\frac{\epsilon}{2}(C_n + C_m))$；(b) 将模式失配参数 ϵ 替换为 ${}^{\lambda\delta}z_{2\pi}{}^{0}\,w_{0}^{2}$。替换 (a) 产生的附加项与 $\mathcal{U}_{n,m}$ 成正比，因此必须与上边带模或下边带模拍频，例如 $\mathcal{U}_{n\pm2,m}$ 和 $\mathcal{U}_{n,m\pm2}$，才能产生非零拍频信号。然而，这个附加拍频信号关于 ϵ 是二阶的，因此不会影响线性误差信号，这一点可由方程 37 看出。因此，替换 (a) 对光电流及随后的误差信号在线性阶及以下的净贡献为零。现在，要得到束腰位置失配误差信号，只需进行替换 (b)，结果为

$$\mathrm{V}_{\mathrm{MCS}}^{\Omega,\,\mathrm{QPD}_2} = \mathrm{E}_0^2 \frac{\lambda \delta z_0}{2\pi w_0^2} m \Big(- A_n \beta_{(n,m),(n+2,m)} + A_m \beta_{(n,m),(n,m+2)} - B_n \beta_{(n,m),(n-2,m)} + B_m \beta_{(n,m),(n,m-2)} \Big) \tag{47}$$

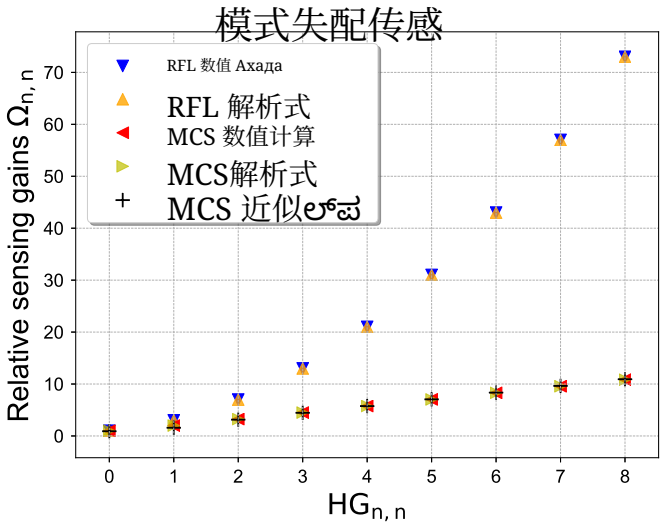
值得注意的是，它的斜率与式中束腰尺寸失配误差信号的斜率相同。42此外，其传感增益也与式中束腰尺寸情形的传感增益相同。43。

与对准 WFS 情形类似，我们希望对式42 和 47中的精确结果进行近似，以更好地了解传感增益与载波模式阶数之间的标度关系。与对准传感情形一样，我们可以通过将复杂的高阶拍频系数（不包括 $\beta_{(0,0),\ (0,2)}$）替换为常数 0.41，来简化式44 。更多详情请参见 IV。

$$\Omega_{n,n} \approx 0.41 \cdot \Big(\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n-1)} \Big) / \Big(\sqrt{2} \beta_{(0,0),(0,2)} \Big) \tag{48}$$

其中使用了 A_n 和 B_n 的定义。

如图4所示，该近似结果也与精确结果非常接近。因此，我们得出结论：对于该模式转换器和 QPD 传感方案中的高阶 $\mathrm{HG}_{n,\ n}$ 其模式失配传感增益近似按 $\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n-1)}$ 缩放。我们还进行了相应的 Finesse 仿真。如图4中的黑色曲线所示，仿真结果与黄色所示的精确解析结果高度吻合。



<escape>图 4. 对称高阶 HGΩ$_{n,\ n}$ 模在 MCS 和 RFL 传感方案中的相对模式失配传感增益$_{n,\ n}$。图中展示了公式 44 和 57 中的解析传感增益，以及公式 48 中的近似传感增益。同时还给出了相应的 Finesse 仿真结果，以供比较。</escape>

