arXiv:2305.03794v2 [cond-mat.quant-gas] 8 Dec 2023

# 相称与非相称一维相互作用量子系统

Andrea Di Carli、Christopher Parsonage、Arthur La Rooij、Lennart Koehn、Clemens Ulm、Callum W Duncan、AndrewJ Daley、Elmar Haller 和 Stefan Kuhr*

*Department of Physics, SUPA, University of Strathclyde, Glasgow G4 0NG, United Kingdom*（日期：2023年12月11日）

利用量子气体显微镜，通常可以在光学晶格中实现多体量子系统的单原子成像分辨率。量子气体显微镜作为量子模拟器具有很强的通用性，其关键在于能够在微观尺度上使用工程化光势。在此，我们利用量子气体显微镜中动态变化的微观光势，研究相互作用玻色性铷原子的公度与非公度一维系统。这类非公度系统类似于表现出原子输运和可压缩性的掺杂绝缘态。首先，在两个势垒之间制备具有单位填充且原子数固定的相称系统。通过动态改变势垒的位置，在保留原子数的同时减少可用晶格位点，从而确定性地构造出非公度系统。我们通过测量粒子与空穴的分布随晶格填充率和相互作用强度的变化来表征系统，并施加偏置势以探测粒子迁移率。我们的工作为在光学晶格实验中制备填充率可控的低熵态奠定了基础。

## 引言

量子气体显微镜 [1–3] 为在光学晶格中对多体量子系统 [4–7] 进行量子模拟提供了独特工具，并具备单原子成像分辨率和控制能力。通过加入定制的静态光势，可以构建盒状陷阱并抵消谐振约束，从而能够研究均匀系统 [8, 9]以及受限维度 [10–12]中的拓扑相和磁性相。实验上，控制粒子 [13]的数量和填充率颇具挑战性，而这可能会显著改变量子系统的性质。添加或移除一个粒子类似于半导体中的掺杂，这与掺杂反铁磁高温超导体 $_c$ 的物理性质有关 [14]。近期利用量子气体显微镜开展的实验研究，通过观测费米-哈伯德系统 [15], 中的体输运性质 [16–18], 、弦状图样 [19], 、非公度磁性 [20], 、磁极化子 [21–23], 以及通过磁耦合实现的空穴配对 [12], 揭示了掺杂所起的作用。

晶格填充率对于玻色多体量子系统同样至关重要。对于相称的粒子数，即整数填充分数，均匀系统可以进入莫特绝缘相 [24, 25],；而对于非相称填充的系统，理论预测了许多有趣的量子相，例如超固相和晶态 [26, 27], 以及存在无序势时的玻色玻璃相 [24, 28–30], 或缺陷诱导超流 [31]。动态控制近年来，人们利用数字微镜器件（DMD）动态调控光势的形状，搅动量子气体以产生涡旋 [32–34] ，并在两种光学势之间切换 [12, 23]。

在本研究中，我们利用数字微镜器件（DMD）在微观尺度上产生动态光势，以控制玻色量子系统的相称性。我们首先在排斥势垒之间制备具有单位填充的一维相称玻色量子系统，随后动态改变束缚势，在保留原子数的同时减少可用晶格位点的数量。在这种非整数量子填充下，系统不再是莫特绝缘体；我们通过研究粒子在受到偏置势作用时的迁移率来探测这一点。具有局域背景上的离域原子的非公度系统，在基态中还表现出非平凡的位点占据概率 [35]。我们利用动态光势确定性地制备低熵非相称量子态的技术，也可用于研究处于不同束缚势或晶格几何结构中的多体量子系统 [36, 37]。

## （非）相称系统的制备

为制备和探测最多含有 6 个原子的相称与非相称一维量子系统，我们使用量子气体显微镜，以对玻色性 $^{87}$ Rb 原子进行单原子分辨探测，所用装置与早期研究类似 [2, 38]。首先，我们在垂直光学晶格的一个波腹中制备约 400 个原子的简并二维量子气体；该晶格沿 $z$ 方向，并与两束水平光学晶格光束重叠（波长为 $\lambda = 1064$ nm），这两束光分别沿 $x$ 和 $y$——

* stefan.kuhr@strath.ac.uk

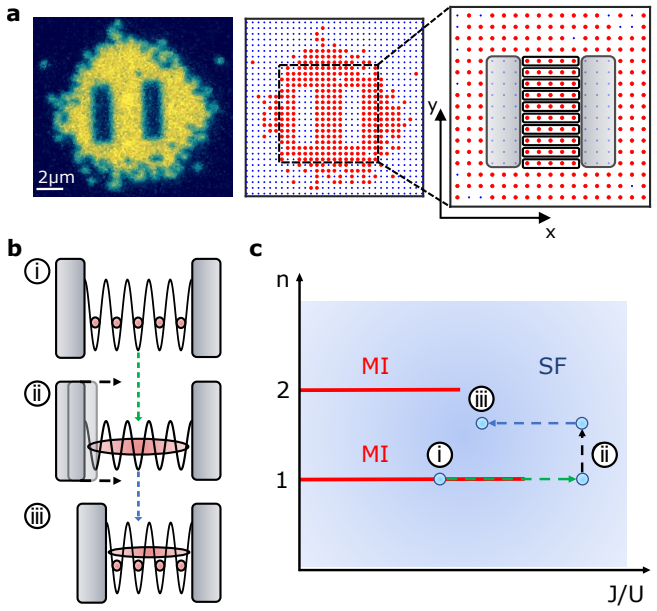


**图1. 一维系统制备、实验方案与相图。a**，左：存在两个排斥势垒时，$^{87}$Rb 原子的莫特绝缘体荧光图像，势垒在中心呈中空矩形；中：相应的原子分布；右：中心区域的放大图，突出显示含有五个原子的一维系统以及排斥势的位置（灰色阴影区域）。**b**，生成非相称（掺杂）一维量子系统的过程示意图：（i）初始制备莫特绝缘态；（ii）转变至超流区，并通过移动势垒减少晶格位点的数量；（iii）转变进入强相互作用区。**c**，有限粒子数一维玻色-哈伯德模型相图示意图，标示出经过阶段（i）—（iii）的路径。

方向（方法）。利用数字微镜器件和波长为 666 nm 的光，我们产生两个矩形排斥势垒，每个覆盖 $3 \times 10$ 个晶格位点（图 1a），并通过高分辨率显微物镜将其投影到光学晶格上。首先制备二维莫特绝缘态，由此形成十个相互独立、单位填充的公度一维系统。具体做法是在 500 ms 内，将两束水平光束的晶格势从 0 改变为 $V_x = V_y = 50(2)\,E_{\mathrm{r}}$。其中，$E_{\mathrm{r}} = \hbar^2/2m\lambda^2$ 为反冲能，$m$ 为 $^{87}$Rb 的原子质量。在从超流体到莫特绝缘体的量子相变过程中，排斥势垒在 $y$ 方向上的开放几何结构使残余熵得以向外围区域重新分布，从而提高中心区域的制备保真度。

实验流程如图 1b 所示，同时图 1c 给出了相图。起初，我们的相称一维系统处于莫特绝缘态（图 1b，面板 i），随后被带入超流区（图 1b，面板 ii）。接着移动排斥势垒的位置，在保持原子数不变的同时减少可用的晶格位点数量（图 1b，面板 iii）。因此，当一维系统重新进入强相互作用区时，它已无法形成单位填充的莫特绝缘体，如相图所示（图 1c）。

为表征实验序列各阶段（图 2a）的相称和非相称一维系统，我们记录每个晶格位点上的原子数奇偶性（图 2b-e；方法）。由于荧光成像期间会发生光辅助碰撞，我们测量的是原子数模二 [2]。据此，我们计算每个一维系统中空位点概率随晶格位点变化的情况（图 2f-i），以及空位点数的直方图（图 2j-m）。我们对数据集进行后选择，排除测得的奇偶性不正确，或在势垒位置检测到原子的一维系统（图 2b-e 中的白色虚线；补充信息）。经过后选择后，我们平均保留了 70% 的一维系统，从而有效地从测量数据集中得到一个低温子集 [38]。

