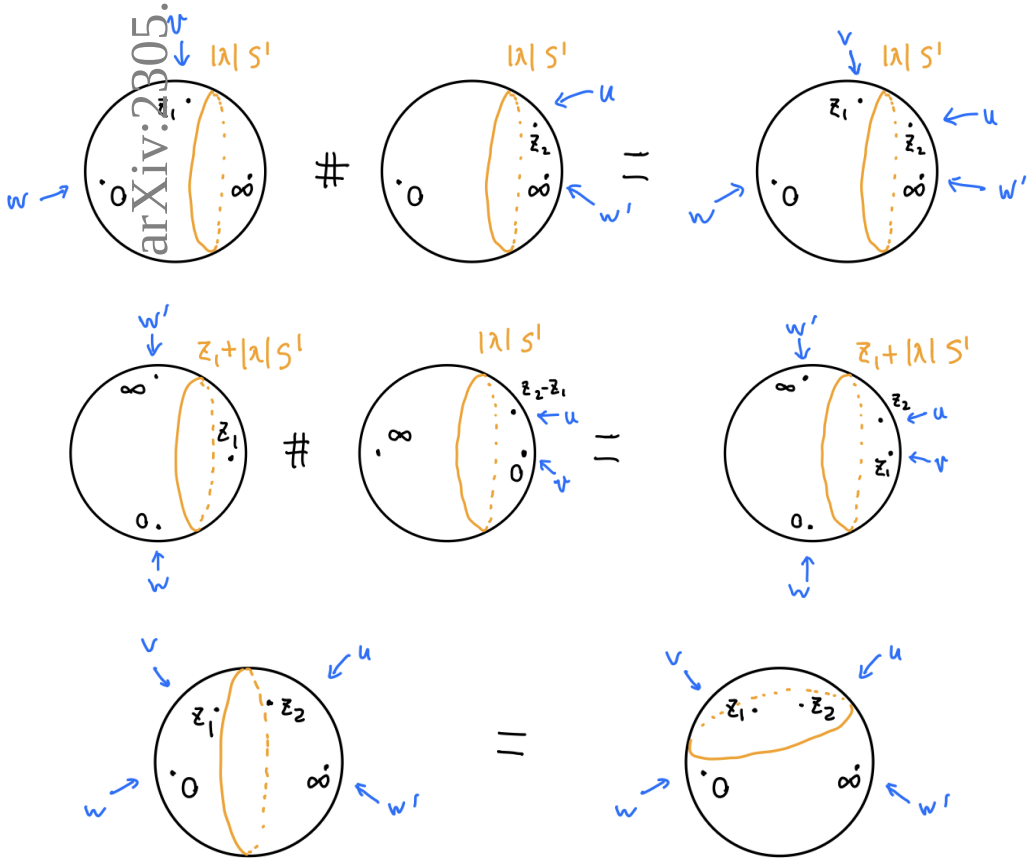
arXiv:2305.03822v1 [math.QA] 5 May 2023

顶点算子代数与共形块讲义

BIN GUI

最后更新：2023年2月



目录

0 记号 5 1 二维共形场论的 Segal 图景；顶点算子代数与共形块的动机 7 2 Virasoro 关系；边界参数化的坐标变换；弦与穿孔点 16 3 顶点算子代数的定义 I 28 4 顶点算子代数的定义 II：雅可比恒等式 42 5 雅可比恒等式的推论；重构定理 47 6 顶点算子代数实例的构造 56 7 局部场 698 n顶点算子的点函数；重构定理的证明 80 9 顶点算子代数模；逆变模 88 10 坐标变换定理 98 11 共形块与 VOA 层的定义 107 12 VOA 层中的推前与李导数 116 13 紧黎曼曲面的族与共形块的平行截面123 14 余不变量层与共形块及其联络 134 15 余不变量层与共形块的局部自由性 145 16 共形块的缝合、传播与因子分解 151 17 亏格 0 共形块与顶点算子代数模的张量范畴 160 A 附录：基本层论 170 索引 177 参考文献 179

序言

1

本专著是我于 2022 年春季在清华大学丘成桐数学科学中心开设的一门课程的讲义，旨在介绍顶点算子代数（VOA）和共形块的基础理论。该课程的听众被假定熟悉复分析、微分流形，以及李群与李代数（及其表示）之间的关系。

本专著的一个主要特点是着重探讨顶点算子代数和共形块的 复解析方面：我们通过首先证明相关函数的收敛性（更准确地说，是绝对且局部一致（a.l.u.）收敛）来证明许多著名结果；这些相关函数先验地定义为若干形式变量的形式幂级数/洛朗级数。这些结果包括 Dong 引理和 Goddard 唯一性（进而得到重构定理）、逆变模的构造，以及 C_2-余有限顶点算子代数（以及紧黎曼曲面族）的共形块层的局部自由性。

