arXiv:2305.03709v1 [physics.flu-dyn] 5 May 2023

排版后的文章中，此处将显示与文章类型相符的横幅

液滴撞击实验中的速度场和空腔动力学

V. Lherm[1],[2]†、R. Deguen[3]

[1]地球与环境科学系，罗切斯特大学，哈奇森楼227室，罗切斯特，纽约州14627，美国[2]里昂大学、高等师范学院（里昂）、里昂第一大学、让·莫内大学、法国国家科学研究中心、里昂地质实验室：地球、行星与环境，法国里昂F-69007[3]格勒诺布尔-阿尔卑斯大学、萨瓦-勃朗峰大学、法国国家科学研究中心、法国发展研究院、古斯塔夫·埃菲尔大学、地球科学研究所，法国格勒诺布尔38000

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

液滴撞击实验可用于模拟各种各样的自然过程，从雨滴撞击到行星撞击坑。尤其是，若要解读行星撞击的后果，就需要准确描述与撞击坑形成过程相关的流动。在实验中，我们将液滴释放到深液池上方，同时研究空腔的动力学以及气液界面周围产生的速度场。我们使用粒子图像测速，通过平移勒让德多项式分解对速度场进行定量分析。结果表明，由于弹坑并非半球形，速度场比以往模型所认为的更加复杂。具体而言，速度场主要由 0 阶和 1 阶项主导，同时包含 2 阶项的贡献；当弗劳德数和韦伯数足够大时，速度场与这两个数无关。随后，我们基于非定常伯努利方程的勒让德多项式展开，并结合弹坑边界处的运动学边界条件，推导出一个半解析模型。该模型能够解释实验观测，并预测速度场和弹坑形状随时间的演变，包括中心射流的形成。

1. 引言

<escape></escape>当雨滴溅落在池塘表面时，水面下方的弹坑形成、将液冠抛向空中，随后弹坑塌陷并推动液体射流向上喷出，整个过程所需的时间还不到眨眼的一瞬间。这些是飞溅状态的关键特征，该状态仅在液滴半径、撞击速度、撞击角度以及流体的表面张力、密度和黏度等物理性质处于特定范围内时才会出现（<escape></escape>Rein 1993<escape></escape>）。<escape></escape>Worthington <escape></escape>（<escape></escape>1908<escape></escape>）首次利用开创性的高速摄影方法报告了这些特征。此后，研究人员对飞溅状态进行了广泛研究，尤其关注撞击后瞬态弹坑随时间的演变（<escape></*escape*>例如 <*escape*></escape>Engel 1967<escape></escape>；<escape></escape>Morton <escape></*escape*>等 <*escape*></escape>2000<escape></escape>；<escape></escape>Bisighini <escape></*escape*>等 <*escape*></escape>2010<escape></escape>），以及最大弹坑半径的标度关系（<escape></*escape*>例如 <*escape*></escape>Macklin & Metaxas 1976<escape></escape>；<escape></escape>Engel（1966）<escape></escape>；<escape></escape>Lherm <escape></*escape*>等 <*escape*></escape>2022<escape></escape>）。液冠的形成、演变和破碎（<escape></*escape*>例如 <*escape*></escape>Allen 1975<escape></escape>；<escape></escape>Krechetnikov & Homsy 2009<escape></escape>；<escape></escape>Zhang <escape></escape>等<escape></escape>

† 联系电子邮件地址：vlherm@ur.rochester.edu

摘要不得延伸至第2页。

2010；Agbaglah 等 2013）以及中央射流（例如，Fedorchenko & Wang 2004；Ray 等2015；van Rijn 等 2021）也已得到研究。

液滴撞击过程涵盖了广泛的应用领域，包括弹丸入水（Clanet 等，2004）和喷涂（Hines，1966）等工程应用，也包括地球科学领域的应用，例如雨滴产生含油海洋气溶胶（Murphy 等，2015）、雨滴撞击海水和土壤时产生喷雾（Zhou 等，2020），以及行星撞击坑（Melosh，1989；Landeau 等，2021；Lherm 等，2021、2022）。从吸积早期阶段到现代陨石撞击，类地行星上都会发生行星撞击。在行星形成过程中，撞击体的核中的金属与成长中行星的硅酸盐之间的分异机制会影响核与地幔之间的热分异与化学分异（Stevenson，1990；Rubie 等，2015；Lherm 和 Deguen，2018），并对行星的化学、热学和磁场演化产生重大影响（Fischer 等，2015；Badro 等，2018；Olson 等，2022）。具体而言，成坑过程会导致撞击体的核发生初始弥散与混合（Landeau 等，2021；Lherm 等，2022）。在行星科学中，结合行星表面观测与挖掘和喷出物沉积模型，撞击坑还可用于采样行星和卫星的浅层内部（Maxwell 1977；Barnhart 和 Nimmo，2011；Kurosawa 和 Takada，2019）。因此，要理解这些行星撞击的影响，就需要对撞击坑形成过程中产生的速度场进行建模。

在飞溅状态下，弹坑、液冠和中心射流的演变直接取决于弹坑边界周围形成的速度场。弹坑的动力学确实与周围流体中的速度场密切相关，尤其是空腔形状的演变。液冠的形成也与周围速度场有关，这种关联通过初始水面上的质量通量分布体现出来。最后，中心射流的形成与汇聚速度场有关；这种速度场部分由浮力导致的弹坑塌陷所引起。

已有研究通过实验和数值方法考察了飞溅状态下与弹坑演化相关的速度场。Engel (1962) 首先通过在流动中播撒粒子以可视化流线，从而考察弹坑周围的速度场。这些观测使人们得以确定与弹坑扩张及随后塌陷相关的速度场构型。近年来，研究者采用现代粒子图像测速（PIV）方法考察速度场。速度场测量被用于研究弹坑下方涡环的起源（Liow & Cole 2009）、中心射流的形成（van Rijn *et al.* 2021），以及液滴撞击盐水后产生的溶质毛细流（Musunuri *et al.* 2017）。数值模拟也聚焦于弹坑速度场，尤其关注弹坑塌陷时气泡的卷入以及中心射流的形成（Morton *et al.* 2000; Ray *etal.* 2015）。

大多数涉及预测弹坑速度场的模型，都假定速度场是任意的（Maxwell 1977），或者假定在给定弹坑几何形状的情况下存在任意速度势，例如半球形弹坑（Engel 1967；Leng 2001），或能够垂直平移的球形弹坑（Bisighini 等 2010）。由于这些模型仅与弹坑尺寸和/或形状的实验测量结果进行过比较，因此还需要将其与速度场的实验测量结果进行比较，以评估其准确性。无论如何，都需要一种新模型，在不采用任意指定的速度场或速度势的情况下，对空腔几何形状进行一致建模。

本文同时研究液滴撞击实验中产生的空腔动力学和速度场。在第 2 节中，我们介绍实验装置、方法和诊断方法，以及本研究使用的无量纲数。在第 3 节中，我们

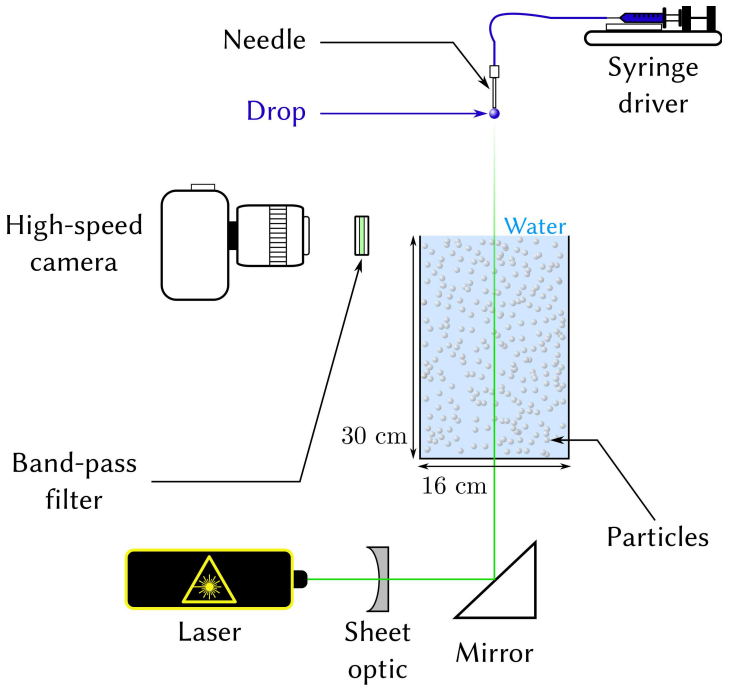

图 1：液滴撞击实验装置示意图。

描述针对弹坑形状和速度场获得的实验结果。在 § 4，我们将现有的速度场模型与我们的实验测量进行比较。在 § 5，最后我们推导出一个基于与运动学边界条件耦合的非定常伯努利方程的勒让德多项式模型。

2. 实验

2.1. 实验装置

在这些实验中，我们将一滴液体从空中释放，使其落入由同种液体构成的深液池中（图 1）。通过改变液滴的释放高度来调节撞击速度 U_i，同时保持液滴半径 R_i 不变。我们还保持流体的密度 ρ、黏度 μ和表面张力 σ 不变。

液池盛放在一个 $16 \times 16 \times 30$ 厘米的玻璃槽中。液池液面设置在槽顶，以尽量减小槽壁处弯月面的厚度。这样可以获得不受自由表面弯月面效应干扰的视场。我们使用由注射泵供给流体的针头生成液滴。当液滴的重量超过表面张力作用时，液滴便会脱落。我们使用内径为4.7毫米的尼龙塑料针头，生成半径为 $R_i = 2.7$毫米的液滴。我们通过对数十个液滴进行质量测量并假设液滴为球形，基于标定结果测定液滴尺寸。我们利用液滴撞击前的高速图像验证了这一方法，在图像中可以直接测量液滴半径。质量测量与直接测量之间的相对差异为1.4%。撞击速度范围为 $U_i = 1 - 5$ 米.秒$^{-1}$。我们使用包含二次阻力项的液滴标定自由落体模型，计算每次实验的撞击速度。我们利用液滴撞击前的高速图像验证了这一方法，在图像中可以直接测量液滴的

Case	A	B	C	D
Fr	103	444	706	979
We	100	429	682	946
Re	4.41×10^3	9.15×10^3	$1。15 \times 10^4$	1.36×10^4

表 1：实验中使用的无量纲数（详见方程 2.1 ）。

速度。速度模型与直接测量之间的相对差异为0.6%。液滴和液池中均使用水，并在温度受控的环境中进行实验。密度为 $\rho = 998 \pm 1$ 千克.米$^{-3}$。密度使用Anton Paar DMA 35 Basic密度计测量。黏度为 $\mu = 1 \pm 0.01$毫帕.·秒（Haynes 2016）。气水界面处的表面张力为 $\sigma = 72.8 \pm 0.4$毫焦.米$^{-2}$ （Haynes 2016）。

在我们的实验中，我们将相机放置在与水面相同的高度。我们使用高速 Phantom VEO 640L 相机和 Tokina AT-X M100 PRO D 微距镜头，以 1400 Hz 的频率记录图像，分辨率为 2560×1600 像素（21 μm/px），动态范围为 12 位。

2.2. 无量纲数

在这些实验中，撞击动力学取决于 U_i、 R_i、 ρ、 μ、 σ以及重力加速度 g。由于这六个参数包含三个基本单位，瓦西-白金汉定理表明，撞击动力学取决于一组三个相互独立的无量纲数。我们选取以下一组：

$$Fr = \frac{U_i^2}{gR_i}, \quad We = \frac{\rho U_i^2 R_i}{\sigma}, \quad Re = \frac{\rho U_i R_i}{\mu}. \tag{2.1}$$

弗劳德数 Fr衡量撞击体惯性力与重力之间的相对重要性。它也可以解释为撞击前撞击体的动能 $\rho R_i^3 U_i^2$与其重力势能 $\rho g R_i^4$之比。韦伯数 We 比较了气-液界面处的撞击体惯性与界面张力。雷诺数 Re是惯性力与黏性力之比。下文中，使用液滴半径和撞击速度将时间、长度和速度进行无量纲化，即分别使用R_i/U_i、 R_i、 U_i。这些无量纲量用带波浪号的符号表示。例如，我们使用无量纲时间 $\tilde{t} = t/(R_i/U_i)$。

我们重点研究了四种情况，其弗劳德数、韦伯数和雷诺数分别处于以下范围 $Fr \simeq 100 - 1000$、 $We \simeq 100 - 1000$ 和 $Re \simeq 4400 - 13600$（表1）。对于每种情况，我们进行了三次采集，在弹坑形状（例如图4）和速度场（例如图11）方面均获得了相似的实验结果。这验证了实验的可重复性。

2.3. 粒子图像测速

速度场通过粒子图像测速获得。我们在水槽中播撒聚酰胺颗粒（图1），其浓度、直径和密度分别为 $C_p = 0。26$ g。L^{-1}， $d_p = 20$ μm 和 $\rho_p = 1030$kg。m^{-3}。我们用 1 mm 厚的激光片（532 nm）照亮悬浮的颗粒，该激光片由一台连续输出功率为 10 W 的 Nd:YAG 激光器配合发散柱面透镜和望远镜产生。激光片通过位于水槽下方的 45°倾斜镜进行垂直化。使用带通滤光片（532 ± 10 nm）滤出激光波长。

