arXiv:2305.03683v1 [math.GR] 5 May 2023

右角阿尔特 pro-C 群中的有限生成正规 pro-C 子群

DESSISLAVA H. KOCHLOUKOVA，PAVEL A. ZALESSKII

摘要。设 C 是一个对取子群、商群和扩张封闭的有限群类。设 Γ 是一个有限单纯图，$G = G_\Gamma$ 是相应的 pro-C 直角阿廷群。我们证明，若 N 是 G 的非平凡有限生成正规满 pro-C 子群，则 G/N 是有限扩张阿贝尔群。在 pro-p 情形下，当 $G/N \simeq \mathbb{Z}_p$ 时，我们给出 N 属于 FP_n 型的一个判据。此外，当 G/N 是无限阿贝尔群时，我们证明：N 有限生成，当且仅当每个包含 N 且满足 $G/N_0 \simeq \mathbb{Z}_p$ 的正规闭子群 $N_0 \lhd G$ 都是有限生成的。当 G/N 是无限阿贝尔群且 N 在 G 中弱离散嵌入时，我们证明：N 属于 FP_n 型，当且仅当每个包含 N 且满足 $G/N_0 \simeq \mathbb{Z}_p$ 的 $N_0 \leqslant G$ 都属于 FP_n 型。

1. 引言

本文研究直角阿廷 pro-C 群（pro-C RAAG），其中 C 是对取子群、商群和扩张封闭的群类。给定一个有限单纯图 Γ，与之关联的离散右角阿廷群由以下表示定义：

$$\langle V(\Gamma) \mid [v,w] = 1 \text{ if } v,w \text{ are adjacent in } \Gamma \rangle.$$

若在 pro-C 群范畴中考虑同一表示，就得到与 Γ 关联的 pro-C 直角阿廷群的定义。我们将用 G_Γ 表示与单纯图 Γ 关联的 pro-C 直角阿廷群。显然，G_Γ 是与 Γ 关联的离散右角阿廷群的 pro-C 完备化。

尽管关于抽象直角阿廷群的文献十分丰富，但对 pro-C RAAG 群这一类群尚无相关研究，对 pro-p RAAG 群的研究也寥寥无几。在 [12]，Lorensen 证明，对于与图 Γ 关联的离散右角阿廷群 $G\widehat{\ }$，典范映射 $G \to G^p \simeq G_\Gamma$ 到其 pro-p 完备化所诱导的映射，对任意 n 都是同构：$\widehat{\ }H^n(G^p, \mathbb{F}_p) \to H^n(G, \mathbb{F}_p)$。在 [10]，Kropholler 和 Wilkes 证明，离散右角阿廷群可由其 pro-p 完备化加以区分。Snopce 和第二作者 [20] 刻画了相干的 pro-p RAAG 群，并刻画了那些作为某个包含本原 p 次单位根的域 K 的极大 pro-p 伽罗瓦群 $G_K(p)$ 出现的群。

近期，[3] Casal-Ruiz 和 Zearra 研究了离散右角阿廷群中的有限生成、满的正规子群，并证明这些子群几乎余阿贝尔。[3] 所用的方法是几何性的，涉及离散群在树上的作用，以及与这些作用相关的 WPD 元素的存在性；这些树源自将原群分解为自由 amalgamated 积。本文旨在利用 pro-C 群作用于 pro-C 树的理论，在 pro-C 群范畴中建立类似的结果（见 [24], [25] 和 [16]）。尽管在 pro-C 的背景下，Bass-Serre 理论无法完全适用，且不存在 WPD 元素的 pro-C 版本，我们仍在定理 A 中证明了 Casal-Ruiz 和 Zearra 结果的 pro-C 版本。

pro-C 阿廷群中的一个 pro-C 子群 N 是 满的，如果在每个 $G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \times \ldots \times G_{\Gamma_k}$ 中，其中每个 G_{Γ_i} 都不能再分解为 $G_{\Gamma_{i,1}} \times G_{\Gamma_{i,2}}$，都有 $N \cap G_{\Gamma_i} = 1$ 对每个 $1 \leqslant i \leqslant k$。

定理 A 设 Γ 是一个有限单纯图，且 $G = G_\Gamma$ 是相应的 *pro-C* 右角阿尔特群。假设 N 是 G 的一个非平凡、有限生成、正规、满的 *pro-C* 子群。那么 G/N 是有限扩张阿贝尔，特别地是阿贝尔群扩张有限群。

在定理 4.4 中，我们为 pro-C 群的图乘积证明了定理 A 的一个更一般的版本。两个结果都用到了以下关于作用在 pro-C 树上的 pro-C 群的有限生成正规子群的一般结果；该结果本身也具有独立的研究价值（更多详情见第 4 节）。

定理 B 设 G 是一个 *pro-C* 群，它在 *pro-C* 树 T 上忠实地且不可约地作用，满足 $|T/G| < \infty$，并设 N 是 G 的一个有限生成的非平凡正规 *pro-C* 子群 N。那么 T/N 是有限的。

抽象版本的定理 B 的证明，实质上利用了这样一个事实：作用在树上的群的有限生成子群 H 拥有一个 H-不变子树，且 H 在其上的作用余有限。然而，这在 pro-C 情形下并不成立。因此，我们需要找到另一种论证，这对 Bass-Serre 理论的 pro-C 版本具有实质性贡献。

在论文的第二部分，我们将注意力限制在 pro-p 右角阿尔特群中。在第 5 节中，我们给出 pro-p 右角阿尔特群的有限生成正规子群的刻画。

定理 C 设 Γ 为有限单纯图，且 $G = G_\Gamma$ 为相应的 *pro-p RAAG*。假设 N 是 G 的非平凡、有限生成、正规 *pro-p* 子群。那么，N 有限生成，当且仅当每个包含 N 的正规子群 $N_0 \lhd G$，且 $G/N_0 \simeq$ 整数环 $\mathbb{Z}_p$，都是有限生成的。

有了这一刻画，便引出了对商为循环群的正规子群进行描述的问题。设 $\chi\colon G = G_\Gamma \to$ 整数环 $\mathbb{Z}_p$ 是 pro-p 群之间的一个满同态。令 $\Gamma(\chi)$ 为由顶点 $\{v \in V(\Gamma) \mid \chi(v)$ 所张成的 Γ 的诱导子图 $0\}$。若 $V(\Gamma)\backslash V(\Gamma(\chi))$ 中的每个顶点都与$V(\Gamma(\chi))$中的某个顶点以边相连，我们称 $\Gamma(\chi)$ 在 Γ 中占优。

定理 $\mathbf{D}N = Ker(\chi)$ 是有限生成的，当且仅当 $\Gamma(\chi)$ 在 Γ中连通且占优 .

在最后两节中，我们研究 pro-p RAAG G 的正规、余阿贝尔 pro-p 子群 N 何时具有同调类型 FP_n。按定义，这意味着平凡的 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{N}]]$-模 $\mathbb{Z}_p$ 具有一个投射分解，且其中所有维数为 $\leqslant$ n 的模均为有限生成。这等价于对所有 $\mathrm{i} \leqslant \mathrm{n}$，pro-p 同调 $\mathrm{H}_i(\mathrm{N}, \mathbb{F}_p)$ 均为有限，见 [7]。在 [2] 中，Bux 和 Gonzalez 通过几何方法证明了一项同调判据，用以判定离散 RAAG 的余阿贝尔正规子群何时具有同调类型 FP_n。若平凡的 ZG-模 Z 存在一个投射分解，且其中所有维数至多为 n 的投射模均为有限生成，则离散群 G 具有同调类型 FP_n。对于一般离散群 G，性质 FP_n 与同调群 $\mathrm{H}_i(\mathrm{G}, \mathbb{Z})$ 在 $\mathrm{i} \leqslant \mathrm{n}$ 时为有限生成并不等价。然而，对于离散 RAAG G 及其满足 $\mathrm{G/N} \simeq \mathbb{Z}$ 的正规子群 N，Papadima 和 Suciu 在 [13] 中证明，N 具有类型 FP_n，当且仅当对每个域 k 及 $1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant \mathrm{n}$，同调群 $\mathrm{H}_i(\mathrm{N}, \mathrm{k})$ 在 k 上有限维。之后，在 [8] 中，Kochloukova 和 Martinez-Perez 将这一结果推广到 G 中任意余阿贝尔子群 N，即 G/N 为阿贝尔群的情形。

为了陈述定理 E，我们需要先给出几个定义。

我们在$V(\Gamma)$上固定一个线性序。Γ 的团是S 的一个子集，其中$V(\Gamma)$ 中的任意两个元素都由 Γ中的一条边相连。我们允许S 为空集，并用 $|S|$ 表示S的基数。根据定义，与图 Γ 相关联的旗复形 $\Delta(\Gamma)$ 是由 Γ 通过粘合单形 $(v_1, \ldots, v_n)$ 得到的，其中每个非空团 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 属于 Γ，且$v_1 < v_2 < \ldots < v_n$。对于一个

团S属于Γ时，链接$lk_{\Delta(\Gamma)}(S)$是$\Delta(\Gamma)$的子复形，由所有满足以下条件的单形$(v_1,\ldots,v_n)$张成：$S\cup\{v_1,\ldots,v_n\}$是一个团，且$S\cap\{v_1,\ldots,v_n\}=\varnothing$。我们令$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S)=lk_{\Delta(\Gamma)}(S)\cap\Delta(\Gamma(\chi))$。

设N是pro-p RAAG G的一个pro-p余阿贝尔子群，令G^{dis}为相应的离散右角阿廷群，因此G是G^{dis}的pro-p完备化。若存在G^{dis}的子群N^{dis}，使得G^{dis}/N{v34>为阿贝尔群，且N是N^{dis}在G中的闭包，则称N在G中离散嵌入。若存在G的一个自同构φ，使得$\varphi(N)$在G中离散嵌入，则称N在G中弱离散嵌入。

定理 E 设 Γ 是一个有限单纯图，$G=G_\Gamma$ 是相应的 *pro-p RAAG*。设 N 是 G 的一个正规 *pro-p* 子群，且 G/N 是无限阿贝尔群。则有以下结论：

(a) 假设 $N=Ker(\chi)$，其中 $\chi:\ G\to$整数环 $\mathbb{Z}_p$ 是 *pro-p* 群之间的一个满同态。那么，N 是 FP_n型，当且仅当对于 $\Gamma\backslash\Gamma(\chi)$ 中每个满足 $|S|\leqslant n-1$的团 S，$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S)$ 关于$\mathbb{F}_p$ 是 $(n-1-|S|)$-无圈的。对于 $S=\varnothing$，这意味着旗复形 $\Delta(\Gamma(\chi))$ 关于$\mathbb{F}_p$是 $(n-1)$-无圈的。

（*b*）进一步假设 N 在 G 中弱离散嵌入。那么，N 是 FP_n 型，当且仅当每个包含 N 且满足 $G/N_0\simeq$整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的 $N_0\subseteq G$ 都是 FP_n。

在定理 E 的 (b) 部分，我们假设N在G中弱离散嵌入。我们在定理 7.2 的证明开头说明，如果$G/N\simeq\mathbb{Z}_p$，那么N在G中弱离散嵌入。我们在定理 7.2 中证明定理 E (a)，并在定理 7.3 中证明定理 E (b)。这两个证明都用到了相应结果对离散右角阿廷群成立这一事实。我们在定理 6.2 中单独证明定理 E (b) 的一个较弱版本，该证明完全在 pro-p 群范畴内完成。一般而言，只要可能，我们都会在 pro-p 群范畴内给出证明。

致谢。第一作者获得了 CNPq 研究生产力奖学金 305457/2021-7 和 FAPESP 项目 18/23690-6 的部分资助。第二作者获得了 CNPq 的部分资助。

2. 预备知识

2.1. Pro-C 群在 pro-C 树上的作用。设 C 是一个对取子群、商群和扩张封闭的有限群类。本节给出 pro-C 群作用于 pro-C 树以及自由合并的原群乘积的若干定义和性质。关于这一主题的更多信息，请参阅 [15] 和 [16]。

根据 [16]，三元组 (Γ,d_0,d_1) 是一个有限素图，若 Γ 是一个布尔空间，即全不连通的紧致空间，并且

$$d_0,d_1:\Gamma\to\Gamma$$

是连续映射，满足当 $\mathrm{i},\mathrm{j}\in\{0,1\}$时 $\mathrm{d_i d^j}=\mathrm{d^j}$。我们称 $\mathrm{V}(\Gamma):=\mathrm{d}_0(\Gamma)\cup\mathrm{d}_1(\Gamma)$ 为 Γ 的顶点集，称 $\mathrm{E}(\Gamma):=\Gamma\backslash\mathrm{V}(\Gamma)$ 为 Γ的边集。对于 $\mathrm{e}\in\mathrm{E}(\Gamma)$，称 $\mathrm{d}_0(\mathrm{e})$ 和 $\mathrm{d}_1(\mathrm{e})$分别为边 e 的起始顶点和终止顶点。为简化记号，我们用 Γ 表示 $(\Gamma,\mathrm{d}_0,\mathrm{d}_1)$。根据定义，$(\mathrm{E}^*(\Gamma),*)=(\Gamma/\mathrm{V}(\Gamma),*)$ 是一个带有指定点 V (Γ)的带点有限素商空间。

考虑 $\mathrm{F}_p[[E^*(\Gamma),*]]$ 和 $\mathrm{F}_p[[V(\Gamma)]]$，它们分别是以带基点的有限素空间 $(E^*(\Gamma),*)$ 和有限素空间 $V(\Gamma)$ 为底的自由有限素 Fp-模。关于自由有限素模的更多信息，请参阅 [15]。记 $\pi(\mathrm{C})$ 为 C 中涉及的素数集合，并设 $p\in\pi(\mathrm{C})$。考虑自由有限素 Fp-模构成的复形

$$0\to\mathbb{F}_p[[E^*(\Gamma),*]]\xrightarrow{\delta}\mathbb{F}_p[[V(\Gamma)]]\xrightarrow{\rho}\mathbb{F}_p\to 0 \tag{1}$$

其中，对所有 $\mathrm{e} \in \mathrm{E}^*(\Gamma)$，$\delta(\mathrm{e}) = \mathrm{d}_1(\mathrm{e}) - \mathrm{d}_0(\mathrm{e})$；对所有 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}(\Gamma)$，$\rho(\mathrm{v}) = 1$。若 (1) 在中间项处正合，则有限素图 Γ 是连通的。若 (1) 对每个 $\mathrm{p} \in \pi(\mathrm{C})$ 都正合，则图 Γ 是 pro-C 树。若 pro-C 群 G 在 pro-C 树 Γ 上连续作用，且该作用与 d_0 和 d_1 交换，则称 G 在该树上作用。记 G_x 为 $\mathrm{x} \in \Gamma$ 在 G 中的稳定子。若作用核平凡，则称 G 忠实地作用。若 T 与其最小 G-不变子树重合，则称 G 不可约地作用。