这些关联函数作为形式级数的代数构造，在几何上对应于带标记的紧黎曼曲面或带标记的结点曲线的变形。通常的顶点算子代数代数方法（例如 [Kac、LL]）避免展示此类级数的收敛性。在几何中，这意味着不考虑解析缝合，而只考虑形式缝合和无穷小缝合。作为补偿，这些方法大量使用形式演算和 δ 函数。我们的复解析方法的一个优势在于，通过证明这些形式级数是收敛的，可以将关联函数视为真正的函数，而不仅仅是形式级数，因此可以以类似物理学家的方式理解顶点算子代数和共形块的本质。

2

本专著的另一特色是，我们从 Segal 共形场论图景的角度，为许多定义和结果提供了动机。这些内容包括：顶点算子代数的定义，尤其是雅可比恒等式；共形块和 VOA 层的定义；平移协变性、尺度协变性，以及更一般地说，Huang 关于顶点算子坐标变换的定理；逆变模的顶点算子公式；共形块层的联络定义。这些动机性解释为专家所熟知，但在现有的教科书和文章中并不容易找到。我们希望将这些动机纳入专著，能让初学者更容易入门这些主题。

3

共形块理论不仅非常优美，而且对于从几何角度理解顶点算子代数和共形场论的表示论也至关重要。近年来，不同方法之间的交互日益增多，涉及

共形场论。这些方法包括顶点算子代数、共形网与算子代数、张量范畴、低维拓扑、概率等。我们认为，共形块是理解这些方法之间关系的关键。遗憾的是，大多数关于共形块的文献都使用代数几何的语言，这使得来自不同领域的人更难理解这一主题。在我们的专著中，我们用（复）微分流形和基础层论的语言阐释了许多有关共形块的核心思想，以便（希望）更广泛的读者能够理解。当然，这种初等语言不足以证明深刻的结果。因此，我们将技术性证明留在我的专著中 [Gui]。事实上，本专著也可以视为对 [Gui]的介绍。

4

余不变量层和共形块局部自由性的证明中存在一些混淆。这一结果有两种形式：一种是针对光滑曲线代数族的代数形式，另一种是针对紧黎曼曲面的复解析族的解析形式。然而，我们认为，以下这一点在文献中尚未得到充分认识：代数形式的证明不能直接应用于解析形式。

代数情形下的局部自由性通过以下步骤得到证明：1. 证明底概形 $\mathcal{B}$ 上的余不变量层是一个相干的 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模。2. 证明余不变量层存在一个联络。3. 根据一个标准结果，相干性与联络意味着局部自由性。在将这一证明推广到解析情形时，困难出现在步骤 1：我们只能证明复解析族（底流形为 $\mathcal{B}$）的余不变量层是一个有限型 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模，而无法证明它是相干的（即关系层也是有限型的）。代数情形下相干性的证明本质上依赖于结构层 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$ 的诺特性质（以及余不变量层的拟相干性），而这一性质在复解析情形下并不成立。

在 [Gui], 中，我们给出了一种解析证明：先证明一个比有限型条件略强的有限性结论，然后运用一些层论论证。在本专著中，我们给出了另一种证明（参见第15节）。尽管这一证明依赖于同一个有限性结论，但后续论证更具解析性，也有更清晰的物理意义：关键步骤是利用微分方程证明形式级数 ϕ_τ 的τ 收敛，其中 ϕ_τ 由一个固定纤维 ϕ_0上的给定共形块 $\mathfrak{X}_0$ 构造而成，该纤维属于解析族 $\mathfrak{X}$； ϕ_τ 如果能证明收敛，预期它将成为邻近纤维 $\mathfrak{X}_\tau$ 上的一个共形块。因此，这一证明与 [Gui] 或 [Gui20]中关于缝合共形块收敛性的证明非常相似。注意， $\mathfrak{X}_\tau$ 是一个紧黎曼曲面（带有标记点）的变形 $\mathfrak{X}_0$，而缝合则是结点曲线的变形。因此，通过给出这样的证明，我们希望传达这样一种思想：在共形块的（复解析）理论中，这两类变形都可以用相同的方式处理。

致谢

这部专著的标题有点乏味。我曾考虑过采用一个更有趣的标题，例如《面向分析学家的顶点算子代数与共形块／由一位分析学家撰写》。我没有这么做，是因为不想让这部专著看起来像是只写给分析学家的。

