# 孤子与外力场的相互作用：探索 Schamel 方程框架

Marcelo V. Flamarion[1] 和 Efim Pelinovsky[2,3]

[1]圣阿戈斯蒂纽角学术单位，伯南布哥联邦乡村大学（UFRPE），BR 101 Sul，圣阿戈斯蒂纽角-PE，巴西，54503-900 marcelo.flamarion@ufrpe.br

[2]应用物理研究所，俄罗斯下诺夫哥罗德市 Uljanov 街 46 号，邮编 603155，俄罗斯。
[3]国立高等经济大学，俄罗斯莫斯科。

arXiv:2305.03816v2 [physics.flu-dyn] 9 May 2023

**摘要**

本研究旨在从渐近和数值两方面，研究 Schamel 方程框架下孤子与外力的相互作用。通过利用渐近展开，我们证明孤子相互作用可以由一个涉及孤子振幅及其波峰位置的动力系统来近似描述。为求解 Schamel 方程，我们采用伪谱方法，并将所得结果与渐近理论的预测进行比较。值得注意的是，我们的研究结果表明，在早期时间段内，理论预测与数值模拟在定性上具有一致性。具体而言，我们将孤子相互作用分为三类：（i）当孤子波峰与外力波峰同相时，发生稳态相互作用；（ii）当孤子速度与外力速度接近共振时，会出现振荡行为，导致孤子在其初始位置附近来回反弹；（iii）当孤子偏离其初始位置且不改变运动方向时，会发生不可逆运动。

## 1 引言

Schamel 方程是等离子体物理学领域中常用的一种数学模型，用于描述非线性波现象。具体而言，它被用于研究等离子体中离子声波的动力学[30, 31, 1, 4, 25, 33]。Schamel [31] 最初通过考察等离子体中离子与电子之间的相互作用，并考虑碰撞、等离子体密度和温度梯度的影响，推导出了该方程。Schamel 方程在研究孤子等现象时尤为重要。孤子是在等离子体中传播的孤立、自增强波。在 Schamel 方程的语境下，孤子会表现出自俘获和粒子加速等有趣行为。在某些现实物理情境中，人们观察到外部扰动会产生影响 [26, 34, 3]。此外，研究发现，这些扰动会随物理条件的不同而变化。近期研究尤其着重考察了存在此类外部扰动时的非线性行波解 [28, 29]。最近，Chowdhury 等人 [4] 推导出了一种存在外力时的 Schamel 型方程。他们从渐近分析和数值计算两方面研究了孤子与时变外部周期力的相互作用。著名的科尔特韦格-德弗里斯方程与 Schamel 方程的主要区别在于对非线性的表达方式不同，其中模项是后者的特征。这一关键区别使 Schamel 方程成为不可积方程，并带来了与函数非解析性相关的数学难题。

对孤子与外力相互作用的研究引起了广泛关注，并在过去几十年中得到了深入探讨。这种外力通常表示局部地形或移动源 [2]。研究人员在各种框架下探索了这一问题，包括受迫科尔特韦格-德弗里斯方程（fKdV） [5, 21, 22, 20, 9, 7, 8, 23, 17, 35, 24, 19], 欧拉方程 [10], 受迫修正 Korteweg-de Vries 方程（fmKdV） [11, 14], 以及非可积受迫 Whitham 方程[12, 13]。在孤子与外力相互作用过程中观察到的一个引人关注的现象是俘获波的出现。俘获波的特征是，它们在外力处来回反弹，并在较长时间内保持俘获状态。当孤立波的速度与外力的速度几乎发生共振时，就会出现这一现象。

Grimshaw 及其同事针对局域外力 [15, 16] 情境下的 fKdV 方程，对俘获波进行了广泛的渐近研究。在渐近框架中，他们确定了三种不同的情形。首先，孤子可能在外力处表现出反弹行为，并被俘获较长时间。其次，孤子可能越过外力而不改变方向。

最后，它可能会在外力作用下保持稳定。值得注意的是，这些研究揭示了渐近分析与数值预测之间高度一致。Grimshaw 及其团队证明，与数值模拟相比，渐近框架能够提供可靠且准确的结果。

本文旨在通过受迫 Schamel 方程，研究孤子与以恒定速度运动的外加力之间的相互作用。在 Schamel 方程中引入外力，可以更全面地考察系统对外部扰动的响应，并深入了解等离子体的内禀动力学与外部影响之间的相互作用。本研究采用数值方法和渐近方法进行分析。对获得的渐近结果和数值结果进行了定性比较，并讨论了俘获条件的不同区域。

