arXiv:2305.03791v1 [math.FA] 5 May 2023

不动点定理：变体、仿射背景及若干推论

Anderson L. A. de Araujo[1] 和 Edir J. F. Leite[1]

[1] *Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática, Av. Peter Henry Rolfs, s/n, Viçosa, MG, Brazil, CEP 36570-900,E-mail:* anderson.araujo@ufv.br, edirjrleite@ufv.br

摘要

本文将介绍仿射背景和经典背景下不动点定理的变体，这些结果是一般布劳威尔不动点定理的推论。例如，仿射结果将使我们能够在仿射球上进行研究。仿射球通过 Lutwak、Yang 和 Zhang 在论文《Sharp affine Sobolev inequalities》，《微分几何杂志》62（2002年），17-38 中引入的仿射 L^p 泛函$\mathcal{E}_p^p$，Ω定义；该泛函 $p>1$ 不是凸的，也不表示$\mathbb{R}^m$中的范数。此外，我们还讨论泛函在某一点不连续时的相关结果。作为一项应用，我们研究了由 Φ_m 给出、定义在维数为 m 的子空间 W_m 上的仿射泛函序列的临界点

$$\Phi_m(u)=\frac{1}{p}\mathcal{E}_{p,\Omega}^p(u)-\frac{1}{\alpha}\|u\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha-\int_\Omega f(x)u dx,$$

其中 $1<\alpha<p$, $[W_m]_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 和 $f\in L^{p'}(\Omega)$ 中稠密，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$。

关键词：不动点定理；仿射球；仿射 L^p 能量；非平凡临界点

2020年 MSC：47H10；93B24；46T20；35B38

1 引言

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ 是一个有界开子集。对于函数 $u\in W^{1,p}_0(\Omega)$，仿射泛函（或能量）定义为

$$\mathcal{E}_{p,\Omega}(u):=\gamma_{n,p}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\|\nabla_\xi u\|_{L^p(\Omega)}^{-n}\,d\sigma(\xi)\right)^{-\frac{1}{n}},$$

其中 $\gamma_{n,\ p} = (2\omega_{n+p-2})^{-1}\,(n\omega_n\omega_{p-1})\,(n\omega_n)^{p/n}$。在本文中，$\nabla_\xi u(x)$ 表示关于方向 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 的方向导数 $\nabla u(x)\cdot\xi$，而 ω_κ 表示 $\mathbb{R}^\kappa$ 中欧几里得单位球的体积。

以下是与 $W^{1,\ p}_{0}(\Omega)$ 上此泛函相关的一些重要性质，其中 $p>1$。具体而言：

(I) $\mathcal{E}^p_{p\ ,\Omega}$ 在 $W^{1,\ p}_{0}(\Omega)$ 上不定义范数（参见 的命题 4.1）；(II) 仿射 能量，$_\Omega$ 在 $W^{1,\ p}_{0}(\Omega)$ 上不是凸的（参见 [15] 的命题 4.1）；(III) 对于任意 $1 \le s < p^*$，仿射球 $\overline{B}_\varrho(0) := \{u \in W^{1,p}_0(\Omega); \mathcal{E}_{p,\Omega}(u) \le \varrho\}$ 紧嵌入到 $L^s(\Omega)$ 中，其中在 $1<p<n$ 情形下 $p^* := \dfrac{np}{n-p}$，而在 $p \ge n$ 情形下，对任意 $s \ge 1$ 均成立（参见 [21] 的定理 6.5.3）；并且在 $W^{1,\ p}_{0}(\Omega)$ 中无界（参见 [11] 的定理 2）；

(IV) 仿射 L^p 泛函 $\mathcal{E}^p_{p\ ,\Omega}$ 在 $W^{1,\ p}_{0}(\Omega)$ 中强连续且 Fr´echet 可微（参见 [16] 的定理 1.1）；

(V) 仿射 L^p 能量$\mathcal{E}^p_{p\ ,\Omega}$ 在 $W^{1,\ p}_{0}(\Omega)\backslash\{0\}$ 上 C^1 可微（参见[16]的定理 1.1）。

<escape>2002年，引入了仿射</escape> L^p <escape>能量</escape>$\mathcal{E}_p$<escape>，</escape>$_\Omega$ <escape>用于</escape> [18] <escape>以</escape> $p>1$<escape>。随后，相关研究取得了若干进展（例如参见</escape> [5, 7<escape>–</escape><escape>12</escape><escape>，</escape><escape>15</escape><escape>–</escape>19, 21]<escape>）。关于</escape> $p=1$<escape>，请参阅</escape> [14] <escape>及其中的参考文献。</escape>