我必须坦言，我之所以偏爱解析方法，首先也是最重要的原因，是个人喜好以及我是一名（或者说自认为是一名）数学分析学家的事实。但很大程度上，这也源于我的博士后导师黄易之的影响。阅读他的许多著作以及与他多次讨论，都让我受益匪浅。我谨向他致以深切的谢意。我还要感谢张昊，他通读了这部专著，并指出了许多排印错误和疏漏。

2022年5月

首次阅读时，标有 ⋆ 的子截面可以跳过。

0 记号

- $\mathbb{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$，$\mathbb{Z}_+=\{1,\ 2,\ \dots\}$。

<escape>• </escape>i <escape> $=\sqrt{-1}, \mathbb{S}^1=$</escape>单位圆<escape> $\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}\backslash\{0\}$.</escape>

- $\mathbb{D}_r=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<r\}$，$\mathbb{D}_r^\times=\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z|<r\}$，$\mathbb{D}_r^{类}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leqslant r\}$

- $\mathscr{O}(X)$（分别地，$\mathscr{O}_X$）是复流形 X 上的全纯函数空间（层）。$\mathscr{O}_{X,x}$ 是 $\mathscr{O}_X$ 在 x 处的茎。
- 构形空间 $\mathsf{Conf}^n(X)=\{(x_1,\dots,x_n)\in X^n:\ x_i\neq x_j$ 若 $i\neq j\}$。
- z 和 ζ 可能表示点、$\mathbb{C}$的标准坐标，或形式变量。若上下文不明确，我们会说明它们的含义。
- 除非另有说明，所有向量空间都定义在 $\mathbb{C}$上。若 W 是配有厄米形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle$的向量空间，我们将 $|\cdot\rangle$ 视为线性变量，将 $\langle\cdot|$ 视为反线性（即共轭线性）变量，这遵循物理学家约定。

- 若 W,W'是向量空间，则 $\mathsf{Hom}(W,W')$ 表示从 W到 W'的线性算子空间。我们令 $\mathsf{End}(W)=\mathsf{Hom}(W,W)$。
- 我们用符号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 或 $(\cdot,\cdot)$ 表示双线性形式（即对两个变量都线性）。
- 给定一个向量空间 W 和一个形式变量 z，

$$W[z]=\{\text{系数属于 } W\}\text{的 } z\text{多项式}$$
$$W[[z]]=\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}}w_nz^n:w_n\in W\Big\}$$
$$W((z))=\Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}w_nz^n:\ \ w_n\in W,\ \text{且当 } n \text{ 足够负时 } w_n=0\Big\}$$
$$W[[z^{\pm1}]]=\Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}w_nz^n:w_n\in W\Big\}.$$

每一行都是下一行的子空间。在存在多个形式变量的情况下，各空间的定义方式类似，但 $W((\cdots))$除外。例如，

$$W[[z,\zeta^{\pm1}]]:=W[[z]][[\zeta^{\pm1}]]=W[[\zeta^{\pm1}]][[z]]$$

由$\sum_{m\in\mathbb{N}、\ n\in\mathbb{Z}}w_{m、\ n}z^m\zeta^n$ 组成，其中每个$w_{m、\ n}\ \in\ W$。不过请注意，$W((z))((\zeta))$ 和 $W((\zeta))((z))$ 并不相等。（例如，$\sum_{m\geqslant-n}\sum_{n\geqslant-1}z^m\zeta^n$ 属于 $\mathbb{C}((z))((\zeta))$，但不属于 $\mathbb{C}((\zeta))((z))$。）

$W[[z^{\pm1}]]$ 其中的元素称为 z 的**形式洛朗级数**。

- 我们令

$$W((z_1,\dots,z_N)) = \Big\{ \sum_{n_1,\dots,n_N \geqslant L} w_{n_1,\dots,n_N} z_1^{n_1}\cdots z_N^{n_N} \text{ for some } L\in\mathbb{Z}\Big\}.$$

  那么 $W((z_1,\ z_2))$是 $W((z_1))((z_2))$和 $W((z_2))((z_1))$的真子空间。

- 我们定义

$$\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n z^n dz = w_{-1}. \tag{0.2}$$

  这与复解析留数一致。

- $W_1\otimes\cdots\otimes W_N$的向量写作 $w_\bullet$，表示它具有如下形式： $w_1\otimes\cdots\otimes w_N$，其中每个 $w_i\in W_i$。根据上下文， $w_\bullet$也表示一个元组 $(w_1,\ .....,\ w_N)$。类似地，根据上下文， $W_\bullet$可以表示 $W_1\otimes\cdots\otimes W_N$或 $(W_1,\ .....,\ W_N)$。
- 除非另有说明，流形指的是没有边界的流形。此外，“有边界”表示“可能有边界”。

