arXiv:2305.03820v2 [math.OC] 9 Mar 2024

建模模型预测控制：多阶段控制问题的范畴论框架

泰勒·韩 ks、Baike She、Evan Patterson、Matthew Hale、Matthew Klawonn、James Fairbanks *

摘要—模型预测控制（模型预测控制）是一种最优控制技术，涉及在给定时域内求解一系列受约束的优化问题。本文介绍一种范畴论框架，通过复合子问题来构造复杂的模型预测控制问题表述。具体而言，我们构造了一个幺半范畴——称为 Para(Conv) ——其对象是欧几里得空间，其态射表示受约束的凸优化问题。随后，我们展示了典型模型预测控制问题的多阶段结构源于Para(Conv)中的顺序组合，而并行组合可用于对预测时域多个阶段的约束建模。该框架配备了严谨的图示语法，可轻松实现复杂问题的可视化与修改。最后，我们展示了如何通过与现有数学规划库集成，在 Julia 编程语言中简单地实现该框架，从而为模型预测控制提供高层次的图形化抽象。

I. 引言

模型预测控制（模型预测控制）最初起源于化学工程中的过程控制 [1],，如今已在许多应用中取得成功，包括自动驾驶 [2], 、电池充电 [3], 、路径规划 [4],和能源系统 [5]。模型预测控制的做法是构建并反复求解带约束的优化问题，以描述系统对控制输入的响应，同时在有限预测时域内最小化代价函数。模型预测控制具有普适性，因此具备多项优势，包括能够纳入系统状态和控制输入上的约束；这些约束必须在预测时域内的每个时间步或多个不同时间步上得到满足。

随着模型预测控制问题日益复杂，人们对识别和利用这类问题固有结构的兴趣也与日俱增，例如问题约束中的稀疏性或解耦性。举例来说，经典模型预测控制优化问题的多阶段结构已被识别作为专用求解算法的丰富来源，例如，[6][7]。除了提升性能之外，识别此类底层结构还能揭示复杂问题如何通过组成子问题复合构建而成。这使模型预测控制从业者能够以模块化且可扩展的方式，更轻松地指定复杂的模型预测控制问题。

基于这一思路，我们提出一种关于模型预测控制问题复合性质的新视角。具体而言，我们利用应用范畴论中的工具，将模型预测控制问题固有的多阶段结构形式化。应用范畴论致力于将抽象数学应用于理解科学与工程问题中的结构。例如，这类技术已应用于信息物理系统 [8], 动力系统 [9],以及机器学习算法 [10]的研究。近期，ICRA 复合机器人学研讨会展现了人们对将范畴论技术应用于机器人学和自主系统问题的兴趣 [11][12],，而我们提出的进展也为这一不断发展的研究领域作出了贡献。

我们的具体技术贡献如下。首先，我们证明，Rockafellar [13] 为编码一般凸程序而引入的凸双函数构成了一种称为对称幺半范畴（SMC）的数学结构，我们将其记为**Conv**。这意味着，双函数可以按顺序、并行以及分层的方式进行复合。

接着，我们将参数化范畴构造应用于**Conv** ，得到一个新的幺半范畴 **Para(Conv)**，其中包含参数化 凸双函数。这对模型预测控制问题中控制变量与状态变量之间重要的语义区别进行了形式化：状态变量会跨时间步耦合，而控制输入通常彼此独立，分别对应各个时间步。

最后，我们展示 **Para(Conv)** 中的每种复合方式如何以模块化、自动化的方式构建复杂的模型预测控制优化问题：顺序复合还原了模型预测控制问题的多阶段结构，并行组合可以表示不同时间步之间的约束，而层次组合则允许将一组子问题“黑箱化”，并在更大的复合问题中将其视为单个子问题。

除了说明模型预测控制优化问题是一般范畴抽象的一个实例之外，使用范畴论这一统一的数学语言来构建模型预测控制框架还带来多项实际益处，包括一种严谨的图形语法，可用于以复合方式构建模型预测控制问题，以及一条实现简洁、正确的软件实现的直接途径。我们的原型 Julia 实现——

*Tyler Hanks 和 James Fairbanks 任职于佛罗里达大学计算机科学系，电子邮箱：{t.hanks,fairbanksj}@ufl.edu。Baike She 和 Matthew Hale 任职于佐治亚理工学院电气与计算机工程系，电子邮箱：{bshe6,mhale30}@gatech.edu。Evan Patterson 任职于 Topos Institute，电子邮箱：evan@epatters.org。Matthew Klawonn 任职于美国空军研究实验室信息局，电子邮箱：matthew.klawonn.2@us.af.mil。

Tyler Hanks 获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划的资助，资助编号为 DGE-1842473。本文中表达的任何观点、研究结果、结论或建议均代表作者的观点，并不一定反映美国国家科学基金会（NSF）的立场。Matthew Hale 和 Baike She 获得了美国空军科学研究办公室（AFOSR）的资助，资助编号为 FA9550-23-1-0120。Matthew Klawonn 获得了 SMART SEED 资助。James Fairbanks 获得了美国国防高级研究计划局（DARPA）的资助，项目编号为 HR00112220038。

了该框架，通过与现有数学规划库集成，为模型预测控制提供高层次的图形化抽象，展示了这些益处。

本文其余部分结构如下。第二节介绍研究动机和问题陈述。第三节介绍范畴论的必要背景。第四节介绍凸双函数及其在对称幺半范畴中的组织方式。第五节介绍主要结果：将凸模型预测控制优化问题刻画为 Para(Conv) 中的态射。第六节介绍我们的 Julia 实现，第七节总结全文。

II. 动机与问题陈述

在本节中，我们旨在帮助读者直观理解模型预测控制优化问题的组合结构。模型预测控制通常基于系统动力学 $\dot{x} = f(x,u)$ 的离散化版本运行，该版本表示为 $x_{i+1} = f_d(x_i, u_i)$，其中 $i \in \mathbb{N}$； f_d 可通过欧拉法或龙格-库塔法等离散化技术由 f 生成。动力学离散化后，模型预测控制问题自然呈现出多阶段结构，我们将在下文讨论这一结构。