设 $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots\}$ 为 $W^{1,\ _0\ p}(\Omega)$ 的一个绍德基（参见 [2, 6]）。对于每个 $m \ge 1$，令

$$W_m := [w_1, w_2, \dots, w_m]$$

为由 $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 生成的 $W^{1,\ p}_{0}(\Omega)$ 的 m 维子空间，范数由 $W^{1,\ p}_{0}(\Omega)$ 中的范数诱导，并考虑 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$。我们定义了这些函数

$$\lfloor\zeta\rfloor_m := \mathcal{E}_{p,\Omega}\left(\sum_{j=1}^m \zeta_j w_j\right)$$

and

$$\|\zeta\|_{1,p,m} := \|\sum_{j=1}^m \zeta_j w_j\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}.$$

显然，$\|\cdot\|_{1,p,m}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中定义了一个范数（详情见 [3]）。

通过使用上述记号，我们可以通过等距线性变换将空间 $(W_m, \|\cdot\|_{W^{1,\ p}_{0}(\Omega)})$ 和 $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m})$ 识别起来。

$$u = \sum_{j=1}^m \zeta_j w_j \in W_m \mapsto \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

以下是本文发展所需的一些基本不等式：我们从仿射 L^q 庞加莱-索博列夫不等式开始，其定义在 $W^{1,p}_0(\Omega)$，$q \in [1, p^*]$ (见 [15] 中的不等式 (4))：存在一个最优常数 $\mu^{\mathcal{A}}_{p,q} = \mu^{\mathcal{A}}_{p,q}(\Omega) > 0$使得

$$\mu^{\mathcal{A}}_{p,q}\|u\|_{L^q(\Omega)} \le \mathcal{E}_{p,\Omega}(u). \tag{2}$$

现在，由 [11], 的定理 9 可得

$$C_{n,p}(\Omega)\|u\|^{\frac{n-1}{n}}_{L^p(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{1}{n}}_{L^p(\Omega)} \le \mathcal{E}_{p,\Omega}(u) \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

对所有 $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$，其中 $C_{n,p}(\Omega)$ 是一个正常数。第二个不等式的证明可参见例如 [18] 第 33 页。因此，存在一个常数$C = C(n, p, m, \Omega) > 0$ 使得

$$C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \le \mathcal{E}_{p,\Omega}(u) \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{3}$$

对所有 $u \in W_m$。显然，对于每个 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$，范数$\|\nabla \cdot\|_{L^p(\Omega)}$、$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 和$\|\nabla_\xi \cdot\|_{L^p(\Omega)}$在 W_m 中等价。此外，由 [11], 的引理 1，存在一个正常数 $D_1 > 0$ 使得

$$D_1\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \|\nabla_\xi u\|_{L^p(\Omega)} \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

对每个 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 且对所有 $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$。因此，存在一个与 ξ无关的 $D_2 > 0$，使得

$$D_2\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \le \|\nabla_\xi u\|_{L^p(\Omega)} \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{4}$$

对每个 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 且对所有 $u \in W_m$。由不等式（3）和（4），可得

$$C\|\nabla_\xi u\|_{L^p(\Omega)} \le \mathcal{E}_{p,\Omega}(u) \le D_3\|\nabla_\xi u\|_{L^p(\Omega)} \tag{5}$$

对每个 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 以及所有 $u \in W_m$，其中 C、$D_3 > 0$ 均不依赖于 ξ。

为了证明我们的主要结果，我们需要理解有限维中的仿射理论的一些结果。在这个意义上，我们将注意力集中于以下核心要素。即:

(i) $\lfloor\cdot\rfloor_m$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中不定义范数；(ii) 仿射球 $\overline{B}^m_\varrho(0) := \{z \in \mathbb{R}^m; \lfloor z\rfloor_m \le \varrho\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的非凸子集；(iii) 仿射球 $\overline{B}^m_\varrho(\zeta_0) := \{z \in \mathbb{R}^m; \lfloor z-\zeta_0\rfloor_m \le \varrho\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的闭有界子集；(iv) $\overline{B}^m_\varrho(\zeta_0)$ 和 $\overline{B}^m_{p,1}(0) := \{z \in \mathbb{R}^m; \|z\|_{1,p,m} \le 1\}$ 在 $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m})$ 中同胚（参见第 2 节中的引理 2.2）。