我们首先测量强相互作用区中五个原子占据五个晶格位点时的制备保真度。在这种具有整数量子填充的情形下，每个原子都局域在一个晶格位点上。我们测得，96(2)% 的系统具有预期的原子数（图 2j）；在 4(2)% 的情况下，我们发现系统中有两个空位点，且它们均匀分布（图 2f）。我们认为，这些现象源于非零的初始温度以及技术噪声引发的激发。为了进入超流区，我们在 150 ms 内将 $x$-晶格势从$V_i = 50(2)\,E_{\mathrm{r}}$降至 $V_c = 2.8(4)\,E_{\mathrm{r}}$，从而提高 $J/U$。其中，$J$ 为隧穿率，$U$ 为玻色-哈伯德模型中的位点内相互作用（方法）。我们将 $y$-晶格保持在 $V_y = 50(2)E_{\mathrm{r}}$，以防止一维系统之间发生隧穿。超流一维系统中的原子变得离域；由于原子数涨落，我们观测到空位点数增加，且它们呈均匀的空间分布（图 2g）。随后，我们在 200 ms 内分 18 个离散步骤移动其中一个势垒的位置（方法）。系统尺寸缩减至四个格点，同时保留最初的五个原子，从而形成一个具有非整数量子填充的掺杂系统。因此，我们观测到奇数个空位点（图 2l）。接着，我们在 200 ms 内将 $x$-晶格势增至$V_f = 16(1)\,\mathrm{E_r}$，使非公度系统重新进入强相互作用区，从而抑制空穴（图 2m）。空位点的分布（此时它们对应于被两个原子占据的格点）显示，中央两个格点上的出现概率更高（图 2i）。由于边界的影响，占据中央格点在能量上更有利，这与我们基于单带玻色-哈伯德模型的模拟预测一致（方法）。

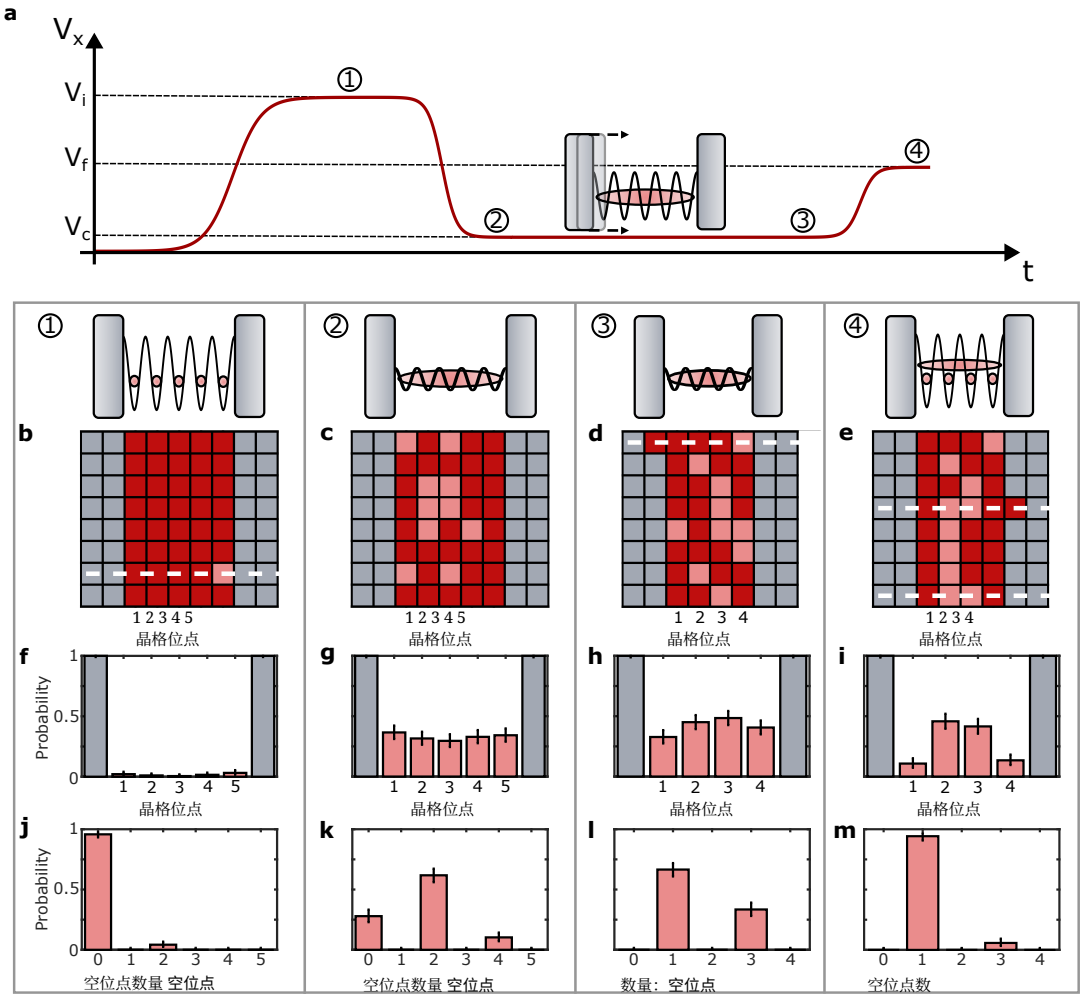


**图 2. 掺杂莫特绝缘体的实验流程。a**，$x$晶格势$V_x$随时间的变化。圆圈中的数字表示进行测量的阶段：(1) 在 $V_i = 50(2)\ E_r$下制备相称系统并使其处于莫特绝缘态之后；(2) 在浅晶格中制备超流态之后，$V_c = 2.8(4)\ E_r$；(3) 通过动态压缩超流态形成非相称系统之后；(4) 再次增加晶格深度，使系统重新进入强相互作用区之后，$V_f = 16(1)\ E_r$。**b-e**，一次实验实现中重构的晶格占据数，显示排斥势（灰色）、原子（深红色）和观测到的空位点（浅红色）；空位点由空穴和双占据共同产生。白色虚线表示通过后选择从统计数据中排除的行。**f-i**，观测到的空位点探测概率。**j-m**，相同系统中概率与空位数的关系。每个直方图均由对260–380个独立的一维系统取平均得到，所有误差棒均为95%的Clopper-Pearson置信区间。

### 强相互作用系统与弱相互作用系统

我们研究一维系统从弱相互作用区过渡到强相互作用区时，非相称与相称情形之间的差异。具体而言，我们制备一个由五个原子占据四个晶格位点的非公度系统，并将其与整数量子填充分别为五个原子占据五个位点、四个原子占据四个位点的系统进行比较（图 3a）。我们采用相同的实验流程制备相称系统和非公度系统，唯一的区别是，制备相称系统时不移动排斥势垒。随后比较观测到的空位点数

对于 $T = 0$ 和 $T = 0.15\,U$，我们在数值模拟（图 3）中考虑了整个实验流程（方法）期间随时间变化的势。后者是测得的初始二维莫特绝缘体的温度，这只是一个上限，因为中心区域的熵降低（图 1c）以及后选择使 1D 系统的有效温度更低。

在强相互作用区 $J/U \ll 1$，我们观察到，相称系统中的平均空位点数少于 0.2，这是因为该系统达到了莫特绝缘态。相比之下，在非公度系统中，由于.....的出现，我们观察到空位点数接近 1（图 3a）。