A. 多阶段模型预测控制问题

本文考虑如下形式的多阶段模型预测控制问题。

定义 II.1. 设 X 和 U 为欧几里得空间，即$X = \mathbb{R}^n$ 和 $U = \mathbb{R}^m$，其中 n 和m为某些自然数。给定离散动力系统 $f_d\colon X \times U \to X$、代价函数 $\ell\colon X \times U \to \mathbb{R}$、初始状态 $x_{init} \in X$以及约束函数 $g\colon X \times U \to \mathbb{R}^p$，由这些数据[1] 定义的**滚动时域模型预测控制优化问题**为

$$\begin{array}{ll} \underset{u_k,\ldots,u_{N-1}}{\text{minimize}} & \sum_{i=k}^{N-1} \ell(x_i, u_i) \\ \text{subject to} & x_{i+1} = f_d(x_i, u_i),\ i = k, \ldots, N-1, \\ & g(x_i, u_i) \le 0, \qquad i = k, \ldots, N-1, \\ & x_k = x_{init}, \end{array}$$

其中，$k < N$ 为当前时间步，x_{init} 为系统在时间步 k 的实际状态，N 为预测时域。类似地，移动时域模型预测控制优化问题与上述形式相同，但将所有“$N-1$”替换为“$k+N-1$”。 x_i是**状态变量**，而 u_i是**控制输入**。因此，我们将 X 称为**状态空间**，将 U 称为**控制空间**。

在实践中，通常会对最终状态附加约束或代价项，以确保稳定性。当 g 和 ℓ为凸的，且 f_d 为仿射时，模型预测控制优化问题是凸的。模型预测控制文献中对此类情形已有充分研究；为简化表述和实现，本文将讨论范围限定于此情形。然而，我们强调，本文提出的一般建模框架也可用于对非凸问题进行建模。

[1]此处的“数据”一词指参与定义的数学对象。

例 II.2. 假设我们要通过最小化以下代价，实现一个由 $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ 给出的线性系统的带约束线性二次调节器

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k,$$

同时始终满足运行边界条件 $x_{min} \le x_k \le x_{max}$ 和 $u_{min} \le u_k \le u_{max}$（对所有 $k \in [0, \infty)$），其中x_{min}, x_k, $x_{max} \in \mathbb{R}^n$、 u_{min}, u_k, $u_{max} \in \mathbb{R}^m$和 Q, R 是维度适当的半正定矩阵。尽管这种情形在实践中经常出现，但此类问题（尤其是维度增大时）通常没有显式解，或者计算显式解的计算量很大 [14]。因此，通常会选取一个预测时域 N，并将上述问题重新表述为一个滚动时域模型预测控制问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=k}^{k+N-1} x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i \\ \text{subject to} & x_{i+1} = Ax_i + Bu_i,\ i = k, \ldots, k+N-1, \\ & x_{min} \le x_i \le x_{max},\ i = k, \ldots, k+N-1, \\ & u_{min} \le u_i \le u_{max},\ i = k, \ldots, k+N-1, \\ & x_k = x_{init}. \end{array}$$

这个问题将作为一个简单的示例，用于展示我们框架的用法。

这类问题表述通常被称为具有多阶段或分阶段结构，因为直观来看，它们可以视为由某些决策变量连接起来的不同子问题。

为说明这一点，考虑以下参数化问题：对于固定的 i，它表示模型预测控制问题中的一个阶段。我们将其称为**模型预测控制子问题**。

$$x_i \mapsto \begin{array}{ll} \text{minimize} & \ell(x_i, u_i) \\ \text{subject to} & x_{i+1} = f_d(x_i, u_i), \\ & g(x_i, u_i) \le 0. \end{array} \tag{1}$$

从单个阶段的角度来看，很明显， i^{th} 子问题的目标是：在约束受到 x_i 扰动的情况下，求出最优的u_i 和 x_{i+1}。随后， x_{i+1} 的取值会成为（$i+1$）th 子问题约束的扰动。这正是我们需要捕捉的多阶段结构，以便从复合的角度看待模型预测控制问题。关键在于，只有状态变量会随时间耦合各个子问题；控制变量则彼此独立。这些观察促成了本文的核心问题。

B. 问题表述

在本文中，我们旨在利用范畴论框架，以复合方式对凸模型预测控制优化问题（即具有线性动力学和凸代价函数的问题）进行建模。为此，需要解决以下问题：

问题 1. 如何使用范畴论对凸优化问题的复合进行建模?

问题 2. 如何在这些范畴模型中，正式体现状态变量与控制变量之间的语义区别?

问题 3. 模型预测控制优化问题如何适用于我们对凸规划复合的建模?

我们在第 IV 节通过构造两个新的凸优化问题范畴来解决问题 1 和问题 2。问题 3 在第 V 节解决。第 VI 节中的 Julia 实现展示了求解这些问题的实际效用。

III. 范畴论背景

本节简要回顾本文其余部分将用到的范畴论概念。关于应用范畴论的更详细介绍，请参阅 [15] 。

范畴论中最基本的概念是范畴。范畴可以看作带有额外结构的有向图，通常用于对特定领域中的数学对象及其相互关系进行建模。随后，可以通过函子关联不同的范畴；函子是范畴之间保持结构的映射。

定义III.1. 一个**范畴** $\mathcal{C}$ 由一组对象 $X, Y, Z, \ldots$ 以及一组态射 （也称为态射） $f, g, h, \ldots$ 构成，并配有以下数据:

- 每个态射都有指定的定义域 和陪域对象；记号 $f: X \to Y$ 表示 f 是一个定义域为 X 、陪域为 Y的态射。
- 每个对象 $X \in \mathcal{C}$ 都有一个指定的恒等 态射 $\mathrm{id}_X : X \to X$。
- 对于任意三个对象 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ 以及任意一对态射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$，都有一个指定的复合 态射 $g \circ f: X \to Z$。