请注意，(i) 和 (ii) 可由等距线性变换 (1) 及 [15] 的命题 4.1 得出。另请注意，$\lfloor\cdot\rfloor_m$ 不满足 $\mathbb{R}^m$ 中的三角不等式。对于 (iii)，应用泛函 $u \in W^{1,p}_0(\Omega) \to \mathcal{E}^p_p, \Omega(u)$（见 [15] 的定理 2.1），我们得到 $\overline{B}^m_\varrho(\zeta_0)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的闭子集。现在，有界性由不等式 (3) 得出。

我们这项工作的主要目标是获得一种拓扑工具，以便处理仿射背景和经典背景中的问题。我们的第一个结果是一个仿射不动点定理。具体而言：

定理 1.1. 设 $F : (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m}) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m})$ 是一个连续函数，满足对每个 $\zeta \in \mathbb{R}^m$（其中 $\lfloor\zeta\rfloor_m = \varrho$ 对某个 $\varrho > 0$ 成立），都有 $\langle F(\zeta)\ \zeta\rangle \geq 0$，且 $\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2} = |\cdot|_2$，其中 $|x|_2$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的通常欧几里得范数。那么，存在 z_0 属于闭仿射球 $\overline{B}^m_\varrho(0) = \{z \in \mathbb{R}^m;\ \lfloor z\rfloor_m \leq \varrho\}$，使得 $F(z_0) = 0$。

当所涉及的函数是范数且该球是 $\mathbb{R}^m$ 的凸子集时，这一结果是众所周知的（见 [4] 和 [13]）。作为经典背景的对应结果（例如参见 [1, 3, 4, 20] 及其中的参考文献），与 Galerkin 方法相关的定理 1.1 对于解决仿射问题将非常有用。关于通过变分方法研究仿射问题的论文，可参见 [11, 15, 16]。

我们的第二个结果是一个关于点处不连续泛函的仿射不动点定理，即定理1.1的一个变体。具体而言：

定理 1.2. 设 $F: (\mathbb{R}^m \setminus \{y_0\}, \|\cdot\|_{1,p,m}) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m})$ 是一个连续函数，使得对于每个满足 $\lfloor\zeta-\zeta_0\rfloor_m = \varrho$ 的 $\zeta \in \mathbb{R}^m \setminus \{y_0\}$，存在某个 $0 < \varrho < \lfloor\zeta_0 - y_0\rfloor_m$，且 $\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2} = |\cdot|_2$，都有 $\langle F(\zeta)\ \zeta-\zeta_0\rangle \geq 0$。那么，闭仿射球 $\overline{B}^m_\varrho(\zeta_0) = \{z \in \mathbb{R}^m$ 中存在 z_0，使得 $F(z_0) = 0$。

现在，我们的第三个结果是经典不动点定理的一种新变体，即所涉及的函数表示一个范数。具体而言：

定理 1.3. 设 $\|\cdot\|_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个一般范数，且 $F : (\mathbb{R}^m \setminus \{y_0\}, \|\cdot\|_{1,p,m}) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m})$ 是一个连续函数，满足对于任意满足 $\|\zeta - \zeta_0\|_m = \varrho$ 的 $\zeta \in \mathbb{R}^m \setminus \{y_0\}$，都有 $\langle F(\zeta)\ \zeta-\zeta_0\rangle \geq 0$，其中某个 $0 < \underline{\varrho} < \|\zeta_0 - y_0\|_m$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2} = |\cdot|_2$ 存在。于是，存在 z_0 属于闭球 $B_\varrho(\zeta_0) := \{z \in \mathbb{R}^m;\ \|z-\zeta_0\|_m \leq \varrho\}$，使得 $F(z_0) = 0$。

注意，如果 $F: (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m}) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m})$ 是一个连续函数，那么定理 1.2 和 1.3 对所有 $\varrho > 0$ 都成立，也就是说，我们可以去掉这些结果的假设中对 ϱ 所要求的上界。

对于每个正整数 m，我们定义仿射泛函 $\Phi_m : W_m \to \mathbb{R}$如下

$$\Phi_m(u) = \frac{1}{p}\mathcal{E}^p_{p,\Omega}(u) - \frac{1}{\alpha}\|u\|^\alpha_{L^\alpha(\Omega)} - \int_\Omega f(x)u dx, \tag{6}$$

其 Gˆateaux 导数 $\Phi'_m : W_m \to W'_m$ 满足以下条件（参见[11]）

$$\langle\Phi'_m(u), \varphi\rangle = \int_\Omega H^{p-1}_u(\nabla u)\nabla H_u(\nabla u)\cdot\nabla\varphi dx - \int_\Omega |u|^{\alpha-2}u\varphi dx - \int_\Omega f(x)\varphi dx$$