Focus on Fluids 文章不得超过此页长度

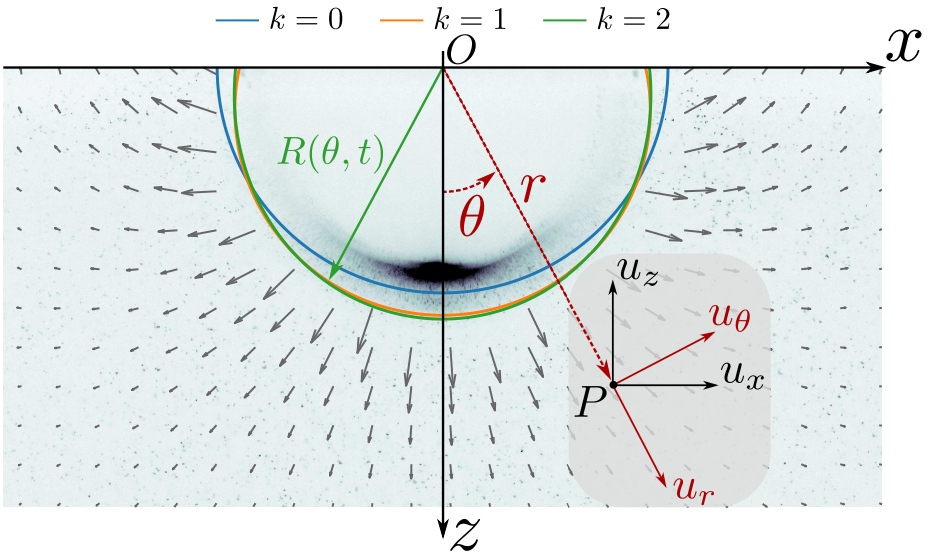

图2：PIV流程得到的速度场，叠加在对应的实验原始图像上。实线表示通过平移勒让德多项式分解（公式 2.2）得到的弹坑形状，阶数为 $k=0$（蓝色）、$k=1$（橙色）和 $k=2$（绿色）。图中还标出了笛卡尔（x，y，z）（黑色）和球面（r，θ，φ）（红色）坐标系。

为计算速度场，相机以短时间间隔（$\Delta t = 200\ \mu$s）记录两张视场图像。将这两张图像划分为询问窗口，并在窗口内进行互相关运算，以获得平均粒子位移。此过程包括五阶段多遍处理，询问窗口的尺寸逐渐减小。最终询问窗口为边长 64 px 的正方形，重叠率为 75%。随后在每个窗口中计算一个速度矢量，从而构建覆盖整个视场的速度场。最后，使用瞄准器对速度场进行空间标定。

2.4. 实验诊断

2.4.1. 弹坑形状

弹坑形状直接取自PIV流程中使用的原始图像（图2）。弹坑对应于无粒子区域，以及一个高光强度区域；后者是由气水界面上的反射造成的，尤其是弹坑底部的反射。根据这些图像特征定义弹坑边界，并通过背景去除、强度阈值法和图像二值化来勾勒空腔。

我们使用一组平移勒让德多项式拟合弹坑边界的位置 R (图 2)，该位置取决于极角 θ 和¯时间 t，多项式最高次数为 P_k $k_{max}=2$

$$R(\theta,t) = \sum_{k=0}^{k_{max}} R_k(t)\bar{P}_k(\cos\theta), \tag{2.2}$$

其中 $R_k(t)$ 是通过最小二乘法拟合得到的系数。平移勒让德多项-¯式是标准勒让德多项式 $P_k(x) = P_k(2x-1)$的仿射变换，并在 $[0,1]$, 上正交，即 在半空间上正交。系数 $R_k(t)$ 对应于相对于半球形的尺度逐渐减小的偏差。 $R_0(t)$ 对应于平均弹坑半径（图 2，蓝线）。 $R_1(t)$ 对应于弹坑的变形，其关于 cos 呈线性

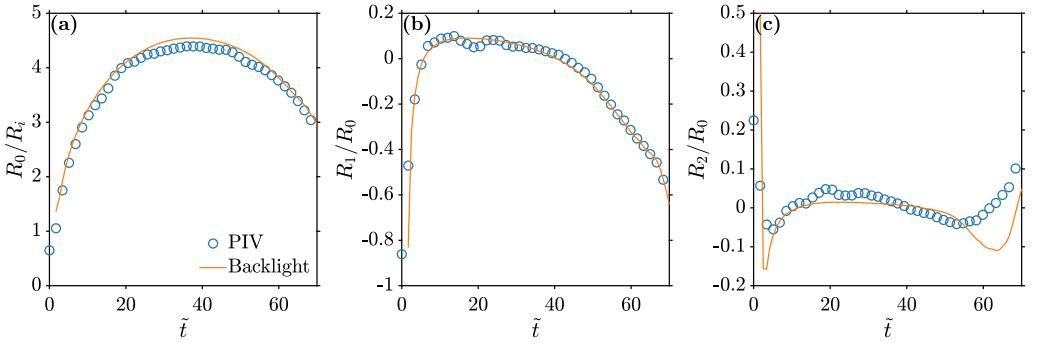

图 3：系数 $R_0(t)/R_i$ (a)、 $R_1(t)/R_0$ (b) 和 $R_2(t)/R_0$ (c) 随时间 $\tilde{t}$ 的变化。圆圈和实线分别对应通过 PIV流程（B 组， $Fr = 444$）和类似的背光实验（$Fr = 442$）获得的弹坑形状。

函数 $\cos\theta$，相对于一个半球而言（图 2，橙线）。当 $R_1(t) > 0$时，弹坑沿垂直方向拉伸，形成长球形空腔。当 $R_1(t) < 0$时，弹坑沿水平方向拉伸，形成扁球形空腔。最后，$R_2(t)$ 对应于弹坑的变形，其关于 cos 呈二次关系 θ，相对于一个半球而言（图 2，绿线）。

为了验证弹坑形状确定流程，我们比较了$R_k(t)$ 从PIV流程中使用的原始图像（例如 图 2）得到的系数，与相同条件下但从背面照明的实验（例如 图 13）得到的系数进行比较。该背光实验（实验细节见 Lherm 等人 (2022)能够可靠地确定弹坑形状。图 3 显示，两种方法得到的系数非常相似，这验证了从PIV原始图像确定弹坑形状的流程。

2.4.2. 速度场

我们旨在将通过 PIV流程获得的实验速度场与速度模型进行比较。为此，速度场 $\boldsymbol{u} = (u_r,\ u_\theta,\ u_\varphi)$用球坐标系表示（$r$，$\theta$，$\varphi$），该坐标系定义为使 u_r和 u_θ位于激光片平面内（图 2，红色坐标）。该坐标系的原点是撞击液滴与靶液之间的接触点（图 2中的 O 点）。

我们将速度场的各分量在平移勒让德多项式基底上进行分解

$$u_r(r,\theta,t) = \sum_{l=0}^{+\infty} u_{r,l}(r,t)\bar{P}_l(\cos\theta), \tag{2.3}$$

$$u_\theta(r,\theta,t) = \sum_{l=0}^{+\infty} u_{\theta,l}(r,t)\bar{P}_l(\cos\theta), \tag{2.4}$$

其中，$u_{r,l}(r,t)$和$u_{\theta,l}(r,t)$分别是 u_r和 u_θ的分解系数。¯平移勒让德多项式 $P_l(\cos\ \theta)$在半半球（$\theta \in [0,\pi/2]$）上具有正交性，因此，我们通过对左右两个独立半半球 $\theta \geqslant 0$ 和 $\theta < 0$上的实验速度分量进行最小二乘反演，分别获得$u_{r,l}(r,t)$和$u_{\theta,l}(r,t)$系数，然后对左右半半球的结果取平均。由于流动接近轴对称（例如图2），通过对每个半球进行反演所获得的系数彼此非常接近。假设流动具有轴对称性，注意到$u_{r,}0(r,t)$是 u_r 在整个半球上的平均值。

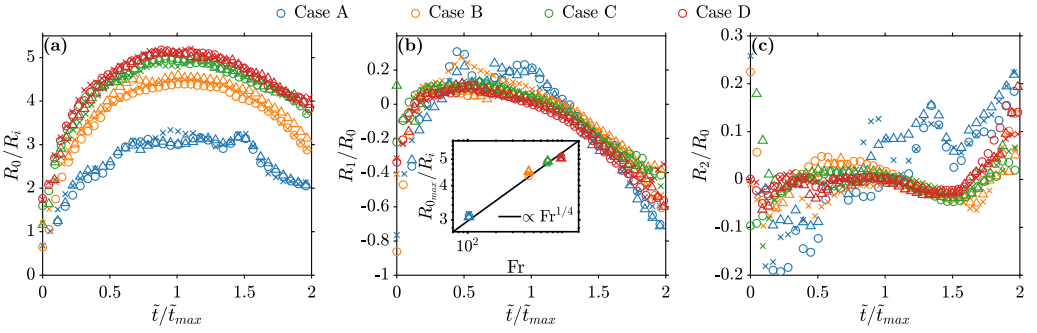

图 4：四种情况下，系数 $R_0(t)/R_i$ (a)、 $R_1(t)/R_0(t)$(b) 和 $R_2(t)/R_0(t)$(c) 随以陨坑张开时间尺度 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max}$ 归一化的时间变化。插图：最大平均弹坑半径 $R_{0_{max}}/R_i$ 随弗劳德数 Fr 的变化。对于每种情况，不同类型的标记对应不同的实验。

3. 实验结果

3.1. 弹坑形状

图 4 展示了所有实验条件下，弹坑边界平移勒让德分解（方程 2.2）的拟合系数随时间的变化。我们将拟合系数 $R_1(t)$ 和 $R_2(t)$ 除以 $R_0(t)$，即 平均弹坑半径。采用这一归一化方式，我们量化弹坑几何形状偏离半球的程度。我们还用陨坑张开时间尺度对时间进行归一化（Lherm 等 2022）

$$\tilde{t}_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right)^{1/8} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) \Phi^{1/8} \xi^{1/2} Fr^{5/8}, \tag{3.1}$$

其中， Φ 和 ξ 分别为能量分配系数和动能修正系数，B 为贝塔函数。该标度关系通过使用能量守恒方程得出：弹坑的势能与弹坑的动能（经 ξ修正）的总和，在任意时刻均等于撞击液滴的动能（经 Φ修正）。假设空腔达到最大尺寸时，弹坑的动能为零（Lherm 等人 2022），则最大弹坑半径的标度关系为

$$\tilde{R}_{max} = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/4} \Phi^{1/4} Fr^{1/4}. \tag{3.2}$$

利用此 $Fr^{1/4}$ 标度律，在 $\tilde{t} = 0$和 $\tilde{t} = \tilde{t}_{max}$ 之间对能量守恒方程进行积分，可得到方程 3.1给出的陨坑张开时间尺度。更多详情请参见 Lherm 等人 (2022)。对于我们的弗劳德数实验范围，我们采用 $\Phi = Fr^{-0.156}$ 和 $\xi = 0$。34 (Lherm 等人 2022)。这种归一化使我们的实验数据能够在相同的时间尺度上塌陷。

在图 4 中，A 组的弹坑形状演化与 B、C 和 D 组显著不同。因此，我们单独描述该组。我们首先讨论高 We 实验（B、C 和 D 组），在这些实验中，与撞击体惯性相比，表面张力效应可以忽略不计（例如 Pumphrey 和 Elmore（1990）；Morton 等（2000）；Leng 2001；Ray 等（2015））。弹坑尺寸随弗劳德数增加（图 4，插图），其变化方式与最大平均弹坑半径的 $Fr^{1/4}$ 标度律 $R_{0_{max}}$ 相符（Engel（1966）；Leng 2001；Lherm 等（2022））。此外，相对于平均弹坑尺寸的弹坑形状演化与弗劳德数无关， $R_1(t)/R_0(t)$ 和$R_2(t)/R_0(t)$ 的演化相似（图 4b-c）。

在弹坑张开阶段的早期（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \lesssim 0.25$），随着空腔张开，弹坑的平均半径$R_0(t)$逐渐增大（图4a）。由于液滴在液池表面铺展，弹坑呈现平底扁球形（例如图5，i），其$R_1(t)$为负值（图4b）。在撞击液滴与液池表面的接触点处产生的超压作用下，平底扁球形空腔逐渐变为半球形（例如图5，ii）。在这一阶段，$R_1(t)/R_0(t)$的幅值确实随时间逐渐减小（图4b）。弹坑还会发生更大程度的变形，其$R_2(t)/R_0(t)$大多为负值（图4c）。这对应于相对于半球形的二阶偏差，表现为靠近液池表面的弹坑边界较为扁平（例如图5，i）。

在弹坑张开阶段的中间时段（$0.25 \lesssim \tilde{t}/\tilde{t}_{max} \lesssim 0.5$），弹坑继续张开（图4a）。空腔仍在垂直方向上被拉伸，导致 $R_1(t)/R_0(t)$ 越来越大且为正值（图4b），即形成长球形空腔（图5，iii）。当 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \simeq 0.5$ 时，弹坑达到最大长球形变形，此时 $R_1(t)/R_0(t) \simeq 0.08$（图4b）。弹坑也发生了更大程度的变形，表现为 $R_2(t)/R_0(t)$ 为正值（图4c）。这对应于靠近表面的垂直弹坑边界（图5，iii）。

在弹坑张开阶段的后期（$0.5 \lesssim \tilde{t}/\tilde{t}_{max} \lesssim 1$），平均弹坑半径仍在增大（图4a），但随着 $R_1(t)/R_0(t)$ 减小，弹坑开始变平（图4b）。随着弹坑张开速度降低，浮力变得显著，导致空腔发生水平拉伸。至 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \simeq 1$ 时，弹坑逐渐变平，形成近似半球形弹坑（图5，v）。

当弹坑达到其最大尺寸（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \gtrsim 1$）后，平均弹坑半径开始减小（图4a）。$R_1(t)/R_0(t)$的下降速率高于弹坑开放阶段（图4b）。正如预期的那样，由于此时浮力占据主导地位，弹坑的水平拉伸速度加快。这导致形成一个越来越扁平的空腔（图5，vi-vii）。当 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \gtrsim 1.5$时，较高阶数的分量最终偏离零，并呈现正的 $R_2(t)/R_0(t)$（图4c）。结合 $R_1(t)/R_0(t)$的负值，这对应于中心射流的形成（图5，viii-ix）。

现在我们讨论中等 We 实验（A 组），在这种情况下，与撞击体惯性相比，表面张力效应较为显著（例如，Pumphrey 和 Elmore（1990）；Morton 等（2000）；Leng 2001；Ray 等（2015））。在这种情况下，沿空腔界面向下传播的毛细波会逐渐形成，并驱动弹坑发生变形，这通常会因空腔的夹断而导致气泡被困（例如，Oguz 和 Prosperetti（1990）；Pumphrey 和 Elmore（1990）；Prosperetti 和 Oguz（1993）；Elmore 等（2001））。这种机制通常出现在中等 We条件下，即 $We \simeq 30 - 140$（Pumphrey 和 Elmore（1990）中的图6）。在弹坑张开过程中，这解释了为何最大长球形变形出现的时间晚于其他情况，即出现在 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \simeq 0.8$ 时，以及为何长球形变形程度更大，其数值为 $R_1(t)/R_0(t) \simeq 0.2$（图4b）。在弹坑闭合过程中，由于毛细波在弹坑底部汇聚，$R_1(t)/R_0(t)$ 和 $R_2(t)/R_0(t)$ 的演化与其他情况明显不同。