这些数据满足以下两条公理:

- (单位律) 对于任意态射 $f: X \to Y$，我们有$f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$,
- (结合律) 对于任意对象 $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$以及态射 $f: W \to X$, $g: X \to Y$, $h: Y \to Z$，我们有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$。

$\mathcal{C}$ 中所有对象构成的集合记作 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。

范畴的典型例子是**集合范畴**，其对象是集合，态射是集合之间的函数。该范畴中的复合就是通常的函数复合，恒等态射则是恒等函数，即 $\mathrm{id}_X(x) = x$。下一个例子有助于直观理解我们将为范畴 **Conv** 定义的复合运算。范畴**关系范畴** 以集合作为对象，并以形如$R \subseteq X \times Y$的二元关系作为从 X到 Y的态射。两个关系 $R \subseteq X \times Y$ 和 $S \subseteq Y \times Z$ 的复合定义为

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z \mid \text{there exists } y \in Y \text{ such that } (x, y) \in R \text{ and } (y, z) \in S\}. \quad (2)$$

恒等关系为 $\mathrm{id}_X = \{(x, x') \in X \times X \mid x = x'\}$.

我们可以使用一个函子将一个范畴的对象和态射映射到另一个范畴的对象和态射上，它可以是】【。可视为保持范畴的附加结构（即复合与恒等态射）的图同态。

定义 III.2。 给定范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，一个**函子** $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 由以下映射组成:

- 对于所有 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，一个**对象映射** $c \mapsto F(c)$,
- 一个保持定义域和陪域的**态射映射**，即，对于每个态射 $f: c \to c'$ in $\mathcal{C}$，有（$f: c \to c'$） $\mapsto (F(f): F(c) \to F(c'))$。

这些映射必须满足以下等式:

- $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$ （恒等态射得以保持），
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$（复合得以保持），

对于 $\mathcal{C}$ 中的所有对象 c 和可复合的态射 f， g 。

例如，存在一个从 **集合范畴** 到**关系范畴** 的函子，它在对象上是恒等的，并将一个函数 $f: X \to Y$ 映射为其图，即关系 $\{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$。

IV. 凸双函数的范畴

现在我们已经建立了必要的范畴论背景知识，可以着手解决问题 1，即利用范畴对凸规划的复合进行建模。根据定义III.1，范畴中的态射必须满足可复合性，因此，我们解决这一问题的方法是构造一个范畴，其中的态射表示凸优化问题。

A. 凸双函数

我们所构建的框架基于对凸优化问题的一种形式化表述，称为凸双函数，该表述由 Rockafellar [13, §29] 提出。

定义IV.1。**凸双函数** $F: \mathbb{R}^m \nrightarrow \mathbb{R}^n$ 是形式为 $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$的（联合）凸函数。

因此，以下我们将扩展实数 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$记为 $\overline{\mathbb{R}}$。引入凸双函数的目的是表示以约束空间为参数的最小化问题。例如，考虑一个关于决策变量向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 的一般凸规划 (P):

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le u_i, \quad i = 1, \ldots, r \\ & f_j(x) = u_j, \quad j = r+1, \ldots, m. \end{array}$$

这里， f_i 对于每个 $i \in \{0, \ldots, r\}$ 都是凸函数， f_j 对于每个$j \in \{r+1, \ldots, m\}$都是仿射函数。将 $u := (u_1, \ldots\ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ 记作约束参数，令 Su 表示$x \in \mathbb{R}^n$ 中满足上述约束的向量集合，其中参数取值为 u。 u 的不同取值对应于（P）中约束的不同参数化形式。我们可以将这一整族优化问题封装为凸双函数$F: \mathbb{R}^m \nrightarrow \mathbb{R}^n$，方法是令 $F(u, x) := f_0(x) + \delta(x \mid Su)$，其中$\delta(x \mid Su)$表示凸示性函数

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \in Su, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们将 F 称为与凸规划（P）相关联的凸双函数。

注 IV.2. 一般而言，任何凸规划都由其关联的双函数唯一确定（见 [13,§29]）。对我们的目的而言，凸双函数是若干项的和，其中有些项是示性函数，有些则不是。与给定凸双函数关联的凸规划，是指其所有示性函数项取值为 0 时满足硬约束的凸规划；这意味着该规划的目标函数由双函数中非示性函数项构成。

值得注意的是，凸双函数是线性变换的推广。换言之，存在一种典范方式，可将线性变换嵌入为凸双函数。对于线性映射 $A\colon X \to Y$，该线性变换的凸指示双函数是双函数 $\delta_A\colon X \nrightarrow Y$，其定义为

$$\delta_A(x,y) \coloneqq \delta(y \mid Ax) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } y = Ax, \\ +\infty & \text{if } y \neq Ax. \end{cases}$$

由于凸双函数可以与凸规划对应，因此为双函数定义复合运算，便可直接得到凸规划的复合运算。给定凸双函数 $F\colon U \nrightarrow X$ 和 $G\colon X \nrightarrow Y$，它们的复合定义为

$$(G \circ F)(u,y) \coloneqq \inf_{x \in X} \{F(u,x) + G(x,y)\}, \tag{3}$$

对所有 $u \in U$ 和 $y \in Y$。我们将这一运算称为**双函数复合**。我们约定，当 f 下无界时，$\inf f = -\infty$。

双函数复合推广了线性变换的复合，即，对于可复合的线性映射 A_1 和 A_2，$\delta_{A_2} \circ \delta_{A_1} = \delta_{A_2 \circ A_1}$。当由凸子集构成的关系通过其凸指示双函数编码时，双函数复合也推广了由式 (2) 给出的关系复合。在这种情况下，双函数复合与关系复合一致。至关重要的是，当将其视为凸规划的表示时，双函数复合体现了这样一种概念：一个问题的决策变量将后续问题的约束参数化。