B. 模式失配传感：射频透镜传感（RFL）

对于 RFL模式失配传感方案，我们使用电光透镜（EOL）器件施加射频透镜调制边带，使其与载波频率相隔两倍于光学腔的高阶模差频，因为我们需要由模式失配产生的二阶上模和下模在光腔中达到共振。该方案要求对射频透镜调制产生的偏移模式边带与模-

在正交解调相位下，失配引起的载波频率偏移模出现在单元光电二极管上。这可以同时产生关于入射光束与腔本征模之间束腰位置和束腰尺寸失配的线性误差信号。

与模式转换器模式失配传感方案类似，我们考虑将通用的 HG$_{n,\ m}$ 模式作为式中的载波。33

$$\mathcal{U}(x,y,z) = \mathrm{E}_0\mathcal{U}_{n,m}(x,y,z)e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{49}$$

我们将载波通过 EOL器件，以调制光束S的曲率。如果我们考虑光束波前曲率的正弦振荡

$$S = m_S\cos(\Omega t) \tag{50}$$

其中，m_S 是射频透镜调制深度。经过 EOL 调制器后的入射光束变为 [16]

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{\mathrm{EOL}} \approx{}& \mathrm{E}_0\mathcal{U}_{n,m}e^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\frac{kw_0^2m_S}{16}\mathrm{E}_0\Big(A_n\mathcal{U}_{n+2,m}e^{-2\mathrm{i}\Psi_1}\\ &+ B_n\mathcal{U}_{n-2,m}e^{2\mathrm{i}\Psi_1} + A_m\mathcal{U}_{n,m+2}e^{-2\mathrm{i}\Psi_1} + B_m\mathcal{U}_{n,m-2}e^{2\mathrm{i}\Psi_1}\\ &+ (C_n + C_m)\cdot\mathcal{U}_{n,m}\Big)\left(e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t}\right)\end{aligned} \tag{51}$$

仅保留一阶项，其中 A_n $=\sqrt{(n+2)(n+1)}$ 和 $B_n = \sqrt{n(n-1)}$。

1. RFL：束腰尺寸失配

现在我们来考虑 RFL束腰尺寸失配传感误差信号。施加束腰尺寸失配 $\epsilon = w/w_0 - 1$后，式 51 变为

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{\epsilon} \approx{}& \mathrm{E}_0\mathcal{U}_{n,m}e^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{E}_0\frac{\epsilon}{2}\left(A_n\mathcal{U}_{n+2,m} - B_n\mathcal{U}_{n-2,m} + A_m\mathcal{U}_{n,m+2} - B_m\mathcal{U}_{n,m-2}\right)e^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\frac{kw_0^2m_S}{16}\mathrm{E}_0\Big(A_n\Big(\mathcal{U}_{n+2,m} + \frac{\epsilon}{2}(A_{n+2}\mathcal{U}_{n+4,m}\\ &- B_{n+2}\mathcal{U}_{n,m} + A_m\mathcal{U}_{n+2,m+2} - B_m\mathcal{U}_{n+2,m-2})\Big)e^{-2\mathrm{i}\Psi_1} + B_n\Big(\mathcal{U}_{n-2,m} + \frac{\epsilon}{2}(A_{n-2}\mathcal{U}_{n,m} - B_{n-2}\mathcal{U}_{n-4,m} + A_m\mathcal{U}_{n-2,m+2} - B_m\mathcal{U}_{n-2,m-2})\Big)e^{2\mathrm{i}\Psi_1}\\ &+ A_m\Big(\mathcal{U}_{n,m+2} + \frac{\epsilon}{2}(A_n\mathcal{U}_{n+2,m+2} - B_n\mathcal{U}_{n-2,m+2} + A_{m+2}\mathcal{U}_{n,m+4} - B_{m+2}\mathcal{U}_{n,m})\Big)e^{-2\mathrm{i}\Psi_1} + B_m\Big(\mathcal{U}_{n,m-2} + \frac{\epsilon}{2}(A_n\mathcal{U}_{n+2,m-2} - B_n\mathcal{U}_{n-2,m-2}\\ &+ A_{m-2}\mathcal{U}_{n,m} - B_{m-2}\mathcal{U}_{n,m-4})\Big)e^{2\mathrm{i}\Psi_1} + (C_n + C_m)\Big(\mathcal{U}_{n,m} + \frac{\epsilon}{2}(A_n\mathcal{U}_{n+2,m} - B_n\mathcal{U}_{n-2,m} + A_m\mathcal{U}_{n,m+2} - B_m\mathcal{U}_{n,m-2})\Big)\Big)\left(e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t}\right)\end{aligned} \tag{52}$$