3.2. 速度场

3.2.1. 速度图

图 5 展示了 B 组速度 $|\boldsymbol{u}| = (u_x^2 + u_z^2)^{1/2}$ 范数随时间的演化。在弹坑的开放阶段，由于弹坑边界减速，弹坑周围的速度逐渐降低（图 5，i–iv）。最大速度为 $\simeq 1$。1 m。s^{-1}，发生在接触后 1.3 ms 时（图 5，i），相当于撞击速度的 32%。当 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \gtrsim 0$。1 时，速度范数在弹坑周围沿径向减小（图 5，ii–iv）；而当 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \lesssim 0$。1 时，弹坑侧面的速度下降速率更高。这可能是由于其初始扁球形状所致，

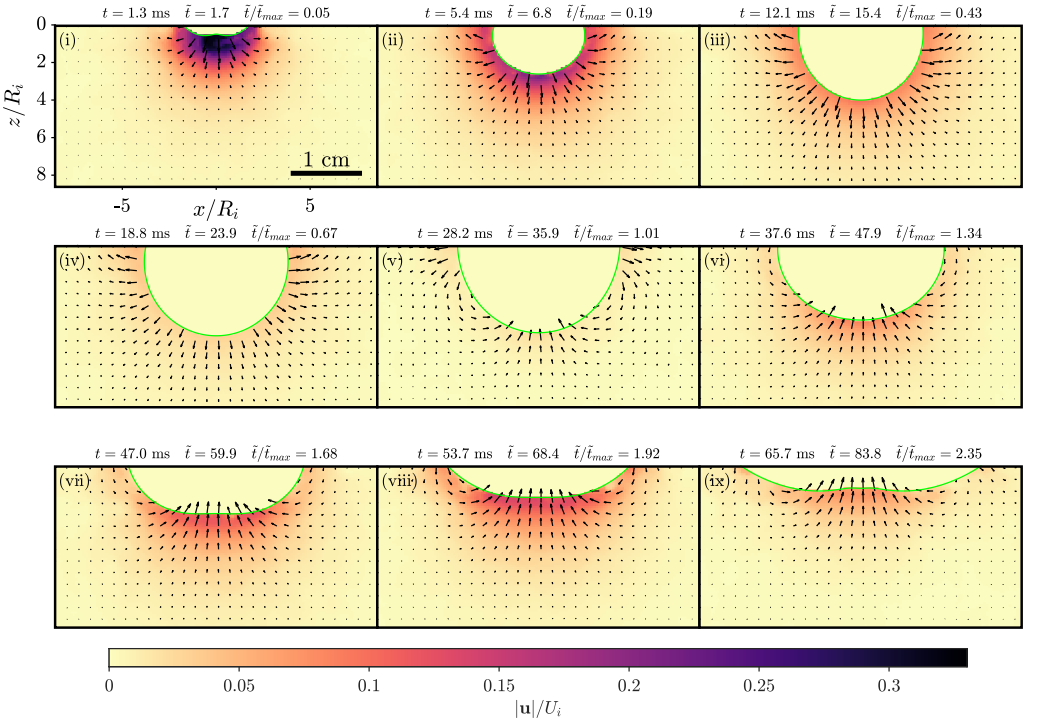

图5：B 组中速度 $|\boldsymbol{u}| = (u_x^2 + u_z^2)^{1/2}$ 的时间演化。矢量场对应于实验速度场，并在每个快照中以其最大值进行归一化。实心绿线对应于使用勒让德多项式分解确定的弹坑边界（方程 2.2）。

该弹坑的形状与液滴撞击时在水面上的铺展有关；随着弹坑逐渐变为半球形，弹坑下方的速度也随之变得更高。速度场由占主导地位的径向分量和极向分量组成，后者负责使流动向上穿过初始水面（图 5，i–iv）。因此，极向分量负责在水面上方形成液冠（例如 Rein 1993；Fedorchenko & Wang 2004；Zhang等 2010）。

当弹坑达到其最大尺寸（图 5，v）时，空腔近似呈半球形，速度场似乎在整个流动中同时消失，这与Engel （1966）的观测结果一致，随后这些结果被用于若干速度模型（例如 Engel 1967；Prosperetti& Oguz 1993）。然而，对速度场同时消失这一现象的这一阶假设，在对流动进行细致考察时并不成立。在空腔下方，速度逐渐减小，并最终在弹坑达到最大尺寸之前不久消失。由于弹坑扩张，速度方向向下。随后速度再次增大，但由于弹坑塌陷，方向向上。在空腔侧面靠近表面处，当弹坑达到最大尺寸时，速度并不会消失。弹坑的塌陷取代了其最初的扩张，从而使弹坑侧面保持向外的速度。

当弹坑塌陷时（图5，vi-ix），会形成朝向空腔中心的汇聚流，从而形成中心射流。

图 6 展示了 B 组中涡量 $\omega_y = \partial u_x/\partial z - \partial u_z/\partial x$ 随时间的演化情况。撞击过程中弹坑周围产生的涡量局限于气水界面附近，尤其是在弹坑发生强烈变形时，即在.....开始时

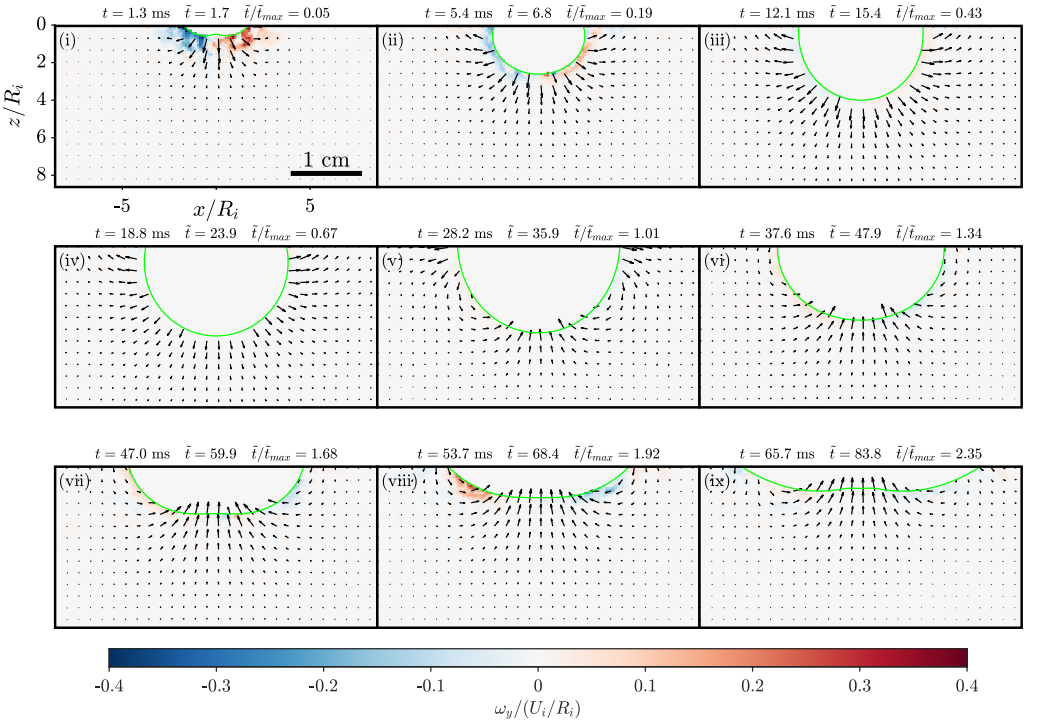

图6：B 组涡量的时间演化 $\omega_y = \partial u_x/\partial z - \partial u_z/\partial x$。矢量场对应于实验速度场，并按每个快照中的最大值归一化。实心绿线表示通过勒让德多项式分解（公式 2.2）确定的弹坑边界。

弹坑张开（图6，i-ii）以及塌陷时（图6，vi-ix）。这表明流动大部分是无旋的，支持先前模型（§4）中采用的势流假设。此外，弹坑边界周围观测到的部分涡量可能是伪影，这是由于在气水界面的反射上进行互相关而非在粒子图像测速粒子上进行互相关，从而产生了虚假的速度测量结果。涡量的估算扩散长度（100 ms 内为 0.3 mm）远小于涡量带的典型尺寸，这也支持了这一假设。

3.2.2. 速度系数

图7展示了在 B 组弹坑张开阶段的某一时刻 $\tilde{t} = 15.4$ ($\tilde{t}/\tilde{t}_{max} = 0.43$)，系数 $u_{r,l}(r,t)$ 和 $u_{\theta,l}(r,t)$（公式 2.3-2.4）随径向坐标的变化。在此阶段，速度场主要由度数 $l = 0$ 和$l = 1$主导，较高的度数 $l \geqslant 2$ 则小得多。当 $r \lesssim 1.2R_0$时，我们观察到系数的斜率有所下降。这可能与弹坑偏离半球形状有关。系数取样点与实际弹坑边界的距离各不相同，其中也包括位于弹坑内部的伪影，这可能会影响这些系数在靠近弹坑边界处的径向依赖关系。在图7中，当半径小于 $\max\{R(\theta)\}$（图7中的 $r \leqslant 1.11R_0$ ）时，我们用虚线标示这一误导性趋势。

图 8和 9比较了各组中系数 $u_{r,\,l}$（r、 t）和 $u_{\theta,\,l}$（r、 t）（方程 2.3-2.4）随时间的变化，比较对象为各组，且 $l \leqslant 2$。除归一化方式不同外，图7 因此与 B 组在 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} = 0$处这些系数图的径向切片相似。43. 如

Rapids 文章不得超过此页长度

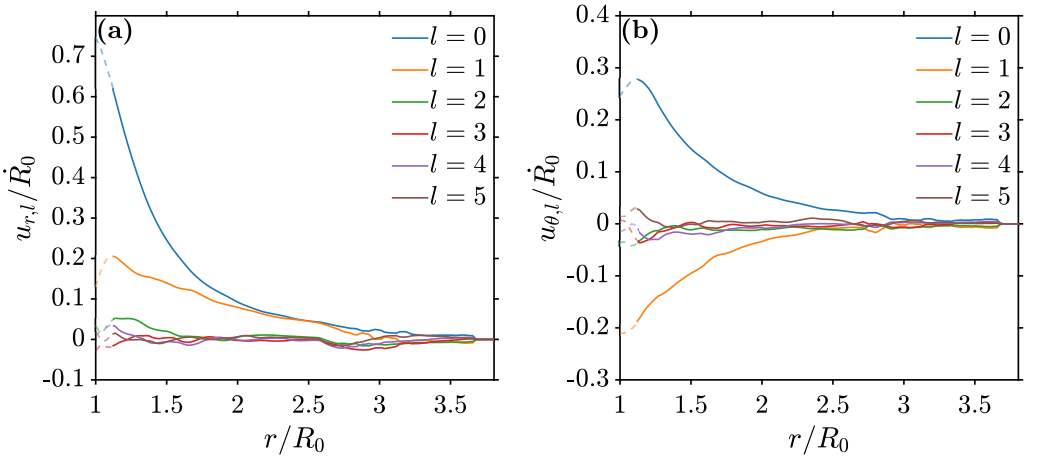

图 7：系数 $u_{r,l}(r,t)$ 和 $u_{\theta,l}(r,t)$ 以平均弹坑速度 ¤$R_0(t)$ 归一化，并表示为径向坐标 r 的函数；径向坐标以平均弹坑半径 $R_0(t)$ 归一化，最高至 $l = 5$ 阶。虚线表示系数采样到的速度伪影位于弹坑中的区域。对于 B 组，系数在 $\tilde{t} = 15.4$ ($\tilde{t}/\tilde{t}_{max} = 0.43$) 时计算。

就弹坑形状而言，中等 We A 组不同于高 We B、C 和 D 组，这一点对于速度场的径向分量（图 8）和极向分量（图 9）均是如此。因此，我们将单独讨论这一组。

我们首先讨论高 We 实验（B、C 和 D 组），在这些实验中，无论考察哪一阶，各组的速度场两个分量都相似。与图 $l = 0$ 和 $l = 1$一致，在弹坑开放阶段和闭合阶段，速度场主要由 7 阶主导。

在弹坑张开阶段（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \lesssim 1$），径向分量的主导阶数$u_r$,0$(r,t)$ 和 u_r,1(r,t) 为正（图 8）。这对应于与空腔扩张相关的强径向速度场。极向分量的主导阶数u_θ,0 (r,t) 和 u_θ,1(r,t) 则分别同时为正和负（图 9），且幅值较小。这对应于对主导径向速度场的极向扰动，该扰动与穿过表面 $z = 0$ 的质量通量有关，并由此形成液冠。正系数 u_θ,0 (r,t) 确实对应朝向表面的流动，而负系数 u_θ,1(r,t) 对应于 $l = 1$ 阶扰动，其与 cos θ 成线性关系。 $l = 2$ 阶也会影响两个分量的速度场，尤其是在弹坑因液滴铺展于液池表面而严重变形时，即张开阶段开始时（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \lesssim 0.25$）。

当弹坑达到最大尺寸（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \simeq 1$）时，随着弹坑开始塌陷，两个分量的主导阶数均改变符号。具体而言，u_r,0(r,t)消失得比u_r,1(r,t)（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \simeq 0.6$）（图 8）和$u_\theta$,0$(r,t)$（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \simeq 0.8$）（图9）更晚（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \simeq 1$）。这与图5在 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \simeq 1$处的观测一致：速度在弹坑下方消失，但在两侧并未消失。

在陨石坑闭合阶段（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \gtrsim 1$），$u_r$,0$(r,t)$ 和 u_r,1(r,t) 均为负值（图 8），且 u_θ,0(r,t) 也为负值（图 9）。这对应于与陨石坑塌陷及中心射流形成相关的汇聚流的发展。与开放阶段开始时的情况一样，在闭合阶段结束时（$\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \gtrsim 1.5$），两个分量的程度 $l = 2$ 对速度场均有显著贡献，这与严重变形的弹坑边界有关。