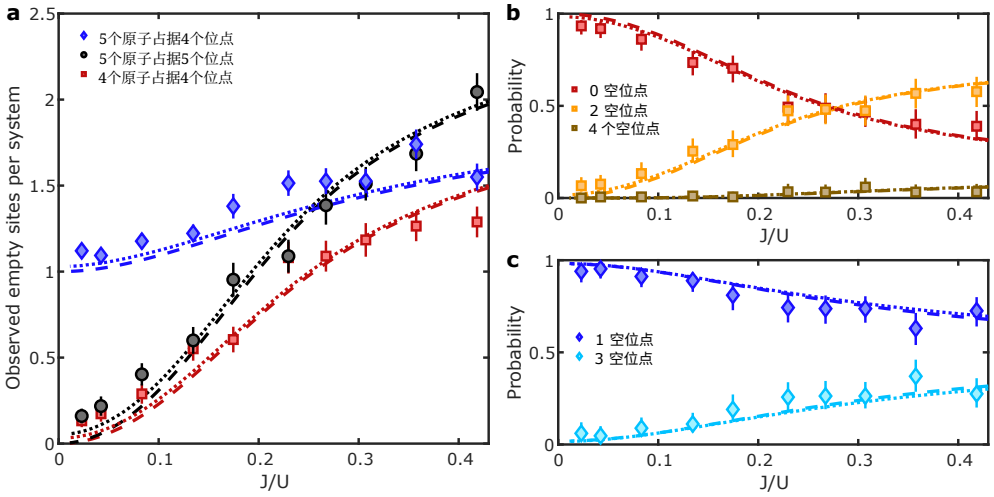


**图3. 强相互作用与弱相互作用的公度和非公度一维系统。a**，每个一维系统的空位数随 $J/U$ 的变化关系，分别对应5个原子占据5个晶格位点（黑色圆圈）、4个原子占据4个位点（红色方块）和5个原子占据4个位点（蓝色菱形）。观测到的空位既来源于空穴，也来源于双占据态。误差棒表示标准误差。数值模拟给出了 $T=0$ （虚线）和 $T=0.15\,U$ （点线）条件下的空位数。**b**，在具有4个原子占据4个位点的相称系统中，每个一维系统出现0个（红色）、2个（橙色）和4个（棕色）空位的概率随 $J/U$ 的变化关系。**c**，非公度系统中5个原子占据4个位点时的对应结果，显示了出现1个（蓝色）和3个（青色）空位的概率。每个数据点均通过对 $110-190$ 个独立的一维量子系统取平均得到，**b** 和**c** 中的误差棒表示Clopper–Pearson 95%置信区间。

局域背景上一个离域原子所形成的双重占据格点。随着我们增大 $J/U$，进入弱相互作用区或超流区，在这三种情况下，观测到的空位点数均有所增加，这与数值模拟结果（方法）非常吻合。利用相同的数据集，我们评估了在每种一维系统中探测到空位点的概率（图3b和c）。随着 $J/U$ 的增大，我们观测到，对于具有4个原子占据4个位点的相称系统，观测到零个空位点的概率降至0.5以下，而出现两个空位点的概率则相应增加。考虑到用于改变晶格深度的强度渐变过程后，数值模拟能够很好地再现这一结果。对于非相称填充的情况，观测到的空位点数增加得不那么明显，因为在零温下，超流区中每个一维系统的预期空位点数仅为 $\approx 1.6$ 。在强相互作用区，我们观测到相称系统中的空位点数多于有限温度模拟的预测值（图3a），这归因于俘获激光的强度噪声引起的加热所导致的两个原子损失和粒子-空穴对激发 [39] 。在非相称系统中，由于其激发谱不存在能隙，这些效应更加显著。假设30%的一维系统中会损失一个原子，则预期有10%的情况下会损失两个原子。由于奇偶性守恒，这些双原子损失不会在后选择过程中被计入。

**原子数、方差及位点占据随密度的变化**

非相称系统中特定的原子数和可用格点数，可能导致依赖于系统尺寸的非平凡基态占据。到目前为止，我们考察了5个原子占据4个位点的情况；现在，我们将含有4、5和6个粒子的不同非相称态，与强相互作用区中具有单位或双重格点占据的莫特绝缘体进行比较。对于每个一维系统，我们计算平均粒子密度 $n$ 的函数，即动态压缩前探测到的原子数除以格点数后的归一化值~ $N$（图4a）。我们还根据平均原子数奇偶性（方法）计算方差 $\sigma$（图4b）。正如预期，在 $n=1$ 时，我们观测到具有莫特绝缘态的系统（4~个原子占据4个位点）；而在 $N\approx 1$ 时，系统有 $n=2$ （4个原子占据2~个位点），此时 $N\approx 0$，因为光辅助碰撞会使双占据位点被探测为空位点。随着密度增加，观测到的原子数减少，这与我们在 $T=0$ 下对基态进行的数值计算（方法）一致，表明实现了绝热态制备。方差 $\sigma$ 可用于衡量短程密度涨落的可压缩性 [40],；在莫特绝缘态中，整数密度下的方差最低。非整数密度下，方差达到最大值 $\sigma=0.25$ [2], ，这同样与零温下的数值计算一致（图4b）。

在局域化背景上存在两个额外原子的情况下，系统的对称性起着重要作用。对于 3 个格点上的 5 个原子（$n=5/3$），它在能量方面

.....

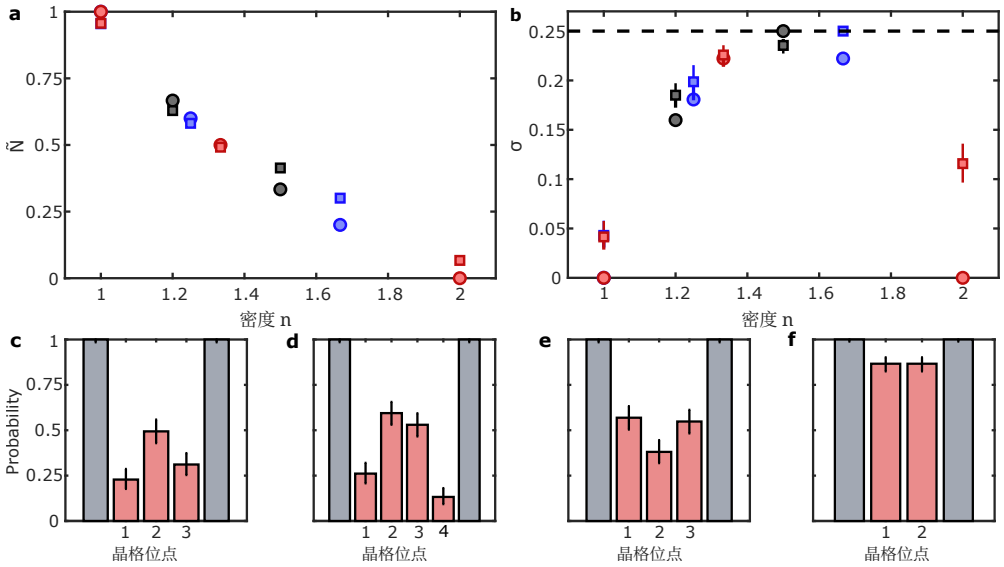


**图4. 相称与非相称系统的原子数、方差和位点占据。a**，$\tilde{N}$观测原子数相对于初始原子数的归一化值，$N$，随密度 $n$的变化：由6个原子初始占据6个位点、动态压缩至5个和4个位点的系统（黑色）；由5个原子初始占据5个位点、压缩至4个和3个位点的系统（蓝色）；以及由4个原子初始占据4个位点、压缩至3个和2个位点的系统（红色）。实验值以方块表示，理论值以圆圈表示。实验值的统计误差小于数据点的尺寸。**b**，原子数方差，采用与**a**中相同的密度。**c-f**，随着密度增加，探测到空晶格位点的位点分辨概率，分别对应4个原子占据3个位点、6个原子占据4个位点、5个原子占据3个位点和4个原子占据2个位点。**b-f** 中的误差棒表示95%的Clopper-Pearson置信区间。

