arXiv:2305.03821v1 [math.NT] 5 May 2023

伯特兰猜想推广至任意数量素数之和

Joel E. Cohen 洛克菲勒大学 1230 York Avenue, Box 20 纽约, NY 10065，美国cohen@rockefeller.edu附属机构：哥伦比亚大学、芝加哥大学 已接受在《数学杂志》上发表，稿件编号为 MATHMAG-D-21-00038R1，日期为2021年9月3日

1845年，伯特兰 [1] 提出了后来被称为伯特兰假设的猜想：任意素数的两倍都严格大于下一个素数。切比雪夫 [2]（采用他在原始出版物中使用的拼写）于1850年向圣彼得堡帝国科学院提交了伯特兰假设的证明，并于1852年发表。如今，这一定理有时被称为伯特兰–切比雪夫定理。

令人惊讶的是，一个更强的命题似乎鲜为人知，但证明起来很初等：任意两个连续素数之和都严格大于下一个素数，唯一的等号情形是 $2+3=5$。在我独立地提出并证明这一命题后，一位非常热心的审稿人指出，Ishikawa [3] 于 1934年发表了这一结果（证明方法不同）。

这一观察是一个更一般结果（定理1）的特例。该结果（在已知素数定理的前提下）证明起来也很初等，而且此前或许未曾被注意到：若 p_n 表示第 n 个素数，$n=1,2,\ldots,$ 且 $p_1=2, p_2=3,\ldots,$ 并且 $c_1,\ldots,c_g$ 是非负整数（不一定互不相同），$d_1,\ldots,d_h$ 是正整数（不一定互不相同），且 $g>h\geq 1$，那么存在一个正整数 N，使得对于所有 $n\geq N$，都有 $p_{n-c_1}+p_{n-c_2}+\cdots+p_{n-c_g}>p_{n+d_1}+\cdots+p_{n+d_h}$。我们仅用素数定理证明这一结果。对于这一结果的任意具体情形，我们都会概述一种求出最小可能 N 的方法。

伯特兰假设 $p_n+p_n\geq p_{n+1}$ 是定理1在 $g=2, c_1=c_2=0, h=1, d_1=1, N=1$ 时的特例。

我们给出若干其他特殊情形的简明独立证明，尤其是定理2：对于所有 $n>1$，$p_{n-1}+p_n\geq p_{n+1}$，等号仅在 $n=2$ 时成立。我们给出一些数值结果和未解问题。

1 主要结果

定理1。如果 $c_1, \ldots, c_g$ 是 $g > 1$ 个非负整数（不一定互不相同），且 $d_1, \ldots, d_h$ 是 h 个正整数（不一定互不相同），满足 $1 \leq h < g$，那么存在一个正整数 N，使得对于所有 $n \geq N$，

$$p_{n-c_1} + p_{n-c_2} + \cdots + p_{n-c_g} > p_{n+d_1} + \cdots + p_{n+d_h}.$$

证明。对于以实数为自变量的实值函数 f、ϕ，若对所有充分大的 x，都有 $\phi(x) > 0$，我们定义 $f(x) \sim \phi(x)$ 表示 $\lim_{x\to\infty} f(x)/\phi(x) = 1$。素数定理指出，若 $x > 0$，且 $\pi(x)$ 表示不超过 x的素数个数，则

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

不超过第 n 个素数 p_n 的素数恰有 n 个，因此当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned}
\pi(p_n) = n &\sim \frac{p_n}{\log p_n}, \\
\log n &\sim \log p_n - \log\log p_n, \\
n\log n &\sim \frac{p_n}{\log p_n}\log p_n - \frac{p_n}{\log p_n}\log\log p_n = p_n\left(1 - \frac{\log\log p_n}{\log p_n}\right) \sim p_n.
\end{aligned}$$

综上，$p_n \sim n\log n$。因此，对于任意固定整数 C（使得 $p_{n\pm C}$ 有定义），$p_{n\pm C} \sim (n \pm C)\log(n \pm C) \sim n\log n$。所以

$$\begin{aligned}
p_{n-c_1} + p_{n-c_2} + \cdots + p_{n-c_g} &\sim gn\log n, \\
p_{n+d_1} + \cdots + p_{n+d_h} &\sim hn\log n.
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{p_{n-c_1} + p_{n-c_2} + \cdots + p_{n-c_g}}{p_{n+d_1} + \cdots + p_{n+d_h}} \sim \frac{g}{h} > 1.$$

因此存在一个正整数 N，使得对所有 $n \geq N$，都有 $p_{n-c_1} + p_{n-c_2} + \cdots + p_{n-c_g} > p_{n+d_1} + \cdots + p_{n+d_h}$。 □

2 求最小的 N：另一种方法

同一位热心的审稿人建议，为了更具体地说明定理 1 中的 N，也可以利用 Rosser 和 Schoenfeld 的不等式证明这些不等式 [5, 第 69 页，(3.12)、(3.13)]:

$$\begin{aligned}
n\log n < p_n &\qquad for\ 1 \leq n, \\
p_n < n(\log n + \log\log n) &\qquad for\ 6 \leq n.
\end{aligned}$$