设 A、B 和 C 为 pro-C 群，且 B 作为 pro-C 子群嵌入 A 和 C 中。令 $\mathrm{G} = \mathrm{A} \amalg_B \mathrm{C}$ 为合并自由 pro-C 积。若 A 和 C 嵌入 G 中，则称该合并自由 pro-C 积为真。若 G 作为合并自由 pro-C 积的分解为真，则存在一棵 pro-C 树 T，G 通过左乘作用于其上，其中 $\mathrm{V}(\mathrm{T}) = \{g\mathrm{A}\}_{g\in G} \cup \{g\mathrm{C}\}_{g\in G}$，$\mathrm{E}(\mathrm{G}) = \{g\mathrm{B}\}_{g\in G}$。此处 $\mathrm{d}_0(g\mathrm{B}) = g\mathrm{A}$，且 $\mathrm{d}_1(g\mathrm{B}) = g\mathrm{C}$。注意，商 T/G 是一条具有两个顶点的边。

一般而言，合并自由 pro-C 积 $G = A \amalg_B C$ 不一定为真，但如果 B 是原循环的，则它为真 [17]。关于 pro-p HNN 扩张为真的判据，见 [5]。

$\tilde{}$若 pro-C 群作用于 pro-C 树，我们用记号 G 表示由G 的所有顶点稳定子（在拓扑意义下）生成的子群。

定理 2.1. [24, 命题 2.5 + 定理 2.6] 或 [16, 命题 4.4.1 + 推论 4.1.3] 设 G 是一个 *pro-C* 群，$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$作用于 *pro-C* 树 T 上。那么 $G/\tilde{G}$ 作用于 *pro-C* 树 $T/\tilde{G}$，且 $G/\tilde{G}$ 是一个射影 *pro-C* 群。

引理 2.2. [16, 推论 3.9.3 + 命题 3.10,4] 或 [21, 定理 2.6 + 2.8] 设 G 是一个 *pro-C* 群，作用于$\tilde{}$ *pro-C* 树 T 上，且 T/G 是一个 *pro-C* 树。那么 $G = \tilde{G}$。

定理 2.3. [24, 定理 2.10] 或 [16, 定理 4.1.8] 设 G 是一个 *pro-C* 群，作用于 *pro-C* 树 T 上。那么

$$T^G = \{m \in T \mid gm = m \text{ for every } g \in G\}$$

是 T 的一个 *pro-C* 子树。

推论 2.4. 设 G 是一个作用于 *pro-C* 树 T 上的 *pro-C* 群。假设存在 G 的一族开正规子群 U_i，满足 $\bigcap i\, U_i = 1$，且 $U_i = \tilde{U}_i$。那么 G 固定 T 的一个顶点。

证明。 根据定理 2.1，T/U_i 是一个 pro-C 树，有限商群 G/U_i 作用于其上。因此根据 [16,定理 4.1.8] $(T/U_i)^{G/U_i} \neq \varnothing$。于是 $T^G = \varprojlim_i (T/U_i)^{G/U_i} \neq \varnothing$，如所需。 □

推论 2.5. 设 G 是一个作用于 *pro-C* 树 T 上的 *pro-C* 群。假设以下条件之一成立：

(i) G 有一个固定某个顶点的开正规子群 U；

or

(ii) G 的每个元素都固定一个顶点。

那么，G 固定 T 的一个顶点。

证明。 在情形 (i) 中应用推论 2.4 时，取 U_i 为 G 中包含于 U 的所有开正规子群；在情形 (ii) 中则取 G的所有开正规子群。 □

下一节将用到以下引理。

引理 2.6. 设 G 是一个作用在 *pro-C* 树 T 上的 *pro-C* 群。设 $\mathcal{U}$ 是 G 的某些开 *pro-C*~子群构成的一个有向集，且 $N = \cap_{U\in\mathcal{U}} U$。那么 $N = \cap_{U\in\mathcal{U}} U$。

~证明。令 $\mathrm{M} = \cap_{U\in\mathcal{U}}\mathrm{U}$。那么 T/M 是 pro-C 树 T/U 的逆极限（见定理 2.1），~因此根据 [14, 引理 2.6]，T/M 是一棵 pro-C 树。根据定理 2.1，T_0 = T/N 是一棵 pro-C 树，且~J = M/N 在 T_0 上自由作用。但 T_0/J = T/M，因此由引理 2.2 可得 J = J。由于 J 在 T_0 上自由作用，~我们有 J = 1。因此 J = 1。□

2.2. **有限 pro-C 群图**。本小节回顾有限 pro-C 群图 (G 的定义，Γ) 以及其基本 pro-C 群 $\Pi_1(\mathrm{G}, \Gamma)$。当我们说 (G，Γ) 是有限 pro-C 群图时，我们的意思是它包含底层有限图、边 pro-C 群、顶点 pro-C 群以及附着连续映射的数据。更确切地说，

定义 2.7. 设 Γ 是一张连通有限图。一个 *pro*-C 群的图 (G, Γ) 在 Γ 上由以下数据组成：对每个 $m \in \Gamma$（即 $\mathrm{G} = \bigcup_{m\in\Gamma}\mathrm{G}(m)$），指定一个 pro-C 群 $\mathrm{G}(m)$；并对每条边 $e \in E(\Gamma)$，$i = 1$，指定连续单态 $\partial_i : \mathrm{G}(e) \longrightarrow \mathrm{G}(d_i(e))$。此外，

(1) pro-C 群的图的一个态射 $(\mathrm{G}, \Gamma) \to (\mathrm{H}, \Delta)$ 是由一对映射 $(\alpha, \bar{\alpha})$ 构成的，其中 $\alpha : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ 是一个连续映射，且 $\bar{\alpha} : \Gamma \longrightarrow \Delta$ 是一个图的态射，并且满足 $\alpha_{\mathcal{G}(m)} : \mathrm{G}(m) \longrightarrow \mathrm{H}(\bar{\alpha}(m))$ 对于每个 $m \in \Gamma$ 都是一个同态，且与相应的 ∂_i 交换。因此，该图表】【。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{H} \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_i} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_i} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{H} \end{array}$$

是交换的。

（2）我们称 $(\alpha, \bar{\alpha})$ 是一个单态，如果 $\alpha, \bar{\alpha}$ 都是单射。在这种情况下，其像称为 (H, Δ) 的群图的子图。换言之，pro-C 群图 (G, Γ) 的群图的子图是一个群图 (H, Δ)，其中 Δ 是 Γ 的子图（即 $E(\Delta) \subseteq E(\Gamma)$ 且 $V(\Delta) \subseteq V(\Gamma)$，Δ 上的映射 d_i 是 Γ 上映射 d_i 的限制），并且对每个 $m \in \Delta$，$\mathrm{H}(m) \leqslant \mathrm{G}(m)$。

定义 2.8. 基本 pro-C 群的定义。在 [24, 第 (3.3) 段], 中，基本 pro-C 群 $G = \Pi_1(\mathrm{G}, \Gamma)$ 根据与选定的极大子树 D 相关的生成元与关系，进行了明确的定义。即

$$G = \langle \mathcal{G}(v), t_e \mid v \in V(\Gamma), e \in E(\Gamma), t_e = 1 \text{ for } e \in D, \partial_0(g) = t_e \partial_1(g) t_e^{-1}, \text{ for } g \in \mathcal{G}(e) \rangle \tag{2}$$

I.e.，如果取抽象基本群 $G_0 = \pi_1(\mathrm{G}, \Gamma)$（参见 [19, §5.1]），那么

$$\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) = \varprojlim_N G_0/N,$$

其中 N 遍历 G_0 的所有正规子群，满足 G/N ∈ C，且对所有 v ∈ V(Γ)，N ∩G(v) 在 G(v) 中开。注意，根据 [15, 第 4 节.8]，如果 G(v)（作为 pro-C 群）有限生成，那么最后这个条件自动成立。在 [24] 中还证明了，上述定义与极大子树 D 的选择无关。于是，$\Pi_1(\mathrm{G}, \Gamma)$ 是 G_0 的 pro-C 完备化。因此，如果 G_0 是剩余 C，且每个 G(v) ∈ C，那么 $\Pi_1(\mathrm{G}, \Gamma)$ 包含开自由 pro-C 群（因为 G_0 包含一个自由抽象正规子群 F，且 G_0/F ∈ C）。

$\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ 的主要例子是 pro-C 合并自由积 $G_1 \amalg_H G_2$，以及 HNN 扩张 HNN(G,H,t)，它们分别对应于 Γ 只有一条边且有两个顶点，或只有一个顶点的情形。

定义 2.9. 如果对所有 $v \in V(\Gamma)$，自然映射 $\mathcal{G}(v) \to \Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ 都是一个嵌入，则称群图 $(\mathcal{G},\Gamma)$ 真[1]。

注2.10。 在 pro-C 情形下，群图 $(\mathcal{G},\Gamma)$ 不总是真。然而，总可以将顶点群和边群替换为它们在 $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ 中的像，使得 $(\mathcal{G},\Gamma)$ 成为真，且 $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ 不变。因此，本文中我们只考虑适当的 pro-C 群图，并始终将 $(\mathcal{G},\Gamma)$ 的顶点群和边群视为它们在 $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ 中的像。特别地，我们所有的自由合并的原群乘积都是真。

注意，$(\mathcal{G},\Gamma)$ 为真当且仅当 $\pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ 为剩余 C。特别地，边和顶点群将是 $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$的子群。

定义 2.11。 若有限 pro-C 群图 $(\mathcal{G},\Gamma)$ 满足：对于每条非环边 e，$\partial_1(e)\colon \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_1(e))$ 和 $\partial_0(e)\colon \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_0(e))$ 均不是同构，则称其为约化的。

注 2.12。任何有限 pro-C 群图都可以通过以下步骤转化为约化的有限 pro-C 群图：若 $\{\mathrm{e}\}$ 是一条非环边，且 ∂_0, ∂_1 中有一个是同构，则可将 $\{\mathrm{e}\}$ 塌缩为顶点 y。令 Γ' 为满足 $\mathrm{V}(\Gamma') = \{\mathrm{y}\} \cup \mathrm{V}(\Gamma)\backslash\{\mathrm{d}_0(\mathrm{e}), \mathrm{d}_1(\mathrm{e})\}$ 且 $\mathrm{E}(\Gamma') = \mathrm{E}(\Gamma)\backslash\{\mathrm{e}\}$ 的有限图，并令 $(\mathcal{G}',\Gamma')$ 表示基于 Γ' 的有限群图：若 $\partial_0(\mathrm{e})$ 是同构，则 $\mathcal{G}'(\mathrm{y}) = \mathcal{G}(\mathrm{d}_1(\mathrm{e}))$；若$\partial_0(\mathrm{e})$ 不是同构，则 $\mathcal{G}'(\mathrm{y}) = \mathcal{G}(\mathrm{d}_0(\mathrm{e}))$，其余边群和顶点群保持不变。

这一过程可以继续，直到对于所有不定义环的边，$\partial_0(e), \partial_1(e)$ 均非满射。注意，约化过程不会改变基本 pro-C 群，即存在典范同构 $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma) \simeq \Pi_1(\mathcal{G}_{red},\Gamma_{red})$。因此，如果 pro-C 群 G 是有限 pro-C 群图的基本群，我们可以假设该有限 pro-C 群图是约化的。

2.13. **标准（普遍）pro-C 树**。 与有限 pro-C 群图 $(\mathcal{G},\Gamma)$ 相对应的是一棵相应的标准 *pro*-C 树（或普遍覆盖图）$T = T(G) = \bigcup_{m\in\Gamma} G/\mathcal{G}(m)$（参见[24, 命题 3.8]）。$T$ 的顶点是形如 $1\mathcal{G}(v)$的陪集，其中 $v \in V(\Gamma)$ 且 $g \in G$；其边是形如 $1\mathcal{G}(e)$的陪集，其中 $e \in E(\Gamma)$；而T 的关联映射由以下公式给出：

$$d_0(g\mathcal{G}(e)) = g\mathcal{G}(d_0(e)); \quad d_1(g\mathcal{G}(e)) = gt_e\mathcal{G}(d_1(e)) \ \ (e \in E(\Gamma), t_e = 1 \text{ if } e \in D).$$

G在T上有自然的连续作用，显然$G\backslash T = \Gamma$。还要注意，由于 Γ 是有限的，$E(T)$ 是紧致的。

2.3. **pro-p 群的同调有限性性质**。对于一个 pro-p 群G，我们将 $\mathbb{F}_p[[G]]$ 记作以 $\mathbb{F}_p$为系数的G 的完备群代数。因此

$$\mathbb{F}_p[[G]] = \varprojlim_U \mathbb{F}_p[G/U],$$

其中逆极限遍历 U 的所有开子群，这些开子群属于 G。

[1]单射，按照 [16]中的术语。

根据 [7]，如果存在一个将 Z^p 视为平凡 $Z_p[[G]]$-模的投射分解，且其中每个维数 $i \leqslant n$ 上的投射模都是有限生成的，那么 pro-p 群 G 具有 FP_n 同调类型。根据 [7]，这等价于对所有 $i \leqslant n$，$H_i(G, F_p)$ 都是有限的。此外，如果 G 是一个有限生成的 pro-p 群，而 N 是 G 的正规闭子群，且 G/N 是阿贝尔群，那么根据 [7]，G 具有 FP_n 同调类型，当且仅当对每个 $i \leqslant n$，$H_i(N, F_p)$ 都是 $F_p[[G/N]]$-模的有限生成模。

pro-FP_1 性质对于 pro-p 群等价于在 pro-p群范畴中的有限生成。pro-p 群的FP_2 性质等价于在 pro-p 群范畴中的有限表示（以生成元和关系表示）。

3. pro-C 群作用于树时的有限生成正规子群

顶点v　　若图 Γ 中只有一条边e 与v关联，则称该顶点为悬挂顶点。

引理3.1。设 G 是一个作用于 *pro-C* 树 T 上的 *pro-C* 群，且 $|T/G| < \infty$。则 $G = \Pi_1(\mathcal{G}, T/G)$ 是一个 *pro-C* 群图 $(\mathcal{G}, T/G)$ 的基本群，其中顶点群和边群分别是 T/G 在 T 中的一个连通横截面上相应顶点和边的稳定子。此外，若该作用不可约，则 T/G 的悬挂顶点的顶点群不可能等于与之关联的边群。

证明。第一条陈述是 [25, 命题 4.4与5.4]共同讨论的内容。现在，若v_0 是 $\Gamma = T/G$ 中的悬挂顶点，且e_0 是其关联边，其中$G(e_0) = G(v_0)$，那么我们可以考虑 Γ 的子图 $\Delta = \Gamma \backslash \{e_0, v_0\}$ 以及将群图 (G, Δ) 限制在 Δ上的情形。于是$G = \Pi_1(\mathrm{G}, \Delta)$。

设 Σ 是T中的 Δ 的一个连通横截面。则$\mathrm{G}\Sigma$ 是Γ的一个pro-C子树；事实上，利用表示式（2），我们看到，对于由 $\{\mathrm{G}_v、\mathrm{t}_e \mid \mathrm{e} \in \mathrm{E}(\mathrm{T}/\mathrm{G})、\mathrm{v} \in \mathrm{V}(\mathrm{T}/\mathrm{G})\}$ 抽象生成的群G^{abs}，$\mathrm{G}^{abs}\Sigma$ 是连通的，因为离散群中的相应结论成立。事实上，$\mathrm{T}^{abs} = \mathrm{G}^{abs}(\Sigma \cup \{\mathrm{e}_0, \mathrm{v}_0\})$ 是一个抽象树，因而是连通的；又由于v_0 是一个悬挂顶点且$\mathrm{G}(\mathrm{v}_0) = \mathrm{G}(\mathrm{e}_0)$，$\mathrm{G}^{abs}\Sigma$ 仍然保持连通。