对于两个附加原子占据同一晶格位点而言，这在能量上都不利。我们观测到，相较于中央位点，双占据位点更可能出现在外侧位点（图4e）。状态$|2,\ 1,\ 2\rangle$ 是有利的（补充信息，图8b），因为它同时与 $|1,\ 2,\ 2\rangle$和 $|2,\ 2,\ 1\rangle$耦合，从而降低基态的动能；在 $U/J \to \infty$ 极限下，其解析表达式为 $\frac{1}{\sqrt{2}}|2,\ 1,\ 2\rangle + \frac{1}{2}|1,\ 2,\ 2\rangle + \frac{1}{2}|2,\ 2,\ 1\rangle$（补充信息）。该状态对弱谐振束缚势以及相邻势阱壁带来的微小偏移具有鲁棒性（补充信息）。这与4个格点上有6个原子的状态（$n = 6/4$）形成对比；对于该状态，我们观测到附加原子大多位于中间两个格点（图4d）。具体而言，在经后选而具有两个空位点的系统中，我们观测到76(7)%的情况下，空位点（对应于含有两个原子的格点）彼此相邻。在55(7)%的情况下，两个空位点位于中心，这对应于观测到状态 $|1,\ 2,\ 2,\ 1\rangle$（补充信息，图8a）。与 $n = 5/3$ 系统不同，$n = 6/4$ 系统对附加势偏移非常敏感；加入谐振束缚势和势阱壁势会使中央格点的占据更为有利，而在理想盒式势中，预测的密度分布是平坦的。我们的所有观测结果都可由单带Bose-Hubbard模型很好地解释，同时也与单带模型之外的先前数值计算结果一致 [35]。纳入高能带导致排斥效应和格点密度碎片化的现象已得到证实。虽然这里也会出现这类效应，但要观测到它们，需要具备以亚晶格格点分辨率探测原子波函数的能力。

### 偏置势中的粒子迁移率

可以预期，当掺杂绝缘体受到外部探测时，其行为将不同于未掺杂绝缘体，例如在测量其可压缩性和粒子迁移率时。为了证明这一点，我们研究了相称系统和非相称系统在受到形式为 $H_g = \Delta E \sum_{i=1}^{N} i\,\hat{n}_i$ 的梯度势作用时的变化，其中 $\Delta E$ 表示每个晶格位点的能量位移，$\hat{n}_i$ 表示局域数目算符。我们采用深晶格，$V_x = 16(1)\ E_r$, $J/h = 9(1)$ Hz，并施加一个在 500 ms 内缓慢增大的磁偏置场，以保持绝热性。当磁偏置场施加于一个由四个原子占据四个格点的相称系统时，空位点的分布几乎保持不变（图 5a–c）[41]。而在一个由五个原子占据四个晶格位点的非相称系统中，找到额外原子（检测时表现为空位点）的概率会向梯度产生的力的方向偏移（图 5d–f），这表明与未掺杂状态相比，掺杂绝缘体具有不同且非零的可压缩性。我们通过计算这一效应的量化值来.....

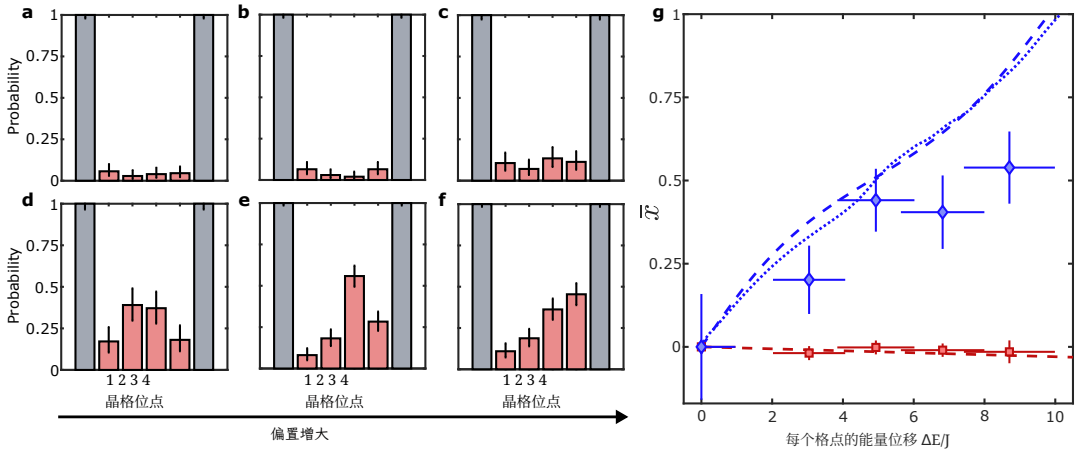


**图 5. 偏置势中的莫特绝缘体和掺杂绝缘体。a-c,** 在偏置势作用下，对于每个晶格位点的最大能量位移为 $\Delta E/J = 0(1)$、5(1)、9(1) 的相称系统（四个格点上有四个原子）中检测到空位点的概率分布。**d-f,** 相同偏置势下非相称系统的相同概率分布（四个格点上有五个原子），其中空位点可能源于双占据态的检测。**g**，质心位移 $\bar{x}$（以晶格位点计），相对于原始概率分布随能量位移 $\Delta E$的变化；图中同时给出了相称系统（红色方块）和非相称系统（蓝色菱形）的结果，以及对应的基态数值模拟（虚线）和系综平均（点线）。 $\Delta E/J$和 $\bar{x}$ 的误差分别通过梯度校准和计数统计进行误差传播计算。每个直方图均通过对 $100-300$ 1D 个系统取平均获得。

图5a至5f中直方图的质心， $\bar{x}$，随 $\Delta E$变化的情况。对于相称系统（图5g，红色方块），质心没有变化；而对于非公度系统（图5g，蓝色菱形）， $\bar{x}$ 随 $\Delta E$增加而增加，表明非公度（掺杂）系统具有可压缩性 [42, 43]。质心位移对势垒和谐振约束的具体形状较为敏感（补充信息），这一点通过系统动力学的数值模拟得到了考虑。

## 讨论

我们研究了一维玻色量子系统中相称性的影响。这项研究的关键在于，我们能够在单个晶格位点的尺度上产生人工设计的动态光学势。从静态势垒之间具有已知原子数的整数量子填充状态出发，我们移动势垒以改变可用晶格位点的数量，从而构建非公度系统。为了表征我们对态制备的控制程度，我们通过测量从强相互作用到弱相互作用条件下空穴和双占据态的出现情况，对这些系统进行了表征。对于具有离域原子和局域化背景的非公度系统，我们观测到了非平凡的格点占据概率，这与我们的数值计算结果一致。通过研究系统在势梯度中的空间分布，我们观测到了非公度系统的粒子迁移率和可压缩性，而相称系统则始终保持在不可压缩的莫特绝缘态。为了实现对更大规模系统的研究，这需要较弱的外部束缚，这可以通过使用数字微镜器件（DMD）编程产生去束缚势来实现。这也使我们能够研究掺杂空穴而非粒子的系统。向非公度系统中引入无序，为进一步探索少数玻色子系统中超流体与玻色玻璃之间的相变及其对可压缩性的影响提供了一种途径 [24, 28, 30]。对于梯子系统，对原子数的控制可能带来更多有趣的效应，包括实现一种“梯级莫特绝缘体”（rung Mott insulator），这一态已被预测存在于具有半填充率的双腿梯子系统中 [44, 45]。我们用于生成动态可控势的方法，还可用于在玻色子和费米子系统中绝热制备具有可控非相称性或掺杂的低熵态。

## 方法

### 实验流程

实验首先将来自二维$^+$ MOT 的 $2\times10^9$ $^{87}$Rb 原子云装载到磁光阱（MOT）中。通过增强 MOT 的磁四极场压缩原子云，并在 D2 线上进行拉曼灰色糖浆冷却，使其冷却至 $2\,\mu$K [46]。我们将约 $1\times10^8$ 个原子装载到交叉光学偶极阱（CODT）中，该阱由两束波长为 1070 nm、功率为 200 W 的激光构成，两束光以 17(1)° 的角度相交。两束激光的束腰为 425(5)$\mu$m。随后，将原子装载到凹陷阱焦点处，该阱的束腰为 47(5)$\mu$m。接着，利用平移台移动光束，将原子输送到

配备高分辨率显微物镜（NA $= 0.69$）的“科学”腔室。约 $3 \times 10^6$ 个原子被转移到另一个 CODT 中，该阱由光学晶格光束构成，且反射回来的光束被遮挡；随后，利用蒸发冷却进一步冷却原子，并将其装载到垂直光学晶格中。我们在磁场梯度中采用位置依赖的微波转移，在垂直光学晶格的单个波腹中制备二维热原子云团 [2]。