1 Segal 的二维共形场论图景；顶点算子代数和共形块的动机

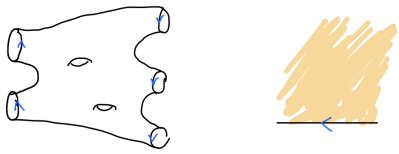
1.1

顶点算子代数（VOA）是为理解和构造二维共形场论（简称 CFT）而定义的数学对象。共形场论描述弦的传播和相互作用。弦有两种类型：闭弦 $\simeq \mathbb{S}^1$ 和开弦 $\simeq [0,\ 1]$。本课程将主要关注闭弦。

让我来解释数学家如何理解共形场论。和任何量子场论（QFT）一样，在共形场论中我们必须有一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。$\mathcal{H}$ 中的向量称为“态”，但与普通量子场论不同，向量 $\xi \in \mathcal{H}$ 不是粒子的态，而是闭弦的态 $\mathbb{S}^1$。

共形场论中最重要、也最不平凡的部分，是定义并理解弦的相互作用。根据 Segal 图景 [Seg88], 相互作用由一个带边界的紧黎曼曲面唯一确定 Σ $\partial\Sigma$，其中 $\partial\Sigma$ 是不交并，由若干圆（弦）组成。每根弦称为入射弦或出射弦。假设 $\partial\Sigma$ 有 N 根入射弦和 M 根出射弦，那么这幅图描绘的相互作用中，N 根弦向内进入，而 M 根弦向外出去。

此外，边界 $\partial\Sigma$ 必须进行**参数化**。这意味着，对每个连通分支 $\partial\Sigma_i$，都对应一个微分同胚 η_i：$\partial\Sigma_i \xrightarrow{\simeq} \mathbb{S}^1$。假定在 $\partial\Sigma_i$上通过沿 η_i 拉回 $\mathbb{S}^1$ 上的定向所定义的定向，与斯托克斯定理中定义的定向相反，如下所示



(1.1)

1.2

除非另有说明，我们假设边界参数化也是**解析的**。粗略地说，这意味着 Σ 可以通过从一个紧黎曼曲面 C（无边界）中去掉若干开圆盘得到，使得$\partial\Sigma$ 的参数化由 C的局部全纯函数给出。

下面给出更严谨的解释。称 C 在 $x \in C$处的**局部坐标** η，是指 η是定义在 x 的某个邻域 U 上的全纯单射，且满足 $\eta(x) = 0$。因此，η 是 U 与 0 的某个邻域 $\eta(U)$ 之间的双全纯映射。现在，假设我们在不同点 $x_1, \ldots, x_N \in C$处有局部坐标 $\eta_1, \ldots, \eta_N$。这些数据

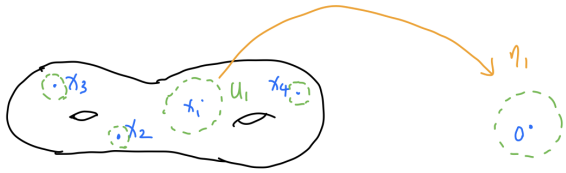
$$\mathfrak{X} := (C; x_\bullet; \eta_\bullet) = (C; x_1, \ldots, x_N; \eta_1, \ldots, \eta_N) \tag{1.2}$$

is c称为一个 N **点标记的紧黎曼曲面，配有局部坐标**。

令每个 η_i 定义在一个邻域 $U_i \ni x_i$ 上。我们进一步假设如下。

假设 1.1。 $U_i \cap U_j = \varnothing$ 如果 $i \neq j$（事实上， $\eta_i^{-1}(\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}) \cap \eta_j^{-1}(\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}) = \varnothing$ 就足够了），并且$\eta_i(U_i) \supset \mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$对于每个 i。这里 $\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$是闭单位圆盘。

移除所有 $\eta_i^{-1}(\mathbb{D}_1)$ 后，我们得到 Σ，其边界弦为 $\eta_i^{-1}(\partial\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}) = \eta_i^{-1}(\mathbb{S}^1)$，参数化为 η_i。



1.3

任何上述的 Σ 都唯一确定一种弦的相互作用。假设它有 N 条入射弦和 M 条出射弦。那么，从数学上讲，这种相互作用由一个有界线性映射 $T = T_\Sigma\colon \mathcal{H}^{\otimes N} \to \mathcal{H}^{\otimes M}$ 描述。（由于一致有界原理，有界性是自动成立的。但这并不是本课程中的一个重要问题。）给定 $\xi_\bullet = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N \in \mathcal{H}^{\otimes N}$ 和 $\eta_\bullet = \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_M \in \mathcal{H}^{\otimes M}$，其值