因此，$G\Sigma$ 是T 中$G^{abs}\Sigma$ 的闭包，而且$G\Sigma$ 也是连通的。这与作用的不可约性矛盾，因为$G\Sigma$ 是T的一个真 pro-C 子树。

□

如果一个 pro-C 群图的基本群只有一条边e，并且满足以下任一条件，我们就称其为二面体型：若 e 是一个环，则 $\Gamma\, G_e = G_v$；或者e 的顶点为v、w，且 $[G_v : G_e] = 2 = [G_w : G_e]$。如果一个定义在有限图上的 pro-C 群图中所有顶点群都属于 C，那么其基本 pro-C 群G 几乎原循环，当且仅当G 是二面体型。事实上，根据定义 2.8 中的抽象群G_0，我们知道G 是G_0, 的 pro-C 完备化，因此G 几乎原循环，当且仅当G_0 几乎循环。而G_0 几乎循环，当且仅当原 pro-C 群图是二面体型。

引理 3.2. 设 $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ 是由有限 C-群构成的有限约化图的基本 *pro-C* 群，且 F 是 G 的一个开自由 *pro-C* 子群。设 T 是与 $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$相关联的标准 *pro-C* 树。那么，对于任意边 $e \in E(T)$及其关联顶点 v，有

(a) $[G_v : G_e] < 3秩(F) + 2$; *(b)* 若 $(\mathcal{G}, \Gamma)$ 不是二面体型，则 $[G : FG_e] < 6秩(F)$。

^证明。本证明中考虑的所有 pro-C 群都是某些抽象群A_C 的 pro-C 完备化A，这些抽象群具有以下性质：A 具有一个正规子群M，其上同调维数有限，

型FP_∞和$A/M \in \mathbf{C}$。根据 [1, Ch. 9]，存在一个定义良好的"分数"欧拉示性数 $\chi(A)\hat{}$，并且我们定义 $\chi(A_C) = \chi(A)$。此类欧拉示性数的取值为有理数，不一定是整数。对于 G 的一个开子群N，我们有 $\chi(N) = [G:N]\chi(G)$。接下来。

$$\chi(G) = \frac{\chi(F)}{[G:F]} = \frac{1 - rank(F)}{[G:F]}.$$

注意，$F \cap G_v = 1$，并且由于每个顶点群G_v都是有限的，$\chi(G_v) = 1/|G_v|$以及$\chi(G_e) = 1/|G_e|$对$v \in V(T)$、$e \in E(T)$均成立。然后（pro-p 情形见 [6, 注3.6], pro-C 情形类似）

$$\frac{rank(F)-1}{[G:F]} = -\chi(G) = -\sum_{v\in V(\Gamma)}\chi(G_v) + \sum_{e\in E(\Gamma)}\chi(G_e) = \sum_{e\in E(\Gamma)}\frac{1}{|G_e|} - \sum_{v\in V(\Gamma)}\frac{1}{|G_v|}.$$

选取$e_0 \in E(\Gamma)$及其关联顶点$v_0 \in V(\Gamma)$。为处理负项，选取一个D的极大有根子树，其中Γ以v_0为根，并使其方向背离根。于是，除根外，Γ中的每个顶点v都是D中恰好一条入边e)的终点t(。

首先考虑e_0不是环的情形，此时可以选取一个包含e_0的D。因此，可以将上面的和改写为

$$\frac{rank(F)-1}{[G:F]} = \frac{1}{|G_{e_0}|} - \frac{1}{|G_{v_0}|} - \frac{1}{|G_{v_1}|} + \Big(\sum_{e\in E(D)\setminus\{e_0\}}\frac{1}{|G_e|} - \frac{1}{|G_{t(e)}|}\Big) + \Big(\sum_{e\in E(\Gamma)\setminus E(D)}\frac{1}{|G_e|}\Big), \tag{3}$$

其中v_1和 v_0是e_0的顶点。由于右侧的求和非负 e,

$$[G:F]\Big(\frac{1}{|G_{e_0}|} - \frac{1}{|G_{v_0}|} - \frac{1}{|G_{v_1}|}\Big) \leqslant rank(F) - 1.$$

注意，对于每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}(\Gamma)$，都有 $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}_v = 1$，因此 G_v 嵌入于 G/F，并且当 $\mathrm{j} = 0$ 且 $\mathrm{j} = 1$ 时，$\mathrm{m}_j|\mathrm{G}_{e_0}| = |\mathrm{G}_{v_j}|$ 整除|G/F| 。令 $\mathrm{m} = \mathrm{MMC}(\mathrm{m}_0,\mathrm{m}_1)$，$\mathrm{a} = \mathrm{MCD}(\mathrm{m}_0,\mathrm{m}_1)$。因此 $\mathrm{m}|\mathrm{G}_{e_0}|$ 整除 $[\mathrm{G}:\mathrm{F}]$，我们可以得出结论:

$$rank(F) - 1 \geqslant [G:F]\Big(\frac{1}{|G_{e_0}|} - \frac{1}{|G_{v_0}|} - \frac{1}{|G_{v_1}|}\Big) = [G:F]\Big(\frac{1}{|G_{e_0}|} - \frac{1}{m_0|G_{e_0}|} - \frac{1}{m_1|G_{e_0}|}\Big) =$$

$$\frac{[G:F]}{m|G_{e_0}|}\Big(m - \frac{m}{m_0} - \frac{m}{m_1}\Big) \geqslant m - \frac{m}{m_0} - \frac{m}{m_1}.$$

令 $m^j = a\tilde{}m^j$。然后

$$(\tilde{m}_0 - 1)(\tilde{m}_1 - 1) - 1 = \tilde{m}_0\tilde{m}_1 - \tilde{m}_1 - \tilde{m}_0 \leqslant a\tilde{m}_0\tilde{m}_1 - \tilde{m}_1 - \tilde{m}_0 = m - \frac{m}{m_0} - \frac{m}{m_1} \leqslant rank(F) - 1.$$

那么，如果 $\tilde{}\mathrm{m}_1 > 1$，我们得出 $\tilde{}\mathrm{m}_0 - 1 \leqslant (\tilde{}\mathrm{m}_0 - 1)(\tilde{}\mathrm{m}_1 - 1) \leqslant$秩(F)。如果 $\tilde{}\mathrm{m}_1 = 1$，那么 $1, \mathrm{m}_1 = \mathrm{a}\tilde{}\mathrm{m}_1 = \mathrm{a}$，因此 $\tilde{}\mathrm{m}_0 - 1 \leqslant (\mathrm{a} - 1)\tilde{}\mathrm{m}_0 - 1 \leqslant \mathrm{a}\tilde{}\mathrm{m}_0\tilde{}\mathrm{m}_1 - \tilde{}\mathrm{m}_1 - \tilde{}\mathrm{m}_0 \leqslant$秩(F) $- 1$。因此，在两种情况下，我们都有$\tilde{}\mathrm{m}_0 \leqslant$秩(F) $+ 1$，同理 $\tilde{}\mathrm{m}_1 \leqslant$秩(F) $+ 1$。

最后，为了证明边集 D 上的 (a)，注意到

$$\tilde{am_0m_1}\quad \tilde{}\tilde{}m^j = \tilde{am_j} \leqslant \quad \leqslant \text{秩}(F) - 1 + \tilde{}m_0 + \tilde{}m_1 \leqslant \text{秩}(F) - 1 + \text{秩}(F) + 1 + \text{秩}(F) + 1 = 3\text{秩}(F) + 1 \quad .$$

因此，我们只需证明对于e_0为环的边，命题 (a) 成立。接下来

$$\frac{rank(F)-1}{[G:F]} = \frac{1}{|G_{e_0}|} - \frac{1}{|G_{v_0}|} + \Big(\sum_{e\in E(D)}\frac{1}{|G_e|} - \frac{1}{|G_{t(e)}|}\Big) + \Big(\sum_{e\in E(\Gamma)\setminus(E(D)\cup\{e_0\})}\frac{1}{|G_e|}\Big), \tag{4}$$

结合求和项均非负这一事实，可得

$$\frac{1}{|G_{e_0}|}-\frac{1}{|G_{v_0}|}\leqslant\frac{rank(F)-1}{[G:F]}$$

因此

$$[G_{v_0}:G_{e_0}]=\frac{|G_{v_0}|}{|G_{e_0}|}\leqslant\frac{(rank(F)-1)|G_{v_0}|}{[G:F]}+1\leqslant rank(F).$$

这就完成了情形 (a)。

现在，为了证明 (b)，我们将方程 (3) 改写为

$$(5)\quad rank(F)-1=\frac{[G:F]}{|G_{e_0}|}(1-\frac{|G_{e_0}|}{|G_{v_0}|}-\frac{|G_{e_0}|}{|G_{v_1}|})+(\sum_{e\in E(D)\setminus\{e_0\}}\frac{[G:F]}{|G_e|}(1-\frac{|G_e|}{|G_{t(e)}|})+(\sum_{e\in E(\Gamma)\setminus E(D)}\frac{[G:F]}{|G_e|})$$

并将 (4) 改写为

$$(6)\qquad rank(F)-1=\frac{[G:F]}{|G_{e_0}|}(1-\frac{|G_{e_0}|}{|G_{v_0}|})+(\sum_{e\in E(D)}\frac{[G:F]}{|G_e|}(1-\frac{|G_e|}{|G_{t(e)}|})+(\sum_{e\in E(\Gamma)\setminus(D\cup\{e_0\})}\frac{[G:F]}{|G_e|})$$

由于 (G,Γ) 是约化的，因此求和中的所有项均为正数，所以 秩$(F)=1$ 当且仅当 Γ 是一条边e_0，并且满足以下两种情况之一：e_0 不是一个环，且 $[G_{v_0}:G_{e_0}]=2=[G_{v_1}:G_{e_0}]$；或者$e_0$ 是一个环，且 $G_{v_0}=G_{e_0}$（即 G 是二面体型，这已被假设排除）。

我们考虑三种情况。

1) 假设e 不是一个环。那么，如果 $|E(D)|\geqslant 2$，我们可以对e 考虑 (5)，e_0 并假设$e\in E(D)$。于是

$$rank(F)-1\geqslant\frac{[G:F]}{|G_e|}(1-\frac{|G_e|}{|G_v|}).$$

由于 (G,Γ) 是约化的G_e，G_v。又由于 $|G_e|$ 整除 $|G_v|$，我们得出 $|G_{\frac{|v|}{|G_e|}}|\geqslant 2$，因此$(1-|G_{\frac{|e|}{|G_v|}}|)^{-1}\leqslant 2$，所以利用$F\cap G_e=1$

$$[G:FG_e]=\frac{[G:F]}{|G_e|}\leqslant(rank(F)-1)(1-\frac{|G_e|}{|G_v|})^{-1}\leqslant 2(rank(F)-1).$$

2) 假设$e=e_0$ 不是一个环，且$E(D)=\{e_0\}$。那么由 (5) 可得

$$rank(F)-1\geqslant[G:FG_{e_0}](1-\frac{|G_{e_0}|}{|G_{v_0}|}-\frac{|G_{e_0}|}{|G_{v_1}|}).$$

由于 (G,Γ) 是约化的且不是二面体型$|G_{\frac{e_0|}{|G_{v_0}|}}-|G_{\frac{e_0|}{|G_{v_1}|}}>0$。又利用$|G_{\frac{v_0|}{|G_{e_0}|}}$, $|G_{\frac{v_1|}{|G_{e_0}|}}$都是整数，且均至少为 2，但不同时等于 2 这一点，我们得出 $|_{\frac{|e_0|}{|GG_{v_0}|}}+|G_{\frac{e_0|}{|G_{v_1}|}}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，因此

$$[G:FG_e]\leqslant(rank(F)-1)(1-\frac{|G_{e_0}|}{|G_{v_0}|}-\frac{|G_{e_0}|}{|G_{v_1}|})^{-1}\leqslant 6(rank(F)-1)$$

3) 还剩下的是　　当e 是一个环时。然后我们可以考虑 (6)，并假设 $e=e_0$。因此

$$rank(F)-1\geqslant[G:FG_{e_0}](1-\frac{|G_{e_0}|}{|G_{v_0}|}).$$

若 G_{e_0}, G_{v_0}，则与情形1一样

$$[G : FG_e] \leqslant (rank(F) - 1)(1 - \frac{|G_e|}{|G_v|})^{-1} \leqslant 2(rank(F) - 1).$$

假设 $G_{e_0} = G_{v_0}$。假设 Γ 拥有一条边 e_1，其关联顶点为 v_0，使得若 e_1 是一个环，则G_{e_1}，G_{v_0}。那么根据前面的情形，有

$$[G : FG_{e_1}] \leqslant 6(rank(F) - 1)$$

因此，由于 $G_{e_1} \leqslant G_{v_0} = G_{e_0}$，我们有

$$[G : FG_{e_0}] = [G : FG_{v_0}] \leqslant [G : FG_{e_1}] \leqslant 6(rank(F) - 1).$$

因此，由于 Γ 是连通的，我们只剩下这样的情形： Γ 是一个花束，并且对于所有边e，$G_e = G_{v_0}$。由于G 不是二面体群，我们有 $|E(\Gamma)| \geqslant 2$。于是，$G = F_0 \rtimes G_{v_0}$，其中 F_0 是某个非原循环自由 pro-C 群，结论由 Schreier 公式得出。事实上，我们可以假设$F \leqslant F_0$，因此

$$[G : FG_{e_0}] = [G : FG_{v_0}] = [F_0G_{v_0} : FG_{v_0}] = [F_0 : F] = \frac{d(F) - 1}{d(F_0) - 1} \leqslant d(F) - 1.$$

□

命题 3.3。设 G 是一个 *pro-C* 群，它不可约地作用在一个具有有限顶点稳定子的 *pro-C* 树上，且 T/G 是有限的。假设 G 不是几乎原循环的，并令 F 为 G 的一个开自由 *pro-C* 子群。那么对于任意边 $e \in E(T)$，有 $[G : FG_e] < 6$秩(F)。

证明。根据引理3.1，$G = \Pi_1(\mathrm{G}, \Gamma)$ 是一个来自 C 的有限群图的基本群，且对于 Γ 中任意悬挂顶点v，其顶点群$G(v)$ 不等于其关联边群。因此，只需证明边群$G(e)$满足该不等式。

若 Γ 中的一条边 e 不是环，且对于其某个关联顶点 v，有 G(e) = G(v)，则称 e 为虚边。我们对 Γ 中虚边的数量使用归纳法。若该数量为 0，则结论即为引理3.2的内容。设 e 是一条虚边，其顶点为 v、w，也就是说，G(e) = G(v) 或 G(w)；不妨设 G(e) = G(v)。塌缩这条边，即以一个顶点替代该边，其新的顶点群为 G(w)。由于 v 不是悬挂顶点，存在一条与 v 关联的边 $e' \neq e$。根据归纳假设，[G : FG(e′)] < 6 的秩为 (F)。于是，[G : FG(v)] < 6 的秩为 (F)，因此 [G : FG(e)] = [G : FG(v)] < 6 的秩为 (F)，如所需。□

pro-C 版本的 Bass-Serre 理论中的一个主要障碍是，作用于 pro-C 树上的有限生成子群未必存在具有余有限作用的不变子树。下一个定理表明，如果假设该子群正规，那么其作用就是余有限的。