随后，通过显微镜物镜照射波长为 850 nm 的凹陷阱，同时将垂直晶格深度保持在 $V_z = 20(1)E_r$。我们利用磁四极场倾斜陷阱，从而通过蒸发冷却原子，形成玻色-爱因斯坦凝聚体。接着，在开启两束水平光学晶格光束之前，我们先照射由数字微镜器件（DMD）整形的蓝失谐光，以产生排斥势垒。我们通过显微镜物镜进行荧光成像来探测单个原子，方法与先前的研究类似[2]。为在探测前冻结原子分布，首先将三个轴向的光学晶格深度增至 $50(2)E_r$ in$500\,\mu$s，随后在 2 ms 内增至 $3000E_r$。我们使用 Lucy-Richardson算法对荧光图像进行反卷积，并以高保真度重建晶格占据数 [47]。我们估计总体探测保真度为 $\approx 99\%$，其限制因素包括成像期间的原子跳跃和损失，以及图像重建保真度。

### 可编程动态光势

我们使用数字微镜器件（ViALUX V-9001），利用放大型二极管激光器发出的、波长为 666 nm 的蓝失谐光，产生排斥性势垒。通过高分辨率物镜将 DMD 图像投射到原子上，使我们能够使用每个晶格位点 $18 \times 18$ 个 DMD像素来调控定制势。专用软件可让我们在光学晶格的参考系中指定势垒的初始位置和最终位置。我们还可以设置要在 DMD 上显示的不同图案（帧）的数量。系统制备期间显示初始帧；触发脉冲发出后，依次显示一系列帧，使势垒移动，并以离散数量的晶格位点缩小系统尺寸。我们将 DMD 设为“连续”模式，以抑制连续帧之间的暗时间。帧与帧之间的过渡时间为

$8\,\mu$秒，在此期间镜子被释放，并切换至下一种镜子配置。

我们观察到，在连续两次实验实现之间，光学晶格的相位漂移为 [48]，平均位置偏移约为$0.05\,a_1$，其中 $a_1 = \lambda/2$ 为晶格间距。通过拟合荧光图像中单个原子的位置来测量这一位置偏移。我们利用这一信息调整下一次测量所用的DMD图案的位置，以跟随相位漂移。在这种

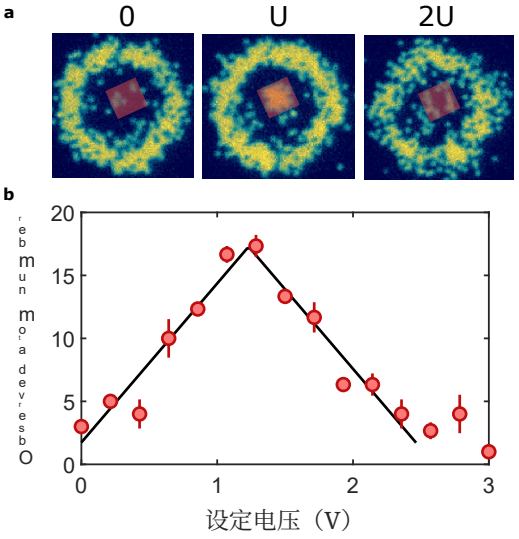


**图6. 排斥势垒的校准。a**，莫特绝缘态下原子的荧光图像，内层为 $n = 2$ 壳层（可见其大部分为空位点），并在一个包含 $5\times4$ 个格点的区域内受到方形排斥势照射，该区域由红色方框标出。三幅图像分别使用了三种不同强度的666 nm光，对应的势高为0、 $U$和 $2U$。光学晶格的势阱深度分别为 $V_x = V_y = 20$ (1) $E_r$和 $V_z = 35(5)\ E_r$，使得 $U/h = 940(100)$ Hz。**b**，**a**中红色方框标示区域内观测到的原子数，随激光强度调节的设定电压变化。每个数据点是对三幅图像中计数的原子数取平均所得，误差棒表示标准误差。图中的峰值对应于设定电压为1.23(8)V时的势高 $U$ 。

方式下，排斥势相对于光学晶格保持在同一位置，估计偏差为 $< 0.05$ 倍晶格间距。

为了校准 666 nm光的强度，我们将排斥势投射到莫特绝缘态中一个 $n = 2$ 壳层的中心 $5 \times 4$ 格点上（图6a）。观测区域内的原子数随激光强度调节的设定电压变化而变化；当排斥光势造成的光移等于 $U$时，原子数达到峰值（图 6b）。此时，排斥势覆盖的所有格点均为单占据，并形成一个 $n = 1$莫特绝缘壳层 [12]。进一步提高排斥势的光强，使光移等于 $2U$后，我们最终再次观测到该区域内没有原子。

我们验证了，使用动态DMD势在超流区压缩量子气体，并采用 10 ms 的“帧持续时间”，不会导致显著的原子损失。为量化原子损失，我们按照与压缩相同的时间尺度，将排斥势垒移回其原始位置，然后将系统重新转移到莫特绝缘态。我们发现，使用静态势垒时，在五个格点上平均检测到 4.81(5) 个原子，

而移动并反转势垒时，平均检测到 4.64(7) 个原子。

### 系统动力学的数值模拟

对于填充率高于 1、趋近托克斯-吉拉多极限的强相互作用系统，已知必须考虑高能带，因为格点上的排斥作用会导致基态中单个格点内粒子密度的碎片化 [35]。然而，对于本文所研究的情况，量子气体显微镜能够分辨单个格点，但无法分辨格点内部的粒子密度。因此，我们采用单能带（最低能量）玻色-哈伯德模型来描述一维光学晶格中的原子。哈密顿量为 [24, 25]

$$\hat{H} = -J\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{i+1} + h.c.\right) + \frac{U}{2}\sum_{i=1}^{N}\hat{n}_i(\hat{n}_i - 1) + \sum_{i=1}^{N}\epsilon_i \hat{n}_i, \tag{1}$$

其中，$N$ 是格点数，$\hat{a}_i^\dagger$ 和 $\hat{a}_i$ 分别是玻色子产生算符和湮灭算符，$\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ 是数算符，$J$ 是相邻晶格位点之间的隧穿强度，$U$ 是格点上的相互作用能，$\epsilon_i$ 是由外部势引起的局部能量位移。我们根据瓦尼尔函数计算 $J$ 和 $U$，而 $\epsilon_i$ 则考虑了弱谐约束和壁势的影响，同时计入了经过校准的势垒高度以及显微镜的点扩散函数。

我们对实验动力学进行数值模拟，并在所有情况下都考虑粒子数固定的有限晶格的完整希尔伯特空间。初态设为相称填充的晶格莫特绝缘体，并以数值方式对更高填充率实施相同的方案。对于深、浅晶格势之间的渐变，我们通过逐个离散时间步实施幺正演化算符来演化系统，每一步的最大误差为 $10^{-6}$。移动势垒时，我们模拟由 DMD图案的离散帧所导致的势能离散变化。为考虑初态的热分布，我们分别演化每个初始本征态，并将演化后的态按玻尔兹曼分布加权求和，以计算最终的非零温度态。总体而言，零温数值结果与实验吻合良好。对于相称和非相称密度，我们针对一系列初始 $J/U$ 值模拟了将系统骤冷至深晶格的成像骤冷过程，以确保其不会引入非绝热效应，并能得到冻结的密度分布。由于每次实验实现都采用相同的成像骤冷过程，因此我们在模拟中将其排除。

实验的初始一维系统中的原子数有小概率比晶格位点数多一个或少一个原子。我们模拟了这种非完美态制备的影响，以确认对额外空位点的观测并非源于非绝热效应激发，因为在原子数固定的数值方案中无法捕捉到这些激发。我们通过模拟多一个原子和少一个原子的情况来模拟这种不完美的制备。随后，我们将这些结果与假设初始态制备完美时的结果相结合，以模拟我们通过后选择过程在实验中观察到的现象。

### 可观测量的定义与计算

数值模拟计算完整波函数；为了与实验结果进行比较，我们计算第 $i$个格点的局域宇称算符 $\hat{s}_i$，

$$\hat{s}_i = \frac{1}{2}\left[(-1)^{\hat{n}_i - 1} + 1\right], \tag{2}$$

以及局域数目算符 $\hat{n}_i$。我们利用晶格占据数测量单个晶格位点上原子数的奇偶性，$s_i = \langle \hat{s}_i \rangle$，以及 $M$ 个晶格位点上的平均原子数奇偶性，$\bar{n} = \sum_{i=1}^{M} s_i/M$，其中 $M$ 由一维系统的大小乘以实现次数给出。由此，我们计算原子数 $\sigma = \bar{n}(1-\bar{n})$的方差，如图4b所示。