本文组织如下。在第 2 节中，我们介绍问题的数学表述。第 3 节介绍研究结果，第 4 节给出结论。

## 2 强迫 Schamel 方程

我们通过考虑典范形式的 Schamel 方程，研究孤子与外力场的相互作用，其中包括具有恒定速度 $\Delta$ 的外力 $f(x)$

$$u_t + \sqrt{|u|}u_x + u_{xxx} = f_x\Big(x + \Delta t\Big). \tag{1}$$

在该方程中， $u(x,\ t)$ 表示波场，而 $f(x)$ 表示外力。我们旨在研究孤子与该外力场之间的相互作用。为此，将方程 (1) 改写为外力运动坐标系中的形式更为方便。因此，我们定义行波变量

$$x' = x + \Delta t,\ \ t' = t.$$

在新的坐标系中，省略撇号后，方程 (1) 可表示为

$$u_t + \Delta u_x + \sqrt{|u|}u_x + u_{xxx} = f_x(x). \tag{2}$$

在继续之前，需要指出，受迫 Schamel 方程是一个哈密顿方程，其哈密顿量

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{\Delta u^2}{2} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{4}{15}\,\mathrm{sgn}(u)|u|^{5/2} - uf(x)\Big]dx. \tag{3}$$

就泛函 $\mathcal{H}$ 而言，方程 (2) 可写成哈密顿形式。

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}\Big],$$

其中

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} = \Delta u + u_{xx} + \frac{2}{3}\,\mathrm{sgn}(u)|u|^{3/2} - f(x).$$

此外，由于 $\mathcal{H}$ 不显含时间，哈密顿量 $\mathcal{H}$ 是一个不变量。此外，方程 (2) 还具有一个卡西米尔不变量，通常称为质量不变量，其表达式为

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx. \tag{4}$$

公式 (3)-(4) 具有重要作用，尤其是在评估用于求解 Schamel 方程 (2) 的数值方法的精度和可靠性方面。

在不存在外力时，Schamel 方程（2）以孤子为解。这些孤子可由以下表达式描述

$$u(x,t) = a\,\mathrm{sech}^4\Big(k(x-ct)\Big),\ \text{where}\ \ c = \Delta + \frac{8\sqrt{|a|}}{15}\ \text{and}\ k = \sqrt{\frac{c}{16}}. \tag{5}$$

其中， $a$ 表示孤子振幅，该振幅也可以为负； $c$ 表示孤子速度； $k$表征孤子波数。

在我们的研究中，我们将外力设为以下形式

$$f(x) = b\exp\Big(-\frac{x^2}{w^2}\Big). \tag{6}$$

在此表达式中， $w$ 表示外力宽度， $b$ 表示其振幅，该振幅也可以为负。注意，如果 $u(x,\ t)$ 是方程 (2) 在外力项 $f(x)$ 下的一个解，那么 $-u(x,\ t)$ 就是同一问题在外力项 $-f(x)$ 下的一个解。因此，我们仅考虑 $b > 0$ 这一情形；对于 $b < 0$，也有类似的结果。

# 3 结果

## 3.1 渐近结果

本节旨在推导孤子与外力相互作用的控制方程，并假设外力具有小振幅。为此，我们引入一个小的正参数，记为 $\epsilon$，并在方程 (2) 中用 $\epsilon f$ 替换外力 $f$。此外，我们假设波场与孤子非常相似，其参数随时间 [15, 18, 27] 缓慢变化。孤子可用以下公式进行数学描述

$$u(\mathbf{\Phi},T)=a(T)\,\mathrm{sech}^4(k(T)\mathbf{\Phi}),\ \text{where}\quad \mathbf{\Phi}=x-X(T)\ \text{and}\ X(T)=x_0+\frac{1}{\epsilon}\int_0^T q(T)dT, \tag{7}$$

其中，$x_0$ 是孤子的初始位置，函数 $a$ 和 $q$ 由波场与外场之间的相互作用决定。在这里，我们通过引入新变量 $T=\epsilon t$，形式化地定义“慢时间”。我们寻求渐近展开形式的解。

$$\begin{aligned} u(\mathbf{\Phi},T)&=u_0+\epsilon u_1+\epsilon^2u_2+\cdots,\\ q(T)&=q_0+\epsilon q_1+\epsilon^2q_2+\cdots. \end{aligned} \tag{8}$$

在 l　　在微扰理论的最低阶中，解 $u_0$ 和 $q_0$ 的定义如方程（　　7).