定理 3.4. 设 G 忠实且不可约地作用于一棵 *pro-C* 树 T，且 $|T/G| < \infty$。假设 G 有一个有限生成的非平凡正规 *pro-C* 子群 N。那么 T/N 是有限的，或者 G 几乎原循环。

~ ~证明。 </style>假设V 是G的一个开子群。那么G/V 作用于 pro-C 树$T_V = T/V$，并且~ ~由于V/V 自由作用且是G/V 中的开子群，我们得出G/V 在T_V 上的作用的顶点稳定子是有限C群。由引理3.1，G/V 是一个有限群图（其群属于C）的基本群，因此是同一群图的抽象基本群$G_{0,V}$ 的pro-C 完备化。

~个群。注意，$G0,_V$ 是一个有限生成的虚自由抽象群，因此V/V 是一个自由抽象群的 pro-C 完备化，因而是一个自由 pro-C 群。

假设G 不是几乎原循环的。于是根据 [23, 定理 3.1] 或 [16, 定理 4.2，10] G包含一个非阿贝尔自由 pro-p 子群F，其在T上自由作用。令

$$\mathcal{V} = \{V \leqslant_o G \mid F \subseteq V\}.$$

Then

$$\bigcap_{V\in\mathcal{V}} \widetilde{V} = \widetilde{F} = 1$$

（参见引理 2.6）。

~我们声称，对于某个$V \in \mathcal{V}$，有V/V 是一个非阿贝尔自由 pro-$\mathcal{C}$ 群。事实上，假设 ~ ~ ~V/V 对所有$V \in \mathcal{V}$（包括$V/V = 1$为平凡的可能性）都是原循环的；那么 $\varprojlim V/V$ 是原循环的$_{V\in\mathrm{V}}$ ~ ~（包括成为平凡群的可能性）。因此，$1 \to \mathrm{V} \to \mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{V}$ 的正合性给出一个正合 ~序列 $1 \to \varprojlim \mathrm{V} \to \varprojlim \mathrm{V} \to \varprojlim \mathrm{V}/\mathrm{V}$，可改写为 $1 \to \cap_{V\in\mathcal{V}}\mathrm{V} \to \mathrm{F} = \cap_{V\in\mathcal{V}}\mathrm{V} \to \mathrm{V}\in\mathrm{V}\ \mathrm{V}\in\mathrm{V}\ \mathrm{V}\in\mathrm{V}$

$\varprojlim_{V\in\mathcal{V}}$ ~V/V。因此F 是原循环的，这与假设矛盾。

~那么，对于$V^0 = \cap_{g\in G} V^g$ 的核V，我们也有G/U_0 不是几乎原循环的。由 [16,命题 4.2.3 (a)] 或 [23, 命题 2.1] U_0 在T 上不可约地作用；并且由于若$T/(N \cap U_0)$ 有限，则T/N 有限，通过用U_0 替换G，并用$N \cap U_0$ 替换N，我们可以假设G/G 是非阿贝尔自由 pro-C 群。

令 U 为包含N的G 的所有开子群U 组成的集合。因此$N = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U$。固定$U \in \mathrm{U}$，并~注意到$U/U$ 是非阿贝尔自由 pro-C 群。

~ ~ ~1) 假设对某个 $\mathrm{U} \in \mathrm{U}$，有 $\mathrm{N} \not\leq \mathrm{U}$。注意，$\mathrm{N}_U = \mathrm{NU}/\mathrm{U}$ 是 G/U 的一个有限生成、非平凡的~ ~正规子群，且包含于非阿贝尔自由 pro-C 群 U/U 中，因此由 [15,~定理 8.6.5] N_U 在 G/U 中是开子群，从而是自由 pro-C 群；由于 $\mathrm{d} = \mathrm{d}(\mathrm{N}) < \infty$，我们得到 N_U 的秩至多为 $\mathrm{d} = \mathrm{d}(\mathrm{N})$。那么，对于任意满足 $\mathrm{N} \leqslant \mathrm{V} \leqslant \mathrm{U}$ 的 G 的开正规子群 V，正规子群 $\mathrm{N}_V = \mathrm{NV}/\mathrm{V}$ 在 G/V 中具有有限指数。记 $\mathrm{G}_{e,V}$ 为 G_e 在 $\mathrm{G}_V = \mathrm{G}/\mathrm{V}$~中的像，并注意它是 T/V 中 e 的像的边稳定子。我们可以应用命题 3.3，考察~G_V 在 T/V 上的作用，从而得出对每条边 e，均有

$$[G : NG_e] = [G/\widetilde{N} : G_e\widetilde{N}/\widetilde{N}] = sup_{V\leqslant U}[G_V : G_{e,V}N_V] < 6d(N).$$

注意到 $|T/N| < \infty$ 等价于对每条边e都有 $[G : NG_e] < \infty$。因此，在这种情况下T/N 是有限的。

~ ~ ~2）现在假设$N \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = N \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = N$（见引理 2.6），因此$N = N$。

如果N 稳定一个顶点，那么根据 [24, 定理 2.12] 或 [16, 命题 4.2.2 (a)] N 属于作用的核，这与忠实性假设矛盾。因此这种情况不可能发生；由推论 2.5，存在$x \in \underline{N}$，它不固定任何顶点。于是$C = \langle x\rangle$ 在T上自由作用。令

$$\mathcal{V} = \{V \mid V \text{ an open subgroup of } N, C \subseteq V\}.$$

~那么，如果对于每个$V = V\ V \in \mathrm{V}$，都有

$$C = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} V = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \widetilde{V} = \widetilde{C} = 1$$

$\sim$（参见引理 2.6），矛盾。因此存在$V_0 \in \mathrm{V}$，使得$V_0 \neq V_0$。
注意，对于 $g \in \mathrm{G}$，有 $[\mathrm{N} : \mathrm{V}_0^g] = [\mathrm{N} : \mathrm{V}_0]$。由于 N 是有限生成的，N 中固定指数的开子群只有有限多个，因此 $\mathrm{V}_1 = \bigcap_{g\in \mathrm{G}} \mathrm{V}_0^g$ 在 N 中是开子群。于是$\sim$ $\sim$ $\sim$$\mathrm{V}_1$ 是 G 的有限生成正规子群。注意，若 $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_1$，则 $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_1 \subseteq \mathrm{V}_0 \subseteq \mathrm{V}_0$$\sim$，且 $\mathrm{V}_0/\mathrm{V}_0$ 是一个非平凡自由群，也就是说，它是有限群 $\mathrm{V}_0/\mathrm{V}_1$, 的商，这就导致矛盾。$\sim$因此 $\mathrm{V}_1 \neq \mathrm{V}_1$，由情形1可知，商图 T/V_1 是有限的。于是 T/N 是有限的。□

仿射有限群的自由构造之正规子群的结构定理在 [22, 定理 B]中得到了证明。接下来的推论进一步加强了这一结果。

推论 3.5。 设 $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ 为有限图的 *pro-C* 群的基本群，N 为 G 的非平凡有限生成正规闭子群。则 N 是有限图的 *pro-C* 群的基本群，其顶点群和边群与$\mathcal{G}$的顶点群和边群的子群共轭。

证明。 如果G 几乎原循环，则它是二面体型，结论显然成立。假设G 不是几乎原循环。令$T(G)$ 为 G 作用其上的标准 pro-C 树。如果N 属于作用的核，则无须证明，因此我们假设N 不属于作用的核。该作用是不可约的（[16, 命题 4.2.3 (a)] 或 [23, 命题 2.1]），且将作用的核商去后，我们可以假设该作用是忠实的。于是由定理 3.4，$T(G)/N$ 是有限的，因此由 [25,命题 4.4] N 是所需形式的、以$T(G)/N$ 为底的有限 pro-C 群图的基本群。□

推论 3.6。 设 $G = \coprod_{x\in X} G^x$ 是一个自由 *pro-C* 积，N 是 G 的一个非平凡有限生成正规闭子群。假设 G 并非几乎原循环。那么 N 在 G 中是开子群，其指数为 $[G : N] < 6d(N)$。

证明。将 G 分解为有限自由 pro-C 积的逆极限 $\mathrm{G} = \lim\leftarrow_i \mathrm{G}_i$、$\mathrm{G}_i = \coprod_{\mathrm{x}_i\in \mathrm{X}_i} \mathrm{G}^{x_i}$，其中 X_i 为有限群，且每个 G^{x_i} 都是有限 C-群。注意，G_i 不可约地作用于其标准 pro-C 树$\sim$$\mathrm{T}_i$ 上，且其边稳定子群是平凡的。设 N_i 为 N 在 G_i中的像。则 $\mathrm{G}_i/\mathrm{N}_i$$\sim$ $\sim$ $\sim$不可约地作用于 $\mathrm{T}_i/\mathrm{N}_i$上。实际上，$\mathrm{G}_i/\mathrm{N}_i$ 是 $\coprod_{\mathrm{x}_i\in \mathrm{X}_i} \mathrm{G}_{x_i}/(\mathrm{G}_{x_i} \cap \mathrm{N}_i)$，而 $\mathrm{T}_i/\mathrm{N}_i$ 是相应的标准 pro-C 树。因此，根据命题 3.3，N_i 在 G_i 中的指数小于 $6\mathrm{d}(\mathrm{N})$。因此$[\mathrm{G} : \mathrm{N}] < 6\mathrm{d}(\mathrm{N})$。□

推论 3.7. 设 $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ 为一个有限的 *pro-C* 群图的基本群，H 为 G 的一个闭子群，且其包含 G 的一个非平凡的有限生成闭正规子群 N，该子群不包含于 $(\mathcal{G}, \Gamma)$的任何顶点群 $\mathcal{G}(v)$ 中。那么，H 是一个有限 *pro-C* 群图的基本群，其顶点群和边群分别与$\mathcal{G}$的顶点群和边群的子群共轭。

证明。 与推论 3.5 的证明一样，我们可以假设G 不是几乎原循环。令$T(G)$为G 作用其上的标准 pro-C 树。该作用是不可约的，消去作用的核后，我们可以假设它是忠实的。于是由定理 3.4，$T(G)/N$ 是有限的，因此$T(G)/H$也是有限的。于是由 [25, 命题 4.4]，H 是一个有限 pro-C 群图的基本群，其上$T(G)/H$ 具有所需形式。

□

推论 3.8. 设 $G = G_1 \amalg_A G_2$ 是由相干 *pro-p* 群沿解析 *pro-p* 子群 A 合并而成的自由 *pro-p* 积。设 N 是 G 的有限生成正规闭子群。则 N 是有限表示的。

证明。 根据推论 3.5，N 是有限图的 pro-p 群图的基本群；并且，由于对于任意 $g \in G$，A^g 是有限生成的，而N 也是有限生成的，根据同调中的 Mayer-Vietoris 论证，$N \cap G^g{}_i$ 是有限生成的，因此对于任意 $g \in G$，它都是有限表示的。由此我们得到N 的有限表示（见 (2)）。□

Remark 3.9. 我们不知道是否可以去掉对N 正规性的要求 .

4. Normal subgroups of pro-$\mathcal{C}$ RAAGS

对于一个 pro-C 群G 及其闭子群K，我们用$Core_G(K) = \cap_{g\in G} K^g$ 表示K 在G中的核。

引理 4.1. 设 $G = G_1 \coprod_B G_2$ 是一个 *pro-C* 积，其中 $B \neq G_2$。则 $Core_G(G_1) = Core_G(B)$。

证明。注意，G 在与上述并合积相关联的标准 pro-C 树 T 上作用。设 G_1 是顶点 $v_1 \in V(T)$ 的稳定子，G_2 是 $v_2 \in V(T)$的稳定子。设 $g \in G_2 \backslash B$。则 $M = Core_G(K) \subseteq G_1 \cap G_1^{g^{-1}}$，因此 M 属于 v_1 的稳定子，且 $1v_2$。于是根据定理 2.3，M 固定 T 中包含 v_1 和 $1v_2$, 的极大 pro-C 树；特别地，M 固定一条边，即存在 $g_0 \in G$，使得 $M \subseteq B^{g_0}$。由于 M 在 G 中正规，我们得出 $M \subseteq B$。因此 $Core_G(G_1) = Core_G(B)$。□

设 Γ 是一个有限（单纯）图，并且对每个顶点 $v \in V(\Gamma)$，都有一个 pro-C 群$G(v)$。考虑相应的 pro-C 群图积，即由以下表示给出的 pro-C 群

$$G = \mathcal{G}(\Gamma) = \langle \{G(v)\}_{v\in V(\Gamma)} \mid [G(v), G(w)] = 1 \text{ if } v, w \text{ are adjacent in } \Gamma \}.$$

固定一个顶点$v \in V(\Gamma)$，并定义

$$B = \mathcal{G}(lk(v))$$

其中 $lk(v)$ 是v 的链接，即由 Γ 中与v相邻的顶点所张成的子图。令Γ_1 为由 Γ 中的顶点$V(\Gamma)\backslash\{v\}$ 所张成的子图；$\Gamma_2 = star(v)$ 为v 的星形，即由v 和$lk(v)$在 Γ 中张成的子图。我们设

$$G_1 = \mathcal{G}(\Gamma_1) \text{ and } G_2 = \mathcal{G}(\Gamma_2).$$

注意到

$$G_2 = B \times G(v).$$

分解 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，其中 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = lk(v)$ 给出了作为自由合并的原群乘积的分解

$$G = G_1 \amalg_B G_2. \tag{7}$$

注意，上述自由合并的原群乘积是真，因为G_1 和G_2 都是G 的 pro-C 直缩（由 [15, 命题 9.2.2] 可轻易推出）。定义T_v 为与此分解对应的标准 pro-C 树。

注意，我们有一个

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \mathcal{G}(\Gamma^{(1)}) \times \ldots \times \mathcal{G}(\Gamma^{(k)}) \tag{8}$$

不能再进一步分解的分解。对于 $G(\Gamma)$ 的正规子群 N，如果 N 与上述分解中的每个因子 $G(\Gamma^{(i)})$ 都有非平凡交集，我们就称 N 是满的。

我们将 $Z(V(\Gamma))$ 记作所有满足以下条件的 $v \in V(\Gamma)$：它们通过边与 $V(\Gamma)$中的任意顶点相连。

引理 4.2。 设 Γ 为一个有限（单纯）图， Γ_0 为 Γ的一个子图。那么，G 中 $\mathcal{G}(\Gamma_0)$ 的核 $=\mathcal{G}(\Gamma)$ 为 $\mathcal{G}(\Delta)$，其中 Δ 是 Γ_0 的最大子图，使得 G 可分解为 $\mathcal{G}(\Delta) \times \mathcal{G}(\Delta_1)$，其中 Δ 和 Δ_1 可以为空集。

证明。 我们对 $|V(\Gamma)|$ 进行归纳。若 $\Gamma_0 = \Gamma$ ，则无须证明。因此，我们可以假设 $|V(\Gamma)\backslash V(\Gamma_0)| \geqslant 1$。

首先，假设 $V(\Gamma)\backslash V(\Gamma_0) = \{v_0\}$。令 $\Gamma_1 = lk(v_0)$。于是，我们有如下自由融合 pro-C 积分解

$$G = \mathcal{G}(\Gamma_0) \coprod_{\mathcal{G}(\Gamma_1)} \mathcal{G}(\Gamma_1) \times G(v_0).$$