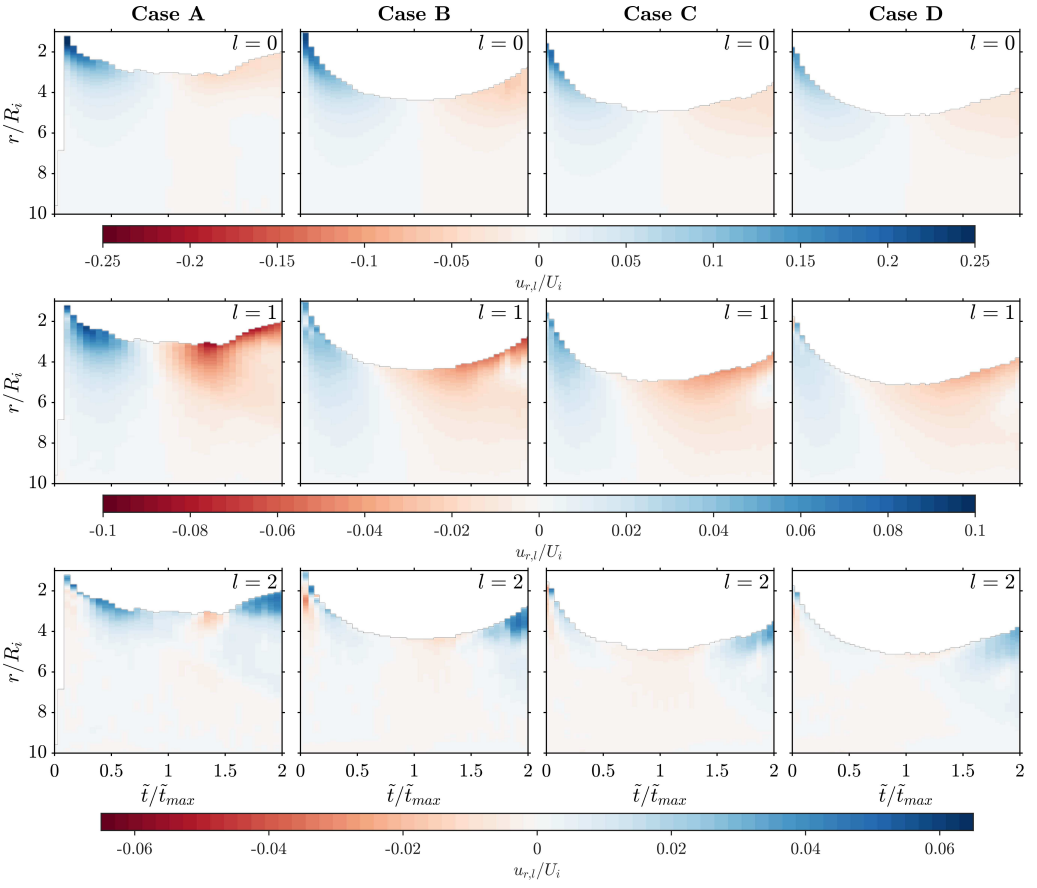

图 8：对于 B 组，系数 $u_{r,l}(r,t)$ ($l \in \{0,1,2\}$) 随径向坐标 r （以液滴半径 R_i 归一化）的时间演化，并以撞击速度 U_i进行归一化。时间以陨坑张开时间尺度 $\tilde{t}_{max}$ 进行归一化。

现在我们讨论中等 We 实验（A 组）。尽管这两个分量的度数与高 We 实验中的情况相近，但 A 组的度数 $l = 1$ 和 $l = 2$ 明显大于 B、C 和 D 组中的相应值。此外，$u_r,1(r,t)$ 和 $u_\theta,0(r,t)$ 消失的时间也发生了显著变化。这也可能是该中等 We 实验中显著表面张力效应的结果，这与毛细波向弹坑底部传播时对弹坑边界产生的剧烈变形有关。

4. 与现有速度模型的比较

在本节中，我们回顾 Engel（1967）、Maxwell（1977）、Leng（2001）和 Bisighini 等（2010）提出的速度模型，并将这些模型的预测与我们的观测结果进行比较。由于这些模型大多旨在理解弹坑张开阶段，我们选取这一初始阶段的典型快照，将模型预测与实验速度测量进行比较。为此，图 10 展示了 B 组中占主导地位的系数$u_r,0(r,t), u_r,1(r,t), u_\theta,0\ (r,t)$ 和 $u_\theta,1(r,t)$ 在 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} = 0.24$ 时随径向坐标的变化，以及各模型的预测结果。

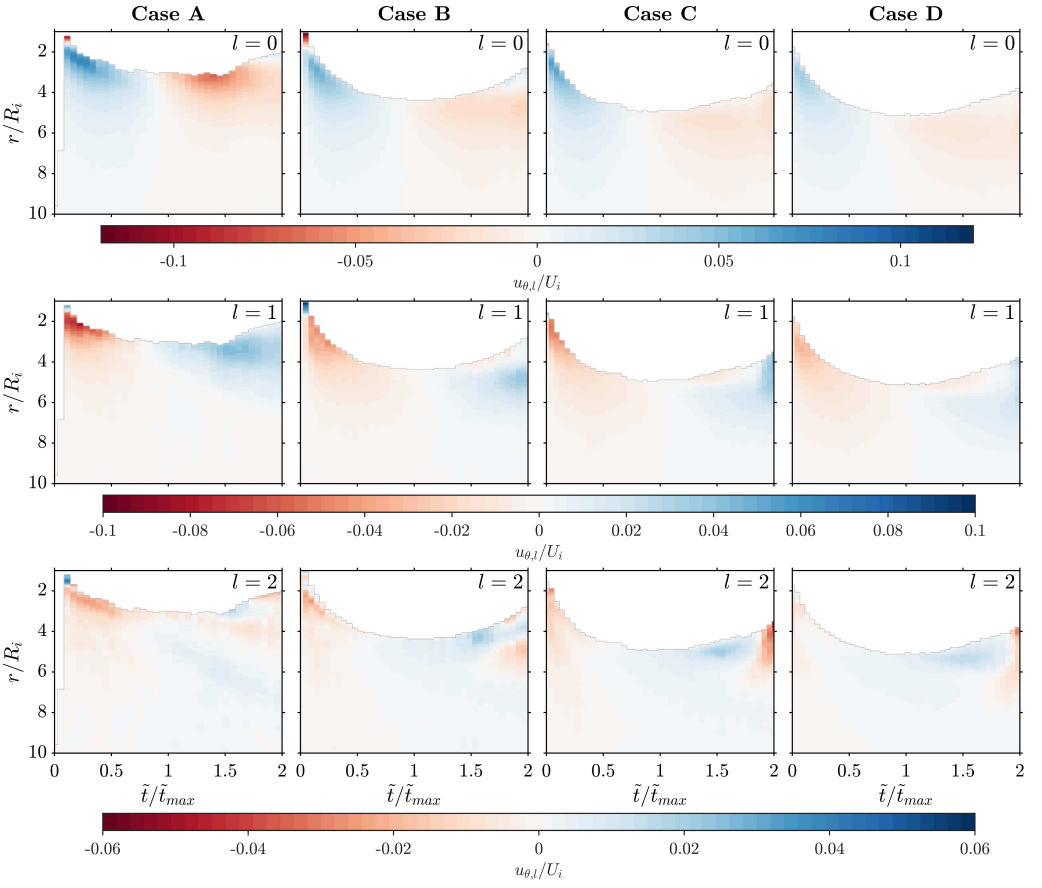

图 9：B 组中，系数 $u_{\theta,\ l}(r,\ \ t)$ $(l \in \{0,\ 1,\ 2\})$ 与径向坐标 r（以液滴半径 R_i 归一化）的关系。系数以撞击速度 U_i 归一化，时间以陨坑张开时间尺度 $\tilde{t}_{max}$ 归一化。

4.1. *Engel（1967）*模型

Engel (1967）的模型假设能量平衡：弹坑的势能、液面上方形成的柱面波的势能、所产生界面的表面张力能、弹坑周围流动的动能、柱面波的动能以及黏性耗散，在任意时刻的总和均等于撞击液滴动能的一半。在这类模型的假设中，Engel(1967）假设弹坑为半球形，半径为 $R_0(t)$，并假设流动为势流，其速度势为 ϕ，满足速度的边界条件 $|\boldsymbol{u}|(r = +\infty) = 0$ 和$|\boldsymbol{u}|[r = R_0(t)] = \dot{R}_0(t)$。该模型所用的速度势为

$$\phi = -\frac{\dot{R}_0 R_0^2 \cos\theta}{r}. \tag{4.1}$$

通过对速度势求导得到的速度场径向分量 u_r 和极向分量 u_θ，写作

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{\dot{R}_0 R_0^2 \cos\theta}{r^2} \\ u_\theta = \dfrac{\dot{R}_0 R_0^2 \sin\theta}{r^2} \end{cases}. \tag{4.2}$$

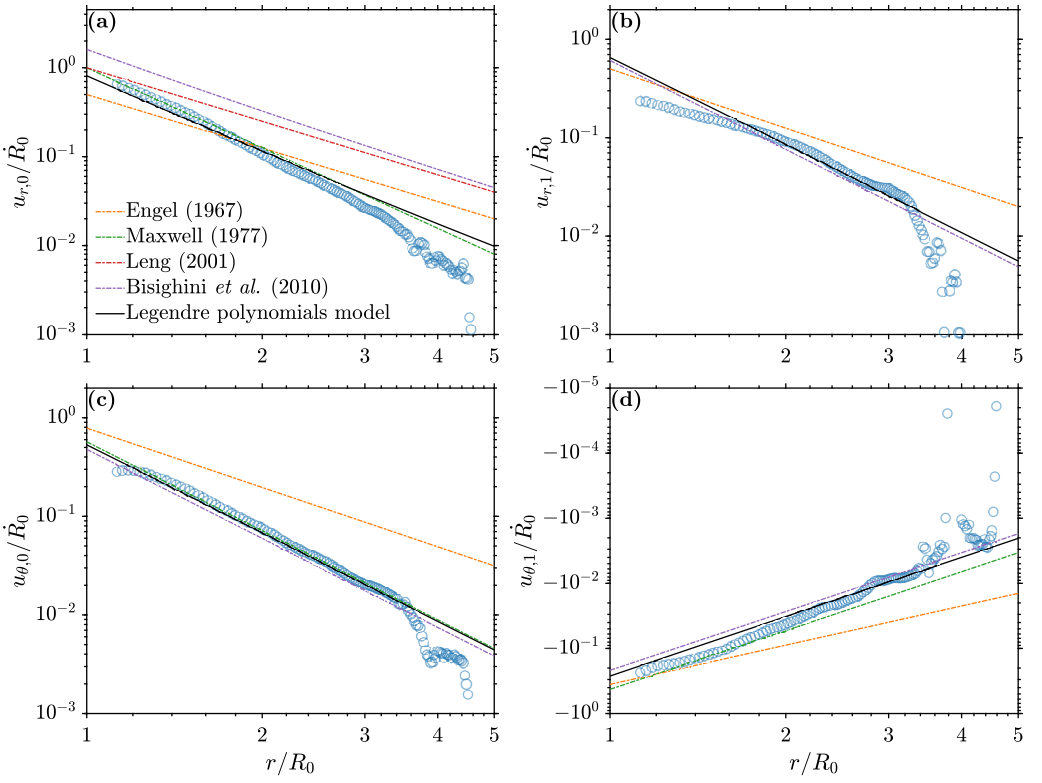

图 10：以平均弹坑速度 ¤ $R_0(t)$ 归一化的系数 u_r,0 (r,t) (a)、u_r,1 (r,t) (b)、u_θ, 0 (r,t) (c) 和 u_θ,1 (r,t) (d)，随以平均弹坑半径 $R_0(t)$ 归一化的径向坐标 r 变化。圆圈表示 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} = 0.24$ 时的 B 组。点划线表示 Engel（1967）、Maxwell（1977）、Leng（2001）和 Bisighini 等（2010）的模型。实线表示预测模型的解，该模型采用参考初始条件（方程5.14）下的简化方程组（方程 5.13）。

该模型能够描述平均弹坑半径的演化（例如 Engel 1967，图 3）。速度场具有 $l = 0$（图 10a）和 $l = 1$（图 10b）径向分量，以及 $l = 0$（图 10c）和 $l = 1$（图 10d）极向分量。这使得我们能够得到一个在定性上与实验相似的速度场，特别是径向分量的 $l = 1$ 阶，以及一个极向分量。不过，速度分量的斜率小于实验斜率，尤其是 u_r,0(r,t) 的 $1/r^2$ 斜率。Engel（1967）模型的主要局限在于弹坑几何形状固定为半球形，以及为拟合速度场的实验观测而任意定义的速度势。更重要的是，该速度势（方程 4.1）对应的是膨胀圆柱周围的流动（其中 r 为与圆柱轴的距离，θ 为绕该轴的角位置），而非 Engel （1967）中错误假设的膨胀球体周围的流动。它不是球坐标下拉普拉斯方程的解，且散度不为零。

4.2. *Maxwell（1977）*模型

Maxwell (1977）模型假设速度场具有一种基于行星撞击坑观测的经验形式。该模型假设径向分量 u_r 与 θ无关，且其径向依赖关系是半径 Z 的幂函数 r。 u_θ 随后使用流体计算

不可压缩性。因此，速度场可表示为

$$\begin{cases} u_r = \frac{\alpha(t)}{r^Z} \\ u_\theta = (Z-2)\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\frac{\alpha(t)}{r^Z} \end{cases}, \tag{4.3}$$

其中 $\alpha(t)$ 是一个任意系数，对应于随时间变化的流动强度。根据 Maxwell (1977) 和 Melosh (1989，数值 $Z = 3$ 给出了与爆炸和行星撞击数值模拟结果一致的速度场。