与 RFJ 类似，我们省略了从腔束腰到单元光电探测器的累积古伊相位差 Ψ_2，因为它不会影响光电探测器信号。单元光电探测器上的光电流定义为

$$\mathrm{I}_{PD} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\, E_{\mathrm{refl}}\cdot E_{\mathrm{refl}}^{*} \tag{53}$$

其中，反射场 E_{refl} 通过将每一项乘以适当的反射率函数 F(ω,n) 得到。利用以下事实：对于完全过耦合腔，F(ω, n + m) = F(ω + Ω, n + m + 2) = F(ω − Ω, n + m − 2) = −1，而对于所有其他项，F = 1，光电流变为

$$\mathrm{I}_{PD} = \frac{\mathrm{i}kw_0^2m_S\epsilon\mathrm{E}_0^2}{8}\left(n^2+m^2+n+m+2\right)\left(e^{2\mathrm{i}\Psi_1}e^{\mathrm{i}\Omega t} - e^{-2\mathrm{i}\Psi_1}e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right) \tag{54}$$

其中我们使用了式中的正交归一条件 20。

类似于方程 27 中的RFJ传感方案，我们可以将整体解调相位调整为 $2\Psi_1 + \pi/2$（而不是$\Psi_1 + \pi/2$），以消除不同边带模式之间累积古伊相位差异的影响，并最大化解调信号。该Q相位误差信号为

$$\mathrm{V}_{\mathrm{RFL}}^{\Omega,\mathrm{Q}} = -\frac{kw_0^2 m_S \epsilon}{8}\mathrm{E}_0^2\left(n^2+m^2+n+m+2\right) \tag{55}$$

以瑞利范围失配 $\delta z_R = {}^{2\pi}{}_{w_\lambda}{}^{2}_{0} \cdot \epsilon$ 作为展开参数，我们可以将误差信号重写为

$$\mathrm{V}_{\mathrm{RFL}}^{\Omega,\mathrm{Q}} = -\frac{m_S \mathrm{E}_0^2}{8}\delta z_R\left(n^2+m^2+n+m+2\right) \tag{56}$$