由引理 4.1，$\mathrm{G}(\Gamma_0)$ in G 的核是 $\mathrm{G}(\Gamma_1)$ in G 的核。注意，$\mathrm{G}(\Gamma_1)$ in G 的核是 $\mathrm{G}(\Gamma_1)$ in $\mathrm{G}(\Gamma_0)$ 的核。由归纳法，$\mathrm{G}(\Gamma_1)$ in $\mathrm{G}(\Gamma_0)$ 的核是 $\mathrm{G}(\Delta_2)$，其中 Δ_2 是 Γ_1 的极大子图，且满足 $\mathrm{G}(\Gamma_0) = \mathrm{G}(\Delta_2) \times \mathrm{G}(\Delta_3)$。注意，$G = \mathrm{G}(\Gamma) = \mathrm{G}(\Delta_2) \times \mathrm{G}(\Delta_4)$，其中 Δ_4 是由 Δ_3 和 v_0 在 Γ 中张成的子图。因此 $\Delta_2 = \Delta, \Delta_1 = \Delta_4$。

设 $|V(\Gamma)\backslash V(\Gamma_0)| \geqslant 2$。令 Γ_2 为 Γ 的一个子图，该子图包含 Γ_0 和 $V(\Gamma)\backslash V(\Gamma_2) = \{v_0\}$。$\mathrm{G}(\Gamma_0)$ 在 $\mathrm{G}(\Gamma_2)$ 中的核为 $\mathrm{G}(\Delta_5)$，其中 Δ_5 是 Γ_0 的极大子图，使得我们有一个分解 $\mathrm{G}(\Gamma_2) = \mathrm{G}(\Delta_5) \times \mathrm{G}(\Delta_6)$。

令 Γ_3 为由 Δ_5 和 v_0 张成的 Γ 的子图。那么，$\mathrm{G}(\Gamma_0)$ 在 G 中的核，就是 $\mathrm{G}(\Delta_5)$ 在 G 中的核。而 $\mathrm{G}(\Delta_5)$ 在 $\mathrm{G}(\Gamma_3)$ 中的核，根据归纳法为 $\mathrm{G}(\Delta_7)$，其中 Δ_7 是 Δ_5 的极大子图，使得 $\mathrm{G}(\Gamma_3) = \mathrm{G}(\Delta_7) \times \mathrm{G}(\Delta_8)$。于是，$G = \mathrm{G}(\Delta_7) \times \mathrm{G}(\Delta_9)$，其中 Δ_9 是由 Δ_6 和 Δ_8 张成的 Γ 的子图。于是 $\Delta = \Delta_7$ 且 $\Delta_1 = \Delta_9$。□

引理 4.3。 设 Γ 是一个有限（单纯）图，且 $G = \mathcal{G}(\Gamma)$ 不能分解为直积，即在(8) $k = 1$的条件下成立。那么 G 在与 *(7)* 相关联的标准 *pro-C* 树 T_v 上忠实且不可约地作用。

证明。 忠实性等价于 $\cap_{g \in G} B^g = 1$。接下来应用引理 4.2。

注意，G 的不可分解性意味着整数环 $Z(V)$, $\varnothing$。不可约性源于这样一个事实：T_v/G 恰好是一条有两个顶点的边。□

定理 4.4。 设 Γ 是一个有限单纯图。假设对每个中心顶点 $w \in V(\Gamma)$，$G(w)$ 的每个真商都是有限扩张阿贝尔 *pro-C* 群。进一步假设 N 是$\mathcal{G}(\Gamma)$的一个非平凡、有限生成、正规、满 *pro-C* 子群。那么$\mathcal{G}(\Gamma)/N$ 是有限生成的有限扩张阿贝尔群，特别地，它是阿贝尔群扩张有限群。

证明。 考虑分解 (8)。假设 $\Gamma^{(i)}$ 有多个顶点，令 $v_i \in V(\Gamma^{(i)})$为任意一个顶点。注意，$Z(\Gamma^{(i)}) = \varnothing$ ，否则分解 (8) 还能进一步分解。考虑N_i 在 $\mathrm{G}(\Gamma^{(i)})$ =中的像：G_i。根据N 满的假设，我们有N_i 非平凡。

将该分解视为 pro-C 合并积

$$G_i = \mathcal{G}(\Gamma_{0,i}) \coprod_{\mathcal{G}(\Gamma_{1,i})} (\mathcal{G}(\Gamma_{1,i}) \times G(v_i)),$$

其中 $\Gamma_{1,\ i}$ 是v_i 在 $\Gamma^{(i)}$ 中的链接，而 $\Gamma_{0,\ i} = \Gamma^{(i)}\backslash\{v_i\}$。

令T_{v_i} 为与上述分解相关联的标准 pro-C 树。于是 G_i 作用于T_{v_i} ，并且由引理 4.3，G_i 忠实地且不可约地作用于T_{v_i}。于是由定理 3.4，T_{v_i}/N_i 是有限的，或者G_i

几乎原循环。注意，G 通过典范投影 T^{v_i} 作用于 $G \to G_i$。因此，如果 T_{v_i}/N_i 是有限的，那么我们有 $T_{v_i}/N\prod_{j\neq i} G_j$ 是有限的。

假设 G_i 几乎原循环。根据假设，$v_i \in V(\Gamma^{(i)})\backslash$整数环 $Z(\Gamma^{(i)})$，因此存在 $w_i \in V(\Gamma^{(i)})$，使得 v_i 和 w_i 之间没有边相连，所以 G_i 满同态地映射到 $G(v_i)\coprod G(w_i)$，且 $G(v_i)\coprod G(w_i)$ 几乎原循环。于是 $G(v_i) = C_2 = G(w_i)$，并且 $\Gamma^{(i)}$ 只是一条边，其顶点为 v_i 和 w_i。因此 $G_i = C_2 \coprod C_2$，且 G_i 的每个非平凡正规闭子群都是开子群，特别地，$[G_i : N_i] < \infty$。那么 $[G : N\prod_{j,i} G_j]$ 是有限的，因此 $T_{v_i}/N\prod_{j,i} G_j$ 是有限的。

注意，$(\prod_{j,\ i} G_j)G(lk_{\Gamma^{(i)}}(v_i)) = G(lk_\Gamma(v_i))$。那么，$T_{v_i}/N\prod_{j,\ i} G_j$ 是有限的等价于

$$[G : N\mathcal{G}(lk_\Gamma(v_i))] < \infty, \tag{9}$$

其中 $G = G(\Gamma)$。上述结论对每个 $v_i \in V(\Gamma^{(i)})$ 且满足 $|V(\Gamma^{(i)})| > 1$ 的情形都成立。此外，$|V(\Gamma^{(i)})| = 1$ 当且仅当 $V(\Gamma^{(i)}) \subseteq Z(V(\Gamma))$。

接下来我们可以按照 [3], 继续，其中讨论的是抽象情形。为完整起见，我们概述证明。

考虑短正合列

$$1 \to \frac{N\prod_{v\in Z(\Gamma)}[G(v), G(v)]}{N} \to \frac{G}{N} \to \frac{G}{N\prod_{v\in Z(\Gamma)}[G(v), G(v)]} \to 1.$$

由于 N 是满的，对于每个 $v \in$整数环 $Z(\Gamma)$，都有 $N \cap G(v), 1$。因此 $G(v)/(N \cap G(v))$ 是有限扩张阿贝尔群，而 $N\Pi_{v\in Z(\Gamma)}$ ~~$G(v)$ N 的换~~位子群有限，~~所以 $N\Pi_{v\in Z(\Gamma)}[G(v),G(v)]$~~ N 有限。

定义

$$H = \cap_{v\in V(\Gamma)\backslash Z(\Gamma)} N\mathcal{G}(lk(v))$$

并注意到由 (9) 可知 $[G : H] < \infty$。我们声称，$M := G$ ~~$N\Pi_{v\in Z(\Gamma)}[G(v),G(v)]$~~ 是有限扩张阿贝尔群，因此 G 是有限扩张阿贝尔群。要证明 M 是有限扩张阿贝尔群，只需证明 $K := H\Pi_{v\in Z(\Gamma)}[G(v),G(v)]\ N\Pi_{v\in Z(\Gamma)}[G(v),G(v)]$ 在 M 中是中心的，并结合这一观察：$[M : K] < \infty$。

设 $v \in V(\Gamma)\backslash Z(\Gamma), h \in H,\ g_v \in G(v), h = nh_v$, 其中$n \in N, h_v \in G(lk(v))$。注意

$$[h, g_v] = [nh_v, g_v] = [n, g_v]^{h_v}.[h_v, g_v] = [n, g_v]^{h_v} \in N^{h_v} = N,$$

thus

$$[H, G(v)] \subseteq N \text{ for } v \in V(\Gamma)\backslash Z(\Gamma).$$

最后

$$[H, G(v)] \subseteq [G, G(v)] = [G(v), G(v)] \text{ for } v \in Z(\Gamma)$$

可推出 $[K,M] = 1$，如所声称。因此M 是有限生成的中心扩有限群，故根据 Schur 结果的 pro-C 版本，[18] M 是一个有限扩张阿贝尔 pro-C 群。

最后请注意，每个有限生成的有限扩张阿贝尔群都是阿贝尔群扩张有限群（在离散情形和 pro-C 情形下均如此）。□

5. Normal subgroups of pro-p RAAGs with abelian quotients

从现在起，我们只讨论 pro-p 群。

若 Γ_0 是图 Γ 的子图，我们称 Γ_0 在 Γ 中占优，若对于每个顶点$v \in V(\Gamma)\backslash V(\Gamma_0)$，都存在一个顶点$w = w(v) \in V(\Gamma_0)$，使得$v$ 与w 之间有一条边相连。

定理 5.1. 设 Γ 是一个有限单纯图，$G = G_\Gamma$ 是相应的 *pro-p RAAG*。设$\chi : G \to$ 整数环 $\mathbb{Z}_p$ 是 *pro-p* 群之间的一个满同态。那么，$N = Ker(\chi)$ 作为 *pro-p* 群是有限生成的，当且仅当由 $\{v \in V(\Gamma) \mid \chi(v) \neq 0\}$ 在 Γ 中张成的子图 $\Gamma(\chi)$ 是连通的，且在 Γ 中占优。

证明。 1) 假设N 是有限生成的 pro-p 群。

1.1) 假设 $\Gamma(\chi)$ 不连通。那么我们有一个分解 $\Gamma(\chi) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，其中子图 Γ_1 和 Γ_2 之间没有边相连。考虑群的满同态

$$\pi : G = G_\Gamma \to G_{\Gamma(\chi)}$$

该同态对$G(v)$ 中的$v \in V(\Gamma(\chi))$ 取恒等映射，并将$G(w)$ 映为 1，其中 $\chi(w) = 0$。注意$Ker(\pi) \subseteq N$，并令 $N_0 = \pi(N)$。那么N_0 是一个有限生成的正规 pro-p 子群

$$G_0 := G_{\Gamma(\chi)} = G_{\Gamma_1} \amalg G_{\Gamma_2}$$

注意G_0 不是几乎原循环的。那么，要么$N_0 = 1$，因此$G_0 \simeq G_0/N_0 \simeq \mathbb{Z}_p$，矛盾；要么根据推论 3.6 得到 $\infty = |\mathbb{Z}_p| = [G_0 : N_0] < \infty$，矛盾。这证明了 $\Gamma(\chi)$ 是连通的。

1.2）假设 $\Gamma(\chi)$ 在 Γ 中不占优。设 v 是 $\Gamma \backslash \Gamma(\chi)$ 的一个顶点，它与 $\Gamma(\chi)$ 中的顶点之间没有边相连。那么 $G^{star(v)} \subseteq N$ 且 $|V(\Gamma)| \geqslant 2$，因此 G 不是几乎原循环的。考虑分解。

$$G = G_{\Gamma \backslash \{v\}} \amalg_{G_{lk(v)}} G_{star(v)},$$

令 $A = G^{\Gamma \backslash \{v\}}$、$B = G^{lk(v)}$、$C = G^{star(v)}$。令 T 为与该分解相关联的标准 pro-p 树。由于 T/G 只是具有两个顶点的一条边，G 在 T 上的作用是不可约的。作用的核是 B 在 G 中的核，即 $\cap_{g \in G} B^g$。根据定理 3.4，要么 $[G : NB] < \infty$，要么 N 位于作用的核中，特别地 $N \subseteq B$。后一种情况不成立，因为 $v \in N \backslash B$；而若前一种情况成立，由于 $B \leqslant G_{star(v)} \leqslant N$，我们有 $NB = N$，从而 $\infty > [G : NB] = [G : N] =$ |整数环 $\mathbb{Z}_p$| $= \infty$，矛盾。这就完成了 $\Gamma(\chi)$ 在 Γ中占优这一事实的证明。

2) 假设 $\Gamma(\chi)$ 在 Γ 中连通且占优。我们旨在证明 $N = Ker(\chi)$ 是有限生成的（作为 pro-p 群）。我们对 Γ 中顶点的数量进行归纳。

选取 $\Gamma(\chi)$ 的一棵极大子树，并将其扩展为 Γ 的一棵极大子树 Γ_0，使得 $\Gamma_0(\chi)$ 在 Γ_0 中占优。注意，存在一个 pro-p 群的满同态 $\pi : G^{\Gamma_0} \to G_\Gamma$，它在顶点上是恒等映射。令 $\chi_0 = \chi \circ \pi$。若 $N_0 = Ker(\chi_0)$ 作为 pro-p 群是有限生成的，则$N = Ker(\chi) = \pi(N_0)$ 按要求是有限生成的。因此，从现在起可以假设 $\Gamma = \Gamma_0$ 是一棵有限树。

选取一个悬挂顶点 $v \in V(\Gamma)$。接着考虑如下自由 amalgamated pro-p 积分解

$$G = G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \coprod_{G_{lk(v)}} G_{star(v)},$$

其中 Γ_1 是由 $V(\Gamma) \backslash \{v\}$ 张成的 Γ 的子图。于是，根据 Mayer-Vietoris 正合列（参见 [16, 第 9.4] 节），我们有

$$\ldots \to \oplus_{g \in G/NG_{star(v)}} H_1(N \cap G^g_{star(v)}, \mathbb{F}_p) \oplus \oplus_{g \in G/NG_{\Gamma_1}} H_1(N \cap G^g_{\Gamma_1}, \mathbb{F}_p) \to H_1(N, \mathbb{F}_p)$$
$$\to \oplus_{g \in G/NG_{lk(v)}} H_0(N \cap G^g_{lk(v)}, \mathbb{F}_p) \to \ldots$$

注意，由于v 是一个悬挂顶点，我们有$lk(v)$ 只是一个顶点w，而 $\Gamma(\chi)$在 Γ 中连通且占优这一条件意味着 $\chi(w) \neq 0$。于是$G_{lk(v)} = \langle w \rangle$ 不是N 的子集，并且由于$G/N \simeq$ 整数环 $\mathbb{Z}_p$，我们得出 $[G : NG_{lk(v)}]$ 是有限的，因此 $[G : NG_{star(v)}]$ 和 $[G : NG_{\Gamma_1}]$ 都是有限的。