The 一阶动量平衡由以下表达式给出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dT}\int_{-\infty}^{\infty}u_0^2(\mathbf{\Phi})d\mathbf{\Phi}=\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\mathbf{\Phi})\frac{df}{d\mathbf{\Phi}}(\mathbf{\Phi}+X)d\mathbf{\Phi}. \tag{9}$$

将公式 (7) 代入方程 (9)，可得动力系统

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt}&=\frac{35}{32}k\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^4(k\mathbf{\Phi})\frac{df}{d\mathbf{\Phi}}(\mathbf{\Phi}+X)d\mathbf{\Phi},\\ \frac{dX}{dt}&=\Delta+\frac{8}{15}\sqrt{|a|}. \end{aligned} \tag{10}$$

当外力的宽度远大于孤子长度时，可以将孤子近似为狄拉克δ函数。因此，描述孤子波峰振幅和位置的动力系统可简化为以下形式

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt}&=\frac{35}{32}\frac{df}{dX}(X),\\ \frac{dX}{dt}&=\Delta+\frac{8}{15}\sqrt{|a|}. \end{aligned} \tag{11}$$

只有当 $\Delta$ 为负时，动力系统 (11) 的解才会在外力的极大值和极小值处具有平衡点。共振孤子的振幅 ($a_0$) 及其波峰的位置 ($X_0$) 为

$$a_0^{\pm}=\pm\Big(\frac{15\Delta}{8}\Big)^2\ \text{and}\ X_0=0\ \text{for}\ \Delta<0. \tag{12}$$

当扰动与孤子具有相同极性时，平衡位置属于中心；极性相反时，则属于鞍点。中心代表稳定的孤子，鞍点则代表孤子离开外场且不会反向；波经过外力后，它们之间的相互作用便会停止。

系统 (11) 的解可表示为流线，即流函数的等值曲线

$$\mathbf{\Psi}(X,a)=-\frac{35}{32}f(X)+\Delta a+\mathrm{sgn}(a)\frac{16}{45}|a|^{3/2}. \tag{13}$$

为了分析外力（6）作用下系统（11）的相图，我们对变量进行如下缩放：坐标 $X$ 相对于 $w$进行缩放，振幅 $a$ 相对于 $(35b/32)^{2/3}$进行缩放，其中$b>0$ 是外部强迫的振幅。这得到参数

$$\widetilde{\Delta}=\frac{\Delta}{((35/32)b)^{5/3}}. \tag{14}$$

在这个新的坐标系中，流函数为

$$\mathbf{\Psi}(X,a)=-e^{-X^2}+\tilde{\Delta}a+\mathrm{sgn}(a)\frac{16}{45}|a|^{3/2}. \tag{15}$$

图 1 展示了系统 (11) 的典型相图。需要注意的是，闭合轨道代表一个被俘获且不发生辐射的孤子，这是它与外力相互作用的结果。另一方面，非闭合轨道表示孤子持续传播且不会反向。需要指出的是，在图 1 中，每个平衡点都与外力的一个波峰对齐。

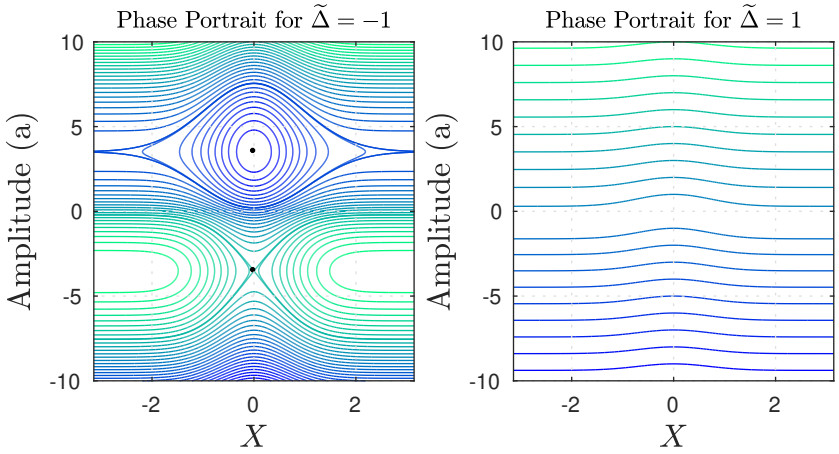


图1：动力系统（11）的相图。圆圈表示平衡点。

值得注意的是，渐近方法不适用于零振幅附近的情况。这是因为孤子宽度会无限增大，使其无法发生缓慢变化。此外，根据渐近理论，具有某一极性的孤子无法改变其极性。当孤子振幅趋近于零时，Schamel 方程中的所有项都处于相同的阶数，导致微扰理论失效。方程 (9) 刻画了极性的守恒性，为这一观察提供了支持。