该模型能够利用 $Z = 3$ 和 $\alpha(t) = 1$，预测实验中的 u_r,0(r,t)（图 10a）、u_θ,0(r,t)（图 10c）以及 u_θ,1(r,t)（图 10d）。尤其是，模型预测的斜率与实验斜率非常接近。然而，该模型无法确定径向速度分量的 $l = 1$ 程度。Maxwell（1977）模型的主要局限在于：模型时间依赖性的选择具有任意性，其中 $\alpha(t)$； Z 可能取决于 θ，这将使 u_r 具有 $l = 1$ 程度；此外，Maxwell 的流动并非势流，这与实验结果（图6）不一致。

4.3. *Leng*（*2001*）的模型

Leng (2001）的模型与 Engel (1967 年）的模型相似，因为它采用半球形弹坑，半径为 $R_0(t)$，并采用势流。速度势 ϕ 表示为</style}

$$\phi = -\frac{\dot{R}_0 R_0^2}{r}, \tag{4.4}$$

从而可以获得速度场的速度分量 u_r 和 u_θ

$$\begin{cases} u_r = \frac{\dot{R}_0 R_0^2}{r^2} \\ u_\theta = 0 \end{cases}. \tag{4.5}$$

该速度势满足边界条件，并且是球坐标系下拉普拉斯方程的一个解。

该模型尤其能够通过能量平衡捕捉平均弹坑半径的演化，但需要将动能和总能量乘以经验修正因子（例如Lherm 等 2022）。然而，速度场只有一个自由度 $l = 0$（图 10a），包含径向分量而没有极向分量。与 Engel（1967 年）的模型一样，$1/r^2$ 的斜率 $u_{r,\,0}$（r，t）小于实验斜率。Leng （2001）模型的主要局限在于半球几何形状以及过度简化的速度势，这阻碍了径向分量的极向依赖性，也使速度场缺少极向分量。

4.4. *Bisighini* 等（*2010*）的模型

Bisighini 等人（2010）的模型假设存在一个随时间垂直平移的扩张球形弹坑，其半径为 R_0（t），弹坑质心的垂直位置为z_c（t）。这使得我们能够定义速度势 ϕ，该速度势对应于弹坑径向膨胀与流体绕平移球体流动的叠加。该势函数满足球坐标系下的边界条件和拉普拉斯方程。在移动球体坐标系（r'，θ'）中，其表达式为

$$\phi = -\frac{\dot{R}_0 R_0^2}{r'} - \dot{z}_c r' \left(1 - \frac{R_0^3}{2r'^3}\right)\cos\theta', \tag{4.6}$$

速度场的分量 u_r 和 u_θ 的书写方式

$$\begin{cases} u_r = \frac{\dot{R}_0 R_0^2}{r'^2} - \left(1 - \frac{R_0^3}{r'^3}\right) \dot{z}_c \cos\theta' \\ u_\theta = \left(1 + \frac{R_0^3}{2r'^3}\right) \dot{z}_c \sin\theta' \end{cases} . \tag{4.7}$$

Bisighini 等人 (2010) 随后使用非定常伯努利方程确定球体半径和位置随时间的演变。为了将 Bisighini 等人 (2010) 的模型与我们的实验数据进行比较，我们需要通过将弹坑质心的速度 $\dot{z}_c(\cos\theta, -\sin\theta)$ 加到方程 4.7，并将 r' 和 θ' 表示为 r 和 θ 的函数（$r' = \sqrt{r^2 + z_c^2 - 2z_c r\cos\theta}$, $\cos\theta' = (r\cos\theta - z_c)/r'$, $\sin\theta' = r\sin\theta/r'$）。

速度场具有 $l = 0$ （图 10a）和 $l = 1$ （图 10b）径向分量，以及 $l = 0$ （图 10c）和 $l = 1$ （图 10d）极向分量。系数使用 $z_c = 0$ 和 $\dot{z}_c = 02U_i$计算，这对应于弹坑张开期间的典型值（例如图5）。该模型较好地解释了弹坑的形状（例如 Bisighini 等，2010，图 17），以及速度场实验分量的主要趋势。然而，Bisighini 等（2010）的模型严格限制了弹坑几何形状，以及相关速度势的定义。与 Engel（1967）和 Leng（2001）的模型一样，u_r,0 的 $1/r^2$ 斜率小于实验斜率。

4.5. 迈向一种新模型

在所有模型中，要么规定速度场的几何形状（Engel 1967；Maxwell 1977；Leng2001），要么规定空腔的形状（Engel 1967；Leng 2001；Bisighini 等2010）。这尤其导致 u_r的径向依赖关系不正确：实验中的指数远大于模型中的指数，只有 Maxwell (1977)的模型例外，其中径向依赖关系由参数 Z任意规定。实验观测到径向速度场随 r 的衰减快于 $1/r^2$，这一结果出乎意料，因为它表明，与空腔各向同性膨胀相关的流动分量（$\propto 1/r^2$）并不占主导地位。因此，需要新的模型来解释实验速度场的几何形状，以及空腔非半球形状的演变。在下一节中，我们将建立一个半解析模型，该模型基于非定常伯努利方程的勒让德多项式展开，并结合弹坑边界处的运动学边界条件。

5. 勒让德多项式模型

在此模型中，我们假设流体是无黏的（即 $\mu = 0$）、不可压缩的（即 $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$），且流动是无旋的（即 $\nabla\times\boldsymbol{u} = 0$）。这意味着流动是势流，并满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi = 0$，其中 ϕ 是速度势，定义为 $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$。在球坐标系（$r$，$\theta$，$\varphi$）中，假设流动轴对称，拉普拉斯方程的解可写为

$$\phi(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi_n(t)}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), \tag{5.1}$$

其中， $\phi_n(t)$ 是随时间变化的系数， $P_n(x)$ 是标准勒让德多项式，在 $[-1,1]$ 上正交。速度场的分量 u_r 和 u_θ 可写为

$$\left\{\begin{array}{lll} u_r(r,\theta,t) & = & \frac{\partial\phi}{\partial r} = \sum_{n=0}^{+\infty} -(n+1)\frac{\phi_n(t)}{r^{n+2}}P_n(\cos\theta) \\ u_\theta(r,\theta,t) & = & \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\phi_n(t)}{r^{n+2}}\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \end{array}\right. . \tag{5.2}$$

我们还假设弹坑为非半球形，其中空腔的形状通过一组平移勒让德多项式进行分解（公式 2.2）。

由于我们假设流体无黏且为势流，因此流动由非定常伯努利方程支配。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}u^2-gz+\frac{p}{\rho}=\text{constant}, \tag{5.3}$$

其中， ρ 为流体密度， u 为速度的模， p 为压力， g 为重力加速度， z 为初始流体表面以下的垂直坐标。该方程在整个流体域内保持恒定。远离弹坑处， $u\to 0$、 $\phi\to 0$ ，且压力呈静水压力分布 $p(z)=p_0+\rho gz$，其中 p_0 为大气压力。这意味着该常数等于 p_0/ρ。

在弹坑边界处，即在 $r=R(\theta,\ t)$ （方程2.2），杨-拉普拉斯方程可写为

$$p(R)-p_0=\sigma C, \tag{5.4}$$

其中， $C(\theta,t)$ 表示界面的局部平均曲率， σ 表示表面张力。在柱坐标系中，曲率可表示为

$$C(\theta,t)=\frac{R^2+2\left(\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2-R\frac{\partial^2R}{\partial\theta^2}}{\left[R^2+\left(\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{5.5}$$

因此，弹坑边界处的伯努利方程写作

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{r=R}+\frac{1}{2}u(R)^2-gR\cos\theta+\frac{\sigma}{\rho}C=0. \tag{5.6}$$

我们还在弹坑边界处使用运动学边界条件

$$\frac{\partial R}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla R=\frac{\partial R}{\partial t}+u_\theta(R)\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\theta}=u_r(R). \tag{5.7}$$

方程 5.6 和 5.7 通过采用弹坑张开时间尺度的标度律进行无量纲化 $\tilde{t}_{max}$ （方程3.1）以及最大弹坑半径 $\tilde{R}_{max}$ （方程3.2），得到偏微分方程组

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t^*}\right)_{r^*=R^*}=-\frac{1}{2}u^*(R^*)^2+\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)^2\xi R^*\cos\theta-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)^2\frac{\xi}{\sqrt{\Phi}}\frac{\sqrt{Fr}}{We}C^* \\ \frac{\partial R^*}{\partial t^*}=u_r^*(R^*)-u_\theta^*(R^*)\frac{1}{R^*}\frac{\partial R^*}{\partial\theta} \end{array}\right. , \tag{5.8}$$

其中，星号记号表示使用 $\tilde{R}_{max}$ 和 $\tilde{t}_{max}$无量纲化后的量，例如$t^*=\tilde{t}/\tilde{t}_{max}$。

我们通过展开速度势（方程 5.8）至 $n_{max}=2$阶来求解这个微分方程组（方程

$$\phi^*(r^*,\theta,t^*)=\frac{\phi_0^*(t^*)}{r^*}+\frac{\phi_1^*(t^*)\cos\theta}{r^{*2}}+\frac{\phi_2^*(t^*)\left(3\cos^2\theta-1\right)}{2r^{*3}}. \tag{5.9}$$

速度场的各分量可写为（方程5.2）

$$\begin{cases} u_r^*(r^*,\theta,t^*) = -\dfrac{\phi_0^*(t^*)}{r^{*2}} - \dfrac{2\phi_1^*(t^*)\cos\theta}{r^{*3}} - \dfrac{3\phi_2^*(t^*)\left(3\cos^2\theta-1\right)}{2r^{*4}} \\ u_\theta^*(r^*,\theta,t^*) = -\dfrac{\phi_1^*(t^*)\sin\theta}{r^{*3}} - \dfrac{3\phi_2^*(t^*)\sin\theta\cos\theta}{r^{*4}} \end{cases} . \tag{5.10}$$

我们还将弹坑边界的位置（方程 2.2）展开至 $k_{max}=1$ 阶

$$R^*(\theta,t^*) = R_0^*(t^*) + R_1^*(t^*)(2\cos\theta - 1). \tag{5.11}$$

请注意，弹坑位置 $R^*(\theta,\ t^*)$ 表示为平移勒让德多项式之和，而速度势 $\phi^*(r^*,\ \theta,\ t^*)$ 则表示为标准勒让德多项式之和。

然后，我们将微分方程组（方程5.8）投影到一组平移勒让德多项式 P_m 上，其中伯努利方程展开至 $m_{max}=2$ 阶，运动学边界条件展开至 $m_{max}=1$ 阶。函数 X 的投影写作

$$\langle X, \bar{P}_m\rangle = (2m+1)\int_0^{\pi/2} X\bar{P}_m(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{5.12}$$

我们通过将伯努利方程和运动学边界条件关于 R_1^* 展开至三阶和四阶，简化方程。由此得到一个包含五个未知数的五个方程组成的方程组 $\phi_0^*(t^*)$、$\phi_1^*(t^*)$、$\phi_2^*(t^*)$、$R_0^*(t^*)$ 和 $R_1^*(t^*)$（方程 A1-A5）。

一般方程组（方程 5.8）及其投影（方程 A1-A5）还可以进一步简化。伯努利方程（方程 5.8）右侧的第三项对应于气水界面曲率所产生的表面张力效应。若忽略此项（对应于 $\sqrt{Fr}/We \ll 1$），方程5.8即可简化为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\phi^*}{\partial t^*}\right)_{r^*=R^*} = -\frac{1}{2}u^*(R^*)^2 + \frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)^2 \xi R^*\cos\theta \\ \dfrac{\partial R^*}{\partial t^*} = u_r^*(R^*) - u_\theta^*(R^*)\dfrac{1}{R^*}\dfrac{\partial R^*}{\partial\theta} \end{cases} . \tag{5.13}$$

在我们的实验中，对于 A 组（1.0×10^{-1}），$\sqrt{Fr}/We$ 比 B、C 和 D 组（分别为 4.9×10^{-2}、3.9×10^{-2}和 3.3×10^{-2}）大两到三倍。这与用于解释 A 组和其他组之间差异的表面张力论点一致（§3）。由于在我们的实验范围内，ξ 与 Fr 和 We 无关（Lherm 等，2022），这个不考虑表面张力的归一化方程组与撞击参数无关，可用于构建预测模型。

一般方程组和简化方程组均使用微分方程求解器，以初值问题的形式进行数值求解。因此，解取决于初始条件的选择。一方面，我们可以针对每项实验分别求解方程组。初始条件在 $\tilde{t}=1$ 处定义，该时刻对应撞击液滴的平流时间；随后通过对整个时间序列中的五个实验系数进行联合最小二乘反演，为每项实验拟合初始条件。另一方面，我们可以同时针对所有实验求解方程组。初始条件也在 $\tilde{t}=1$ 处定义，但通过对整个时间序列进行联合最小二乘反演，同时拟合所有实验的初始条件。该方法能够确定一组唯一的初始条件，可用于预测模型。在这两种情况下，拟合过程都是基于模型对所用初始条件的敏感性。初始条件的微小变化可能显著改变系数的时间演化。这种敏感性可能与精确的撞击条件有关，包括与液池表面的接触动力学以及撞击时液滴形状可能存在的变化。此外，对初始条件的敏感性可能还会因弹坑形状和速度势扩张的截断而增强，这可能】【。

不足以恰当地模拟弹坑的早期演化过程。这种敏感性将在附录中进一步详细探讨B。

现在我们定义了两个模型，它们使用不同的方程组和初始条件定义。第一个模型称为一般模型，考虑表面能效应，并使用一般方程组（方程 5.8）以及针对单次实验拟合的初始条件。这意味着初始条件组的数量等于实验的数量。例如，B 组中某次实验的初始条件为 $\phi_0^*(1) = -0.07 \pm 0.02$, $\phi_1^*(1) = -0.07 \pm 0.02$, $\phi_2^*(1) = 0.009 \pm 0.003$, $R_0^*(1) = 0.41 \pm 0.03$ 和 $R_1^*(1) = -0.28 \pm 0.02$。系数的不确定度对应于最小二乘反演中参数的 $1-\sigma$ 个标准差。附录 B 列出了所有实验的初始条件。第二个模型称为简化模型，使用简化方程组，不考虑表面张力且独立于撞击参数（方程 5.13），并使用针对所有实验拟合的初始条件。初始条件的参考组为

$$\begin{cases} \phi_0^*(1) = -0.21 \pm 0.01, \quad \phi_1^*(1) = 0.002 \pm 0.005, \quad \phi_2^*(1) = 0.0004 \pm 0.0005, \\ R_0^*(1) = 0.29 \pm 0.02, \quad\quad R_1^*(1) = -0.39 \pm 0.02. \end{cases} \tag{5.14}$$