对每个 $\varphi \in W_m$，其中 $1 < \alpha < p$,

$$H_u^p(\varsigma) = \gamma_{n,p}^{-\frac{n}{p}} \, \mathcal{E}_{p,\Omega}^{n+p}(u) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_\Omega |\nabla_\xi u(x)|^p \, dx \right)^{-\frac{n+p}{p}} |\langle \xi, \varsigma \rangle|^p \, d\sigma(\xi) \quad \text{for } \varsigma \in \mathbb{R}^n$$

and $f \in L^{p'}(\Omega)$, with $f \neq 0$ in Ω and $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Note that

$$\int_\Omega H_u^{p-1}(\nabla u) \nabla H_u(\nabla u) \cdot \nabla \varphi dx =$$

$$\gamma_{n,p}^{-n} \, \mathcal{E}_{p,\Omega}^{n+p}(u) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_\Omega |\nabla_\xi u(x)|^p \, dx \right)^{-\frac{n+p}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} \{\nabla_\xi u\}^{p-1} \langle \nabla \varphi, \xi \rangle dx d\xi,$$

其中 $\{x\}^p := |x|^p sg(x)$，因此

$$\int_\Omega H_u^{p-1}(\nabla u) \nabla H_u(\nabla u) \cdot \nabla u dx = \mathcal{E}_{p,\Omega}^p(u)$$

对所有 $u \in W^{1,\,_0}{}^{p}$ （Ω）（参见[11]中定理 10 的证明$_0{}^{p}$）。另请注意，$[W_m]_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,\,_0}{}^{p}$ (Ω) 中稠密。

作为该定理的应用1.1，对于每个 $m \geq 1$，我们得到 Φ_m 的一个非平凡临界点u_m。此外，序列 $\mathcal{E}_p^p$，ω(u_m) 有界，因此一旦 $s < p^*$，(u_m) 在 L^s(Ω) 中存在一个强收敛子列。

2 定理的证明1.1、1.2 和1.3

最近，Leite 和 Montenegro [16] 证明了$\mathcal{E}_p^p$，ω在$W^{1,\,_0}{}^{p}$ (Ω)中是强连续的。显然，对于每个$m \geq 1$，仿射 L^p 泛函$\mathcal{E}_p^p$，ω在 W_m中是连续的。为了使这项工作更加完整，下面我们将按照相同的思路给出证明，但会更加直接一些，因为我们处于有限维空间中。

引理 2.1. 设 $m \in \mathbb{N}$。仿射 L^p 泛函 $\mathcal{E}_{p,\Omega}$ 在 W_m 中连续。

证明。设 $u_k \to u$ 属于 W_m。对于 $u = 0$，不等式（3）蕴含 $\mathcal{E}_{p,\Omega}(u_k) \to 0 = \mathcal{E}_{p,\Omega}(0)$。

现在假设 $u \neq 0$。注意，由不等式（3），可得 $\mathcal{E}_{p,\Omega}(u) > 0$。然后，由不等式（4），我们有$\|\nabla_\xi u_k\|_{L^p(\Omega)} \to \|\nabla_\xi u\|_{L^p(\Omega)}$ 在 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\|\nabla_\xi u\|_{L^p(\Omega)} > c_1$ 上一致，对每个 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 以及$\|\nabla_\xi u_k\|_{L^p}^{-n}(\Omega) \leq c_2$ 都成立，其中 $c_1, c_2 > 0$ 与 ξ 无关。因此，$\|\nabla_\xi u_k\|_{L^p}^{-n}(\Omega) \to \|\nabla_\xi u\|_{L^p}^{-n}(\Omega)$ 在 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 上一致，所以根据控制收敛定理，我们得出 $\mathcal{E}_{p,\Omega}(u_k) \to \mathcal{E}_{p,\Omega}(u)$。证明完毕。 □

以下引理对于应用一般的布劳威尔不动点定理至关重要。该定理指出，如果 E 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭子集，并且与闭单位球同胚，那么任意连续映射S：$E \to E$ 都存在不动点（见 [22]）。

引理 2.2。仿射球 $\overline{B}_{\varrho}^{m}(\zeta_0) = \{z \in \mathbb{R}^m;\ \lfloor z-\zeta_0 \rfloor_m \le \varrho\}$ 和 $\overline{B}^{p,\ m}_{1}(0) = \{z \in \mathbb{R}^m;\ \|z\|_{1,\ p,\ m} \le 1\}$ 在 $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,\ p,\ m})$ 中同胚。