B. 凸双函数的对称幺半范畴

接下来，我们将证明，双函数复合实际上生成了一个凸双函数范畴；这一范畴的构造将解决问题 1。

定理 IV.3. 存在一个范畴**Conv**，其中

- 对象是欧几里得空间，
- 从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的态射是一个凸双函数$\mathbb{R}^m \nrightarrow \mathbb{R}^n$，
- 在 X 上的恒等双函数是

$$\mathrm{id}_X(x,x') \coloneqq \begin{cases} 0, & \textit{if } x = x' \\ +\infty, & \textit{otherwise} \end{cases}, \qquad x, x' \in X,$$

- 两个双函数的复合由(3)给出。

证明。给定一对可复合的凸双函数，它们的复合仍然是凸的（[13], §38.5），因此复合运算定义良好。

当所得复合中的所有下确界都能取到时，结合律显然成立。此外，采用约定 $\infty + (-\infty) = \infty$ 来解释必要时的 $F(u,x) + G(x,y)$，结合律很容易扩展到无界情形。

对于单位律，考虑一个双函数 $F\colon \mathbb{R}^m \nrightarrow \mathbb{R}^n$。于是有 $(F \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(u,x) = \inf_{u' \in \mathbb{R}^m}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}(u,u') + F(u',x))$。显然，下确界能够取到于 $u' = u$，因为否则 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}(u,u') = \infty$。因此，$(F \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(u,x) = 0 + F(u,x) = F(u,x)$。类似的论证表明 $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \circ F$。 □

Conv 中的复合形式化地描述了子问题之间顺序耦合的概念。为了在此背景下表述模型预测控制，我们还需要能够通过并行复合凸双函数，将两个独立的程序合并为一个可分离的程序。这要求在**Conv** 上增添一种结构，称为幺半积。幺半积又是根据一个从积范畴出发的函子来定义的。因此，我们先定义范畴的积，它推广了熟悉的集合笛卡尔积。

定义 IV.4. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，它们的**积范畴**记作 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$，是一个范畴，其中

- 对象是有序对 (c,d)，其中 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 且 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，即 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，
- 态射 $(c_1,d_1) \to (c_2,d_2)$ 是一个有序对 (f,g)，其中$f\colon c_1 \to c_2$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射，且 $g\colon d_1 \to d_2$ 是 $\mathcal{D}$中的态射，
- 复合与恒等态射按分量定义：$(f_2,g_2) \circ (f_1,g_1) \coloneqq (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$, $\mathrm{id}_{(c,d)} \coloneqq (\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d)$.

定义 IV.5. 严格幺半范畴是一种范畴$\mathcal{C}$，它配备了一个函子 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，称为**幺半积**，以及一个指定对象 $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，称为**幺半单位**，使得对于 $\mathcal{C}$ 中所有对象 A, B, C 和态射 f, g, h，以下等式成立：

- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$,
- $A \otimes I = A$,
- $I \otimes A = A$,
- $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$,
- $\mathrm{id}_I \otimes f = f$,
- $f \otimes \mathrm{id}_I = f$。

幺半范畴通常写成一个三元组，由范畴、其幺半积及其单位组成，例如 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$。如果幺半范畴中的每一对对象 A，B都满足 $A \otimes B \cong B \otimes A$，那么它就是一个**对称**[2]幺半范畴。幺半范畴将这样的情境形式化：其中既可以通过复合对态射进行 (i) 顺序组合，也可以通过幺半积对态射进行 (ii) 并行组合。下一个定理将说明如何使**Conv**成为一个幺半范畴。

[2]交换映射 $\sigma_{A,B}\colon A \otimes B \cong B \otimes A$ 还必须满足若干相干性条件，为简洁起见，此处省略。

定理 IV.6. 设 $\oplus$ 为从**Conv** $\times$ **Conv** 到**Conv** 的函子，它将欧几里得空间对$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 映射为它们的直和 $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$，并将形如$(F\colon \mathbb{R}^m \nrightarrow \mathbb{R}^n, G\colon \mathbb{R}^p \nrightarrow \mathbb{R}^q)$ 的双函数对映射为它们的逐点和，即 $F \oplus G\colon \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p \nrightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^q$，其中

$$(F \oplus G)((u,y),(x,z)) = F(u,x) + G(y,z)$$
$$\textit{for all } u \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, \text{and } z \in \mathbb{R}^q.$$

那么 (**Conv** $\oplus, \mathbb{R}^0$) 是一个严格对称幺半范畴。

证明。要证明 $\oplus$: **Conv** $\times$ **Conv** $\to$ **Conv** 是一个函子，首先注意到恒等态射得以保持，因为

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \oplus \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})((x,y),(x',y')) \\
&\quad= \begin{cases} 0 & \text{if } x = x' \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{if } y = y' \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \\
&\quad= \begin{cases} 0 & \text{if } x = x' \text{ and } y = y' \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \\
&\quad= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m}((x,y),(x',y')).
\end{aligned}$$

为说明 $\oplus$ 保持复合，我们需要证明

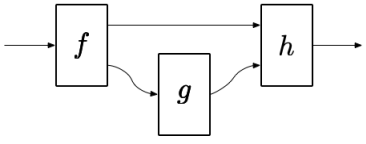
$$(F_2 \circ F_1) \oplus (G_2 \circ G_1) = (F_2 \oplus G_2) \circ (F_1 \oplus G_1)$$

对于 **Conv** 中可复合的态射 F_1, F_2, G_1, G_2。我们有

$$\begin{aligned}
&((F_2 \circ F_1) \oplus (G_2 \circ G_1))((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \\
&\qquad= \inf_{x'}(F_1(x_1,x') + F_2(x',x_2)) \\
&\qquad\quad + \inf_{y'}(G_1(y_1,y') + G_2(y',y_2)) \\
&\qquad= \inf_{x',y'}\Big(F_1(x_1,x') + G_1(y_1,y') \\
&\qquad\qquad + F_2(x',x_2) + G_2(y',y_2)\Big) \\
&\qquad= ((F_2 \oplus G_2) \circ (F_1 \oplus G_1))((x_1,y_1),(x_2,y_2)),
\end{aligned}$$