## 3.2 数值结果

方程 (2) 的数值解通过采用带积分因子的傅里叶伪谱方法获得。该方程在周期性计算域 $[-L, L]$ 中求解，采用包含 $N$ 个点的均匀网格。该网格使我们能够准确地近似空间导数 [32]。为减弱空间周期性的影响，计算域选取得足够大。对于方程的时间演化，我们采用经典四阶龙格–库塔方法，离散时间步长为 $\Delta t$。外力按照方程 (6) 选取，其中 $b = 1$、 $w = 10$ 以及参数 $\epsilon = 0.01$。关于类似数值方法的完整分辨率研究，读者可参考 Flamarion 等人的工作 [6]。此外，在没有外力的情况下，我们验证了该数值方法能够守恒质量和动量。图 2 展示了初始振幅为 $a = 1$ 的孤子在整个时间演化过程中的质量和动量。

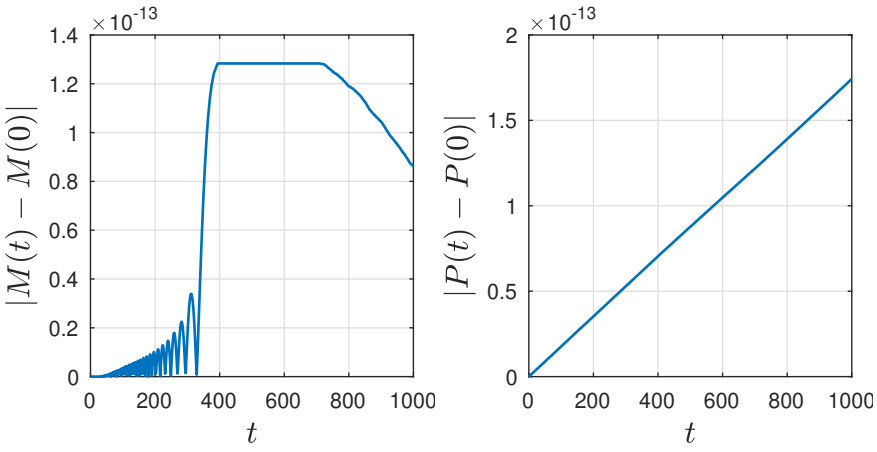


图 2：振幅为 $a = 1$ 的孤子在无外力作用下的守恒量。左图为质量守恒，右图为动量守恒。

为了建立数值解与渐近预测之间的比较，我们开展分析，以确定动力系统（11）的平衡点是否对应于方程（2）的特征解。我们的目标是确定鞍点附近的某一点是否

表示一个进行单向运动且不会反向的孤子，以及中心点是否对应一个俘获孤子。这项研究使我们能够验证数值方法与渐近方法在捕捉孤子动力学定性行为方面的一致性。

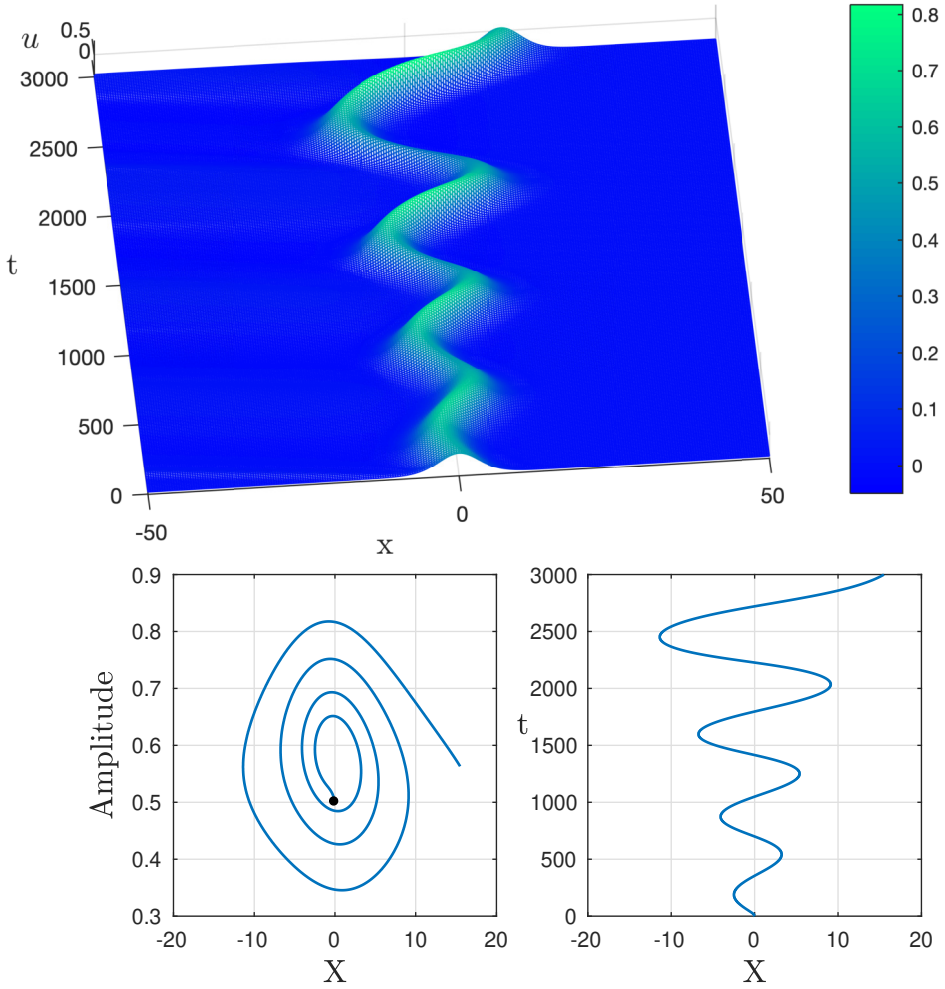