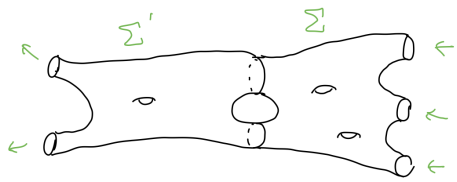
$$\langle \eta_\bullet | T\xi_\bullet \rangle \tag{1.3}$$

描述了具有态$\xi_1, \ldots, \xi_N$的 N 入射闭弦在相互作用后变为 $\eta_1, \ldots, \eta_M$的概率振幅。

共形场论中的“共形”一词反映了这样一个事实： T仅取决于 Σ 的复结构及其参数化，而不取决于度量等因素。因此，共形场论比拓扑量子场论（TQFT）的约束更为严格：在后者中， T仅取决于流形的拓扑结构。

1.4

假设我们还有另一个相互作用 $S\colon \mathcal{H}^{\otimes M} \to \mathcal{H}^{\otimes L}$，它对应于参数化曲面 Σ'，那么它们的复合 $S \circ T\colon \mathcal{H}^{\otimes N} \to \mathcal{H}^{\otimes L}$ 对应于将 Σ 和 Σ' 缝合成 **缝合** $\Sigma\#\Sigma'$，其中 Σ 的第 j 条出射弦 $\partial_+\Sigma_j$ 与 Σ' 的第 j 条入射弦 $\partial_-\Sigma'_j$ 缝合。



重要的是要明确如何将 $\partial_+\Sigma_j$（参数化为 η_j）与 $\partial_-\Sigma'_j$（参数化为 η'_j）相识别。取 $x \in \partial_+\Sigma_j$ 和 $y \in \partial_-\Sigma'_j$。然后

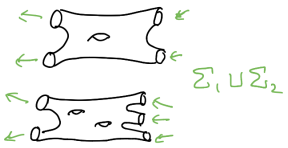
$$x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \eta_j(x)\eta'_j(y) = 1. \tag{1.4}$$

从图中可以清楚地看出，$\partial_+\Sigma_j$ 和 $\partial_-\Sigma_j$ 的定向彼此相反。这与我们的缝合规则是 $\eta_j(x) = 1/\eta'_j(y)$ 而不是（比如）$\eta_j(x) = \eta'_j(y)$这一事实有关。

回想一下，我们假设这些参数化是解析的。 Σ 与 Σ'的缝合起初只是一个拓扑曲面，但它具有自然的复解析结构；这一点留给读者验证。

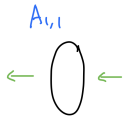
1.5

假设 T_1： $\mathcal{H}^{\otimes N_1} \to \mathcal{H}^{\otimes M_1}$ 对应于 Σ_1，且 T_2： $\mathcal{H}^{\otimes N_2} \to \mathcal{H}^{\otimes M_2}$ 对应于 Σ_2，那么 $T_1 \otimes T_2$： $\mathcal{H}^{\otimes (N_1+N_2)} \to \mathcal{H}^{\otimes (M_1+M_2)}$ 对应于不交并 $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$。



1.6

考虑环带$A_{r,\ R} = \{z \in \mathbb{C}:\ \ r < |z| < R\}$，它是通过紧黎曼球面 $\mathbb{P}^1$ 上0处的局部坐标 $\eta_1(z) = z/r$ 和8处的局部坐标$\eta_2(z) = R/z$ 去除两个开圆盘得到的。我们将这样的$A_{r,\ R}$（带有给定的边界参数化）称为**标准环带**。令 $r \nearrow 1$，$R \searrow 1$。这个环带的极限是一个“退化”的黎曼曲面，具有1个入边界圆和1个出边界圆。这两个圆都是 $\mathbb{S}^1$。入边界圆的参数化为 $z \mapsto z$，出边界圆的参数化为 $z \mapsto z^{-1}$。我们将这个环带称为**标准薄环带**，并记作$A_{1,\ 1}$。映射 T： $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 与$A_{1,\ 1}$ 相关联，是恒等映射。这反映了这样一个事实：将任意 Σ 与A_1的不交并$_{,\ 1}$ 进行缝合，所得为 Σ。