证明。考虑由下式定义的应用 $T\colon \overline{B}_{\varrho}^{m}(\zeta_0) \to \overline{B}^{p,\ m}_{1}(0)$。

$$T(x) := \begin{cases} \dfrac{x-\zeta_0}{\varrho}\dfrac{\lfloor x-\zeta_0 \rfloor_m}{\|x-\zeta_0\|_{1,p,m}} & \text{if} \quad x \neq \zeta_0, \\ 0 & \text{if} \quad x = \zeta_0 \end{cases}$$

以及由 $G\colon \overline{B}^{p,\ m}_{1}(0) \to \overline{B}_{\varrho}^{m}(\zeta_0)$ 定义的

$$G(x) := \begin{cases} \varrho x \dfrac{\|x\|_{1,p,m}}{\lfloor x \rfloor_m} + \zeta_0 & \text{if} \quad x \neq 0, \\ \zeta_0 & \text{if} \quad x = 0. \end{cases}$$

通过标准计算，我们得到 $G = T^{-1}$，即 $T \circ G = G \circ T = Id$。由泛函 $u \in W_m \mapsto \mathcal{E}_{p\text{的连续性},\ \Omega}(u)$ 可推出函数 T 在 $x \neq \zeta_0$ 和 G 在 $x \neq 0$上的连续性。现在，T 在 $x = \zeta_0$ 上是连续的，因为应用不等式（3），我们有

$$\|T(x)-T(\zeta_0)\|_{1,p,m} = \left\| \frac{x-\zeta_0}{\varrho}\frac{\lfloor x-\zeta_0 \rfloor_m}{\|x-\zeta_0\|_{1,p,m}} \right\|_{1,p,m} = \frac{1}{\varrho}\lfloor x-\zeta_0 \rfloor_m \le \frac{1}{\varrho}\|x-\zeta_0\|_{1,p,m}.$$

为证明 G 在 $x = 0$ 中的连续性，我们考虑 $\overline{B}^{p,\ m}_{1}(0)$ 中的一个序列 (x_k)，其中 $x_k \to 0$。假设存在 (x_k) 的一个子列 (x_{k_j})，使得

$$\lim_{j\to\infty} G(x_{k_j}) = \theta \neq \zeta_0.$$

因此，由 T 的连续性，我们得到

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim_{j\to\infty} T \circ G(x_{k_j}) = T(\theta) \neq 0$$

这与 $x_k \to 0$ 矛盾。综上

$$\lim_{k\to\infty} G(x_k) = \zeta_0 = G(0).$$

因此，T 和 G 连续，因此 $\overline{B}_{\varrho}^{m}(\zeta_0)$ 和 $\overline{B}^{p,\ m}_{1}(0)$ 在 $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,\ p,\ m})$ 中同胚。 □

定理 1.1 的证明：首先，存在 $c(m) > 0$ 使得

$$\lfloor x \rfloor_m = \mathcal{E}_{p,\Omega}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j w_j\right) \le \left\| \sum_{j=1}^{m} x_j w_j \right\|_{1,p,m} \le c(m)|x|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \tag{7}$$

我们假设 $F(x) \neq 0$ 对所有$x \in \overline{B}_{\varrho}^{m}(0)$。由（7），可得

$$\overline{B}_{\varrho}^{p,m}(0) := \{z \in \mathbb{R}^m; \|z\|_{1,p,m} \le \varrho\} \subset \overline{B}_{\varrho}^{m}(0).$$

我们定义

$$g : (\overline{B}_{\varrho}^{m}(0), \|\cdot\|_{1,p,m}) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m})$$

by

$$g(x) = -\frac{\varrho}{\lfloor F(x) \rfloor_m} F(x)$$

它将 $\overline{B}_{\varrho}^{m}$ (0) 映射到自身，且是连续的。因此，根据一般的布劳威尔不动点定理，我们有 g 存在一个不动点 x_0。由于 $x_0 = g(x_0)$，我们得到 $\lfloor x_0 \rfloor_m = \lfloor g(x_0) \rfloor_m = \varrho > 0$。但根据 (7) 及假设，我们得到

$$0 < \varrho^2 = \lfloor x_0 \rfloor_m^2 \le c(m)^2 |x_0|_2^2 = c(m)^2 \langle x_0, x_0 \rangle = c(m)^2 \langle x_0, g(x_0) \rangle$$

$$= -c(m)^2 \frac{\varrho}{\lfloor F(x_0) \rfloor_m} \langle x_0, F(x_0) \rangle \le 0,$$