由归纳法可知$N \cap G^{star(v)}$和$N \cap G_{\Gamma_1}$均为有限生成，因此$N \cap G^{g}{}_{star(v)} = (N \cap G_{star(v)})^{g}$和$N \cap G^{g}_{\Gamma_1} = (N \cap G_{\Gamma_1})^{g}$均为有限生成。于是，在上述正合列$H_1(N, \mathbf{F}_p)$中，F 夹在有限模之间，因此它也是有限的。这说明$N$作为一个 pro-$p$ 群是有限生成的。□

备注 定理 5.1 的一个方向的证明适用于 pro-C 直角阿廷群，即如果$N = Ker(\chi)$是有限生成的，其中 $\chi: G \to$ 整数环 $\mathbf{Z}_C$ 是一个满同态，且$G = G_\Gamma$是与 Γ 相关联的 pro-C 直角阿廷群，那么 $\Gamma(\chi)$ 在 Γ 中是连通且占优的。

在下一个定理的证明中，我们将使用以下简单结果。

引理 5.2. 设

$$A \to G \to G/A$$

是一个 *pro-p* 群的正合列，其中 A 是阿贝尔群，且 G/A 是阿贝尔有限生成群。当且仅当 A 是一个有限生成的 整数环 $\mathbf{Z}_p[[G/A]]$-模时，G 才是有限生成的；其中 G/A 对 A 的作用由共轭作用诱导。

证明。 设 $g_1, \ldots g_n \in G$是满足 g_1A、...、 g_nA生成G/A的元素。若$a_1, \ldots,$ a_m是A作为 $\mathbf{Z}_p[[G/A]]$-模的生成元，那么显然$a_1, \ldots a_m$， 11 ... g_n生成G。

反过来，作为五项 Hochschild-Serre 正合列的一部分，我们有正合列 $H_2(G/A, \mathbf{F}_p) \to (A/pA)_{G/A} \to H_1(G, \mathbf{F}_p)$。由于$G/A$ 是有限表示的，左端项是有限的；又由于G是有限生成的，右端项也有限。因此中间项有限。还需注意，A 是有限生成的 $\mathbf{Z}_p[[G/A]]$-模，当且仅当余不变量模$(A/pA)_{G/A} = A/pA \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G]]} \mathbf{F}_p$ 是有限的。

□

定理 5.3. 设 Γ 是一个有限单纯图，$G = G_\Gamma$ 是相应的 *pro-p RAAG*。设 N 是 G 的一个 *pro-p* 正规子群，且 G/N 是无限阿贝尔群。那么，N 是有限生成的，当且仅当对于每个包含 N 的 $N_0 \lhd G$，若 $G/N_0 \simeq$ 整数环 $\mathbf{Z}^p$，则 N_0 是有限生成的。

证明。 I) 假设 N 是有限生成的。由于 N_0/N 是有限生成阿贝尔 pro-p 群 G/N的 pro-p 子群，商群 N_0/N 是有限生成的。因此 N_0 是有限生成的。

II) 假设每个包含 $N_0 \subseteq G$ 且满足 N 与 $G/N_0 \simeq \mathbf{Z}^p$ 的 $N_0 \subseteq G$ 都是有限生成的。我们对 Γ 中的顶点数进行归纳，以证明 N 是有限生成的。

取一个顶点 $v \in V(\Gamma)$，并考虑分解

$$G = G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \coprod_{G_{lk(v)}} G_{star(v)}$$

其中 Γ_1 是由 $V(\Gamma)\backslash\{v\}$ 张成的 Γ 子图。令 $G_1 = G_{\Gamma_1}$。

考虑 $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} \cap \mathbf{G}_1$。首先假设 $\mathbf{N}_1 \neq \mathbf{G}_1$。设 $\chi_0 : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{Z}^p$ 是 pro-p 群之间的一个满同态，满足 $\chi_0(\mathbf{N} \cap \mathbf{G}_1) = 0$。我们将 χ_0 扩张为满同态 $\chi : \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^p$，使得 $\chi(\mathbf{v}) = 0$。根据假设，$\mathbf{Ker}(\chi)$ 是有限生成的，因此由定理 5.1 $\Gamma(\chi)$ 在Γ中连通且占优。根据构造， $\Gamma_1(\chi_0) = \Gamma(\chi)$，故 $\Gamma_1(\chi_0)$ 在 Γ_1中连通且占优。于是由定理 5.1，$\mathbf{Ker}(\chi_0)$ 是有限生成的。由归纳法，$\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} \cap \mathbf{G}_1$ 是有限生成的。

如果$N_1 = G_1$，那么N_1 显然是有限生成的。

我们将 G′ 记为由 $\{[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy \mid x,y\in G\}$ 生成的 G 的 pro-p 子群，并将 G″ 记为定义为（G′)′的 pro-p 子群。注意，$G'\subseteq N$，因此 $G''\subseteq N'$，且 N 有限生成当且仅当 N/N' 有限生成。这意味着 N 有限生成当且仅当 N/G''有限生成。令

$$A=G'/G'', A_1=G_1'/G_1'', Q=G/G' \text{ and } Q_1=G_1/G_1'.$$

我们将 Q_1 视为 Q 的一个 pro-p 子群。我们把 A 视为右 pro-p 整数环 $Z_p[[Q]]$-模，其中 Q 的作用由共轭作用给出；同样地，A_1 是一个右 pro-p 整数环 $Z_p[[Q_1]]$-模，其中 Q_1的作用由共轭作用给出。根据引理 5.2，N/G'' 是有限生成的，当且仅当 A 作为 pro-p 整数环 $Z_p[[\pi(N)]]$-模是有限生成的，其中 $\pi: G\to Q=G/G'$ 是典范投影。由于 N_1 是有限生成的，根据引理 5.2，A_1 作为 pro-p 整数环 $Z_p[[\pi(N_1)]]$-模是有限生成的。

令 V 为 A 的 pro-p $Z_p[[Q]]$-子模，由 A_1的像生成。实际上，A_1 嵌入到 A 中，但我们不会使用这一点。于是，V 是 pro-p $Z_p[[Q]]$-模$W=A_1\widehat{\otimes}_{Z_p[[Q_1]]}Z_p[[Q]]$的一个商，其中 $\widehat{\otimes}_{Z_p[[Q_1]]}$ 表示 $Z_p[[Q_1]]$-模范畴中的完备张量积。

我们首先假设 $\pi(N)$ 不包含在Q_1 中，即 $[Q:Q_1\pi(N)]<\infty$，因此 $[Q/\pi(N):Q_1/\pi(N_1)]$ <8。于是我们有#+#+#+#+#+

$$W\widehat{\otimes}_{Z_i[[\pi(\mathbb{N})]]}\mathbb{Z}_p=A_1\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[Q_1]]}\mathbb{Z}_p[[Q]]\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_i[[\pi(\mathbb{N})]]}\mathbb{Z}_p\simeq A_1\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[Q_1]]}\mathbb{Z}_p[[Q/\pi(N)]]$$

$$\simeq (A_1\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\pi(N_1)]]}\mathbb{Z}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[Q_1/\pi(N_1)]]}\mathbb{Z}_p[[Q/\pi(N)]]=:M$$

由于A_1 作为 pro-p 整数环 $Z_p[[\pi(N_1)]]$-模是有限生成的，我们有$A_1\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\pi(N_1)]]}\mathbb{Z}^p$ 作为 pro-p 整数环 Z^p-模是有限生成的。结合 $[Q/\pi(N):Q_1/\pi(N_1)]<\infty$ 可知，M 作为 pro-p 整数环 Z^p-模是有限生成的。因此W 作为 pro-p整数环 $Z_p[[\pi(N)]]$-模是有限生成的，因此

(10) $$V \text{ is finitely generated as a pro-}p\ \mathbb{Z}_p[[\pi(N)]]\text{-module.}$$

我们的目标是证明，A 是有限生成的 pro-p 整数环 $Z_p[[\pi(N)]]$-模。根据 (10)，这等价于$A_0=A/V$ 是有限生成的 pro-p 整数环 $Z_p[[\pi(N)]]$-模。

考虑

$$G_0=G_1^{ab}\coprod_{B^{ab}}(B^{ab}\times\overline{\langle v\rangle}).$$

那么 $G_0'/G_0''\simeq A_0$，因此问题归结为证明原命题对 pro-p右角阿尔特群 G_0成立。于是，从现在起我们可以假设 G_1 是阿贝尔群，因此 $G_1=C\times B$，并且

$$G=(C\times B)\coprod_B(B\times\overline{\langle v\rangle})=B\times(C\coprod\overline{\langle v\rangle}),$$

其中 $Z_p\simeq\overline{\langle v\rangle}$。设

$$\rho: G\to G/B\simeq C\coprod\overline{\langle v\rangle}$$

为典范投影。于是存在一个 pro-p 群的短正合列

$$1\to B\cap N\to N\to\rho(N)\to 1.$$

注意，$B\cap N$ 是p 进群 $B\simeq$整数环 Z_p^m的一个 pro-子群，其中某个m满足条件，因此$B\cap N$ 是有限生成的。我们断言，$\rho(N)$ 在$C\coprod\overline{\langle v\rangle}$中具有有限指数，因此是有限生成的。事实上，由于$G/N$ 是阿贝尔群，$C\coprod\overline{\langle v\rangle}/\rho(N)$也是阿贝尔群。如果 $[C\coprod\overline{\langle v\rangle}:\rho(N)]=\infty$，那么存在一个$p$ 进子群N_0，它是G

使得$N \subseteq N_0, G/N_0 \simeq$整数环 $\mathbf{Z}^p$，且$C \coprod \overline{\langle v \rangle}/\rho(N_0) \simeq$整数环 $\mathbf{Z}^p$。因此 $\rho(N_0)$ 不是有限生成的，这与 N_0 根据假设为有限生成群这一事实矛盾。

剩下的情形是 $\pi(\mathbf{N})$ 包含在任意可能的 $\mathbf{Q}_1$ 中，即 $\mathbf{N} = \mathbf{G}'$。由定理 5.1 $\Gamma(\chi)$ 对每个满同态 $\chi : \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^p$，在 Γ 中都是连通且占优的。我们断言，这意味着 Γ 是 $\mathbf{V}(\Gamma)$ 上的完全图，因此 $\mathbf{G}$ 是自由阿贝尔 pro-p 群。事实上，若Γ 不是完全图，则存在分解 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \mathbf{star}(\mathbf{v})$，其中 $\mathbf{star}(\mathbf{v}) \cap \Gamma_1 = \mathbf{lk}(\mathbf{v})$ 且Γ_1，$\mathbf{lk}(\mathbf{v})$。接着考虑一个满同态 $\chi : \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^p$，其中 $\chi(\Gamma_1 \backslash \mathbf{lk}(\mathbf{v}))$，$\mathbf{0}$，且 $\chi(\mathbf{star}(\mathbf{v})) = 0$。那么 $\Gamma(\chi)$ 在 Γ中不是占优的，矛盾。□

6. 根据同调类型对 pro-p RAAG 群的阿贝尔化 pro-p 子群进行分类：一种 pro-p 方法

设 $G = G_\Gamma$ 是与有限单纯图 Γ 相关联的 pro-p 右角阿尔特群。考虑有限生成自由 $\mathbf{F}_p[[G]]$-模构成的复形，

$$\mathcal{F}_\Gamma : \ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{F}_p \to 0,$$

其中

$$P_n = \oplus_{\Sigma \subset V(\Gamma)} \text{clique}_{,|\Sigma|=n} c_\Sigma \mathbb{F}_p[[G]],$$

直和取遍所有团 Σ，包括空集；而 $c_\Sigma \mathbf{F}_p[[G]]$ 是自由循环 $\mathbf{F}_p[[G]]$-模。回忆一下，团是 Σ 的一个子集，其中任意两个元素都由 Σ 中的一条边相连。对于团 $\{v_1, \ldots, v_n\}$，我们用记号 $(v_1, \ldots, v_n)$ 表示 $v_1 < \ldots < v_n$。对于 $\Sigma = (v_1, \ldots, v_n)$，微分定义如下：

$$\partial_n(c_\Sigma) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i-1} c_{\Sigma \backslash \{v_i\}}(v_i - 1)$$

且 $\partial_0(c_\varnothing) = 1$。

引理 6.1. $\mathcal{F}_\Gamma$ 是一个正合复形。

证明。 我们对顶点集 $V(\Gamma)$ 的基数进行归纳。

固定一个顶点 $v \in V(\Gamma)$，并定义$B = G^{lk(v)}$。令 Γ_1 为由顶点$V(\Gamma) \backslash \{v\}$、 $\Gamma_2 = star(v)$ 张成的 Γ 的子图。设 $G_1 = G^{\Gamma_1}$，且 $G_2 = G^{\Gamma_2}$。分解 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，其中$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = lk(v)$ 给出自由 amalgamated pro-p 积的分解

$$G = G_1 \amalg_B G_2.$$

这是 (7) 的一个特殊情形，其中我们将 G_Γ 视为由 pro-p 群构成的图积，且每个$G(w) = \langle w \rangle \simeq$ 都是整数环 $\overline{\mathbf{Z}^p}$，其中 $w \in V(\Gamma)$。由归纳法可知，复形 $\mathbf{F}^{\Gamma_0}$、$\mathbf{F}^{\Gamma_1}$ 和 $\mathbf{F}^{\Gamma_2}$ 是正合的。

我们断言存在一个复形的短正合列

$$0 \to \mathcal{F}_{\Gamma_0} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[B]]} \mathbb{F}_p[[G]] \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_{\Gamma_1} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G_1]]} \mathbb{F}_p[[G]] \oplus \mathcal{F}_{\Gamma_2} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G_2]]} \mathbb{F}_p[[G]] \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_\Gamma \to 0 \tag{11}$$

在维数 -1 时，该序列是 pro-p 树 T_v，即 $\mathbf{F}_p[[G]]$-模的正合列

$$0 \to \mathbb{F}_p \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[B]]} \mathbb{F}_p[[G]] \to \mathbb{F}_p \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G_1]]} \mathbb{F}_p[[G]] \oplus \mathbb{F}_p \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G_2]]} \mathbb{F}_p[[G]] \to \mathbb{F}_p \to 0,$$

其中 $\alpha(c_\Sigma \widehat{\otimes} \lambda) = (c_\Sigma \widehat{\otimes} \lambda, \ -c_\Sigma \widehat{\otimes} \lambda)$ 以及 $\beta(c_{\Sigma_1} \widehat{\otimes} \lambda_1, \ c_{\Sigma_2} \widehat{\otimes} \lambda_2) = c_{\Sigma_1} \lambda_1 + c_{\Sigma_2} \lambda_2$。事实上，(11) 等价于短正合列

$$0 \to \oplus_{\Sigma \subseteq V(\Gamma_0)} \text{clique}_{,|\Sigma|=n} c_\Sigma \mathbb{F}_p[[G]] \xrightarrow{\alpha_n} (\oplus_{\Sigma \subseteq V(\Gamma_1)} \text{clique}_{,|\Sigma|=n} c_\Sigma \mathbb{F}_p[[G]]) \oplus (\oplus_{\Sigma \subseteq V(\Gamma_2)} \text{clique}_{,|\Sigma|=n} c_\Sigma \mathbb{F}_p[[G]])$$