图3：上：与外力具有相同极性的俘获孤子。下（左）：空间振幅随波峰位置的变化。下（右）：波峰位置随时间的变化。参数： $a = 0.5$、 $w = 10$ 和 $\epsilon = 0.01$以及 $\Delta = -\frac{8}{15}\sqrt{|a|}$。

我们考虑 $\Delta$ 为负的有趣情形，因为这使得外场能够俘获孤子。渐近理论的预测与数值解之间具有良好的定性一致性，值得注意。需要指出的是，渐近解截断于 $\mathcal{O}(\epsilon)$阶，这决定了比较数值解与渐近解时的预期误差。图3展示了方程（2）的一组代表性解，其初始孤子的振幅和波峰位置被选为动力系统（11）的中心。值得注意的是，在较长时间内，孤子的波峰始终被限制在一个较小区域内，这表明在空间振幅与波峰位置平面上存在近似闭合的轨迹。然而，在较大时间尺度下，孤子会远离外力，这与渐近预测在定量上有所不同。此外，在波峰位置随时间变化的图中，孤子的行为类似于受迫谐振子（不稳定螺旋）。图4展示了某一时刻孤子与外力相互作用过程中产生的色散尾波。该色散尾波类似于线性艾里函数，而线性艾里函数是线性化 KdV 方程的一个解。需要指出的是，只要初始孤子振幅和波峰位置接近渐近理论预测的中心点，对于不同的初始选择也能观察到类似结果。

对于动力系统（11）预测的鞍点，我们观察到一种有趣的现象：凹陷孤子经过外力时不会改变运动方向。通过外力后，孤子振幅趋于稳定，并继续以恒定速度传播。这些引人入胜的动力学特性在图5中得到了清晰展示。此外，我们还可以通过考察其 underlying physical mechanisms，进一步深入探究这一现象。当凹陷孤子遇到外力时，孤子与外力之间的相互作用会导致孤子形状和振幅暂时发生扰动。然而，