这就产生了矛盾。

定理 **1.2** 的证明：假设 $F(x) \neq 0$ 对所有 $x \in \overline{B}_{\varrho}^{m}(\zeta_0)$ 都成立。注意，由 (7) 可得

$$\overline{B}_{\varrho}^{p,m}(\zeta_0) := \{z \in \mathbb{R}^m; \|z - \zeta_0\|_{1,p,m} \le \varrho\} \subset \overline{B}_{\varrho}^{m}(\zeta_0).$$

定义

$$g_0 : (\overline{B}_{\varrho}^{m}(\zeta_0), \|\cdot\|_{1,p,m}) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1,p,m})$$

by

$$g_0(x) = -\frac{\varrho}{\lfloor F(x) \rfloor_m} F(x) + \zeta_0$$

它将 $\overline{B}_{\varrho}^{m}(\zeta_0)$ 映射到自身，且是连续的。根据一般的布劳威尔不动点定理，它有一个不动点x_0。由于 $x_0 = g_0(x_0)$，我们有$\lfloor x_0 - \zeta_0 \rfloor_m = \lfloor g(x_0) - \zeta_0 \rfloor_m = \varrho > 0$。但根据 (7)

$$\begin{aligned} 0 < \varrho^2 &= \lfloor x_0 - \zeta_0 \rfloor_m^2 \le c(m)^2 |x_0 - \zeta_0|_2^2 = c(m)^2 \langle x_0 - \zeta_0, x_0 - \zeta_0 \rangle \\ &= c(m)^2 \langle x_0 - \zeta_0, g_0(x_0) - \zeta_0 \rangle = -c(m)^2 \frac{\varrho}{\lfloor F(x_0) \rfloor_m} \langle x_0 - \zeta_0, F(x_0) \rangle \le 0, \end{aligned}$$

根据假设，这就产生了矛盾。

定理 **1.3** 的证明：该结果的证明与定理1.2的证明类似，利用 $\mathbb{R}^m$ 中两个范数的等价性，并将$\lfloor \cdot \rfloor_m$ 替换为 $\|\cdot\|_m$。

3 应用：泛函 Φ_m 的非平凡临界点的存在性

在证明我们的应用之前，我们先给出以下连续性结果。具体而言：

命题 3.1. 设 $A:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是一个满足以下条件的函数

$$A(\zeta) = (A_1(\zeta), A_2(\zeta), \ldots, A_m(\zeta)),$$

其中 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$A_j(\zeta) = \int_\Omega H_u^{p-1}(\nabla u)\nabla H_u(\nabla u)\cdot\nabla w_j\ dx$$

$_m j = 1, 2, \ldots, m$, 以及 $u = \sum \zeta_i w_i \in W_m$。于是，函数 A 是连续的。
$_{i=1}$

$_m$证明。为此，令 $\zeta^k \to \zeta^0$ 属于 $\mathbb{R}^m$ 且 $u_k = \sum \zeta_i^k w_i \in W_m$, $k = 0, 1$, 2, . . .。 $_{i=1}$我们固定 $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$。注意

$$A_j(\zeta^k) = \gamma_{n,p}^{-n}\ \mathcal{E}_{p,\Omega}^{n+p}(u_k)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\nabla_\xi u_k\|_{L^p(\Omega)}^{-n-p}\int_\Omega \{\nabla_\xi u_k\}^{p-1}\langle\nabla w_j, \xi\rangle dx d\xi.$$

若 $\zeta^0 = 0$, 则由不等式 (4)，可得$\|\nabla_\xi u_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ 在$\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$上一致。注意，利用不等式 (5，存在 $D_0 > 0$ 与 ξ无关的常数，使得

$$|A_j(\zeta^k)| \le \gamma_{n,p}^{-n}\ D_0\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_\Omega |\langle\nabla u_k, \xi\rangle|^{p-1}|\langle\nabla w_j, \xi\rangle| dx d\xi.$$

现在，由 H¨older 不等式、Cauchy-Schwarz 不等式和控制收敛定理，可得

$$|A_j(\zeta^k)| \le \gamma_{n,p}^{-n}\ D_0|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|\nabla w_j\|_{L^p(\Omega)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\nabla_\xi u_k\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} d\xi \to 0 = A_j(\zeta^0).$$