(12) $$\xrightarrow{\beta_n} \oplus_{\Sigma\subseteq V(\Gamma)\ \text{clique},|\Sigma|=n} c_\Sigma \mathbb{F}_p[[G]] \to 0,$$

其中 $\alpha_n(c_\Sigma\lambda) = (c_\Sigma\lambda, -c_\Sigma\lambda)$ 且 $\beta_n(c_{\Sigma_1}\lambda_1, c_{\Sigma_2}\lambda_2) = c_{\Sigma_1}\lambda_1 + c_{\Sigma_2}\lambda_2$ 对于 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_p[[G]]$。注意，(12) 可由以下事实推出：若 Σ 是 $V(\Gamma)$ 中的一个团，则要么 Σ 是 $V(\Gamma_1)$ 中的一个团，要么 Σ 是 $V(\Gamma_2)$ 中的一个团，并且 $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$。

由于 F^{Γ_0}、F^{Γ_1} 和 F^{Γ_2} 是正合复形，我们推得 $F^{\Gamma_0}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[B]]}\mathbb{F}_p[[G]]$、$F^{\Gamma_1}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G_1]]}\mathbb{F}_p[[G]]$ 以及 $F^{\Gamma_2}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G_2]]}\mathbb{F}_p[[G]]$ 都是正合复形。考虑与复形短正合列相关联的同调长正合列

$$\ldots \to 0 = H_n(\mathcal{F}_{\Gamma_1}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G_1]]}\mathbb{F}_p[[G]] \oplus \mathcal{F}_{\Gamma_2}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[G_2]]}\mathbb{F}_p[[G]]) \to$$

$$H_n(\mathcal{F}_\Gamma) \to H_{n-1}(\mathcal{F}_{\Gamma_0}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[B]]}\mathbb{F}_p[[G]]) = 0 \to \ldots$$

于是，对于任意$H_n(F_\Gamma) = 0$，都有n，由此我们得出 F_Γ 是正合复形，证毕。 □

回忆一下，与图 Γ 相关联的旗复形 $\Delta(\Gamma)$ 是由 Γ 通过粘合单形 $(v_1,、\ldots、v_n)$ 得到的，其中每个非空团 $\{v_1,、\ldots、v_n\}$ 都属于 Γ，其中$v_1 < v_2 < \ldots < v_n$。

设 $\Delta(\Gamma(\chi))$ 是图 $\Gamma(\chi)$ 的旗复形，$\Delta(\Gamma)$ 是图 Γ 的旗复形。设S 是 Γ 中的一个团。链接$lk_{\Delta(\Gamma)}(S)$ 是由与团v 对应的单形构成的复形，其中$v \cup S$ 在 Γ 中是一个团；这里允许S 为空集。对于团$S \subset \Gamma\backslash\Gamma(\chi)$，我们定义$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S) = lk_{\Delta(\Gamma)}(S) \cap \Delta(\Gamma(\chi))$。

我们给出以下定理的一个证明，该证明无需使用离散群。之后，我们将在定理 7.2 中证明一个推广版本，其中将去掉条件 $V(\Gamma) \subseteq Ker(\chi) \cup \chi^{-1}$(整数环 $\mathbb{Z}_p\backslash p\mathbb{Z}_p$)，但需要使用相关的非平凡离散群结果。

定理 6.2。设 Γ 为有限单纯图，$G = G_\Gamma$ 为对应的 *pro-p RAAG*。设$\chi : G \to$ 整数环 $\mathbb{Z}^p$ 为 *pro-p* 群之间的满同态，使得 $V(\Gamma) \subseteq Ker(\chi) \cup \chi^{-1}$(整数环 $\mathbb{Z}_p\backslash p$整数环 $\mathbb{Z}_p$)。那么，$N = Ker(\chi)$ 为 FP_n 型，当且仅当对于$\Gamma\backslash\Gamma(\chi)$ 中满足 $n-1-|S| \geqslant 0$的每个团 S，$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S)$ 在$\mathbb{F}^p$ 上是 $(n-1-|S|)$-无圈的。对于 $S = \varnothing$，这意味着旗复形 $\Delta(\Gamma(\chi))$ 在$\mathbb{F}^p$上是 $(n-1)$-无圈的。

证明。令 $\chi_0 :$ G $\to \mathbb{Z}^p$ 为由 χ_0(v) = 1 if χ(v) , 0 andχ_0(v) = 0 if χ(v) = 0 for v $\in$ V(Γ)给出的 pro-p 群同态。于是存在一个自同构 $\varphi :$ G $\to$ G，使得 $\chi = \chi_0 \circ \varphi$and φ(Ker(χ)) = Ker(χ_0)。这是可行的，因为我们可以令 φ(v) = v$^{\chi(v)}$ if χ(v) , 0 and φ(v) = v ifχ(v) = 0。注意，这里用到了条件 V (Γ) $\subseteq$ Ker(χ) $\cup\ \chi^{-1}$($\mathbb{Z}_p\backslash$p$\mathbb{Z}_p$)，因为要使 φ 成为自同构，我们需要 χ(v) $\in \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p\backslash$p$\mathbb{Z}^p$ for χ(v) , 0。

那么$Ker(\chi)$ 和$Ker(\chi_0)$ 具有相同的同调类型FP_n。注意，$\Gamma(\chi) = \Gamma(\chi_0)$，因此$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S) = lk_{\Delta(\Gamma(\chi_0))}(S)$ 对团$S \in \Gamma\backslash\Gamma(\chi)$成立。因此，从现在起我们可以假设 $\chi = \chi_0$。

回顾一下，对于团 $\{v_1, \ldots, v_n\}$，我们用记号 $(v_1, \ldots, v_n)$ 表示 $v_1 < \ldots < v_n$。考虑复形 $\widetilde{\ }F_\Gamma = F^\Gamma\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[N]]}\mathbb{F}^p$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma : \ldots \to Q_n = \oplus_{\Sigma\subseteq V(\Gamma)\ \text{clique},|\Sigma|=n} c_\Sigma \mathbb{F}_p[[G/N]] \to \ldots$$

其微分对 $\Sigma = (v_1, \ldots, v_n)$ 定义如下：

$$\widetilde{\partial}_n(c_\Sigma) = \sum_{\chi(v_i)\neq 0} (-1)^{i-1} c_{\Sigma\backslash\{v_i\}}(v_i N - 1) = \sum_{\chi(v_i)\neq 0} (-1)^{i-1} c_{\Sigma\backslash\{v_i\}}(g-1),$$

其中，对任意$v_i N = v^j N$，$v_i, v^j \in V(\Gamma)\backslash Ker(\chi)$；这里，1 是$G/N \simeq$ 整数环 $\mathbb{Z}^p$的一个固定生成元。

考虑复形

$$C:\ldots\to C_n=\oplus_{\Sigma\subseteq V(\Gamma),\ \text{clique},|\Sigma|=n}c_\Sigma\mathbb{F}_p\to\ldots\to C_0\to\mathbb{F}_p\to 0$$

带微分

$$d_n(c_\Sigma)=\sum_{\chi(v_i)\neq 0}(-1)^{i-1}c_{\Sigma\setminus\{v_i\}},d_n(c_\varnothing)=1$$

其中 $\Sigma=(v_1,\ldots,v_n)$. 我们将 $\widetilde{\mathbf{F}}_\Gamma$ 视为 $\mathbf{C}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\mathbf{F}_p[[G/N]]$。于是，对于$n\geqslant 1$，有 $\tilde{\partial}_n(c_\Sigma)=d_n(c_\Sigma)\widehat{\otimes}(g-1)$。

定义 $A_n=Ker(d_n)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\mathbf{F}_p[[G/N]]$，$B_n=Im(d_{n+1})\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\mathbf{F}_p[[G/N]]$，以及 $D_n=Im(d_{n+1})\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(g-1)\mathbf{F}_p[[G/N]]$。于是我们得到一个短正合列

$$0\to B_n/D_n\to A_n/D_n\to A_n/B_n\to 0$$

注意到$Im(d_{n+1})$ 是一个有限 $\mathbf{F}p$-模，因此

$$B_n/D_n\simeq Im(d_{n+1})\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p[[G/N]]/(g-1)\mathbb{F}_p[[G/N]])\simeq Im(d_{n+1})\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_p\simeq Im(d_{n+1})$$

是有限的。此外

$$H_n(N,\mathbb{F}_p)\simeq H_n(\widetilde{\mathcal{F}_\Gamma})\simeq A_n/D_n.$$

由于 $N=Ker(\chi)$ 是 FP 型，当且仅当对所有$i\leqslant n$，$H_i(N,\mathbf{F}_p)$ 有限，因此我们得出，N 是 FP 型，当且仅当对所有$i\leqslant n$，A_i/B_i 有限。

根据A_n 和B_n 的定义，我们有

$$A_n/B_n\simeq H_n(C)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_p[[G/N]],$$

因此，对于所有$i\leqslant n$，A_i/B_i 有限，当且仅当对于所有 $1\leqslant i\leqslant n$，$H_i(\mathbf{C})=0$。

对于团$S=\{v_{k+1},\ldots,v_n\}\in\Gamma\setminus\Gamma(\chi)$（即 $\chi(v_i)=0$ 对所有$k+1\leqslant i\leqslant n$均成立），记 $\mathbf{C}^S$ 为由所有满足以下条件的 c_Σ 张成的 $\mathbf{C}$ 的子复形：$\Sigma=\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\}$ 构成一个团，且 $\chi(v_i),0$ 对 $1\leqslant i\leqslant k$成立。于是

$$H_n(C)\simeq\oplus_{S\subseteq\Gamma\setminus\Gamma(\chi)}\ \text{clique},|S|\leqslant n-1 H_n(C^S).$$

注意，$\mathbf{C}^S$ 由$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S)$ 的链复形（系数取自 $\mathbf{F}p$ ）通过将维数平移 $|S|+1$得到。于是

$$H_n(C^S)\simeq H_{n-1-|S|}(lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S),\mathbb{F}_p).$$

□

例。设Γ 是长度为$n\geqslant 4$的回路，G_Γ 是与 Γ 和 χ 相关联的 pro-p RAAG：$G_\Gamma\to\mathbf{Z}p$，其中对每个$v\in V(\Gamma)$，$\chi(v),0$。于是 $\Delta(\Gamma(\chi))=\Gamma(\chi)=\Gamma$ 对 $\mathbf{F}p$上的 0-无圈，但不是 1-无圈。因此$Ker(\chi)$ 是有限生成的，但不是有限表示的（作为 pro-p 群）。

7. 根据同调类型FP_n 对 pro-p RAAG 群的余阿贝尔 pro-p 子群进行分类：一种通过抽象群的研究方法

引理 7.1. 设 $Q^{dis}=$整数环 $\mathbf{Z}^k$, $Q=$整数环 $\mathbf{Z}_p^k$，且 V 是一个有限的 $\mathbb{F}_p[Q^{dis}]$-模。则 $M=V\otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]}\mathbb{F}_p[[Q]]$ 是有限的。

证明。 由于V 有一个由 $\mathrm{F}_p[Q^{dis}]$-子模构成的滤过，其商是循环 $\mathrm{F}_p[Q^{dis}]$-模，因此可假设V 是循环 $\mathrm{F}_p[Q^{dis}]$-模，即$V \ = \mathrm{F}_p[Q^{dis}]/I$ ，其中I 是 $\mathrm{F}_p[Q^{dis}]$的某个理想。

注意，$\mathrm{F}_p[[\mathrm{Q}]] = \mathrm{F}_p[[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k]]$ 以及 $\mathrm{F}_p[\mathrm{Q}^{dis}] = \mathrm{F}_p[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k,1/(\mathrm{t}_1+1),\ldots,1/(\mathrm{t}_k+1)]$。由于 V 是有限的，存在 $0, \mathrm{f}_i \in \mathrm{I} \cap \mathrm{F}_p[\mathrm{t}_i], \mathrm{t}_i+1$ ，使得对于 $1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant \mathrm{k}$， t_i+1 不整除 f_i。那么 M 是 $\mathrm{M}_1 = \mathrm{F}_p[[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k]]/(\sum_{1\leqslant \mathrm{i}\leqslant \mathrm{k}} \mathrm{f}_i \mathrm{F}_p[[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k]])$ 的一个商。
最后，由于 $\mathrm{F}_p[[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k]]$ 是 $\mathrm{F}_p[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k]/(\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k)^m$ 的逆极限，我们得出 M_1 是 $\mathrm{F}_p[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k]/((\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k)^m, \mathrm{f}_1,\ldots,\mathrm{f}_k)$ 的逆极限。但 $\dim^{\mathbb{F}_p}\mathrm{F}_p[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k]/((\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k)^m, \mathrm{f}_1,\ldots,\mathrm{f}_k) \leqslant \mathrm{s} := \dim^{\mathbb{F}_p}\mathrm{F}_p[\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k]/(\mathrm{f}_1,\ldots,\mathrm{f}_k)$，且 s 不依赖于 m。因此 $\dim^{\mathbb{F}_p}\mathrm{M}_1 \leqslant \mathrm{s}$。□

定理 7.2。 设 Γ 是一个有限单纯图，$G \ = G_\Gamma$ 是相应的 *pro-p RAAG*。设χ： $G \ \to$ 整数环 Z^p 是 *pro-p* 群的满同态，且 $N \ =$ 核(χ)。则 N 是 FP_n 型，当且仅当对于每个满足 $n-1-|S| \geqslant 0$的团 S，$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S)$ 是关于 $\mathbb{F}^p$ 的 $(n-1-|S|)$- 无圈的。对于 $S = \varnothing$，这意味着旗复形 $\Delta(\Gamma(\chi))$ 是关于 $\mathbb{F}^p$ 的 $(n-1)$- 无圈的。

证明。考虑自同构 φ： G $\to$ G，其定义为 $\varphi(\mathrm{v}_i) = \mathrm{v}^{k_i}\mathrm{i}$（若 $\chi(\mathrm{v}_i)$），0，（若 $\chi(\mathrm{v}_i) = \mathrm{k}_i\mathrm{p}^j$，$\mathrm{k}_i \in$整数环 $\mathrm{Z}_p\backslash\mathrm{pZ}^p$，$\mathrm{j} \geqslant 0$且 $\varphi(\mathrm{v}_i) = \mathrm{v}_i$若 $\chi(\mathrm{v}_i) = 0$）。因此 $\chi = \chi_0 \circ \varphi$，其中 $\chi_0(\mathrm{V}(\Gamma)) \subseteq \{0、1、\mathrm{p}、\mathrm{p}^2,\ldots\ldots、\mathrm{p}^m、\ldots\ldots\}$，并且 φ(核(χ)) = 核(χ_0)。所以 $\mathrm{Ker}(\chi)$ 和 $\mathrm{Ker}(\chi_0)$ 具有相同的 FP_n同调类型。注意到$\Gamma(\chi) = \Gamma(\chi_0)$，因此对于一个团 S，有 $\mathrm{lk}_{\Delta(\Gamma(\chi))}(\mathrm{S}) = \mathrm{lk}_{\Delta(\Gamma(\chi_0))}(\mathrm{S})$。于是从现在起可以假设 $\chi = \chi_0$，从而 $\chi(\mathrm{V}(\Gamma)) = \chi_0(\mathrm{V}(\Gamma)) \subseteq$ 整数环 Z。