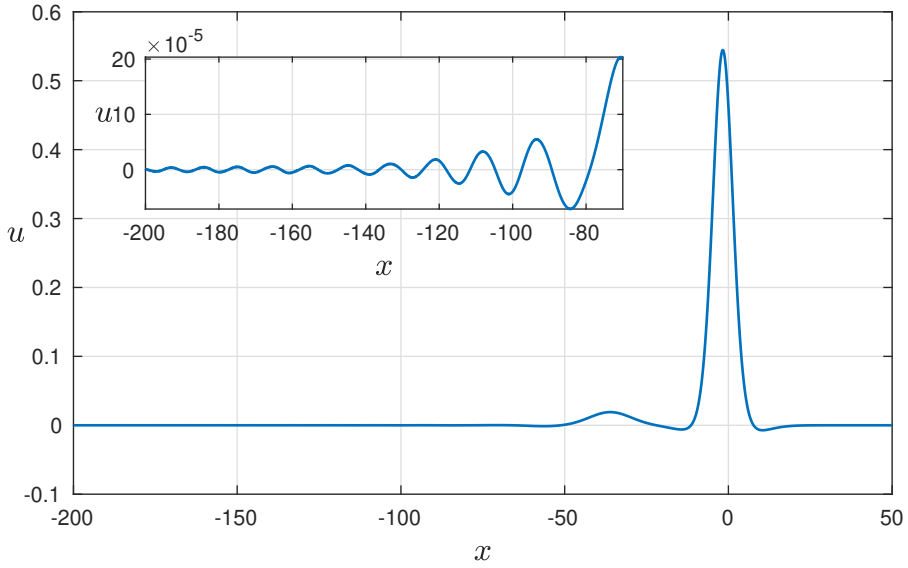


图4：图3在时间 $t = 100$ 时的快照（上图）。

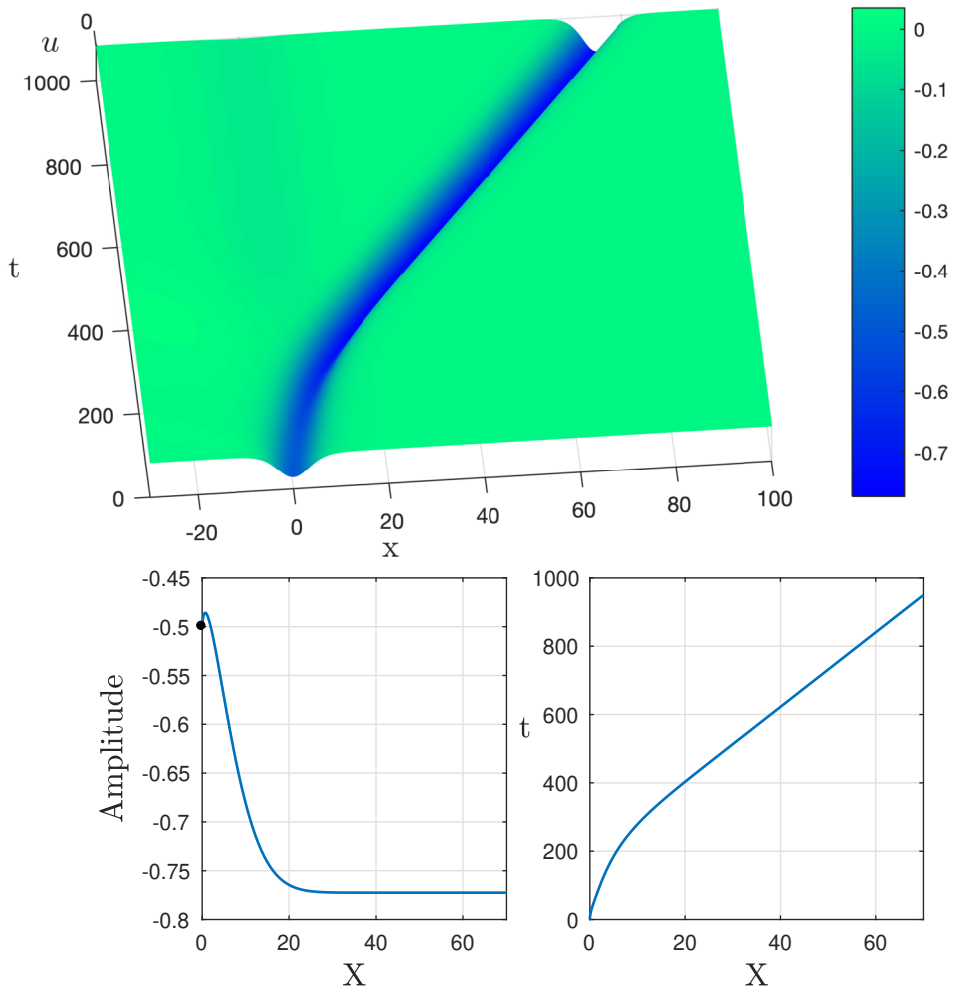


图5：上图：极性与外力相反的非俘获孤子。下图（左）：空间振幅随波峰位置的变化。下图（右）：波峰位置随时间的变化。参数：$a = -0.5$, $w = 10$和 $\epsilon = 0.01$ 和 $\Delta = -\frac{8}{15}\sqrt{|a|}$。