1.7

我们用一种更精妙的方式概括目前为止的内容：令 $\mathscr{C}$ 为由紧致一维光滑流形构成的幺半范畴，其中，从对象 S_1 到另一个对象 S_2 的态射是一个紧黎曼曲面，其带有入射参数化边界 $\simeq S_1$ 和出射参数化边界 $\simeq S_2$；由 N 个圆组成的并集的恒等态射是由 N 个 $A_{1,\ 1}$ 片段构成的不交并；单位对象为空集；对象与态射的张量积分别是弦与黎曼曲面的不交并。那么，共形场论是一个从 $\mathscr{C}$ 到希尔伯特空间幺半范畴的幺半函子。所以，粗略地说，共形场论是 $\mathscr{C}$ 的一个表示。

既然我们选择希尔伯特空间作为底层空间，就应该预期 $\mathscr{C}$ 的表示是酉的。严格来说，上文提到的函子应当是一个 $*$-函子：这意味着，对于每个从 N 条弦到 M 条弦的态射 Σ，我们都应该

定义其伴随态射 Σ^*，它从 M 条弦到 N 条弦，其对应的映射是 T^* 的伴随 $\mathcal{H}^{\otimes M} \to \mathcal{H}^{\otimes N}$： T。 Σ^* 简单地定义为 Σ 的**复共轭** Σ:

定义 1.2。Σ 由点 x 组成，其中 $x \in \Sigma$； Σ上的局部全纯函数为 η^*，其中 η 是 Σ 上的局部定义的全纯函数，并且

$$\eta^*(\overline{x}) = \overline{\eta(x)} \tag{1.5}$$

只要 η 在 $x \in \Sigma$上有定义；类似地，边界参数化由 η_j^*给出。注意，如果 Σ是从一个 N 尖点 $\underline{\mathfrak{X}} = (C$中去掉开圆盘得到的； $x_\bullet$； $\eta_\bullet)$，那么 Σ 就是从圆盘中去掉

$$\overline{\mathfrak{X}} := (\overline{C}; \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N; \eta_1^*, \ldots, \eta_N^*) \tag{1.6}$$

η^* 不应与由 Σ 上的 η 定义的对象混淆：

$$\overline{\eta}(x) = \overline{\eta(x)}.$$

在当前语境下，我们应假设 的入射（分别为出射）弦通过共轭映射 Σ 变为 的出射（分别为入射）弦： $x \in \Sigma \mapsto x \in \Sigma$。今后，在必要时，我们通常会将所有弦都视为入射弦（参见 1.9）。在这种情况下，我们也将 Σ 的所有边界弦都视为入射弦。

我们要指出，尽管幺正性是一个非常重要的条件，但也存在重要的非幺正共形场论，例如对数共形场论。（在这类情况下， $\mathcal{H}$ 是一个没有内积的向量空间。）此外，许多顶点算子代数的结果和技巧并不依赖于幺正性。尽管如此，假设幺正性往往能使讨论相对简单，或提供动机。

例 1.3. 令 $\mathfrak{X} = (\mathbb{P}^1; 0; \lambda\zeta)$，其中 ζ是 $\mathbb{C}$和 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$的标准坐标。我们可以通过令 $x \in \mathbb{P}^1 \mapsto \underline{x}$ 为 $\mathbb{C}$的标准共轭坐标 $\underline{z} \mapsto \underline{z}$，将 $\underline{\mathbb{P}}^1$ 的共轭识别为 $\mathbb{P}^1$。于是 $(\lambda\zeta)^*(z) = \lambda\overline{\zeta}(z) = \lambda \cdot z = \lambda\zeta(z)$。因此， $\overline{\mathfrak{X}}$ 的共轭与 $\mathfrak{X} = (\mathbb{P}^1; 0; \lambda\zeta)$同构。

1.8

相互作用过程可以没有入射弦或出射弦。空弦的希尔伯特空间 $\varnothing$ 是 $\mathbb{C}$。最基本且重要的一个没有入边界的例子是闭单位圆盘 $\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$，它有一个由 $z \mapsto z^{-1}$参数化的出边界。相应的映射 $\mathbb{C} \to \mathcal{H}$ 可以用它在 1 处的取值来表示。这个属于 $\mathcal{H}$ 的元素记作 $\mathbf{1}$，称为**真空向量**。



(1.7)

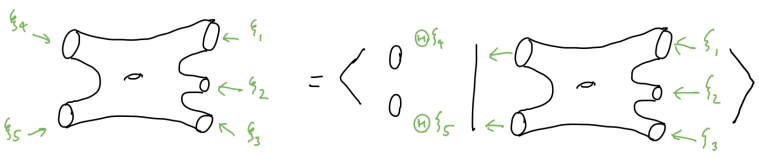
像之前一样，假设出理论是幺正的。那么上述圆盘的共轭仍是同一个圆盘，边界参数化也相同，但原来的出射弦现在变成了入射弦。根据 $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$，相应的映射1.7是线性泛函 $\langle \mathbf{1} | \cdot \rangle$。