鉴于存在不确定性，可以通过采用$\phi_1^*(1) = \phi_2^*(1) = 0$，进一步简化这组初始条件。它对应的初始速度场为$(u_r^* = -\phi_0^*(1)/r^{*2}, u_\theta^* = 0)$。未来应进一步探究这些初始条件的物理解释。它可能涉及液滴与液池之间的接触动力学，以及弹坑的早期演化。尽管如此，该简化模型是一个独立于撞击参数的预测模型，可用于预测我们实验所涵盖的 Fr 和 We 范围内弹坑和速度场的演化。不过，我们预计，超出这一范围时，模型的预测能力会受到限制，尤其是在低 Fr 和 We 的气泡捕获区域（例如 Pumphrey 和 Elmore（1990）），这是由于模型忽略了表面张力项，而且总体而言采用的截断阶数较低。

图 11 比较了速度势的实验系数 ϕ_0^* (a)、ϕ_1^* (b) 和 ϕ_2^* (c)，以及弹坑形状的实验系数 R_0^* (d) 和 R_1^* (e)，并与通用模型（彩色实线）和简化模型（黑色实线）所得的系数进行了比较。我们通过对径向分量和极向分量进行联合最小二乘反演（方程 5.2），利用实验速度场确定速度势的实验系数。我们还通过拟合弹坑边界位置，采用平移勒让德多项式展开（方程 2.2），并使用 § 2.4.1 中所述的方法，获得弹坑形状的实验系数。

对于所有情况，这些模型都很好地捕捉到了速度势的演化（图 11a–c）。具体而言，这些模型主要由 ϕ_1^* 主导；在拟合ϕ_2^*时准确性略低，这符合预期，因为这对应于更小尺度上的速度波动。这些结果与简化模型和图 10 中实验速度系数之间的良好一致性相符，尤其是在u_r,0(r,t)的斜率方面。尽管u_r,0(r,t)仍不如实验结果陡峭，但其下降速度明显快于 $1/r^2$。这些模型同样很好地捕捉到了弹坑形状的演化（图 11d–e）。需要注意的是，$\sim R_{max}$ 略微高估了实验最大弹坑半径，其最大 R_0^*系统性地小于 1。这可以通过能量平衡中忽略了表面能来解释（ Lherm 等（ 2022 ））。具体而言，当 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \lesssim 0.4$ 和 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max} \gtrsim 1.7$ 时，R_1^* 略有低估，且其变化速率高于实验数据。这分别对应于弹坑的早期张开阶段和弹坑塌陷结束阶段，包括中心射流的形成；在后一阶段，需要将 R 扩张到更高程度（至少为 $k = 2$），才能模拟所观测到的空腔变形程度（例如图 4c）。

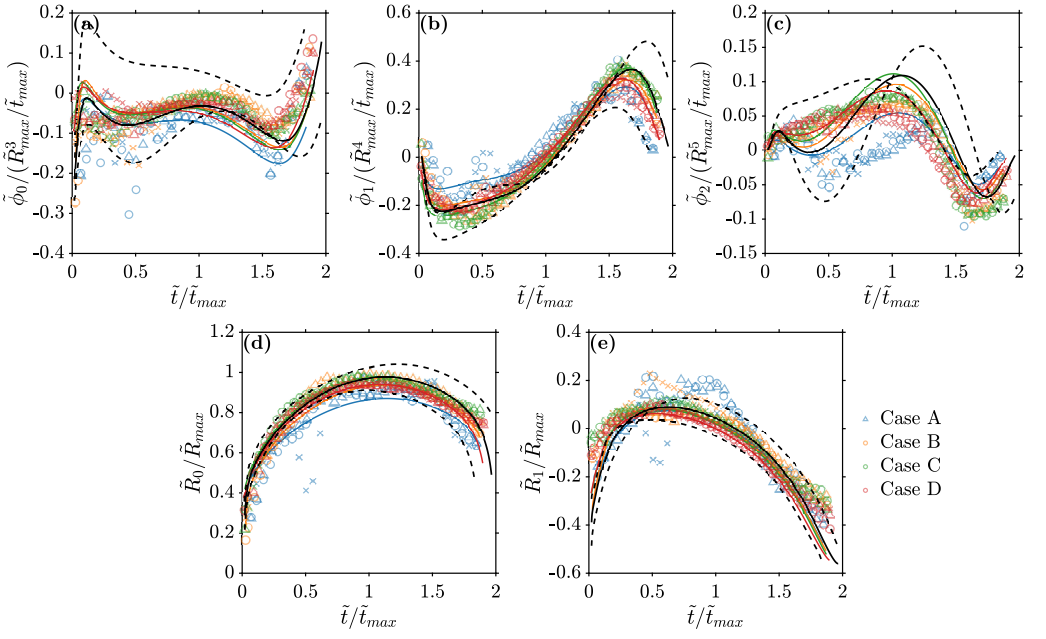

图 11：四种情况下，系数 ϕ_0^* (a)、ϕ_1^* (b)、ϕ_2^* (c)、R_0^* (d) 和 R_1^* (e) 随以陨坑张开时间尺度 $\tilde{t}/\tilde{t}_{max}$ 归一化的时间变化。对于每种情况，不同类型的标记对应不同的实验。彩色实线表示一般模型的解，其中初始条件根据相应情况下的单个实验拟合得出。黑色实线表示简化模型的解，其中初始条件根据所有实验同时拟合得出。黑色虚线表示简化模型的解，其中初始条件相对于其参考值调整了 ±25%。

需要注意的是，预测模型采用简化方程组（方程 5.13）和参考初始条件组（方程 5.14），与实验数据特别吻合。简化模型对初始条件的敏感性通过两个解进行了说明，其中初始条件相对于其参考值被修改了 ±25%（图 11，黑色虚线）。

尽管由于表面张力效应，A 组与 B、C 和 D 组略有不同（见 §3），但这些模型准确捕捉了总体的撞击坑形成动力学。具体而言，当 $0.5 \lesssim \tilde{t}/\tilde{t}_{max} \lesssim 1.4$ 时，和 R_1^* 被显著低估，这与预期一致，因为模型未考虑导致这种空腔变形的毛细波传播。

图 12 比较了 B 组中实验速度场（a-c）的径向分量（a-b）和极向分量（c-d）的快照，以及预测简化模型（b-d）计算得到的对应分量。比较涵盖开放阶段（i）的不同时间、弹坑达到最大尺寸前（ii）以及闭合阶段（iii）。这表明，在成坑过程的所有阶段，简化模型和实验得到的速度场都非常相似。观察到的差异主要体现在速度大小上，尤其是在弹坑和初始水面（$\theta = \pm\pi/2$）附近。其他组也得到了类似结果。实验速度场与简化模型之间的良好吻合表明，模型中采用的截断阶数（平移勒让德多项式的阶数为 $k = 1$，用于 R^*；勒让德多项式的阶数为 $n = 2$，用于 ϕ^*）足以准确捕捉流体动力学。

图 1　3 比较了与 B 组类似的背光实验中得到的弹坑形状　e

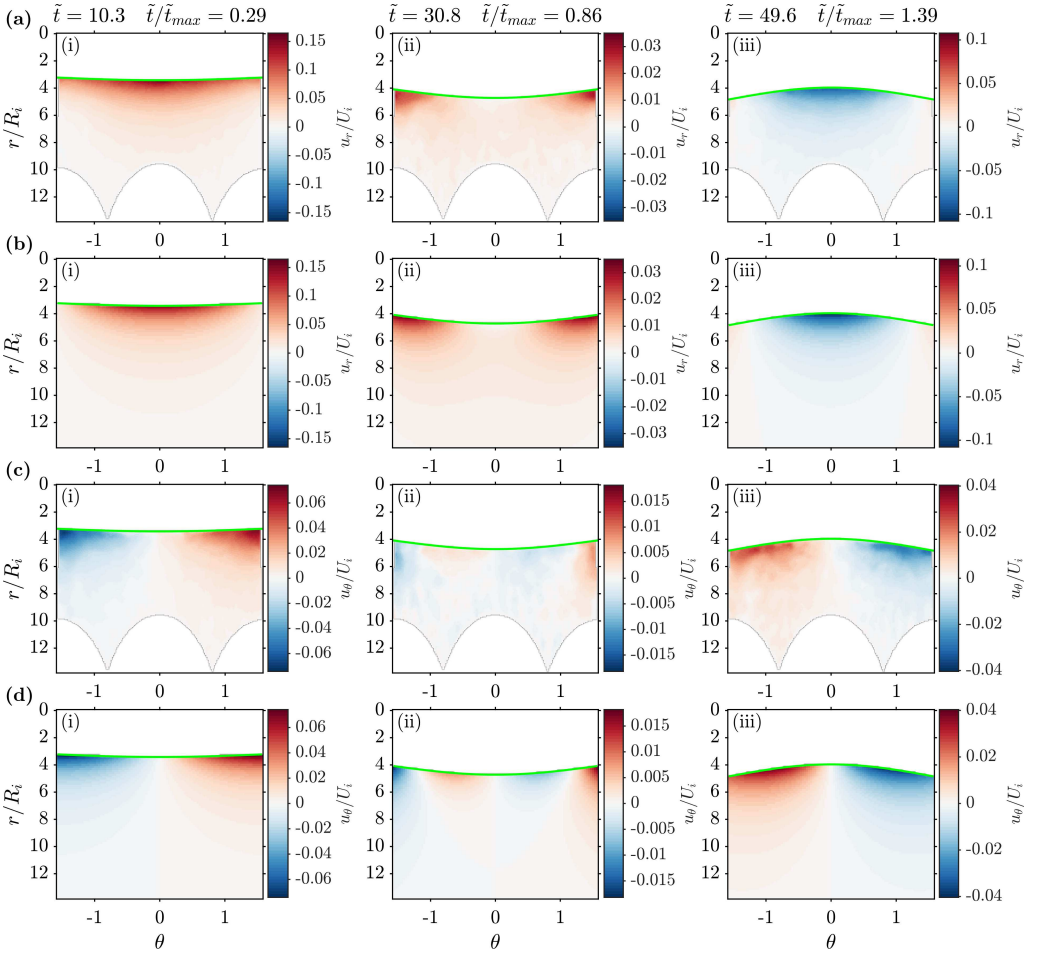

图 12：B 组中实验数据（a、c）和简化模型（b、d）所得速度场的径向分量（a、b）和极坐标分量（c、d）。这些快照分别对应弹坑正在张开（i）、接近最大尺寸（ii）和正在闭合（iii）的时刻。实心绿线表示实验弹坑边界。

B ($Fr = 442$) 与预测性简化模型计算得到的弹坑边界位置。模型很好地捕捉到了弹坑形状，与图11d-e 的结果一致。具体而言，在弹坑张开阶段刚开始时（图 13，i），模型高估了弹坑宽度，未能准确捕捉空腔的平底形状。在弹坑张开阶段及弹坑塌陷阶段初期（图 13，iii-v），模型略微低估了弹坑深度和宽度，与图 11d-e 中的系数一致。最后，在弹坑塌陷时（图 13，vi），模型显示了中心射流的起始过程，但明显缺乏足够高的阶数来描述空腔的垂直壁面。图 13 还比较了 B 组获得的实验速度场与简化模型得到的速度场。两者吻合良好，这与图 12的分析一致。

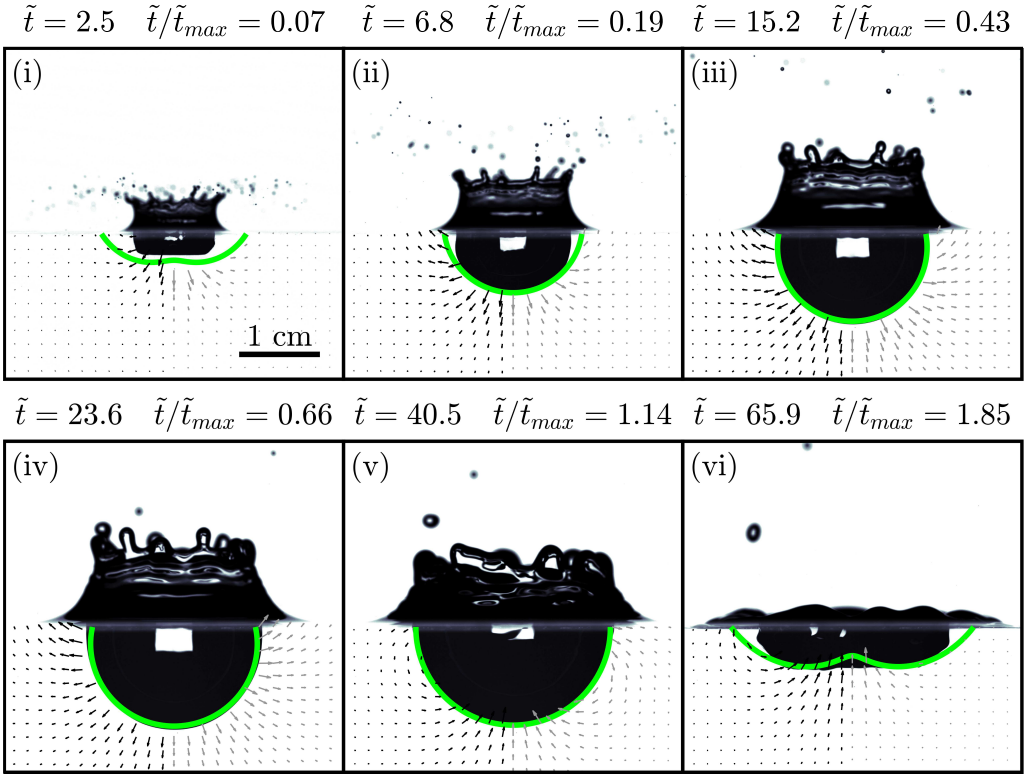

图 13：与 B 组类似的背光实验中（Fr = 442）弹坑形状的时间演变。实心绿线表示简化模型得到的弹坑边界。黑色箭头表示实验速度场，并按每个快照中的最大值归一化。灰色箭头表示简化模型得到的速度场，并按每个快照中的最大值归一化。