对于图5g中的数据集，我们利用 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} i\, w_i / \sum_{i=1}^{4} w_i$计算非相称系统（5个原子占据4个位点）的质心，其中 $w_i$ 是在晶格位点 $i$上找到空位点（即额外原子位于双重占据格点上）的概率。为了与相称系统的情况相匹配，我们使用 $\bar{w}_i = 1 - w_i$ 而非 $w_i$，从而计算相称系统和非相称系统直方图中原子的质心位移。

### 偏置势的校准

为校准用于偏置势的磁场，我们采用了先前研究中使用的方法 [49, 50]。首先制备一个 $n = 1$ 莫特绝缘体，将 $x$晶格光束的功率调制 20 %，持续 30 ms。当调制频率与相互作用能 $U$ 相匹配时，原子会隧穿至已被占据的格点，从而使空穴和双占据格点的数量增加。施加磁场梯度后，每个格点产生能量偏移 $\Delta E$，此时原子会在调制频率与 $U \pm \Delta E$ 相匹配时发生隧穿。中心区域内计数的原子数随 $\Delta E$ 变化呈现两个反向峰（图 7），我们通过拟合双洛伦兹函数确定其位置，得到 $U \pm \Delta E$。我们针对不同的磁场梯度重复了这项测量，并拟合线性回归模型，由此获得图 5g 中所示 $\Delta E/J$ 的误差棒。

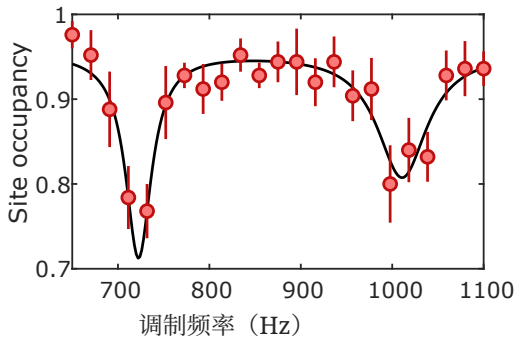


**图7. 磁场梯度校准**。调制频率变化时，莫特绝缘体中心 $5 \times 5$ 个格点内的占据数观测值，$n = 1$该莫特绝缘体处于 $U/h = 830(100)$ Hz。曲线是对数据进行双洛伦兹函数拟合得到的，用于确定峰值位置。每个数据点是对五张图像中计数所得的原子数取平均得到的。误差棒表示标准误差。

**致谢**

我们感谢英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）通过 DesOEQ项目资助[（资助编号 EP/P009565/1]，）、量子计算与模拟量子技术中心［（资助编号 EP/T001062/1],）、新研究员资助 ［（资助编号 EP/T027789/1]，），以及为 CP[（资助编号 EP/T517938/1]）和 LK［（资助编号 EP/W524670/1]）提供的博士培养合作项目资助。我们感谢 Ilian Despard、Andr´es Ulibarrena、Harikesh Ranganath 和 Maximilan Ammenwerth 在实验装置搭建初期所做的工作。

[1] W. S. Bakr、A. Peng、M. E. Tai、R. Ma、J. Simon、J. I. Gillen、S. F¨olling、L. Pollet 和 M. Greiner，《在单原子尺度探测超流体到莫特绝缘体转变》，《科学》**329**，547（2010）。[2] J. F. Sherson、C. Weitenberg、M. Endres、M. Cheneau、I. Bloch 和 S. Kuhr，《原子莫特绝缘体的单原子分辨荧光成像》，《自然》**467**，68（2010）。[3] C. Gross 和 W. S. Bakr，《用于单原子和自旋探测的量子气体显微术》，《自然·物理》**17**，1316（2021）。[4] M. Lewenstein、A. Sanpera、V. Ahufinger、B. Damski、A. Sen(De) 和 U. Sen，《光学晶格中的超冷原子气体：模拟凝聚态物理及其他》，《物理学进展》**56**，243（2007）。[5] I. Bloch、J. Dalibard 和 W. Zwerger，《超冷气体的多体物理》，《现代物理学评论》**80**，885（2008）。[6] C. Gross 和 I. Bloch，《利用光学晶格中的超冷原子进行量子模拟》，《科学》**357**，995（2017）。[7] F. Sch¨afer、T. Fukuhara、S. Sugawa、Y. Takasu 和 Y. Takahashi，《利用光学晶格中的超冷原子进行量子模拟的工具》，《自然综述：物理》**2**，411（2020）。[8] A. Kaufman、E. M. Tai、A. Lukin、M. Rispoli、R. Schit- tko、P. M. Preiss 和 M. Greiner，《孤立多体系统中通过纠缠实现量子热化》，《科学》**353**，794（2016）。[9] A. Lukin、M. Rispoli、R. Schittko、E. M. Tai、A. Kauf- man、S. Choi、V. Khemani、J. L´eonard 和 M. Greiner，《探测多体局域化系统中的纠缠》，《科学》**364**，256（2019）。[10] A. Mazurenko、C. S. Chiu、G. Ji、M. F. Parsons、M. Kan´asz-Nagy、R. Schmidt、F. Grusdt、E. Demler、D. Greif 和 M. Greiner，《冷原子费米–哈伯德反铁磁体》，《自然》**545**，462（2017）。[11] P. Sompet、S. Hirthe、D. Bourgund、T. Chalopin、J. Bibo、J. Koepsell、P. Bojovi´c、R. Verresen、F. Pollmann、G. Sa- lomon、C. Gross、T. Hiler 和 I. Bloch，《实现费米–哈伯德梯子中的对称性保护 Haldane 相，《自然》**606**, 484 (2022). [12] S. Hirthe, T. Chalopin, D. Bourgund, P. Bojovi´c, A. Bohrdt, E. Demler, F. Grusdt, I. Bloch, and J. Zeiher, 超冷原子费米子梯子中的磁介导空穴配对，《自然》**613**, 463 (2023). [13] A. N. Wenz, G. Z¨urn, S. Murmann, I. Brouzos, T. Lompe, and S. Jochim, 从少数到多数：逐个原子观测费米海的形成，《科学》**342**, 457 (2013). [14] P. A. Lee, N. Nagaosa, and X.-G. Wen, 掺杂莫特绝缘体：高温超导物理，《现代物理学评论》**78**, 17 (2006). [15] M. Xu, L. Kendrick, A. Kale, Y. Gang, G. Ji, R. Scalettar, M. Lebrat, and M. Greiner, 掺杂受挫费米–哈伯德磁体，arXiv:2212 13983 10 48550 2212 13983 2022 . . /arXiv. . ( ). [16] R. Anderson, F. Wang, P. Xu, V. Venu, S. Trotzky, F. Chevy, and J. H. Thywissen, 光学晶格中超冷原子的电导率谱，《物理评论快报》**122**, 153602 (2019). [17] P. T. Brown, D. Mitra, E. Guardado-Sanchez, R. Nourafkan, A. Reymbaut, C.-D. H´ebert, S. Bergeron, A.-M. S. Tremblay, J. Kokalj, D. A. Huse, P. Schauß, and W. S. Bakr, 冷原子费米–哈伯德系统中的不良金属输运，《科学》**363**, 379 (2019). [18] M. A. Nichols, L. W. Cheuk, M. Okan, T. R. Hartke, E. Mendez, T. Senthil, E. Khatami, H. Zhang, and M. W. Zwierlein, 超冷费米子莫特绝缘体中的自旋输运，《科学》**363**, 383 (2019). [19] C. S. Chiu, G. Ji, A. Bohrdt, M. Xu, M. Knap, E. Demler, F. Grusdt, M. Greiner, and D. Greif, 掺杂哈伯德模型中的弦图样，《科学》**365**, 251 (2019). [20] G. Salomon, J. Koepsell, J. Vijayan, T. A. Hilker, J. Ne- spolo, L. Pollet, I. Bloch, and C. Gross, 直接观测哈伯德链中的非公度磁性，《自然》**565**, 56 (2019). [21] J. Koepsell, J. Vijayan, P. Sompet, F. Grusdt, T. A. Hilker, E. Demler, G. Salomon, I. Bloch, and C. Gross,