我们简要概述一下这一思路。假设我们想要找出满足以下条件的最小正整数 N 使得

$$p_n + p_{n-1} + p_{n-2} > p_{n+1} + p_{n+2} \qquad for\ n \geq N.$$

我们通过数值计算寻找满足条件的最小 $n \geq 8$，使得

$$n\log n + (n-1)\log(n-1) + (n-2)\log(n-2) \\ > (n+1)(\log(n+1) + \log\log(n+1)) + (n+2)(\log(n+2) + \log\log(n+2)).$$

然后，$n-2 \geq 6$，因此 Rosser-Schoenfeld不等式适用于上述所有项。这样的 n 必定存在，因为上述不等式左侧的三个项都渐近于 $n\log n$，而右侧只有两项如此；右侧其余各项的渐近阶均小于 $n\log n$，因此可以忽略。事实证明，上述不等式在 $n = 33$ 时成立。因此，根据 Rosser-Schoenfeld不等式，

$$p_{33} + p_{32} + p_{31} > p_{34} + p_{35}.$$

对于较大的 n，必须满足 $p_n + p_{n-1} + p_{n-2} > p_{n+1} + p_{n+2}$，因为 Rosser-Schoenfeld 界限的左侧 $n\log n + (n-1)\log(n-1) + (n-2)\log(n-2)$ 的增长速度快于右侧 $(n+1)(\log(n+1) + \log\log(n+1)) + (n+2)(\log(n+2) + \log\log(n+2))$。（但请注意：随着 n 增大，$p_n + p_{n-1} + p_{n-2} - (p_{n+1} + p_{n+2})$ 既非弱递增，也非严格递增，即使对于 $n \geq 33$ 也是如此。）这个 $n = 33$ 高于必要值，因为很容易验证以下结论。

$$p_{10} + p_9 + p_8 = 71 > p_{11} + p_{12} = 68,$$

并且对于从 10 到 33 的所有 n，$p_n + p_{n-1} + p_{n-2} > p_{n+1} + p_{n+2}$ 均成立。由于我们已经概述了证明，说明当 n 大于 33 时，该不等式仍然成立，因此我们得出结论：对于所有 $n \geq N = 10$，$p_n + p_{n-1} + p_{n-2} > p_{n+1} + p_{n+2}$ 均成立。

3 特殊情形

定理2。对于所有 $n = 2$、3、.....，我们有 $p_{n-1} + p_n \geq p_{n+1}$。仅当 $n = 2$ 时等号成立。

我们给出一个不依赖定理1的简短证明。

证明。Loo [4, p. 1880，推论 2.2] 证明了对于任意整数 $n \geq 3$，区间 $(n, 4(n+2)/3)$ 中都存在一个素数。对于 $n = 1$ 和 $n = 2$，区间 $(n, 4(n+2)/3)$ 中都存在一个素数，因为对应的区间分别是 $(1, 4)$ 和 $(2, 16/3)$。由于 p_n 是大于 p_{n-1}的最小素数，

$$p_n \in \left(p_{n-1}, \frac{4(p_{n-1}+2)}{3}\right).$$

同理，

$$p_{n+1} \in \left(p_n, \frac{4(p_n+2)}{3}\right) \\ \subset \left(p_n, \frac{4(4(p_{n-1}+2)/3+2)}{3}\right) = \left(p_n, \frac{16p_{n-1}+56}{9}\right).$$

Now

$$\frac{16p_{n-1}+56}{9} \le 2p_{n-1}$$

当且仅当 $28 \le p_{n-1}$。因此，对于所有 $p_{n-1} > 28$，我们有 $p_{n+1} < 2p_{n-1} < p_{n-1}+p_n$。

为了完成证明，只需验证 $p_{n-1}+p_n \ge p_{n+1}$ 对于小于28的素数 p_{n-1}： $2+3=5$、$3+5>7$、$5+7>11$、$7+11>13$、$11+13>$17、$13+17>19$、$17+19>23$、$19+23>29$、$23+29>31$。

由于 p_n 对于 $n>1$ 的所有素数都是奇数，且两个此类素数之和为偶数，因此对于 $n>2$必须成立严格不等式 $p_{n-1}+p_n > p_{n+1}$。□

对于任意正整数 c、d（不一定不同），将 $N(c,d)$定义为：如果存在，则为满足 $p_{n-c}+p_n \ge p_{n+d}$ 对所有 $n \ge N(c,d)$成立的最小有限正整数。定理1证明了 $N(c,d)$总是存在。定理2证明了$N(1,1) = 2$。利用Shevelev等人的结果 [6] ——对于使得每个区间$(kn,(k+1)n)$ $n>1$都包含一个素数的整数 k，其列表包括 $k=1$、2、3、5、9、14，而不包含 $k \le 10^8$的其他取值——我们通过类似于定理2证明中的扩展计算，证明了 $N(2,2) = 6$、$N(3,3) = 10$、$N(4,4) =$11、$N(5,5) = 15$。