因此，RFL方案中$\mathrm{HG}_{n,n}$ 模式的相对束腰尺寸传感增益为

$$\Omega_{n,n} = n^2+n+1 \tag{57}$$

2. RFL：束腰位置失配

当入射光束与腔束腰处的腔本征模之间存在束腰位置失配时 δz_0，式中的入射光束51 变为

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{\delta z_0} \approx{}& \mathrm{E}_0\mathcal{U}_{n,m}e^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{E}_0\frac{\mathrm{i}\lambda\delta z_0}{4\pi w_0^2}e^{\mathrm{i}\omega t}\Big(A_n\mathcal{U}_{n+2,m} + B_n\mathcal{U}_{n-2,m} + A_m\mathcal{U}_{n,m+2} + B_m\mathcal{U}_{n,m-2} + (C_n+C_m)\mathcal{U}_{n,m}\Big) - \mathrm{i}\frac{kw_0^2 m_S}{16}\mathrm{E}_0\Big(A_n\Big(\mathcal{U}_{n+2,m}\\ &+ \frac{\mathrm{i}\lambda\delta z_0}{4\pi w_0^2}(A_{n+2}\mathcal{U}_{n+4,m} + B_{n+2}\mathcal{U}_{n,m} + A_m\mathcal{U}_{n+2,m+2} + B_m\mathcal{U}_{n+2,m-2} + (C_{n+2}+C_m)\mathcal{U}_{n+2,m})\Big)e^{-2\mathrm{i}\Psi_1} + B_n\Big(\mathcal{U}_{n-2,m} + \frac{\mathrm{i}\lambda\delta z_0}{4\pi w_0^2}(A_{n-2}\mathcal{U}_{n,m}\\ &+ B_{n-2}\mathcal{U}_{n-4,m} + A_m\mathcal{U}_{n-2,m+2} + B_m\mathcal{U}_{n-2,m-2} + (C_{n-2}+C_m)\mathcal{U}_{n-2,m})\Big)e^{2\mathrm{i}\Psi_1} + A_m\Big(\mathcal{U}_{n,m+2} + \frac{\mathrm{i}\lambda\delta z_0}{4\pi w_0^2}(A_n\mathcal{U}_{n+2,m+2} + B_n\mathcal{U}_{n-2,m+2}+\\ &A_{m+2}\mathcal{U}_{n,m+4} + B_{m+2}\mathcal{U}_{n,m} + (C_n+C_{m+2})\mathcal{U}_{n,m+2})\Big)e^{-2\mathrm{i}\Psi_1} + B_m\Big(\mathcal{U}_{n,m-2} + \frac{\mathrm{i}\lambda\delta z_0}{4\pi w_0^2}(A_n\mathcal{U}_{n+2,m-2} + B_n\mathcal{U}_{n-2,m-2} + A_{m-2}\mathcal{U}_{n,m}\\ &+ B_{m-2}\mathcal{U}_{n,m-4} + (C_n+C_{m-2})\mathcal{U}_{n,m-2})\Big)e^{2\mathrm{i}\Psi_1} + (C_n+C_m)\Big(\mathcal{U}_{n,m} + \frac{\mathrm{i}\lambda\delta z_0}{4\pi w_0^2}(A_n\mathcal{U}_{n+2,m} + B_n\mathcal{U}_{n-2,m} + A_m\mathcal{U}_{n,m+2} + B_m\mathcal{U}_{n,m-2}\\ &+ (C_n+C_m)\mathcal{U}_{n,m})\Big)\Big)\left(e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t}\right)\end{aligned} \tag{58}$$

其中，类似地，我们省略了不同边带 Ψ_2 对应的累积古伊相位差。利用对于完全过耦合光腔，有$F(\omega,n+m) = F(\omega+\Omega,n+m+2) = F(\omega-\Omega,n+m-2) = -1$，而所有其他项的$F = 1$ 均成立这一事实，我们也可以类似地简化反射场 E_{refl}。单元光电探测器上的光电探测器信号变为

$$\mathrm{I}_{PD} = -\frac{m_S \mathrm{E}_0^2}{8}\delta z_0\left(e^{2\mathrm{i}\Psi_1}e^{\mathrm{i}\Omega t} + e^{-2\mathrm{i}\Psi_1}e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right)\left(n^2+m^2+n+m+2\right) \tag{59}$$

类似地，我们可以通过调整整体解调相位为 $2\Psi_1$（而非Ψ_1），消除不同边带模式之间累积的古伊相位差的影响。所得的 I 相位信号是

$$\mathrm{V}_{\mathrm{RFL}}^{\Omega,\mathrm{I}} = -\frac{m_S \mathrm{E}_0^2}{8}\delta z_0\left(n^2+m^2+n+m+2\right) \tag{60}$$

有趣的是，它与式中的束腰尺寸失配误差信号具有相同的斜率56。

因此我们已经看到，与采用 RFJ方案进行的对准传感类似，我们可以利用正交解调相位下的单个光电探测器，提取式 60 和 55中的两个正交模式失配传感误差信号。正如图 4 所示，RFL 方案中的误差信号随模式阶数呈二次变化。而这一二次依赖关系源于以下事实：方程中EOL的“有效”调制深度51 大致按n的比例变化。它与静态模式失配所产生的散射模式（其振幅也大致按n的比例变化）发生拍频，导致RFL传感增益呈现二次依赖关系，其增长速度甚至超过MCS技术。