掺杂费米–哈伯德模型中的磁极化子成像，《自然》**572**, 358 (2019). [22] J. Koepsell, D. Bourgund, P. Sompet, S. Hirthe, A. Bohrdt, Y. Wang, F. Grusdt, E. Demler, G. Salomon, C. Gross, and I. Bloch, 掺杂莫特绝缘体从极化子金属到费米液体的微观演化，《科学》**374**, 82 (2021). [23] G. Ji, M. Xu, L. H. Kendrick, C. S. Chiu, J. C. Br¨uggenj¨urgen, D. Greif, A. Bohrdt, F. Grusdt, M. Knap, E. Demler, M. Lebrat, and M. Greiner, 将移动空穴耦合到反铁磁自旋背景：磁极化子的瞬态动力学，《物理评论 X》**11**, 021022 (2021). [24] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, 玻色子局域化与超流体—绝缘体转变，《物理评论 B》**40**, 546 (1989). [25] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, 光学晶格中的冷玻色原子，《物理评论快报》**81**, 3108 (1998). [26] A. Lazarides, O. Tieleman, and C. Morais Smith, 非公度密度下的一维光学晶格中的强相互作用玻色子，《物理评论 A》**84**, 023620 (2011). [27] H. P. B¨uchler, 一维超冷原子玻色子的晶体相，《新物理学杂志》**13**, 093040 (2011). [28] B. Damski, J. Zakrzewski, L. Santos, P. Zoller, and M. Lewenstein, 光学晶格中的原子玻色玻璃和安德森玻璃，《物理评论快报》**91**, 080403 (2003). [29] L. Fallani, J. E. Lye, V. Guarrera, C. Fort, and M. In- guscio, 无序光晶体中的超冷原子：迈向玻色玻璃，《物理评论快报》**98**, 130404 (2007). [30] X. Cai, S. Chen, and Y. Wang, 一维非相称光学晶格中硬核玻色子的超流体—玻色玻璃转变，《物理评论 A》**81**, 023626 (2010). [31] G. E. Astrakharchik, K. V. Krutitsky, M. Lewenstein, F. Mazzanti, and J. Boronat, 光学晶格作为研究缺陷诱导超流性的工具，《物理评论 A》**96**, 033606 (2017). [32] W. J. Kwon, G. Del Pace, K. Xhani, L. Galantucci, A. Muzi Falconi, M. Inguscio, F. Scazza, and G. Roati, 可编程量子涡旋对撞机中的声发射与湮灭，《自然》**600**, 64 (2021). [33] G. Del Pace, K. Xhani, A. Muzi Falconi, M. Fedrizzi, N. Grani, D. Hernandez Rajkov, M. Inguscio, F. Scazza, W. J. Kwon, and G. Roati, 在可调费米子环中印刻持久电流，《物理评论 X》**12**, 041037 (2022). [34] M. T. Reeves, K. Goddard-Lee, G. Gauthier, O. R. Stockdale, H. Salman, T. Edmonds, X. Yu, A. S. Bradley, M. Baker, H. Rubinsztein-Dunlop, M. J. Davis, and T. W. Neely, 二维量子涡旋气体向平衡态的湍流弛豫，《物理评论 X》**12**, 011031 (2022). [35] I. Brouzos, S. Z¨ollner, and P. Schmelcher, 一维晶格中有限玻色系统的关联与相称性效应，《物理评论 A》**81**, 053613 (2010). [36] R. Yamamoto, H. Ozawa, D. C. Nak, I. Nakamura, and T. Fukuhara, 三角光学晶格中超冷原子的单格点分辨成像，《新物理学杂志》**22**, 123028 (2020). [37]J. Yang、L. Liu、J. Mongkolkiattichai 和 P. Schauss，《三角晶格量子气体显微镜中超冷费米子的逐格点成像》，《PRX Quantum》**2**，020344（2021）。[38] T. Fukuhara、A. Kantian、M. Endres、M. Cheneau、P. Schauß、S. Hild、D. Bellem、U. Schollw¨ock、T. Gi-amarchi、C. Gross、I. Bloch 和 S. Kuhr，《移动自旋杂质的量子动力学》，《自然·物理》**9**，235（2013）。[39] M. Endres、M. Cheneau、T. Fukuhara、C. Weitenberg、P. Schauss、C. Gross、L. Mazza、M. C. Banuls、L. Pollet、I. Bloch 和 S. Kuhr，《低维莫特绝缘体中关联粒子-空穴对和弦序的观测》，《科学》**334**，200（2011）。[40] M. Rigol、G. G. Batrouni、V. G. Rousseau 和 R. T. Scalettar，《光学晶格中谐振阱玻色子的状态图》，《物理评论A》**79**，053605（2009）。[41] N. Gemelke、X. Zhang、C. L. Hung 和 C. Chin，《超冷原子气体中不可压缩莫特绝缘区域的原位观测》，《自然》**460**，995（2009）。[42] T.-L. Ho 和 Q. Zhou，《根据囚禁气体的密度获得体系统的相图和热力学量》，《自然·物理》**6**，131（2010）。[43] E. Busley、L. Miranda、A. Redmann、C. Kurtscheid、K. K. Umesh、F. Vewinger、M. Weitz 和 J. Schmitt，《盒式光学量子气体的可压缩性与状态方程》，《科学》**375**，1403（2022）。[44] J. Carrasquilla、F. Becca 和 M. Fabrizio，《无序双腿梯中硬核玻色子的玻色玻璃、超流体和梯级莫特相》，《物理评论B》**83**，245101（2011）。[45] F. m. c. Cr´epin、N. Laflorencie、G. Roux 和 P. Si-mon，《洁净和无序双腿梯上硬核玻色子的相图：莫特绝缘体–卢廷格液体–玻色玻璃》，《物理评论B》**84**，054517（2011）。[46] S. Rosi、A. Burchianti、S. Conclave、D. S. Naik、G. Roati、C. Fort 和 F. Minardi，《Rb-87 原子D2跃迁上由 Λ增强的灰色糖浆冷却》，《科学报告》**8**，DOI:10.1038/s41598-018-19814-z（2018）。[47] A. La Rooij、C. Ulm、E. Haller 和 S. Kuhr，《量子气体显微镜图像反卷积技术的比较研究》，arXiv:2207 08663 10 48550 2207 08663 2022 . . /arXiv. .（）。[48] C. Weitenberg、M. Endres、J. F. Sherson、M. Cheneau、P. Schauß、T. Fukuhara、I. Bloch 和 S. Kuhr，《原子莫特绝缘体中的单自旋寻址》，《自然》**471**，319 2011（）。[49] J. Simon、W. S. Bakr、R. Ma、M. E. Tai、P. M. Preiss 和 M. Greiner，《光学晶格中反铁磁自旋链的量子模拟》，《自然》**472**，307（2011）。[50] R. Ma、M. E. Tai、P. M. Preiss、W. S. Bakr、J. Si-mon 和 M. Greiner，《偏置强关联玻色气体中的光子辅助隧穿》，《物理评论快报》**107**，095301 2011（）。