如所需。定义 IV.5 要求的 $\oplus$ 的结合律和单位律条件可由基本算术规则直接得出。对称结构则来自同构 $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$，其中 $n, m \in \mathbb{N}$。 □

幺半范畴的一个优点是，它们具有一种直观而形式化的图形演算，称为弦图[16]，用于表示复合态射。在弦图中，线（或称导线）表示对象，方框表示态射。例如，设 $f\colon U \nrightarrow W \oplus X$, $g\colon X \nrightarrow Y$，且 $h\colon W \oplus Y \nrightarrow Z$ 是 **(Conv** $\oplus, \mathbb{R}^0$**)** 中的凸双函数。那么弦图



表示复合态射 $h \circ (\mathrm{id}_W \oplus g) \circ f$。在这一复合中，$f$ 的决策变量会扰动 g 和 h的约束，而 h的约束也会受到 g 的决策变量扰动。

C. 参数化凸双函数

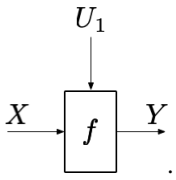
范畴**Conv** 为优化问题的复合提供了一个形式化框架，使一个问题的决策能够参数化另一个问题的约束。模型预测控制优化问题具有这种复合结构：时刻 k 的状态变量由 k^{th} 模型预测控制子问题计算得出；但从$(k+1)^{th}$ 子问题的角度来看，这些状态变量是固定的，并用于参数化$(k+1)^{th}$ 子问题的约束。然而，**Conv** 的框架忽略了控制变量所发挥的重要作用。控制变量是各个子问题中彼此独立的决策变量，也就是说，它们不像状态变量那样在不同时间步之间耦合。正如前文所述，**Conv** 可以对模型预测控制中的状态变量耦合进行建模，却无法表示控制变量的这种独立性。为了体现这一区别，我们将回顾另一种称为参数化范畴 [17]的范畴构造，并将其应用于**Conv**，以得到所需结果。

定义 IV.7. 如果 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ 是一个严格幺半范畴，那么**参数化范畴** Para($\mathcal{C}$) 是一个范畴，其中：

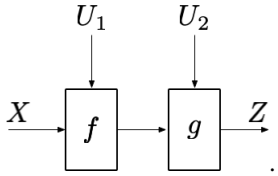
- 对象与 $\mathcal{C}$的对象相同，
- 态射 $X \to Y$是一个有序对 (U, f)，其中 U是 $\mathcal{C}$的一个对象，且 $f\colon U \otimes X \to Y$是 $\mathcal{C}$中的一个态射，
- 在 X 上的恒等态射是 (I, id_X)，
- ，$(U_1, f)\colon X \to Y$ 与 $(U_2, g)\colon Y \to Z$ 的复合是有序对 $\big(U_2 \otimes U_1, g \circ (\mathrm{id}_{U_2} \otimes f)\big)$。

由于根据定理 IV.6，**Conv** 是一个幺半范畴，我们可以直接应用 Para 构造，得到一个新的范畴 Para**(Conv)**，其对象是参数化的凸双函数。具体来说，Para**(Conv)**中的对象仍为欧几里得空间，而态射则是形如 $(U, F\colon U \oplus X \nrightarrow Y)$ 的有序对，其中 U、X 和 Y 均为欧几里得空间。参数空间U 将用于对模型预测控制优化问题中的控制输入建模。

为了更好地理解 Para**(Conv)** 中复合的定义，我们可以像 [17] 中那样用弦图将其可视化。我们将参数化双函数绘制为弦图，其中定义域对象和陪域对象与通常相同，而参数对象则表示为一条从上方指向态射的竖直箭头。这样可以使参数的可视化表示有别于态射的定义域和陪域。例如，态射 $(U_1, f)\colon X \to Y$in Para**(Conv)** 可绘制为



于是，复合关系可以简单地绘制为



V. 模型预测控制优化问题是态射

借助按照 **Conv** 的规则复合凸优化问题的能力，以及在 **Para(Conv)** 中形式化控制变量与状态变量之间必要的语义区分，我们现在可以描述模型预测控制优化问题的范畴结构。具体而言，给定一个具有定义 II.1 所述形式的凸模型预测控制问题 (Q)，存在 **Para(Conv)** 中的一个态射 (U, G_Q)，使得对于预测时域为 N 的情况，与 Q 相关联的优化问题等于 N 重复复合 $(U, G_Q) \circ \cdots \circ \underbrace{(U, G_Q)}_{N \text{ 次}}$ 记作 $(U,\ G_Q)^N$。

回顾一下，在预测时域中的单个时间步 i，我们有如下单步模型预测控制子问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \ell(x_i, u_i) \\ \text{subject to} & x_{i+1} = f_d(x_i, u_i) \\ & g(x_i, u_i) \le 0. \end{array} \tag{4}$$

该问题可以解释为在单个时间步优化控制输入，即预测时域长度为 $N = 1$。我们可以将这个单时间步问题重新表述为一个双函数。

定义 V.1。给定离散动力系统 $f_d\colon X \times U \to X$、代价函数 $\ell\colon X \times U \to \mathbb{R}$ 和约束函数 $g\colon X \times U \to \mathbb{R}^m$，表示单步子问题 (4) 的单步双函数为 $G\colon U \oplus X \nrightarrow X$，其中

$$G((u,x),x') \coloneqq \ell(x,u) + \delta\Big(x' \mid f_d(x,u)\Big) + \delta(x,u \mid g(x,u) \le 0). \tag{5}$$

这里，$\delta(x,\ u \mid g(x,\ u) \le 0)$ 表示集合 $\{(x,\ u) \in X \times U \mid g(x,\ u) \le 0\}$的示性函数。