若 $\zeta^0 \neq 0$, 则由引理 2.1，可得 $\mathcal{E}_p^{n+p}{}_{,\,\Omega}(u_k) \to \mathcal{E}_p^{n+p}{}_{,\,\Omega}(u)$。最后，使用引理 2.1 的证明以及前一种情形证明中相同的论证，可得 $A_j(\zeta^k) \to A_j(\zeta^0)$。证明完毕。 □

定理 3.2。 设 $f \in L^{p'}(\Omega)$ 满足 $f \neq 0$ 在 Ω中， $1 < \alpha < p$。令 Φ_m为式（6）中定义的泛函。则存在一个非平凡解 $u \in W_m$满足 $\Phi_m'(u) = 0$。

证明。定义函数 $F:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 使得

$$F(\zeta) = (F_1(\zeta), F_2(\zeta), \ldots, F_m(\zeta)),$$

其中 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} F_j(\zeta) \quad = \quad & \int_\Omega H_u^{p-1}(\nabla u)\nabla H_u(\nabla u)\cdot\nabla w_j dx \\ & -\int_\Omega |u|^{\alpha-2}uw_j dx - \int_\Omega f(x)w_j dx, \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \ldots, m$, and $u = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i w_i \in W_m$.

根据命题3.1，我们有 F 是一个连续函数。因此，根据 H¨尔德不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \langle F(\zeta), \zeta \rangle &= \mathcal{E}_{p,\Omega}^{p}(u) - \|u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} - \int_{\Omega} f(x) u dx \\ &\geq \mathcal{E}_{p,\Omega}^{p}(u) - \|u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} - \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{L^{p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$。由仿射庞加莱´-Sobolev 不等式（见不等式（2）），可得

$$\langle F(\zeta), \zeta \rangle \geq \mathcal{E}_{p,\Omega}^{p}(u) - \left(\mu_{p,\alpha}^{\mathcal{A}}\right)^{-\alpha} \mathcal{E}_{p,\Omega}^{\alpha}(u) - \left(\mu_{p,p}^{\mathcal{A}}\right)^{-1} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \mathcal{E}_{p,\Omega}(u).$$

现在，采用定理 1.1 中的记号，令 $\lfloor \zeta \rfloor_m = \varrho$ 其中某个 $\varrho > 0$ 将在下文给出。因此，我们有

$$\langle F(\zeta), \zeta \rangle \geq \varrho^{p} - \left(\mu_{p,\alpha}^{\mathcal{A}}\right)^{-\alpha} \varrho^{\alpha} - \left(\mu_{p,p}^{\mathcal{A}}\right)^{-1} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \varrho.$$

如果 ϱ 满足以下条件，
那么

$$\varrho > \max\left\{ \left[2\left(\mu_{p,p}^{\mathcal{A}}\right)^{-1} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p-1}}, \left[2\left(\mu_{p,\alpha}^{\mathcal{A}}\right)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{p-\alpha}} \right\}$$

then

$$\langle F(\zeta), \zeta \rangle > 0.$$

我们取

$$\varrho := \max\left\{ \left[2\left(\mu_{p,p}^{\mathcal{A}}\right)^{-1} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p-1}}, \left[2\left(\mu_{p,\alpha}^{\mathcal{A}}\right)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{p-\alpha}} \right\} + 1.$$

因此，定理1.1 确保了 $z_0 \in \mathbb{R}^m$ 满足 $\lfloor y \rfloor_m \leq \varrho$ 且使得 $F(z_0) = 0$。换言之，存在 $u_m \in W_m$ 使其满足

$$\mathcal{E}_{p,\Omega}(u_m) \leq \varrho,$$

并且使得

$$\int_{\Omega} H_{u_m}^{p-1}(\nabla u_m) \nabla H_{u_m}(\nabla u_m) \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} |u_m|^{\alpha-2} u_m w dx + \int_{\Omega} f(x) w dx$$

对所有 $w \in W_m$ 均成立。因此 u_m 是非平凡的。特别地，考虑 $w = u_m$，我们得到

$$\mathcal{E}_{p,\Omega}^{p}(u_m) = \|u_m\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} + \int_{\Omega} f(x) u_m dx.$$

注 1. 需要指出的是，ϱ 不依赖于 m。

因此，$\mathcal{E}_{p,\Omega}^{p}(u_m)$ 有界，因此根据 [21], 定理 6.5.3，存在 $u \in W^{1,p}(\Omega)$，使得当 $s < p^*$ 时，$u_m \to u$ 在 $L^s(\Omega)$ 中强收敛（取子列后）。