IV. 结论

我们首次针对以高阶HG模式为载波时的对准和模式失配传感误差信号，进行了详细的解析推导。具体而言，在第II 节中，我们研究了传统的波前传感方案（WFS）和近期提出的射频抖动调制传感方案（RFJ），用于对准传感；对于模式失配传感，我们研究了模式转换器传感方案（MCS）和射频透镜调制传感方案（RFL），相关内容见第III节。例如，我们通过解析结果发现，对于对准波前传感，两个分立光电探测器之间必须存在 $\pi/2$ 的累积古伊相位差；同时，对于模式失配 $\pi/2$模式转换器以及两个 $\pi/4$的累积古伊相位差之间必须存在的差异，这对于两个 45° 旋转QPD

传感。我们还针对高阶HG模式的对准和模式失配传感进行了相应的Finesse仿真，所得的相对传感增益与相应的精确解析结果高度一致，如图3 和4所示。

表 I。文献中对准和模式失配传感增益，以及由此引起的功率耦合损耗汇总 [16]。

	对准	模式失配
传统方案	WFS: $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$	MCS: $\sqrt{n(n-1)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}$
光束抖动基于……的方案	RFJ: $2n+1$	RFL: n^2+n+1
功率损耗	$2n+1$	n^2+n+1

我们已经证明，在所有方案中，对于高阶厄米-高斯模式，其对准和模式失配传感信号都更强，如表 I 中的传感增益汇总结果所示。另一方面，在所有分析的传感方案中，光电探测器处的散粒噪声均与光束的模式指标无关。因此，对准或模式失配的信号与散粒噪声比会随着模式指标的增加而提高，其变化规律与推导出的传感增益完全一致。在散粒噪声受限的传感工作区间以及传感噪声受限的控制环路中，增加模式指标因此能够降低残余对准误差或模式失配误差。这在一定程度上抵消了模式指标增加所带来的负面影响，即对准容差和模式失配容差降低的问题，相关描述见参考文献 [15, 16]。特别是，RFJ/L 方案 中传感增益的增加幅度 恰好 与相应容差的降低幅度相匹配，如表 I 的最后两行所示。这一结果表明，对于这些方案而言，使用高阶HG模式所带来的弊端，即因过度失准和模式失配引起的功率损耗，能够得到消除。

致谢

本研究得到美国国家科学基金会资助，项目编号为 PHY-1806461 和 PHY-2012021。

附录：拍频系数

一些示例拍频系数 $\beta_{n,\ n+1}$ 对应于式中分束光电探测器上的情况 13 以及 $\beta_{(n,n),\ (n,n+2)}$ 和 $\beta_{(n,n),\ (n,n-2)}$ 对应于式中象限光电探测器上的情况 39 分别示于图 5和 6。可以看出，随着 n 增大，它们都渐近趋近于某个固定值，分别约为 0.64 和 0.41。该值通过从端点进行线性外推并求出截距确定。因此，我们可以近似表示为

式中 WFS 和 MCS 的精确传感增益 15 和 44，并通过替换复杂的高阶拍频系数，直接得到缩放关系

系数及其粗略渐近值，即 $\beta_{n,\ n+1}$ 为 0.64，$\beta_{(n,n),\ (n,n+2)}$ 和$\beta_{(n,n),\ (n,n-2)}$为 0.41。