接下来我们将证明，在适当的凸性条件下，与模型预测控制子问题相关联的单步双函数可以视为属于 **Para(Conv)**。

命题 V.2. 若 $f_d\colon X \times U \to X$ 是仿射函数，且函数 $\ell\colon X \times U \to \mathbb{R}$ 和 $g\colon X \times U \to \mathbb{R}^m$ 是凸函数，则对偶 $(U, G\colon U \oplus X \nrightarrow X)$是从 X 到 $\mathrm{Para}(\mathbf{Conv})$中 X 的态射，其中 G 是与 f_d、ℓ和g相关联的模型预测控制子问题的单步双函数。

证明。回忆定义 IV.7，**Para(Conv)** 中的一个态射 $X \to X$ 是一对 $(U', F\colon U' \oplus X \nrightarrow X)$，其中控制空间 U' 和双函数 F 可任意选取。选择 U 作为控制空间、G 作为双函数后，(U, G) 的签名符合 **Para(Conv)** 中态射 $X \to X$ 的要求。由于 G 是凸函数与凸集的示性函数之和，因此它显然是凸的。 □

现在我们有了一个自态射[3] $(U, G)\colon X \to X$，它属于 **Para(Conv)**，因此可以将 (U, G) 与自身任意次复合。我们利用这一性质来形式化表达模型预测控制优化问题的复合结构，从而解决问题 3。

定理 V.3. 设 $\ell\colon X \times U \to \mathbb{R}$ 和 $g\colon X \times U \to \mathbb{R}^m$ 为凸函数，且 $f_d\colon X \times U \to X$ 为仿射函数。若 $(U, G)\colon X \to X$ 是由这些函数在 $\mathrm{Para}(\mathbf{Conv})$ 中生成的单步双函数，则 $(U, G)^N$ 是与 f_d、ℓ 和 g 相关联的模型预测控制优化问题在长度为 N 的预测时域上的参数化凸双函数表示。

证明。该证明通过对 N 进行归纳来展开。$N = 1$ 的基础情形由命题 V.2 证明。对于归纳步骤，假设 $(U,\ G)^k$ 是与 $f_d,\ \ell,$ 和 g 相关、预测时域为 k 的模型预测控制优化问题的参数化凸双函数表示。我们需要证明，$(U,\ G)^{k+1} = (U,\ G) \circ (U,\ G)^k$ 是预测时域为 $k+1$ 的模型预测控制问题的参数化凸双函数表示。根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned} &(U,G)^k((u_{k-1},\dots,u_0,x_0),x_k) = \\ &\quad \inf_{x_1,\dots,x_{k-1}} \Big[\sum_{i=0}^{k-1} \ell(x_i,u_i) + \delta\Big(x_{i+1} \mid f_d(x_i,u_i)\Big) \\ &\qquad + \delta\Big(x_i,u_i \mid g(x_i,u_i) \le 0\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{6}$$

于是，根据双函数复合的定义，我们有

$$\begin{aligned} &(U,G) \circ (U,G)^k((u_k,\dots,u_0,x_0),x_{k+1}) = \\ &\quad \inf_{x_k} \Big[\ell(x_k,u_k) + \delta\Big(x_{k+1} \mid f_d(x_k,u_k)\Big) \\ &\qquad + \delta\Big(x_k,u_k \mid g(x_k,u_k) \le 0\Big) + \text{ RHS of (6)}\Big] \\ &\quad = \inf_{x_1,\dots,x_k} \Big[\sum_{i=0}^{k} \ell(x_i,u_i) + \delta\Big(x_{i+1} \mid f_d(x_i,u_i)\Big) \\ &\qquad + \delta\Big(x_i,u_i \mid g(x_i,u_i) \le 0\Big)\Big], \end{aligned} \tag{7}$$

这正是与 $f_d,\ \ell,$ 和 g 相关、预测时域为 $k+1$ 的模型预测控制问题的参数化凸双函数表示，证毕。 □

该定理表明，定义 II.1 中形式的任何模型预测控制优化问题，都可以通过将 **Para(Conv)** 中的一个自态射反复复合到所需的预测时域来表示。我们的软件实现利用这一结果，确保根据对动力学、单步代价和单步约束的描述生成的凸规划在构造上就是正确的。

A. 初始约束、终端约束及代价的建模

目前为止，模型预测控制优化问题的表述并未对时域结束时所达到的状态的代价或约束施加任何限制，

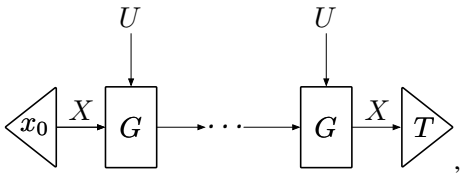
[3]自态射是定义域与陪域相同的态射。

但实践中常常会出现此类限制。例如，我们可能希望修改例 II.2 的目标函数，使其包含终端代价项 $x_N^T Q_N x_N$，或者添加约束，要求 $x_N = c$ 对某个期望的目标向量 c 成立。终端代价和约束可以表示为一个态射 $(\mathbb{R}^0,\ T)$: $X \to \mathbb{R}^0$ in Para(**Conv**)，其中某个双函数为 T: $\mathbb{R}^0 \oplus X \nrightarrow \mathbb{R}^0$。由于 T 的控制空间和余域都是平凡的，因此它等价于一个凸函数 $X \to \mathbb{R}$。这正是对终端代价或约束函数进行编码所需的签名。我们可以通过后复合将这个双函数纳入问题，即 $(\mathbb{R}^0,\ T) \circ (U,\ G)^N$。

类似地，将初始状态固定为值 x_0，可通过与态射 $(\mathbb{R}^0, \delta_{x_0})$ 进行前复合来实现: $\mathbb{R}^0 \to X$ 其中

$$\delta_{x_0}(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } x = x_0, \\ +\infty & \text{if } x \neq x_0. \end{cases}$$

因此，我们的形式化方法对带有初始条件以及所需终端状态或代价的模型预测控制（MPC）公式进行了对称处理。一般情况为 $(\mathbb{R}^0,\ T) \circ (U,\ G)^N \circ (\mathbb{R}^0,\ x_0)$，其中 Para(**Conv**) 中的复合正确地建模了控制过程的初始、连续和终端步骤之间的耦合关系。这在图中表示为