4 数值结果与开放问题

定义 $\delta(c,d,n) := p_{n-c}+p_n-p_{n+d}$。那么，即使 $\delta(c,d,n) > 0$，$\delta(c,d,n)$ 也不总是关于 n 的单调递增函数。例如，$\delta(2,2,6) = 7+13-19 = 1$，$\delta(2,2,7) = 11+17-23 = 5$，$\delta(2,2,8) = 13+19-29 = 3$，以及 $\delta(2,2,9) = 17+23-31 = 9$。对于给定的 c、d 和递增的 n，$\delta(c,d,n)$ 也可能连续两次、三次（甚至更多次）取相同值，例如，$\delta(1,1,50) = p_{49}+p_{50}-p_{51} = 223 = \delta(1,1,51) = p_{50}+p_{51}-p_{52}$。对于给定的 c、d 和递增的 n，$\delta(c,d,n)$ 连续取相同值的次数是否存在有限上限?

对于 $c = 1,\ldots,6$ 和 $d = 1,\ldots,6$，我们对小于 10^{10} 的所有素数进行数值计算，得到 $\delta(c,d,n)$，并将满足条件 $p_{n-c}+p_n \ge p_{n+d}$ 的最小 n 记录为 $M(c,d)$（表1）；这里的条件是：对于该 n 以及 n 的所有更大观测值，$p_{n-c}+p_n \ge p_{n+d}$ 都成立。我们将使用有限（尽管很大）的素数集合进行数值计算得到的值 $M(c,d)$，与已经证明的值 $N(c,d)$ 区分开来。前五个对角元素 $M(c,c)$ $c = 1,\ldots,5$ 与上文证明的 $N(c,c)$ 的值一致。对于表1中的 $c<d$，通常有 $M(c,d) > Md(c, M)$，例如，$= 6 >$(1, 3) $M = 5$(3, 1) M，但并非总是如此：$= 15 < M$(5, 6) $= 16$(6, 5) c。在表1以及此处未列出的更大表格中，对于给定的 M，$c(d, d)$ 关于 d 是单调不减的；对于给定的 M，$c(d, c)$ 关于 是单调不减的。这是否始终成立?

$M(1,d)$ $d=1$、.....、100 的前 100 个值为 2 5 6 9 10 11 12 13 14 17 17 17 20 22 24 25 25 26 26 31 31 32 32 34 35 35 38 38 41 42 44 44 47 48 48 48 49 49 52 54 55 57 62 63 63 63 64 64 64 67 67 68 68 69 69 74 74 75 76 79 81 81 81 82 84 84 87 92 93 94 94 96 98 98 99 99 100 100 100 101 102 102 102 103 104 109 112 113 115 117 117 119 120 120 122 127 128 129 129 130。搜索

$c\downarrow, d\rightarrow$	1	2	3	4	5	6
1	2	5	6	9	10	11
2	3	6	8	10	10	12
3	5	7	10	10	12	13
4	5	9	10	11	13	14
5	7	10	11	12	15	15
6	7	11	12	14	16	16

表1：标记为 c 的行与标题为 d 的列交叉处的数值计算结果 $M(c,d)$，满足对于小于 10^{10}, 的 455,052,511 个素数中所有的 $n \geq M(c,d)$ $p_{n-c}+p_n \geq p_{n+d}$，且对于 $n = M(c,d) - 1, p_{n-c}+p_n < p_{n+d}$。例如， $M(2, 3) = 8$ 断言 $p_6 + p_8 \geq p_{11}$，并且不等式 $p_{n-2} + p_n \geq p_{n+3}$ 对这个有限素数集中的每个 $n \geq 8$ 都成立，但对 $n = 7$ 不成立。这里，如所声称的， $13 + 19 > 31$，但 $11 + 17 < 29$。

在线整数数列百科全书 [7, 2021-04-26]的搜索未发现匹配的数列。

5 致谢

我感谢 PierreDeligne 和两位匿名审稿人提出的非常有帮助的意见，并感谢 Roseanne Benjamin 在此项工作期间提供的帮助。

参考文献

[1] J. Bertrand，关于置换函数中所含字母时函数可能取值个数的论文，皇家综合理工学院学报第30册，18（1845年），123–140。

[2] P. Tchebichef，关于素数的论文，《纯粹与应用数学杂志》第一辑，第17卷（1852年），366–390。

[3] H. Ishikawa，1934年《论素数的分布》，《东京文理科大学科学报告》，A辑第2卷（1934年）（31/32），27–40。

[4] A. Loo，关于区间 $[3n, 4n]$中的素数，《当代数学科学国际期刊》第6卷（2011年），1871–1882。

[5] J. B. Rosser 和 L. Schoenfeld，洛厄尔，《关于素数函数的若干近似公式》，《伊利诺伊数学杂志》6（1962 年）（1），64–94。

[6]V. Shevelev、C. R. Greathouse IV 和 P. J. C. Moses，《关于对所有 $n > 1$ 都包含一个素数的区间 $(kn, (k + 1)n)$》。整数数列杂志 16（第 13.7.3 篇文章）（2013），1–14。

[7] N. J. A. Sloane 等，《在线整数数列百科全书》，https://oeis.org，最后访问于 2021 年 4 月。