由于外力的性质以及孤子的特征，一旦孤子越过外力，它便会恢复原有的形状和振幅，并继续不受影响地运动。这

这一观察凸显了孤子在存在外部扰动时的稳健性与韧性。

总而言之，动力系统所预测的鞍点揭示了一种引人关注的行为：凹陷孤子不受外力影响，能够继续以恒定速度沿不变方向传播。这些发现阐明了孤子在存在外部扰动时所表现出的显著稳定性与韧性。

# 4 结论

本文在 Schamel 方程框架内，对孤子与外力之间的相互作用进行了全面研究。通过在 Schamel 方程中引入外力项，研究人员可以探究该外力的存在如何影响离子声波的动力学及其行为。外力可能来源于各种因素，例如电磁场、外部势或外部驱动机制。通过结合渐近分析与数值模拟，我们深入了解了孤子在各种情景下的行为。

我们的研究结果表明，孤子的动力学高度依赖于所选参数，尤其是孤子振幅和波峰位置。我们观察到，孤子可能表现出不同类型的行为：参数选择适当时，它可以保持稳态；也可以发生振荡运动，在初始位置附近来回反弹；或者，它也可能在不改变运动方向的情况下，直接远离初始位置。

这些结果不仅为孤子动力学提供了宝贵的定性见解，也证明了渐近理论能够有效捕捉孤子与各种外力相互作用的基本特征。当孤子的长度尺度与外力的长度尺度相比较时，我们的分析尤其能很好地描述定性特征。

我们的研究意义超越了 Schamel 方程这一特定框架。观测到的孤子行为及其对参数的依赖，有助于我们理解非线性波现象，并为光学、等离子体物理学和流体动力学等多个领域提供了实际应用。

总之，我们结合渐近分析与数值研究，揭示了 Schamel 方程中孤子与外力相互作用所呈现的丰富动力学行为。通过发现不同类型的孤子行为，并证实我们的研究结果与渐近理论相符，我们为更全面地理解孤子动力学及其在各个科学领域中的重要性提供了宝贵见解。

# 5 致谢

E.P.感谢俄罗斯科学基金会资助项目22-17-00153。M.V.F感谢IMPA在2023年博士后暑期项目期间接待其作为访问学者。

# 声明

## 利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

## 数据可用性

本文不涉及数据共享，因为数值实验中使用的所有参数均已在本文中说明。

# 参考文献

[1] Ali R, Saha A, Chatterjee, P 受超热等离子体中受迫 KdV 方程的电子声孤立波解析解。等离子体物理 **1972年** 9(3), 122106.[2] Baines, S. 分层流中的地形效应。剑桥大学出版社，剑桥。**1995年**。[3] Beiglbock W, Eckmann JP, Grosse H, Loss M, Smirnov S, Takhtajan L, Yngvason J. 混沌动力学中的概念与结果。施普林格，柏林。**2000年**。[4] ChowdhuryS, Mandi L, Chatterjee P 超热等离子体中外加周期力对离子声波的影响。《等离子体物理》**2018年** 25, 042112.