，

其中，开口和闭口三角形分别表示从 $\mathbb{R}^0$ （无输入）出发和到达 $\mathbb{R}^0$ （无输出）的态射。

B. 跨时间步的约束建模

许多机器人控制应用都涉及对相隔多个时间步的问题阶段中的状态施加约束。这可用于编码周期性约束，这类约束在机器人行走等应用中很有用，因为机器人的腿的位置必须周期性地回到同一状态 [18]。此类约束可以轻松集成到我们的框架中。

首先请注意，复制和合并变量有自然的双函数编码。

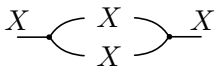
- 给定一个欧几里得空间 X，复制映射 Δ_X: $X \nrightarrow X \oplus X$ 由以下双函数给出

$$\Delta_X(x, (x_1, x_2)) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } x = x_1 = x_2, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

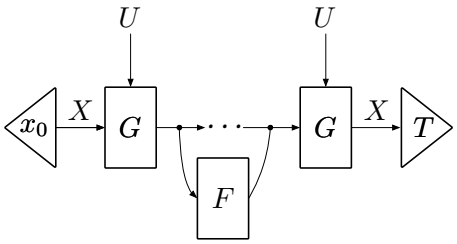
- 给定一个欧几里得空间 X，合并映射 μ_X: $X \oplus X \nrightarrow X$ 由以下双函数给出

$$\mu_X((x_1, x_2), x) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } x = x_1 = x_2, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这些复制映射和合并映射可用如下字符串图表示，其中复制映射位于左侧，合并映射位于右侧。



借助这些映射，我们可以用以下形式的图表示跨时间步约束。

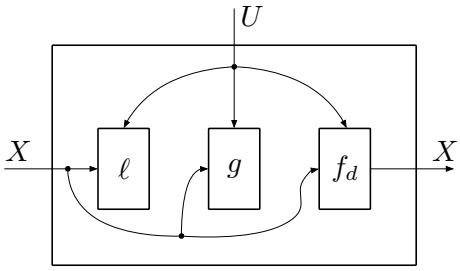


在此示例中，经过 1 个时间步后的状态与经过 $N-1$ 个时间步后的状态由双函数 F: $X \nrightarrow X$ 联系起来，该双函数可以编码任意代价或约束项，以耦合这两个状态变量。

C. 利用层次组合

在 Para(**Conv**) 中，我们可以使用的最后一种复合方式是层次组合。这为我们提供了一种模块化构建大型问题的方法：在布线图的方框内，嵌套一组输入和输出正确的子问题。为说明这一点，我们可以考虑“放大”单个 G 方框，并用更简单的组件构建这个态射。

回想一下，单个时间步的子问题由目标函数 ℓ、不等式约束函数 g 和等式约束函数 f_d组成。下图展示了如何用这些组成子问题填充代表单个时间步的方框（这里我们滥用记法，将约束函数视为其对应的指示双函数）。



这样，我们就可以将多个态射封装成一个模块化、可重复使用的组件。

六、实现

以范畴方式描述一个领域的诸多好处之一，是只要证明该领域具有某种类型范畴的结构，就能轻松实现正确、简洁的实现。Catlab.jl 是一个以 Julia 编程语言编写的软件包，旨在实现这一优势 [19]。具体来说，Catlab 允许程序员创建范畴抽象（例如对称幺半范畴）的实例，并提供工具，自动将这些范畴中以符号或弦图形式表达的态射编译为 Julia 代码。

```
# 声明问题常量。A, B = [0 1; .01 0], [0; 1]Q, R = 5*I(2), 3 x0 = [3.0, 1.0]# 指定系统动力学、单步代价函数和约束函数。cost(u,x) = quadform(x,Q) + R*square(u) dynamics(u,x) = A*x + B*u constraints(u,x) = [u <= 1, u >= -1, x[1] <= 3, x[1] >= -3, x[2] <= 2, x[2] >= -2# 创建单步双函数。one_step = one_step_bifunction(dim_x,dim_u,cost, constraints, dynamics) N = 10# 预测时域 模型预测控制_bifunc = compose(repeat([one_step], N)) # 创建用于存储控制输入和最终状态的变量。us = [Variable(1) fori in 1:N-1]xN = Variable(2) # 转换为 Convex.jl 问题并求解。MPC_prob = make_problem(MPC_bifunc, us, x0, xN) solve!(MPC_prob, SCS.Optimizer)
```

代码清单 1：此代码片段展示了如何使用 AlgebraicControl.jl 实现例 II.2。请注意，动力学、成本和约束均以单个时间步为单位进行指定。随后可以为该问题选择任意预测时域，而双函数复合会处理构建问题所需的记录工作。

为了将这一方法应用于我们的框架，我们使用 Convex.jl 问题作为凸双函数的软件表示，实例化对称幺半范畴理论。Convex.jl 是规范凸规划的 Julia 实现 [20][21] 。随后，我们只需实现本文所述的恒等、复合和幺半积运算，并应用 Catlab 为我们提供的 Para 构造，即可获得所需的结果。总而言之，我们的库（称为 AlgebraicControl.jl）的核心应用程序接口由以下三个函数组成：

1) 单步双函数(X, U, l, g, f d) 2) 组合(双函数...) 3) 创建问题(F, us, x0, xN)

函数 one step bifunction 接收状态空间 X、控制空间 U、损失函数 ℓ、约束函数 g 和动力学 f_d，然后按照定义 V.1，构造与这些数据相关的单步双函数。接下来，函数 compose 接收双函数列表并构造它们的复合。当 compose 的参数是与模型预测控制子问题相关的单步双函数的 N 个副本时，定理 V.3 保证所得复合函数能够正确编码预测时域为 N 的相应模型预测控制优化问题。最后，函数 make problem 接收参数化双函数 F，以及控制变量列表和初始状态变量与终端状态变量，并将这些数据导出为 Convex.jl 问题。随后，任何 Convex.jl 支持的求解器都可以轻松求解所得优化问题。