设 G^{dis} 是与图 Γ 关联的离散右角阿廷群。设 χ^{dis}： $G^{dis} \to \to \mathrm{Z}$ 是满同态，其在 $V(\Gamma)$ 上的限制与 χ 一致。
1) 假设对于 $\Gamma\backslash\Gamma(\chi)$ 中的每个团 S，$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S)$ 都是 F^p 上的 $(n-1-|S|)$-无圈的。
根据 [2, 定理 9]，当且仅当$N^{dis} = =Ker(\chi^{dis})$ 是 Z 上的 FP_n 型时，对于 $\Gamma\backslash\Gamma(\chi)$ 中的每个团 S，$lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S)$ 都是 Z 上的 $(n-1-|S|)$-无圈的。将 Z 换成 F^p，结论同样成立。因此，N^{dis} 是 F^p 上的 FP_n 型，所以对所有 $i \leqslant n$，$H_i(N^{dis}, \mathrm{F}_p)$ 都是有限的。
考虑有限生成 $\mathrm{F}_p[G^{dis}]$-模的复形

$$\mathcal{F}_\Gamma^{dis} : \ldots \to P_n^{dis} \to P_{n-1}^{dis} \to \ldots \to P_0^{dis} \to \mathbb{F}_p \to 0$$

其中

$$P_n^{dis} = \oplus_{\Sigma\subset V(\Gamma)\ \mathrm{clique}\ ,|\Sigma|=n} c_\Sigma \mathbb{F}_p[G^{dis}],$$

直和取遍所有团 Σ，包括空集，且 $c_\Sigma\mathrm{F}_p[G^{dis}]$ 是自由循环 $\mathrm{F}_p[G^{dis}]$-模。对于 $\Sigma = (v_1,\ldots,v_n)$ 微分定义为

$$\partial_n(c_\Sigma) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (-1)^{i-1} c_{\Sigma\backslash\{v_i\}}(v_i - 1).$$

注意，F_Γ^{dis} 是 F^p 作为 $\mathrm{F}_p[G^{dis}]$-模的一个自由分解。
考虑复形 $\widetilde{\ }\mathrm{F}_\Gamma^{dis} = \mathrm{F}_{\ dis\,\Gamma} \ \otimes_{\mathbb{F}_p[N^{dis}]} \mathrm{F}^p$。于是

$$H_i(N^{dis}, \mathbb{F}_p) \simeq H_i(\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma^{dis}) \text{ is finite for } i \leqslant n.$$

令 $Q \ = G/N \simeq$ 整数环 Z^p 且 $Q^{dis} = G^{dis}/N^{dis} \simeq$ 整数环 Z。注意，

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma \simeq \widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma^{dis} \otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]} \mathbb{F}_p[[Q]]$$

由于 $-\otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]}\mathrm{F}_p[[Q]]$ 是正合函子，由引理 7.1

$$H_i(N,\mathbb{F}_p)\simeq H_i(\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma)\simeq H_i(\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma^{dis}\otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]}\mathbb{F}_p[[Q]])\simeq H_i(\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma^{dis})\otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]}\mathbb{F}_p[[Q]] \text{ is finite for } i\leqslant n,$$

因为对于 $H_i(\widetilde{\mathrm{F}}_{dis_\Gamma})$，$i\leqslant n$ 是有限的。因此 N 是一个 p 型 pro-群，类型为 FP_n。

2）现在假设N 是一个具有FP_n型的 pro-p 群。那么，与上述情况一样。

$$H_i(N^{dis},\mathbb{F}_p)\otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]}\mathbb{F}_p[[Q]]\simeq H_i(\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma^{dis})\otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]}\mathbb{F}_p[[Q]]\simeq H_i(N,\mathbb{F}_p) \text{ is finite for } i\leqslant n.$$

注意，由于 G^{dis} 是 FP_n 型的，我们知道 $\mathrm{H}_i(\mathrm{N}^{dis},\mathrm{F}_p)$ 是有限生成的 R-模，其中 $\mathrm{R}:=\mathrm{F}_p[\mathrm{Q}^{dis}]$ 是一个主理想整环。因此，$\mathrm{H}_i(\mathrm{N}^{dis},\mathrm{F}_p)$ 是循环 R-模的直和（参见 [4, 定理 16.1.6]）。我们断言 $\mathrm{H}_i(\mathrm{N}^{dis},\mathrm{F}_p)$ 是有限的。否则，R 将是 $\mathrm{H}_i(\mathrm{N}^{dis},\mathrm{F}_p)$ 的一个直和项，因此 $\mathrm{F}_p[[\mathrm{Q}]]$ 将是有限阿贝尔群 $\mathrm{H}_i(\widetilde{\mathrm{F}}\,\mathrm{dis}_\Gamma)\otimes_{\mathbb{F}_p[\mathrm{Q}^{dis}]}\mathrm{F}_p[[\mathrm{Q}]]$ 的一个直和项，这就产生了矛盾。

由于对于每个 i，$H_i(N^{dis},\mathrm{F}_p)$ 都是有限的，因此根据 [13, 推论 5.2] $lk_{\Delta(\Gamma(\chi))}(S)$ 对每个团 S 都是 $(n-1-|S|)$-无圈的，其中 S 来自 $\Gamma\backslash\Gamma(\chi)$，这正是所需的结论。□

设N 是右角 pro-p 群p 群$G=G_\Gamma$ 的正规 pro-p 子群，并且G/N 是阿贝尔群。回忆一下，G 是G^{dis} 的 pro-p 完备化；如果存在N^{dis} G^{dis} 的子群，使得G^{dis}/N^{dis} 是阿贝尔群，且N^{dis} 在G中的闭包为N，我们就称N 离散嵌入于G。如果存在G 的一个自同构 φ，使得 $\varphi(N)$ 离散嵌入于G，则称N弱离散嵌入于G。

我们注意到，自同构群$Aut(G)$ 远大于自同构群$Aut(G^{dis})$。例如，对于某个$z_v\in$整数环 $\mathrm{Z}_p\backslash p$整数环 $\mathrm{Z}p$，每个由 $\varphi(v)=v^{z_v}$（其中$v\in V(\Gamma)$）给出的 pro-p 群同态 $\varphi:G\to G$ 都是自同构。 [11]中描述了$Aut(G^{dis})$ 的一组生成元。

定理 7.3. 设 Γ 是一个有限单纯图，$G=G_\Gamma$ 是相应的 *pro-p RAAG*。设 N 是 G 的一个正规 *pro-p* 子群，使得 G/N 是无限阿贝尔群，并进一步假设 N 在 G 中弱离散嵌入。那么，N 是 FP_n 型，当且仅当对于每个包含 N 且满足 $G/N_0\simeq$整数环 $\mathrm{Z}p$的 N_0，$N_0\subseteq$ 都是 FP_n 型。

证明。 假设对于每个满足 $N\subseteq N_0\subseteq G$ 且 $G/N_0\simeq\mathrm{Z}p$ 的群，我们都有 N_0 是 FP_n型。我们要证明 N 是 FP_n 型的 pro-p 群。若 $\varphi\in Aut(G)$，则有 $\varphi(N)\simeq N$ 具有相同的同调类型 FP_n，因此可以假设 N 在 G 中离散嵌入。

1) 设 $\mathrm{N}^{dis}\leqslant\mathrm{N}_0^{dis}\leqslant\mathrm{G}^{dis}$ 是离散群，满足 $\mathrm{G}^{dis}/\mathrm{N}_0^{dis}\simeq\mathrm{Z}$、$\mathrm{G}^{dis}/\mathrm{N}^{dis}$ 是阿贝尔群，且 N 是 N^{dis} 在 G 中的闭包。设 N_0 是 N_0^{dis} 在 G 中的闭包，因此 $\mathrm{G}/\mathrm{N}_0\simeq\mathrm{Z}p$。假设所有这样的 N_0都是 FP_n型 pro-p 群。根据定理 7.2，对于每个来自 $\Gamma\backslash\Gamma(\chi)$的团 S，$\mathrm{lk}_{\Delta(\Gamma(\chi))}(\mathrm{S})$ 在 $\mathrm{F}p$ 上是 $(\mathrm{n}-1-|\mathrm{S}|)$-无圈的，其中 $\chi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}/\mathrm{N}_0=\mathrm{Z}p$ 是典范满同态。

设 $\chi_0:\mathrm{G}^{dis}\to\mathrm{G}^{dis}/\mathrm{N}_0^{dis}=\mathrm{Z}$ 为典范满同态。注意到 $\Gamma(\chi)=\Gamma(\chi_0)$。根据 [2, Thm.9] $\mathrm{lk}_{\Delta(\Gamma(\chi_0))}(\mathrm{S})$ 对于来自 $\Gamma\backslash\Gamma(\chi_0)$ 的每个团 S 都是 Z 上的 $(\mathrm{n}-1-|\mathrm{S}|)$-无圈的，当且仅当 N_0^{dis} 是 Z 上 FP_n 型的。同样的证明表明，对于来自 $\Gamma\backslash\Gamma(\chi_0)$ 的每个团 S，$\mathrm{lk}_{\Delta(\Gamma(\chi_0))}(\mathrm{S})$ 都是 $\mathrm{F}p$ 上的 $(\mathrm{n}-1-|\mathrm{S}|)$-无圈的，当且仅当 N_0^{dis} 是 $\mathrm{F}p$ 上 FP_n 型的。因此，N_0^{dis} 是 $\mathrm{F}p$ 上 FP_n 型的。

在 [8, 定理 3.5] 中已经证明，若每个满足 $G^{dis}/N_0^{dis}\simeq$ 整数环 Z 为FP_n型的N_0^{dis} 都是N^{dis} 为FP_n型。关于这一性质在 $\mathrm{F}p$ 上的版本是：若每个满足 $G^{dis}/N_0^{dis}\simeq$ 整数环 Z 为FP_n 型的N_0^{dis} 在

$\mathbb{F}_p$上，则N^{dis} 在 $\mathbb{F}_p$ 上为 FP_n 型，且证明与 [8] 中的相同，只需将基本环 $\mathbb{Z}$ 显然地改为 $\mathbb{F}_p$即可。因此，对于所有$i \leqslant n</style}$，$H_i(N^{dis}$、$\mathbb{F}_p)$ 都是有限的。

设$Q = G/N$。将N 替换为G 中一个与之可公度且包含换位 pro-p 子群的 pro-p 子群后，我们可以假设 $Q \simeq \mathbb{Z}_p^k$。注意，$- \otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]} \mathbb{F}_p[[Q]]$ 是一个正合函子，因此使用定理 7.2 证明中的记号，我们有

$$H_i(N, \mathbb{F}_p) \simeq H_i(\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma) \simeq H_i(\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma^{dis} \otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]} \mathbb{F}_p[[Q]]) \simeq H_i(\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma^{dis}) \otimes_{\mathbb{F}_p[Q^{dis}]} \mathbb{F}_p[[Q]].$$

回想一下，$H_i(\widetilde{\mathbb{F}}^{dis}_\Gamma) \simeq H_i(N^{dis}$，当 $_p)\mathrm{i} \leqslant n$ 时有限。于是由引理 7.1，$H_i(N$，当 $_p)\mathrm{i} \leqslant n$ 时有限，因此N 是一个类型为FP_n的 pro-p 群。

2）反过来（即，若N 是类型为FP_n 的群，则定理 7.3 中所述的每个N_0 都是FP_n），这是显然的，因为 N_0/N 是有限生成阿贝尔 pro-p 群，因此是类型为FP_∞, 的群，特别地是FP_n。

□

参考文献

[1] K. S. Brown，《群上同调》，Springer[2] K-U. Bux, C. Gonzalez，重新审视 Bestvina-Brady 构造：直角 Artin 群中 Σ-不变量的几何计算。J. London Math. Soc. (2) 60 (1999)，第 3 期，793 - 801[3] M. Casals-Ruiz, J. Lopez de Gamiz Zearra，关于直角 Artin 群和群的图积中的有限生成正规子群，arXiv:2206.12182[4] Charles W. Curtis 和 Irving Reiner，《有限群与结合代数表示论》。AMS Chelsea Publishing，出版年份：1962；卷 356[5] Z. M. Chatzidakis，关于有限生成 HNN 扩张的一些备注，Israel J. of Math. 85 (1994)，11-18[6] W. Herfort, P. A. Zalesskii 和 Th. Zapata，作用于 pro-p 树的 pro-p 群的分裂定理。Selecta Math. (N.S.)**22** (2016) 1245 – 1268[7] J. D. King，pro-p 群的同调有限性条件。Comm. Algebra 27 (1999)，第 10 期，4969 - 4991[8] D. H. Kochloukova, C. Mart´ınez-P´erez，N-分次李代数中的余阿贝尔理想及其在直角 Artin 李代数中的应用。Israel J. Math. 247 (2022)，第 2 期，797–829[9] D. H. Kochloukova, P. A. Zalesskii，通过中心化子扩张研究极限群的 pro-p 类比。Math. Z. 267 (2011)，第 1-2 期，109 - 128[10] R. Kropholler, G. Wilkes，RAAG 群与特殊群的有限群性质。Bull. Lond. Math. Soc. 48 (2016)，第 6 期，1001–1007[11] M. R. Laurence，图群自同构群的一个生成集，J. London Math. Soc. (2) 52 (1995)，第 2 期，318 - 334[12] K. Lorensen，与其 pro-p 完备化具有相同上同调的群。J. Pure Appl. Algebra 214 (2010)，第 1 期，6–14[13] S. Papadima, A. Suciu，托里克复形与 Artin 核，Advances in Mathematics 220 (2009)，441–477[14] L. Ribes, P. Zalesskii，pro-p 树及其应用。《pro-p 群新视野》，75–119, Progr. Math., 184, Birkh¨auser Boston, Boston, MA, 2000.[15] L. Ribes, P. Zalesskii，《仿射有限群》，Springer-Verlag，Berlin，2000[16] L. Ribes，有限图与群，A Series of Modern Surveys in Mathematics 66, Springer-Verlag，2017[17] L. Ribes，关于仿射有限群的 amalgamated 积，Math. Z. 123 (1971)，357 - 364[18] I. Schur，关于有限群通过分式线性代换的表示，Journal f´’ur die reine und angewandte Mathematik，127 (1904), 20 - 50[19] J-P. Serre，《树》。Springer-Verlag，Berlin，1980。[20] Ilir Snopce 和 Pavel Zalesski，直角 Artin pro-p 群。Bull. of the London Mathematical Society. 54 (2022 1904 1922)，- P. A. Zalesskii，有限生成群自由构造的几何刻画。*Siberian Math. J.*，**30** (2) (1989) :227–235。[21] [22] P.A. Zalesskii，正特征情形下有限生成群自由构造的正规子群与同余核，Izv. Mathematics 59 (1995) 499-516[23] P. A. Zalesskii. 不含非阿贝尔自由 pro-p子群且作用于树的仿射有限群。*Matematicheskii Sbornik*，181(1):57–67，1990。

[24] P.A. Zalesskii和O.V. Mel’nikov, 《仿射有限群作用于树上的子群》, 《苏联数学文集》**63** （1989年）405-424.
[25] P. A. Zalesskii 和 O. V. Mel’nikov, 《有限概形群图的基本群》, 《代数与分析》**1** （1989年）; 译文发表于: 《列宁格勒数学杂志》, **1** （1990年）921–940