6. 结论

本文对液滴撞击深液池所产生弹坑周围的速度场进行了定量分析。利用新的高分辨率粒子图像测速测量，我们同时获得了空腔周围速度场的演变和弹坑形状。我们发现，当两个无量纲数足够大时（B、C 和 D 组），在给定的 t/t_{max} 下，空腔形状和速度场似乎独立于 Fr 和 We。速度场主要由平移勒让德多项式的 0 阶和 1 阶项构成，其中径向分量的 0 阶项 $u_{r,}$ 0(r, t) 的衰减速度快于 $1/r^2$。此外，速度场的径向分量主要由标准勒让德多项式的 1 阶项构成。这与弹坑的增长并不矛盾，因为径向分量的 1 阶项在半球上的平均值不为零。实验还显示，2 阶项的贡献显著，尤其是在弹坑变形严重时。这可能与空腔的非半球形（1 阶）形状有关。我们还发现，弹坑达到最大尺寸时，速度场并未消失。

在先前的速度模型中（Engel 1967；Maxwell 1977；Leng 2001；Bisighini等2010），弹坑形状和/或速度场受到严格限制。这些模型无法解释我们实验测量中观察到的特性，

尤其是速度场径向分量的径向依赖关系，以及空腔形状的演变。因此，我们开发了一种半解析模型，该模型基于非定常伯努利方程的勒让德多项式展开，并结合弹坑边界处的运动学边界条件。假设伯努利方程中的表面张力项可以忽略不计，我们定义了一种与撞击参数无关的简化模型，可在我们的实验所涵盖的 Fr 和 We 数范围内预测弹坑形状和速度场的演变。尽管该模型对初始条件较为敏感，但通过采用一组固定的拟合初始条件，仍可实现预测。特别是，该模型能够捕捉中心射流的形成。然而，该模型的一个固有局限是，它假设空腔半径是 θ 的双射函数。在开放阶段和陨石坑闭合阶段的一部分（包括中心射流的形成）中，这一假设成立；但当中心射流达到临界高度时，该假设最终失效，因为在给定的 θ 处，空气/水界面可能被穿越两次。因此，该模型无法用于描述中心射流的完整生长过程。

致谢。 我们感谢 M. Moulin 在实验装置的设计和搭建过程中提供的帮助。我们感谢三位匿名审稿人提出的宝贵意见，这些意见显著提升了稿件的质量。

资金支持。本研究得到了欧洲研究理事会（ERC）欧洲联盟地平线2020研究与创新计划的资助（资助编号：716429）。地球科学研究所（ISTerre）是Labex OSUG@2020（ANR10 LABX56）的一部分。本研究还获得了原子压力物质中心（CMAP）的部分资助。该中心是美国国家科学基金会（NSF）物理前沿中心，资助编号为PHY-2020249。本材料中表达的任何观点、研究结果、结论或建议均属于作者个人意见，不一定反映美国国家科学基金会的观点。

利益声明。作者声明不存在利益冲突。

作者 ORCID。 V. Lherm，https://orcid.org/0000-0001-5814-0637；R. Deguen，https://orcid.org/0000-0002-6883-0655

作者贡献。V.L. 和 R.D. 设计了这项研究，推导了模型，并参与数据分析和结论得出。V.L. 开展了实验。V.L. 和 R.D. 撰写了论文。

附录A. 勒让德多项式模型方程

勒让德多项式模型方程对应于方程5.8在运动学边界条件下投影至 $m_{max} = 1$ 阶，并在伯努利方程下投影至 $m_{max} = 2$阶。投影后的边界条件和伯努利方程分别按R_1^*展开至四阶和三阶。于是，边界条件写作

$$\dot{R}_0^* = \frac{1}{6R_0^{*8}}\left\{-6\phi_0^* R_0^{*2}\left(R_0^{*2}R_1^{*2} + R_0^{*4} + R_1^{*4}\right) - 2\phi_1^* R_0^*\left(R_0^{*3}R_1^* + 10R_0^{*2}R_1^{*2} + 6R_0^* R_1^{*3} + 3R_0^{*4} + 21R_1^{*4}\right) + 3\phi_2^* R_1^*(3R_0^* - R_1^*)\left(R_0^{*2} + 3R_1^{*2}\right)\right\} + O(R_1^{*5}), \tag{A 1}$$

$$\dot{R}_1^* = \frac{1}{140R_0^{*8}}\left\{14R_0^{*3}R_1^*[20R_0^*(\phi_0^* R_0^* + 2\phi_1^*) + 9\phi_2^*] + 6R_0^* R_1^{*3}[56R_0^*(\phi_0^* R_0^* + 5\phi_1^*) + 75\phi_2^*] + 84R_0^{*2}R_1^{*2}(2\phi_1^* R_0^* - 15\phi_2^*) + 15R_1^{*4}(68\phi_1^* R_0^* - 189\phi_2^*) - 35R_0^{*4}(4\phi_1^* R_0^* + 9\phi_2^*)\right\} + O(R_1^{*5}), \tag{A 2}$$

而伯努利方程可写为

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{1680R_0^{*11}}\Big\{&28R_0^{*2}\Big[R_0^{*3}\Big(20R_0^{*3}\dot{\phi}_0^{*}\Big(3R_0^{*2}+R_1^{*2}\Big)+10\phi_0^{*2}\Big(3R_0^{*2}+10R_1^{*2}\Big)\\
&+2R_0^{*}\dot{\phi}_1^{*}\Big(-10R_0^{*2}R_1^{*}+15R_0^{*}R_1^{*2}+15R_0^{*3}-12R_1^{*3}\Big)-3R_1^{*}\dot{\phi}_2^{*}\Big(-4R_0^{*}R_1^{*}+15R_0^{*2}\\
&+30R_1^{*2}\Big)\Big)+20\phi_0^{*}\phi_1^{*}R_0^{*}\Big(-5R_0^{*2}R_1^{*}+15R_0^{*}R_1^{*2}+3R_0^{*3}-21R_1^{*3}\Big)+6\phi_1^{*2}\Big(-15R_0^{*2}R_1^{*}\\
&+77R_0^{*}R_1^{*2}+10R_0^{*3}-84R_1^{*3}\Big)\Big]+168\phi_2^{*}R_0^{*}\Big[-9R_0^{*2}R_1^{*}(5\phi_0^{*}R_0^{*}+7\phi_1^{*})+7R_0^{*}R_1^{*2}(3\phi_0^{*}R_0^{*}\\
&+28\phi_1^{*})-36R_1^{*3}(7\phi_0^{*}R_0^{*}+13\phi_1^{*})+15\phi_1^{*}R_0^{*3}\Big]+72\phi_2^{*2}\Big[-70R_0^{*2}R_1^{*}+558R_0^{*}R_1^{*2}\\
&+35R_0^{*3}-720R_1^{*3}\Big]-\frac{35}{\sqrt{\Phi}We}\mathrm{B}\,(1/2,5/8)^2\,\xi R_0^{*6}\Big[-3\sqrt{6}\sqrt{Fr}R_0^{*2}R_1^{*2}\\
&+3\sqrt{6}\sqrt{Fr}R_0^{*}R_1^{*}\Big(R_1^{*2}-R_0^{*2}\Big)-3\sqrt{6}\sqrt{Fr}R_0^{*4}+2\sqrt{\Phi}WeR_0^{*5}R_1^{*}+6\sqrt{\Phi}WeR_0^{*6}\Big]\Big\}\\
&+O(R_1^{*4}),
\end{aligned}
\tag{A 3}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{280R_0^{*11}}\Big\{&-14R_0^{*2}\Big[4R_0^{*2}R_1^{*}\Big(R_0^{*3}\dot{\phi}_0^{*}\Big(5R_0^{*2}+3R_1^{*2}\Big)+10\phi_0^{*2}\Big(R_0^{*2}+3R_1^{*2}\Big)\Big)\\
&-20\phi_0^{*}\phi_1^{*}R_0^{*}\Big(-5R_0^{*2}R_1^{*}+9R_0^{*}R_1^{*2}+R_0^{*3}-21R_1^{*3}\Big)+2R_0^{*4}\dot{\phi}_1^{*}\Big(10R_0^{*2}R_1^{*}-9R_0^{*}R_1^{*2}\\
&-5R_0^{*3}+12R_1^{*3}\Big)+3\phi_1^{*2}\Big(44R_0^{*2}R_1^{*}-63R_0^{*}R_1^{*2}-5R_0^{*3}+256R_1^{*3}\Big)\Big]\\
&+42\phi_2^{*}R_0^{*}\Big[3\phi_0^{*}R_0^{*}\Big(-4R_0^{*2}R_1^{*}+63R_0^{*}R_1^{*2}+5R_0^{*3}-32R_1^{*3}\Big)+2\phi_1^{*}\Big(-49R_0^{*2}R_1^{*}\\
&+156R_0^{*}R_1^{*2}+9R_0^{*3}-396R_1^{*3}\Big)\Big]+6R_0^{*5}\dot{\phi}_2^{*}\Big[-14R_0^{*2}R_1^{*}+126R_0^{*}R_1^{*2}+35R_0^{*3}-40R_1^{*3}\Big]\\
&+9\phi_2^{*2}\Big[-496R_0^{*2}R_1^{*}+864R_0^{*}R_1^{*2}+35R_0^{*3}-4960R_1^{*3}\Big]\\
&-\frac{1120\pi}{\sqrt{\Phi}We}\frac{\Gamma\,(5/8)^2}{\Gamma\,(1/8)^2}\xi R_0^{*6}(R_0^{*}+R_1^{*})\Big[3\sqrt{6}\sqrt{Fr}R_0^{*}R_1^{*2}+2\sqrt{\Phi}WeR_0^{*5}\Big]\Big\}\\
&+O(R_1^{*4}),
\end{aligned}
\tag{A 4}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{336R_0^{*11}}\Big\{R_0^{*2}\Big[R_0^{*3}\Big(4\Big(56R_1^{*2}\Big(R_0^{*3}\dot{\phi}_0^* + 5\phi_0^{*2}\Big) - 4R_0^*R_1^*\dot{\phi}_1^*\Big(-21R_0^*R_1^* + 14R_0^{*2} \\
+24R_1^{*2}\Big) + 3\dot{\phi}_2^*\Big(-42R_0^{*2}R_1^* + 22R_0^*R_1^{*2} + 7R_0^{*3} - 120R_1^{*3}\Big)\Big) \\
-\frac{7}{\sqrt{\Phi}We}\mathrm{B}\,(1/2,5/8)^2\,\xi R_1^*\Big(3\sqrt{6}\sqrt{Fr}R_0^{*3}R_1^* - 21\sqrt{6}\sqrt{Fr}R_0^{*2}R_1^{*2} \\
+4\sqrt{\Phi}WeR_0^{*6}\Big)\Big) - 1120\phi_0^*\phi_1^*R_0^*R_1^*\Big(-3R_0^*R_1^* + R_0^{*2} + 6R_1^{*2}\Big) + 84\phi_1^{*2}\Big(-12R_0^{*2}R_1^* \\
+67R_0^*R_1^{*2} + R_0^{*3} - 96R_1^{*3}\Big)\Big] + 84\phi_2^*R_0^*\Big[3\phi_0^*R_0^*\Big(-12R_0^{*2}R_1^* + 11R_0^*R_1^{*2} + R_0^{*3} \\
-96R_1^{*3}\Big) + 2\phi_1^*(R_0^* - 6R_1^*)\Big(-9R_0^*R_1^* + 3R_0^{*2} + 46R_1^{*2}\Big)\Big] + 18\phi_2^{*2}\Big[-148R_0^{*2}R_1^* \\
+1116R_0^*R_1^{*2} + 23R_0^{*3} - 1860R_1^{*3}\Big]\Big\} \\
+O(R_1^{*4}).
\end{aligned}
\tag{A 5}
$$

方程组的简化版本（方程5.13）可通过在方程$\sqrt{Fr}/We = 0$中使用A 1-A 5。

附录B. 勒让德多项式模型的初始条件

图 14 展示了通用模型的初始条件（通过分别拟合各项实验获得）以及简化模型的初始条件（通过同时拟合所有实验获得）。二者均定义在 $\tilde{t} = 1$，并使用联合最小二乘反演，对整个时间序列中的实验系数进行反演。初始条件的不确定性对应于最小二乘反演中参数的 $1-\sigma$ 标准差。

在较低的 $\sqrt{Fr}/We$ 下，对应于较高的 Fr 和 We 数（B、C、D 组），初始条件的弥散大于与最小二乘反演相关的不确定性；而在较高的 $\sqrt{Fr}/We$ 下，对应于中等的 Fr 和 We 数（A 组），初始条件聚集在反演不确定性范围内。较高 Fr 和 We 下的这种弥散表明，撞击时弹坑形状和速度场具有更高的变异性。这可能与对确切撞击条件的更高敏感性有关，其中可能包括与液池表面的接触动力学以及撞击时液滴形状的变异性。此外，我们没有发现关于 Fr 或 We 的任何次级依赖关系。最后，通过同时拟合所有实验获得的简化模型初始条件，与分别拟合各个实验获得的初始条件相似。

对于给定情形（A 组除外），观察到的弥散相对较大，这表明模型对初始条件较为敏感。例如，将所有初始条件改变 ±25% 会显著改变系数随时间的演化（图 11，黑色虚线）。为进一步探究这种对初始条件的敏感性，我们对简化模型进行了定量测试。图 15 显示了相对于简化模型的模型系数变化率，该变化由单独修改一个初始条件（使其偏离方程 5.14中定义的参考值）所导致。相对变化 δX定义为 $X = \{\phi_0^*, \phi_1^*, \phi_2^*, R_0^*, R_1^*\}$, $X - X_{\mathrm{ref}}$的绝对变化，并以简化模型的均方根 $\mathrm{RMS}(X_{\mathrm{ref}})$进行缩放。我们选择用简化模型的均方根缩放绝对变化，以确保相对变化在 $X_{\mathrm{ref}} \to 0$时不会发散。请注意，此敏感性测试仅考察独立参数修改的作用。初始条件的耦合修改