例 VI.1。对于 A、 B、 Q 和 R 的特定取值，清单 1 展示了 AlgebraicControl.jl 如何自动构造例 II.2，并将其转换为 Convex.jl 优化问题。该框架运用范畴论，具体而言是命题 V.2 和定理 V.3，使控制工程师能够专注于问题的高层组件，例如准确地建模系统动力学，以及选择恰当的代价和约束。这是因为双函数复合负责管理每个时间步的变量，并确保子问题正确耦合，从而处理了这些簿记工作。

VII. 结论与未来工作

我们构建了一个范畴框架，用于在形式上关联模型预测控制问题表述与凸优化问题表述，并捕捉模型预测控制问题的范畴结构。未来的工作将致力于构造专用的凸优化程序，以利用本文所识别的模型预测控制问题的范畴结构。最后，尽管我们重点关注线性动力系统的模型预测控制问题，但原则上并无任何因素阻止该框架扩展到非线性情形。这也是未来工作的一个方向。

参考文献

[1] S Joe Qin 和 Thomas A Badgwell。《工业模型预测控制技术概述》。载于*AIChE* 研讨会系列，第 93 卷，第 232–256 页。纽约州纽约：美国化学工程师协会，1971-c2002，1997 年。[2] Juraj Kabzan、Lukas Hewing、Alexander Liniger 和 Melanie N Zeilinger。《面向自主赛车的基于学习的模型预测控制》。*IEEE* 机器人与自动化快报，4(4):3363–3370，2019 年。[3] Branislav Hredzak、Vassilios G Agelidis 和 Minsoo Jang。《混合电池-超级电容器电源的模型预测控制系统》。*IEEE* 电力电子学报，29(3):1469–1479，2013 年。[4] Carlos E Luis、Marijan Vukosavljev、Angela P Schoellig。《利用分布式模型预测控制进行多机器人运动规划的在线轨迹生成》。*IEEE* 机器人与自动化快报，5(2):604–611，2020 年。[5] D Mariano-Hern´andez、L Hern´andez-Callejo、A Zorita-Lamadrid、O Duque-P´erez 和 F Santos Garc´ıa。《建筑能源管理系统策略综述：模型预测控制、需求侧管理、优化以及故障检测与诊断》。建筑工程学报，33:101692，2021 年。[6] Alexander Domahidi、Aldo U. Zgraggen、Melanie N. Zeilinger、Man- fred Morari 和 Colin N. Jones。《滚动时域控制中多阶段问题的高效内点法》。载于*2012 IEEE* 第 *51* 届 *IEEE* 决策与控制会议（*CDC*），第 668–674 页，2012 年 12 月。ISSN：0743-1546。[7] Brendan O’Donoghue、Giorgos Stathopoulos 和 Stephen Boyd。《一种最优控制分裂方法》。*IEEE* 控制系统技术学报，21(6):2432–2442，2013 年 11 月。[8] Georgios Bakirtzis、Cody H. Fleming 和 Christina Vasilakopoulou。《信息物理系统理论的范畴语义》。*ACM* 信息物理系统学报，5(3):1–32，2021 年 7 月。[9] David Jaz Myers。《范畴系统理论》，2022 年。[10] Brendan Fong、David Spivak 和 R´emy Tuy´eras。《作为函子的反向传播：监督学习的组合性视角》。载于*2019* 年第 *34* 届 *ACM/IEEE* 计算机科学逻辑年会（*LICS*），第 1–13 页。IEEE，2019 年。

[11] Andrew Wilhelm 和 Nils Napp。《组件级机器人设计的约束编程》。*ICRA*组合机器人研讨会，2023 年。[12] Georgios Bakirtzis 和 Ufuk Topcu。《运动规划的范畴语义》。*ICRA*组合机器人研讨会，2022 年。[13] R. Tyrrell Rockafellar。《凸分析》。普林斯顿大学出版社，1970 年。[14] Alessandro Alessio 和 Alberto Bemporad。《显式模型预测控制综述》，第 345–369 页。Springer Berlin Heidelberg，德国柏林、海德堡，2009 年。[15] Brendan Fong 和 David I Spivak。《应用范畴论导论：组合性的七个素描》。剑桥大学出版社，2019 年。[16] P. Selinger。《幺半范畴的图形语言综述》。载于物理学的新结构，第 289–355 页。Springer Berlin Hei- delberg，2010 年。[17] Geoffrey SH Cruttwell、Bruno Gavranovi´c、Neil Ghani、Paul Wilson 和 Fabio Zanasi。《基于梯度的学习的范畴基础》。载于编程语言与系统：第 *31* 届欧洲编程研讨会，*ESOP 2022*，作为理论与实践软件欧洲联合会议 *ETAPS 2022* 的一部分举行，德国慕尼黑，*2022* 年 *4* 月 *2* 日至 *7* 日，论文集，第 1–28 页。Springer International Publishing Cham，2022 年。[18] Shuo Yang、Gerry Chen、Yetong Zhang、Howie Choset 和 Frank Dellaert。《利用因子图的等式约束线性最优控制》。载于*2021*年*IEEE*机器人与自动化国际会议，第

9717 9723, 2021 2011 01360 –页，5

[ ]

月。arXiv：。cs。[19] Micah Halter、Evan Patterson、Andrew Baas 和 James Fairbanks。《利用 Catlab 和 semanticmodels 进行组合式科学计算》，2020 年。[20] Michael Grant、Stephen Boyd 和 Yinyu Ye。《规范凸规划》，第 155–210 页。Springer Science & Business Media，2006 年 01 月。[21] Madeleine Udell、Karanveer Mohan、David Zeng、Jenny Hong、Steven Diamond 和 Stephen Boyd。《Julia 中的凸优化》。动态语言高性能技术计算研讨会，2014 年。