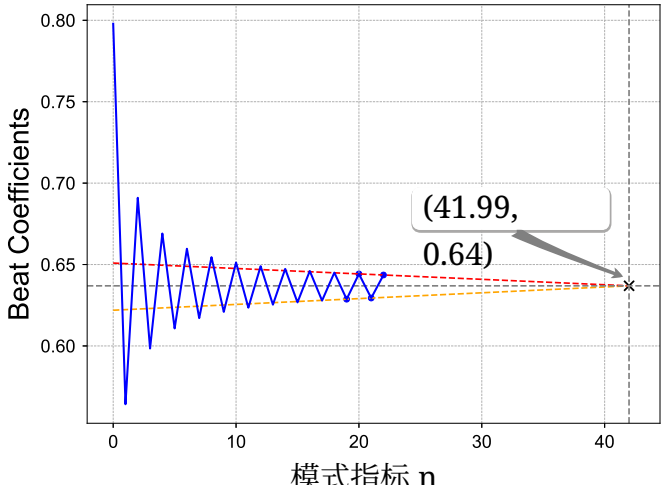


图 5. 分光光电二极管上的拍频系数 $\beta_{n,\ n+1}$ 以蓝色表示。连接四个端点的两条直虚线相交于同一点，其 y 坐标约为 0.64。

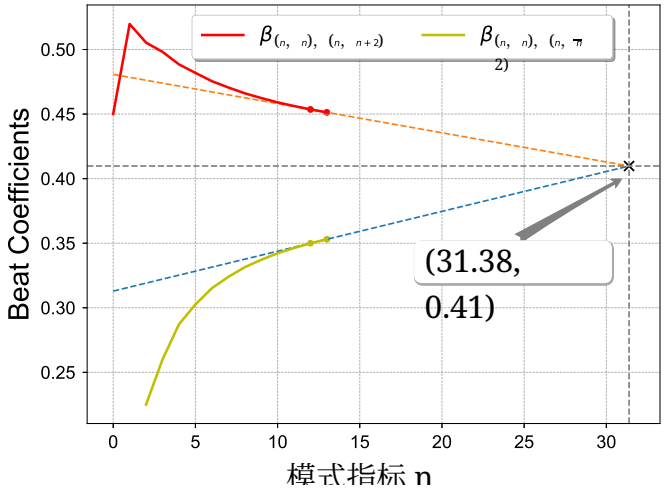


图 6. 45 度旋转的象限光电二极管上的拍频系数 $\beta_{(n,n),\ (n,n+2)}$ 以红色表示，$\beta_{(n,n),\ (n,n-2)}$ 以黄色表示。随着 n 变大，两者都趋近于约 0.41。注意，$\beta_{(n,n),\ (n,n-2)}$ 在 $n < 2$ 时没有定义，如黄色曲线所示。

* liu.tao@ligo.org

[1] J. Aasi 等，《Advanced LIGO》，《经典与量子引力》32，074001（2015）。[2] A. Buikema 等，《第三次观测运行期间 Advanced LIGO 探测器的灵敏度与性能》，《物理评论D》102，062003（2020）。[3] F. Acernese 等，《Advanced Virgo：第二代干涉式引力波探测器》，《经典与量子引力》32，024001（2014）。[4] M. Evans 等，《Cosmic Explorer 前景研究：科学、天文台与社群》（2021）。[5] M. Punturo 等，《爱因斯坦望远镜：第三代引力波天文台》，《经典与量子引力》27，194002（2010）。[6] B. Mours、E. Tournefier 和 J.-Y. Vinet，《干涉式引力波天线中的热噪声降低：使用高阶TEM模式》，《经典与量子引力》23，5777（2006）。[7] J.-Y. Vinet，《降低先进干涉式引力波探测器反射镜中的热效应》，《经典与量子引力》24，3897（2007）。[8] S. Chelkowski、S. Hild 和 A. Freise，《未来引力波探测器中高阶拉盖尔-高斯模式的前景》，《物理评论D》79，122002（2009）。[9] P. Fulda、K. Kokeyama、S. Chelkowski 和 A. Freise，《高阶拉盖尔-高斯模式干涉测量的实验演示》，《物理评论D》82，012002（2010）。[10] C. Bond、P. Fulda、L. Carbone、K. Kokeyama 和 F. Andreas，《真实高精细度光学腔中的高阶拉盖尔-高斯模式简并》，《物理评论D》84，102002（2011）。[11] T. Hong、J. Miller、H. Yamamoto、Y. Chen 和 R. Adhikari，《反射镜像差对干涉式引力波探测器中拉盖尔-高斯光束的影响》，《物理评论D》84，102001（2011）。[12] B. Sorazu、P. J. Fulda、B. W. Barr、A. S. Bell、C. Bond、L. Carbone、A. Freise、S. Hild、S. H. Huttner、J. Macarthur 和 K. A. Strain，《格拉斯哥10米原型干涉仪中高阶拉盖尔-高斯模式的实验测试》，《经典与量子引力》30，035004（2013）。[13] L. Tao、A. C. Green 和 P. Fulda，《高阶厄米-高斯模式作为干涉式引力波探测器中稳健的平顶光束》（2020），arXiv:2010.04338 [天体物理学仪器与方法]。[14] S. Ast、S. Di Pace、J. Millo、M. Pichot、M. Turconi、N. Christensen 和 W. Chaibi，《用于引力波探测的高阶厄米-高斯模式》，《物理评论D》103，042008（2021）。[15] A. W. Jones 和 A. Freise，《高阶激光束对模式失配的灵敏度更高》，《光学快报》45，5876（2020）。[16] L. Tao、J. Kelley-Derzon、A. C. Green 和 P. Fulda，《针对失准和模式失配的高阶……的功率耦合损耗