1.9

一般而言，人们可能会想知道，对于一个有 N 条入射弦但没有出射弦的曲面 Σ，相互作用 $T\colon \mathcal{H}^{\otimes N} \to \mathbb{C}$ 在物理上意味着什么。选取 $0 < M < N$，并令 $\partial\Sigma$ 的 N 条弦成为出射弦。那么，相应的相互作用是一个映射 $\widetilde{T}\colon \mathcal{H}^{\otimes(N-M)} \to \mathcal{H}^{\otimes M}$。在幺正共形场论中，$T$ 可以通过 $\mathcal{H}$ 上的一个反幺正（即共轭酉）映射 Θ 与 $\widetilde{T}$ 联系起来，该映射称为 **CPT算符**，使得对于 ξ_1，……，$\xi_N \in \mathcal{H}$（其中最后的 M 个向量与出射弦相关联），我们有

$$T(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N) = \langle \Theta\xi_{N-M+1} \otimes \cdots \otimes \Theta\xi_N | \widetilde{T}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{N-M}) \rangle, \tag{1.8}$$

可用图像方式来理解为



算子 Θ 是一个对合，即 $\Theta^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$。

这样的线性泛函 T 对应于不存在出射弦的相互作用，被称为**关联函数**（或 N**点函数**）。这些函数是共形场论（CFT）的核心研究对象（事实上，也是任何量子场论的核心研究对象）。关系式（1.8）告诉我们：（1）借助 Θ，关联函数可以解释为弦相互作用中的概率振幅；（2）要研究任意相互作用，只需研究那些不存在出射弦的相互作用。

最后，我想在本小节结束时提及一个重要事实：假设 Σ 的复结构以及（假定为解析的）边界参数化由某些复变量 $\tau_\bullet = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$全纯参数化，那么 $T(\xi_\bullet)$ 的值现在是 $\tau_\bullet$的一个实解析函数，也就是说，它在局部是 $\tau_1, \ldots, \tau_k$ 及其共轭的幂级数。实际上，“关联函数”中的“函数”一词指的是$\tau_\bullet$的函数，而不是 $\xi_\bullet$的函数。

1.10

你一定很好奇 CPT 是什么意思。事实上，Θ 负责电荷共轭（C）、宇称变换（P）和时间反演（T）的同时对称性。P+T 合在一起意味着一个反双全纯映射 $\Sigma \to \Sigma'$。现在我们已经到了一个此前遗漏的要点：由于反全纯映射也是共形映射，我们是否应当预期反双全纯曲面的相互作用映射（或关联函数）彼此相等？答案是否定的。（也就是说，P+T 并不保持不变。）事实上，如果令Σ 具有 N 个输入而没有输出，令Σ 为它的复共轭（参见 1.7），但仍具有N 个输入，并令 T_Σ，$T_{\overline{\Sigma}}$为与它们相关联的关联函数。那么由1.7和关系式（1.8），可得

$$T_\Sigma(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N) = \overline{T_{\overline{\Sigma}}(\Theta\xi_1 \otimes \cdots \otimes \Theta\xi_N)}. \tag{1.9}$$

~证明。根据第1.7小节中的描述，相互作用映射 T_Σ 与 Σ 没有输入且具有 N 个输出的是 T_Σ^*： $\mathbb{C} \to \mathcal{H}^{\otimes N}$，即 T_Σ 的伴随。由 $\Theta^2 = 1$，我们有

$$T_\Sigma(\xi_1 \otimes \cdots \xi_N) = \langle 1 | T_\Sigma(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N)\rangle = \langle T_\Sigma^* 1 | \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N\rangle$$
$$= \overline{\langle \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N | \widetilde{T_\Sigma} 1\rangle} \overset{(1.8)}{=\!=} \overline{T_{\overline{\Sigma}}(\Theta\xi_1 \otimes \cdots \otimes \Theta\xi_N)}.$$

请注意，从数学角度来看，公式（1.9）的作用是利用（1.8）将以下关系~$T_\Sigma = T_\Sigma^*$（将 Σ 的所有弦视为出射）转换为 Σ 的所有弦均为入射的情况。

□

公式（1.9）解释了 CPT 对称性：荷共轭（对关联函数的值取复共轭）和宇称+反演（共轭双全纯映射 $\_\mathbb{C}$： $\Sigma \to \Sigma$）对称性得以保持，实现这一同时对称性的算子为 Θ。