[5] Ermakov A.; Stepanyants, Y. 科尔特韦格-德弗里斯方程中孤子与外部强迫的相互作用。《混沌》. 2019, 29, 013117.[6] Flamarion MV, Milewski PA, Nachbin A. 流动与地形相互作用产生的旋转波。《应用数学研究》. 2019;142:433-464.[7] Flamarion, M.V.; Ribeiro-Jr, R. 受迫科尔特韦格-德弗里斯方程中的孤立水波相互作用。《计算与应用数学》. 2021, 40, 312.[8] Flamarion, M.V.; Ribeiro-Jr, R. 受迫五阶科尔特韦格-德弗里斯方程下障碍物上方的重力-毛细流。《工程数学杂志》. 2021, 129, 1-17.[9] Flamarion, M.V. 重力-毛细流越过障碍物时俘获凹陷孤立波的产生。《计算与应用数学》. 2022, 41, 31.[10] Flamarion, M.V.; Ribeiro-Jr, R. 低压区中欧拉方程的俘获孤立波相互作用。《计算与应用数学》. 2021, 40, 20.[11] Flamarion, M.V.; Pelinovsky E. 孤子与外部强迫的相互作用：修正科尔特韦格-德弗里斯框架。《混沌、孤子与分形》. 2022, 165, 112889.[12] Flamarion, M.V. 惠特姆方程中水下地形产生的波。《国际应用与计算数学杂志》. 2022, 8, 257.[13] Flamarion, M.V. 加速移动扰动在惠特姆方程中产生的俘获波。《应用数学中的偏微分方程》. 2022, 5, 100356.[14] Flamarion MV, Pelinovsky E. 孤立波与外部周期力的相互作用：扩展科尔特韦格-德弗里斯框架。《数学》. 2022, 10, 4538.[15] Grimshaw, R.; Pelinovsky, E.; Tian, X. 孤立波与外力的相互作用。《物理学D辑》. 1994, 77, 405-433.[16] Grimshaw R.; Pelinovsky, E.; Pavel, S. 孤立波与变速移动外力的相互作用。《应用数学研究》. 1996, 142, 433-464.[17] Grimshaw, R.; Malomed, B.A.; Tian, X. 周期强迫下 KdV 孤子的动力学。《物理快报A辑》. 1993, 179, 291-298.[18] Grimshaw, R.; Pelinovsky, E. (2002) 扩展科尔特韦格-德弗里斯方程中孤立波与外力的相互作用。《国际分岔与混沌杂志》. 2002, 12(11), 2409-2419.[19] Grimshaw R, Smyth N. 有限水深中分层流体越过地形的共振流。《流体力学杂志》. 1986, 169, 235-276.[20] Kim, H.; Choi, H. 受迫科尔特韦格 - 德弗里斯方程中两个障碍物之间波俘获的研究。《工程数学杂志》. 2018, 108, 197-208.[21] Lee, S. 受迫 KdV 方程中俘获孤立波的动力学。《对称性》. 2018, 10(5), 129.[22] Lee, S.; Whang, S. 含两个凸起的受迫 KdV 方程中的俘获超临界波。《应用数学建模》. 2015, 39, 2649-2660.[23] Malomed, B.A. KdV 孤子在周期强迫下的辐射发射。《物理快报 A 辑》 . 1993, 172, 373-377.[24] Milewski PA. 受迫科尔特韦格-德弗里斯方程作为地形产生波的模型。《Cubo数学杂志》. 2004, 6, 33-51.[25] Mushtaq A, Shah HA. 使用广义(r,q)分布函数研究非麦克斯韦分布俘获电子及其对离子声孤立波动力学的影响。《等离子体物理》. 2006 13, 012303.[26] Nozaki K, Bekki N. 受扰动的非线性薛定谔方程中的混沌。《物理评论快报》. 1983, 50, 1226.[27] Pelinovsky E. (2002) 孤立波与外场相互作用中的自共振过程。《国际流体力学研究杂志》. 2002, 30(5), 493-501.

[28] Saha A, Chatterjee P. 非磁化等离子体中具有 q-非广延热电子的电子声波的定性结构。欧洲物理学杂志：*Plus*。 **2015年**, 130, 222.[29] Saha A, Chatterjee P. 非广延尘埃等离子体中尘埃离子声波的孤立波、周期性、准周期性和混沌结构。欧洲物理学杂志：*D*。 **2015年**, 69(9), 203.[30] Schamel H. 稳态孤立波、正弦波形孤立波和正弦离子声波。《等离子体物理》。 **2017年**, 24, 377-387.[31] Schamel H. 共振电子引起的离子声波的修正 Korteweg-de Vries 方程。等离子体物理学杂志。 **1973年**, 14, 905.[32] Trefethen, L.N. *MATLAB* 中的谱方法。费城：工业与应用数学学会；2001年.[33] Williams G, Verheest F, Hellberg MA, Anowar MGM, Kourakis I 超热等离子体中离子声波的 Schamel 方程。《等离子体物理》。 **2014年**, 21(9), 092103 .[34] Williams GP. 驯服混沌理论。*Joseph Henry*，华盛顿。**1997年**.[35] Wu TY. 通过移动扰动产生上游推进孤子。流体力学杂志。 **1987年**, 184, 75-99.