## 补充信息

### 态检测概率

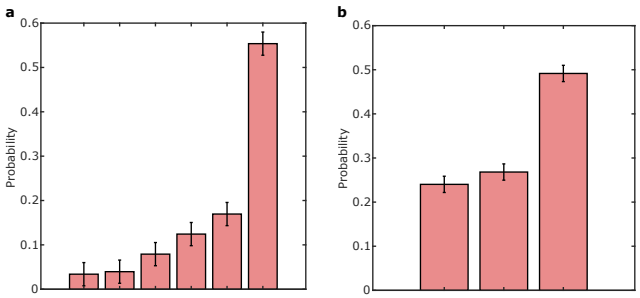


**图8. 含有两个额外粒子的不相称系统的态检测概率。a**，检测一个含有6个原子、占据4个位点的系统中不同数态的概率。**b**，含有5个原子、占据3个位点的系统的对应结果。

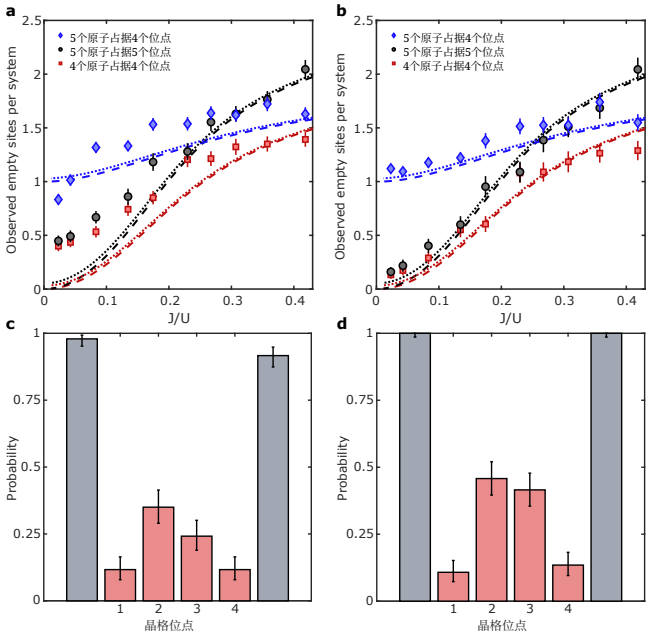


**图 9. 后选择的影响。a**，图 3a 中的数据集，但未进行后选择；**b** 相同数据集，进行后选择以作比较；**c**，未进行后选择时，5 个原子占据4个位点的空穴概率（数据集来自图 2i）；**d** 相同数据集在后选择后的结果。

### 数据分析与后选择

我们依据两个标准对数据集进行后选择。首先，我们排除在势垒内侧格点上观测到原子的 一维系统。对于图3所示的数据，这种情况在不到5%的系统中出现。当施加偏置势时（图5所示数据），在最大势梯度下，这一比例上升至约20%。其次，我们根据每个一维系统的原子数奇偶性进行后选择。当我们将系统压缩一个格点时，由于预期有一个格点会变为双重占据并被探测为空格点，因此观测到的奇偶性应与最初制备的系统相反。

我们的系统制备保真度（实验流程第 1 步，见图 2a）表现为：通常在 75% 的情况下观测到零个空位点，20% 的情况下奇偶性错误，5% 的情况下有两个空位点。完成整个实验流程（图 2a 中的第 4 步）后，我们发现 25%–40% 的情况下观测到的奇偶性有误。我们将其归因于两个原子的损失，以及捕获激光强度噪声引起的加热所导致的粒子-空穴对激发，尤其是在强度渐变过程中。由于奇偶性守恒，后选择无法检测到两个原子的损失。假设在我们的一维系统中，损失一个原子的概率为 0.3，那么损失两个原子的概率为 0.1。我们还发现，非相称系统需要进行更多后选择，这表明额外的原子更容易损失；我们再次将此归因于这些系统具有无能隙的激发谱，因此更容易受到技术噪声的影响。总体而言，我们保留了约 70% 的系统，用于图 3 所示的数据集。对于图 4 所示的实验，当我们将系统压缩超过一个格点时，平均保留了 60% 的数据集。在图 5 中施加偏置势时，我们发现约 55% 的非相称系统具有正确的奇偶性，而相称系统中这一比例为 60% $-$ 75%。

我们展示了后选择过程对部分数据集的影响（图 9）。例如，对于正文图 3a 所示的测量，后选择过程使数据集与$T = 0$ 理论曲线的吻合程度大幅提高。不过，仍存在一个小偏差，因为我们不会对观测到的原子数比预期少两个的系统进行后选择。含有一个热激发的系统比例通常约为 5%。

本文展示的所有数据集均采用势垒之间居中的八个一维系统，因为它们的熵略低。

### 势形的详细信息

在我们的数值模拟中，我们考虑了成像系统的点扩散函数，并假设该系统达到衍射极限来计算该函数。这会使排斥势垒变宽，并在距离势垒最近的晶格位点上产生能量偏移 $\epsilon_{\text{off}}$（图 10）。对于产生最大光移 $\Delta_{LS}/h = 3.3(5)$ kHz $= 3.5(5)U$ 的排斥势垒，其能量

偏移量为 $\epsilon_{\rm off} = 0.027(4)\Delta_{LS} = 2\pi\hbar \times 90(10)$ Hz。当施加偏置势时（图 5 所示的测量结果），这一偏移量变得显著，因为该能量偏移与质心的移动方向相反。对于图 5 中使用的晶格深度$V_x = 16(1)\ E_{\rm r}$，系统最外侧格点上的能量偏移为 $\epsilon_{\rm off} \approx 0.1\,U \approx 10J$。

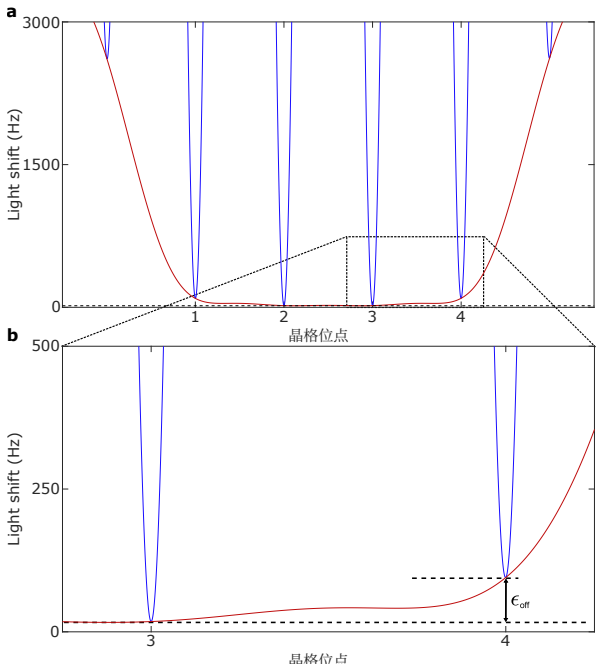


**图10. 点扩散函数对势形的影响。a**，投影排斥势垒（红色）与包含光学晶格的组合势（蓝色）的晶格势。**b**，放大显示外侧两个晶格位点，以展示能量偏移 $\epsilon_{\rm off}$。

### 强相互作用极限

在强相互作用极限下，可以通过微扰方法求解标准玻色-哈伯德模型，而不必像本工作中那样使用数值模型来模拟系统动力学，对于本工作研究的固定原子数和晶格位点数，我们可以利用 $U/J \to \infty$ （深晶格）极限进一步限制有限希尔伯特空间。由此可以求得低能态的解析解。例如，对于 3 个格点上的 5 个原子，当我们取 $U/J \to \infty$时，鉴于单个格点上占据 3 个原子的可能性极小（因为其现场相互作用能高达 $6U$），自然可以忽略这种情况。由于原子数和格点数固定，必须允许单个格点上有 2 个原子的态，因此低能态的受限希尔伯特空间为 $\{|221\rangle, |212\rangle, |122\rangle\}$。此时哈密顿量只有动能项，相互作用项则为每个基态带来一个恒定的对角偏移。基态为

$$|\psi\rangle_{\rm GS}^{\rm 5on3} = \frac{1}{\sqrt{2}}|212\rangle + \frac{1}{2}\left(|221\rangle + |122\rangle\right), \tag{3}$$

原子倾向于位于系统边缘。

对于正文中考虑的每种构型，都可以重复类似的过程。例如，对于 4 个格点上的 6 个原子，可得:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{\rm GS}^{\rm 6on4} =& \frac{1}{2}\left(|2121\rangle + |1212\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(|2112\rangle + |1221\rangle\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(|2211\rangle + |1122\rangle\right),\end{aligned} \tag{4}$$

以及四个格点上有五个原子的情况

$$|\psi\rangle_{\rm GS}^{\rm 5on4} = \mathcal{N}\left[|1211\rangle + |1121\rangle + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(|2111\rangle + |1112\rangle\right)\right], \tag{5}$$

with $\mathcal{N} = (1+\sqrt{5})/\left(2\sqrt{2+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right)$.