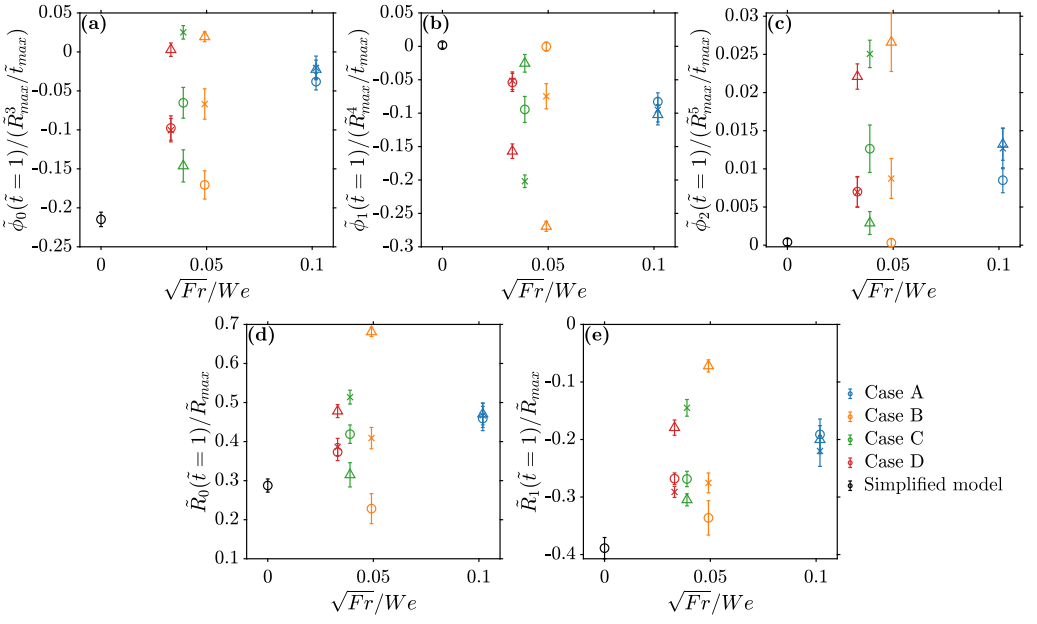

图14：通过对整个时间序列中的实验系数进行联合最小二乘反演，得到勒让德多项式模型的初始条件（在 $\tilde{t}=1$），对应系数 ϕ_0^* (a)、ϕ_1^* (b)、ϕ_2^* (c)、R_0^* (d) 和 R_1^* (e)。彩色标记对应一般模型，其初始条件通过分别拟合各项实验得到。黑色圆圈对应简化模型，其初始条件通过同时拟合所有实验得到。不确定性对应于最小二乘反演中参数的 $1-\sigma$ 个标准差。

（如图11中黑色虚线所示）可能会显著放大系数演变的变化。

在参数修改范围（ ±40%）内，系数通常更容易受到弹坑形状初始条件修改的影响，即 $R_0^*(1)$（图15d）和 $R_1^*(1)$（图15e）。此外，系数 R_0^* 的改变量最小，最大变化为 ~ 30%（图15iv）；而 ϕ_0^*、ϕ_1^*、ϕ_2^* 和 R_1^* 的变化量分别达到 ~ 300%（图15i）、~ 150%（图15ii）、~ 200%（图15iii）和 ~ 100%（图15v）。最后，系数随时间的变化并不均匀。例如，ϕ_0^* 随时间变化相对均匀（就幅度而言），且不受初始条件修改的影响；而 ϕ_2^* 的变化则异质得多，并且取决于修改后的初始条件。

参考文献

Agbaglah, Gilou, Josserand, Christophe & Zaleski, Stéphane 2013 液体边缘的纵向不稳定性。*Physics of Fluids* **25** (2), 022103. Allen, Robert Francis 1975 表面张力在飞溅中的作用。《胶体与界面科学杂志》**51** (2), 350–351. Badro, James, Aubert, Julien, Hirose, Kei, Nomura, Ryuichi, Blanchard, Ingrid, Borensztajn, Stephan & Siebert, Julien 2018 镁在地球地幔与地核之间的分配及其驱动早期出溶地磁发电机的潜力。《地球物理研究快报》**45** (24), 13,240–13,248. Barnhart, C. J. & Nimmo, F. 2011 撞击挖掘在黏土矿物向诺亚纪地表扩散中的作用。《地球物理研究杂志：行星》**116** (E1)。

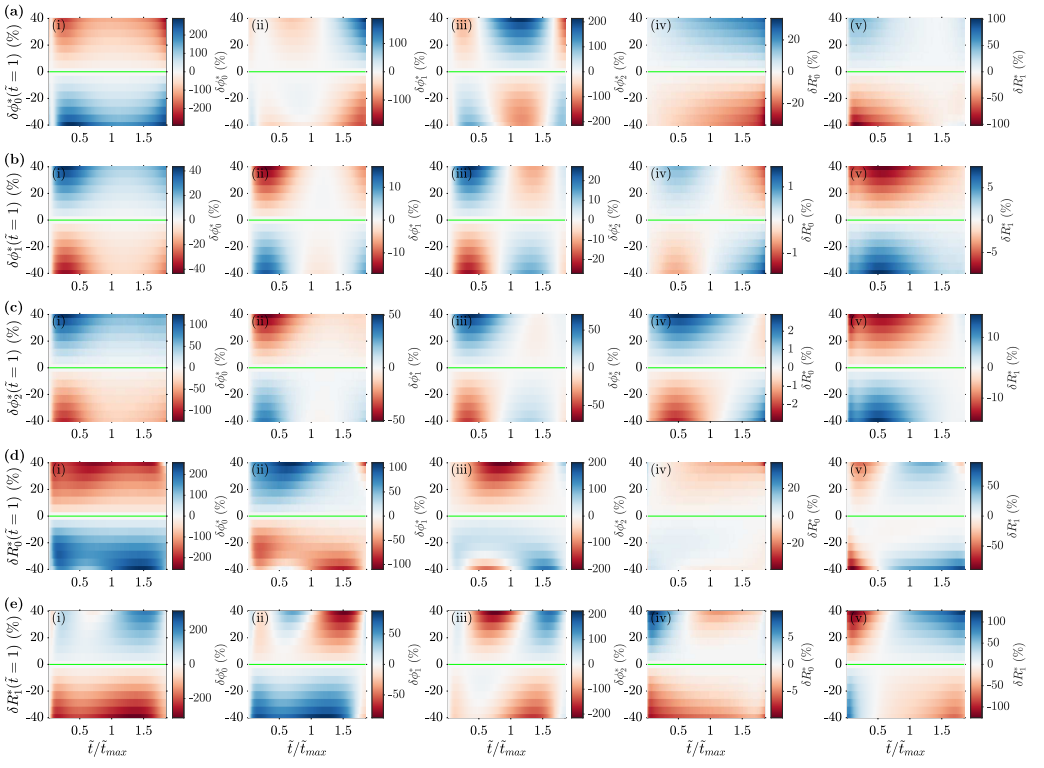

图15：简化模型对初始条件各项单独变化的敏感性。每一行对应于单个初始条件相对于方程5.14中定义的参考值的相对变化$\delta X(1) = [X(1) - X\text{ref}(1)]/X\text{ref}(1)$（以 % 表示）。每一列对应于给定初始条件变化时，系数 X 在整个时间序列中的相对变化$\delta X = (X - X\text{ref})/\text{RMS}(X\text{ref})$（以 % 表示）。相对变化 δX 定义为 X 相对于 $X - X\text{ref}$ 的绝对变化，并以简化模型的均方根 RMS(Xref) 进行缩放。

Bisighini, Alfio, Cossali, Gianpietro E., Tropea, Cameron & Roisman, Ilia V. 2010 液滴撞击半无限液体靶后的弹坑演化。*Physical Review E* **82** (3), 036319. Clanet, Christophe, Hersen, Fabien & Bocquet, Lydéric 2004 打水漂成功的秘诀。*Nature* **427** (6969), 29–29. Elmore, P. A., Chahine, G. L. & Oguz, H. N. 2001 液滴撞击后可重现气泡卷入的空腔和流动测量。*Experiments in Fluids* **31** (6), 664–673. Engel, Olive G. 1962 液滴与液体的碰撞。第二部分——流体撞击中的弹坑深度。技术报告。美国国家标准局，马里兰州盖瑟斯堡。 Engel, Olive G. 1966 流体撞击中的弹坑深度。*Journal of Applied Physics* **37** (4), 1798–1808. Engel, Olive G. 1967 流体撞击中弹坑深度的初始压力、初始流速及时间依赖性。*Journal of Applied Physics* **38** (10), 3935–3940. Fedorchenko, Alexander I. & Wang, An-Bang 2004 液滴撞击液体表面的一些共同特征。*Physics of Fluids* **16** (5), 1349–1365. Fischer, Rebecca A., Nakajima, Yoichi, Campbell, Andrew J., Frost, Daniel J., Harries, Dennis, Langenhorst, Falko, Miyajima, Nobuyoshi, Pollok, Kilian & Rubie, David C. 2015 Ni、Co、V、Cr、Si 和 O 的高压金属–硅酸盐分配。*Geochimica et Cosmochimica Acta* **167**, 177–194. Haynes, William M. 2016 *CRC*化学与物理手册。CRC出版社。 Hines, R. L. 1966 静电雾化与喷涂。*Journal of Applied Physics* **37** (7), 2730– 2736.

Krechetnikov, Rouslan & Homsy, George M. 2009 液滴飞溅问题中的冠状形成不稳定现象。《胶体与界面科学杂志》331 (2), 555–559. Kurosawa, Kosuke & Takada, Satoshi 2019 撞击坑形成力学：预测喷出物速度分布和瞬态撞击坑半径的正向方法。《伊卡洛斯》317, 135–147. Landeau, Maylis, Deguen, Renaud, Phillips, Dominic, Neufeld, Jerome A., Lherm, Victor & Dalziel, Stuart B. 2021 大型地球形成撞击中的金属—硅酸盐混合。《地球与行星科学快报》564, 116888. Leng, Liow Jong 2001 球形液滴的飞溅形成。《流体力学杂志》427, 73–105. Lherm, V. & Deguen, R. 2018 核形成期间的小尺度金属/硅酸盐平衡：拉伸增强扩散对混合的影响。《地球物理研究杂志：固体地球》 123 (12), 10,496–10,516. Lherm, Victor, Deguen, Renaud, Alboussière, Thierry & Landeau, Maylis 2021 液滴撞击实验中的瑞利–泰勒不稳定性。《物理评论：流体》6 (11), 110501. Lherm, V., Deguen, R., Alboussière, T. & Landeau, M. 2022 撞击坑形成实验中的瑞利–泰勒不稳定性。《流体力学杂志》937. Liow, J.-L. & Cole, D. E. 2009 撞击水滴的高帧频粒子图像测速研究。载于《第28届高速成像与光子学国际大会》，第7126卷，200–210页。国际光学工程学会。 Macklin, W. C. & Metaxas, G. J. 1976 液滴在液层上的飞溅。《Journal of Applied Physics》47 (9), 3963–3970. Maxwell, DE 1977 用于撞击坑形成、喷射和翻转片的简单Z模型。载于《撞击与爆炸坑：行星与地球影响》，1003–1008页。美国纽约：培格曼出版社。 Melosh, H. J. 1989 《撞击坑形成：一种地质过程》。纽约：牛津大学出版社。 Morton, David, Rudman, Murray & Jong-Leng, Liow 2000 飞溅液滴所产生流动状态的研究。《Physics of Fluids》12 (4), 747–763. Murphy, David W., Li, Cheng, d'Albignac, Vincent, Morra, David & Katz, Joseph 2015 雨滴撞击油膜时的飞溅行为及含油海洋气溶胶生成。《流体力学杂志》780, 536–577. Musunuri, Naga, Benouaguef, Islam, Amah, Edison, Blackmore, Denis, Fischer, Ian S. & Singh, Pushpendra 2017 液滴或水源撞击所诱导的水面流动研究。载于《美国机械工程师学会2017流体工程分部夏季会议论文集》。美国机械工程师学会数字馆藏。 Oguz, Hasan N. & Prosperetti, Andrea 1990 液滴撞击液体表面所引起的气泡卷入。《流体力学杂志》219, 143–179. Olson, Peter, Sharp, Zachary & Garai, Susmita 2022 卵石吸积过程中的核分异。《地球与行星科学快报》587, 117537. Prosperetti, A & Oguz, H N 1993 《液滴对液体表面的撞击与雨的水下噪声》。《流体力学年度评论》25 (1), 577–602. Pumphrey, Hugh C. & Elmore, Paul A. 1990 液滴撞击导致的气泡卷入。《流体力学杂志》220, 539–567. Ray, Bahni, Biswas, Gautam & Sharma, Ashutosh 2015 液滴撞击液池过程中的状态。《流体力学杂志》768, 492–523. Rein, Martin 1993 液滴撞击固体和液体表面的现象。《流体动力学研究》12 (2), 61–93. Rubie, D. C., Nimmo, F. & Melosh, H. J. 2015 9.03——地球核心的形成。载于《地球物理学论丛》（第二版）（编者：Gerald Schubert），43–79页。牛津：爱思唯尔。 Stevenson, D. J. 1990 核形成的流体动力学。载于《地球的起源》（编者：Horton E. Newsom & John H. Jones），231–249页。纽约：牛津大学出版社。 van Rijn, Cees J. M., Westerweel, Jerry, van Brummen, Bodjie, Antkowiak, Arnaud & Bonn, Daniel 2021 液滴撞击液体表面后的自相似射流演化。《物理评论：流体》6 (3), 034801. Worthington, Arthur Mason 1908 《飞溅研究》。朗文、格林公司。 Zhang, Li V., Brunet, Philippe, Eggers, Jens & Deegan, Robert D. 2010 冠状飞溅中的波长选择。《Physics of Fluids》22 (12), 122105. Zhou, Kaili, Wang, Shurong, Lu, Xiaohui, Chen, Hong, Wang, Lin, Chen, Jianmin, Yang, Xin & Wang, Xiaofei 2020 雨滴撞击海水和土壤所产生喷雾气溶胶的生成通量与化学特征。《地球物理研究杂志：大气》125 (13), e2019JD032052.