阶厄米–高斯模式，《光学快报》46, 2694 (2021)。[17] M. Lassen、V. Delaubert、J. Janousek、K. Wagner、H.-A. Bachor、P. K. Lam、N. Treps、P. Buchhave、C. Fabre 和 C. C. Harb，多模量子信息工具：调制、探测与空间量子关联，《物理评论快报》98, 083602 2007( )。[18] N. Uribe-Patarroyo、A. Fraine、D. S. Simon、O. Minaeva 和 A. V. Sergienko，利用关联轨道角动量态进行物体识别，《物理评论快报》110, 043601 (2013)。[19] A. Freise、G. Heinzel、H. L¨uck、R. Schilling、B. Willke 和 K. Danzmann，使用高阶空间模式的频域干涉仪仿真，《经典与量子引力》21, S1067 (2004)。[20] D. D. Brown 和 A. Freise，Finesse，http://www.gwoptics. org/finesse (2014)，软件和源代码可从 http://www.gwoptics.org/finesse 获取。[21] D. Brown 和 A. Freise，Pykat (2017)，http://www.gwoptics.org/pykat。[22] D. D. Brown、P. Jones、S. Rowlinson、A. Freise、S. Leavey、A. C. Green 和 D. Toyra，Pykat：用于精密光学干涉仪建模的 Python 软件包 (2020)，arXiv 电子预印本 2004.06270，已提交至 SoftwareX，arXiv:2004.06270。[23] E. Morrison、B. J. Meers、D. I. Robertson 和 H. Ward，光学干涉仪的自动对准，《应用光学》33, 5041 1994( )。[24] E. Morrison、B. J. Meers、D. I. Robertson 和 H. Ward，光学干涉仪自动对准系统的实验演示，《应用光学》33, 5037 (1994)。[25] P. Fulda、D. Voss、C. Mueller、L. F. Ortega、G. Ciani、G. Mueller 和 D. B. Tanner，利用射频抖动调制对光学腔进行对准传感，《应用光学》56, 3879 2017( )。[26] F. Maga˜na-Sandoval、T. Vo、D. Vander-Hyde、J. R. Sanders 和 S. W. Ballmer，利用模式转换器和象限光电二极管传感光学腔失配，《物理评论D》100, 10 1103 100 102001 2019。/physrevd. . ( )。[27] A. A. Ciobanu、D. D. Brown、P. J. Veitch 和 D. J. Ottaway，利用射频光束形状调制获取模式匹配误差信号，《应用光学》59, 9884 (2020)。[28] G. Ciani、M. Bazzan、J.-P. Zendri、L. Conti、A. Grimaldi 和 M. Valentini，用于激光腔模式匹配的 lg10 射频高阶模式传感技术测试，LSC-Virgo-Kagra会议，9月 (2020)。[29] M. Diaz-Ortiz 和 P. Fulda，用于模式失配传感的电光透镜概念，LSC-Virgo-Kagra会议，9月 (2020)。[30] C. Bond、D. Brown、A. Freise 和 K. A. Strain，引力波探测的干涉仪技术，《相对论综述》19, 10.1007/s41114-016-0002-8 (2017)。