□

致谢

第一作者获得了米纳斯吉拉斯州研究基金会（FAPEMIG）项目 APQ-02375-21、APQ-04528-22、FAPEMIG/RED-00133-21，以及巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）项目 307575/2019-5 和 101896/2022-0 的部分资助。
第二作者部分经费由巴西国家科学技术发展委员会（PQ 316526/2021年- 5）和米纳斯吉拉斯州研究基金会（Universal-APQ-00709-18）资助。

参考文献

[1]C. O. Alves、D. G. de Figueiredo：《通过Galerkin方法研究非变分椭圆系统》，载于 D. Haroske、T. Runst 和 H. J. Schmeisser（编），《函数空间、微分算子与非线性分析：Hans Triebel纪念文集》，2003年。

[2] H. Br´ezis：《泛函分析、Sobole夫空间与偏微分方程》，585，DOI 10.1007/978-0-387-70914-7，施普林格科学与商业传媒有限责任公司，2011年。

[3] A. L. A. de Araujo, L. F. O. Faria - 含指数非线性及对流项的拟线性椭圆方程的正解，《微分方程杂志》267 (2019年), 4589-4608.[4] A. L. A. de Araujo, L. F. O. Faria - 整个 $\mathbb{R}^N$上的涉及临界指数增长的 N-拉普拉斯方程解的存在性、不存在性及渐近行为。《数学年刊》384 (2022年), 1469-1507.[5] P. L. De N´apoli, J. Haddad, C. H. Jim´enez, M. Montenegro - 最优仿射 L^2 Sobole夫不等式及其变体，《数学年刊》370 (2018年), 287-308.[6] S. Fuˇc´ık, O. John, J. Neˇcas - 关于 Sobole夫空间中 Schauder 基的存在性, Comment. Math. Univ. Carolinae 13 (1972年), 163-175.[7] C. Haberl, F. E. Schuster - 非对称仿射 L_p Sobole夫不等式，《泛函分析杂志》257 (2009年), 641-658.[8] J. Haddad, C. H. Jim´enez, M. Montenegro - 通过 L_p Busemann-Petty 质心不等式得到的尖锐仿射 Sobole夫型不等式，《泛函分析杂志》271 (2016年), 454-473.[9] J. Haddad, C. H. Jim´enez, M. Montenegro- 尖锐仿射加权 L^p Sobole夫型不等式，《美国数学会汇刊》372 (2019年), 2753-2776.[10] J. Haddad, C. H. Jim´enez, M. Montenegro - 非对称 Blaschke-Santal´ó 泛函不等式，《泛函分析杂志》278 (2020年), 108319, 18页.[11] J. Haddad, C. H. Jim´enez, M. Montenegro - 从仿射 Poincar´é 不等式到仿射谱不等式，《数学进展》386 (2021年), 107808, 35页。

[12] J. Haddad, C. H. Jim´enez, L. A. Silva - 一个 L_p-泛函 Busemann-Petty 质心不等式，国际数学研究通知 2021 (2021年), 7947-7965.[13] S. Kesavan - 泛函分析与应用专题，John Wiley & Sons (1989年).[14] E. J. F. Leite, M. Montenegro - 在$BV(\Omega)$上最小化 Zhang 能量及尖锐仿射 Poincar´é-Sobole 夫不等式，《泛函分析杂志》283 (2022年), 第10期，论文编号109646.[15] E. J. F. Leite, M. Montenegro - 涉及次临界与临界非线性项的仿射 p-拉普拉斯方程的最小能量解，arXiv:2202.07030v2.[16] E. J. F. Leite, M. Montenegro - 通过新的变分框架建立仿射 p-拉普拉斯方程存在性定理，预印本.[17] M. Ludwig, J. Xiao, G. Zhang - 尖锐凸 Lorentz-Sobolev 不等式，《数学年刊》350 (2011年), 169-197.[18] E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang - 尖锐仿射 L_p Sobole夫不等式，《微分几何杂志》62 (2002年), 17-38.[19]E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang - 最优 Sobolev 范数与 L^pMinkowski 问题，国际数学研究通知 2006 (2006年), 62987.[20] W. A. Strauss - 关于半线性双曲方程的弱解，An. Acad. Brasil. Ciˆenc. 42 (1970年), 645-651.[21]C. Tintarev - 浓缩紧性：浓缩现象的泛函分析理论，柏林、波士顿：De Gruyter, 2020年。https://doi.org/10.1515/9783110532432.[22] B. Yu, Z. Lin - 一类非凸 Brouwer 不动点问题的同伦方法。《应用数学与计算》74.1 (1996年), 65-77。