注意，在数学上，电荷共轭 C 与对数取复共轭有关（但对 Σ 不是这样）。在物理上，它意味着将弦变成它的“反弦”，或者（在一般的量子场论中）将一个粒子（例如带负荷的电子）变成它的反粒子（例如带正荷的正电子）。

1.11

我们目前所描述的共形场论实际上非常特殊：它没有共形反常。事实上，不存在既是酉的又没有反常的非平凡共形场论。本课程主要关注具有共形反常的共形场论。从技术上说，共形反常由一个复数 c（对于酉共形场论为正）决定，称为**中心荷**。为了描述这类共形场论，我们对先前的描述作如下修改：映射（或关联函数） T_Σ 关于 Σ 仅确定到一个依赖于 Σ 的正标量倍数。$T_{\Sigma_1} \circ T_{\Sigma_2} = \lambda T_{\Sigma_1 \# \Sigma_2}$ 其中 $\lambda > 0$。（在非幺正共形场论中，这些常数不一定为正。）如果 Σ 由某些复变量 $\tau_\bullet$ 全纯参数化，那么通过缩小 $\tau_\bullet$ 的定义域，我们可以选取 T_Σ，使其依赖于 $\tau_\bullet$ 实解析地变化。

有许多重要情形，可以为 $\tau_\bullet$全局选取一个实解析（甚至全纯）的 T_Σ。这一点将在后文详细研究。

除非另有说明，共形场论总是指带有（可能存在的）共形反常的共形场论。借助1.7中的抽象表述，可以说，幺正共形场论是一个射影幺$*$-函子，它从范畴 $\mathscr{C}$（见1.7）映到希尔伯特空间范畴。也就是说，它是 $\mathscr{C}$的射影酉表示。

1.12

要研究拓扑群 G的表示，首先必须充分了解 G的拓扑结构和代数结构。同样，研究共形场论也高度依赖于紧黎曼曲面的几何结构和解析结构。然而，根据我们讨论过的内容，研究共形场论面临着一个巨大障碍：关联函数关于参数是实解析函数，而不是复解析（即全纯）函数

$\tau_\bullet$。因此，为了运用复分析的强大工具（例如留数定理）来研究共形场论，我们作出如下设想：关联函数 T 是一个和：$T_\Sigma = \sum_j \Phi^j_\Sigma \cdot \Psi^j_\Sigma$，其中每个 Φ^j 和 Ψ^j 分别全纯地依赖于 Σ 和 Σ（因此 Ψ^j_Σ 反全纯地依赖于 Σ）。

这个设想非常模糊。让我更详细地解释一下。考虑环带$A_{r,\ R}$其边界参数化如1.6所示。我们将内侧的圆移到以 z 为中心的另一个圆上（其中 $z \in A_{r,\ R}$ 相当小），半径仍为 r。新的偏心环带 $A_{z,\ r,\ R}$ 具有较大的出射弦，其参数化为 R/ζ；较小的入射弦则参数化为 $(\zeta - z)/r$, ，其中 ζ 是 $\mathbb{P}^1$的标准坐标。也就是说，它由以下数据确定

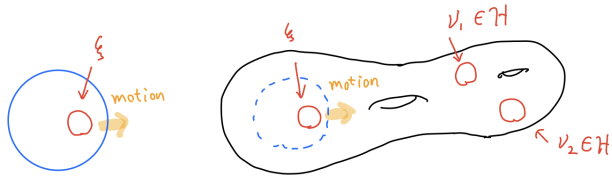
$$(\mathbb{P}^1; z, \infty; (\zeta - z)/r, R/\zeta). \tag{1.10}$$

令 T_z：$\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 为相应的映射。正如我们所说，对于一般的向量 ξ，$\eta \in \mathcal{H}$，表达式 $\langle \eta | T_z \xi \rangle = \langle \Theta\eta,\ T_z\xi \rangle$ 可以选取为关于 z实解析。现在令

$$\begin{aligned} \mathbb{V} = \{ & \xi \in \mathcal{H} : \text{For all } r, R, \text{ the map } T \text{ can be chosen such that} \\ & z \mapsto \langle \nu | T_z \xi \rangle \text{ is holomorphic for all } \nu \in \mathcal{H}, \text{ and} \\ & \xi \text{ has "finite energy"} \} \end{aligned} \tag{1.11}$$

"有限能量"是一个稍后会解释的次要条件。（见 2.8。）

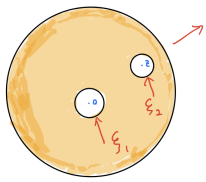
我们可以将 $A_{z,\ r,\ R}$ 与任意一个 Σ缝合；缝合后，环带内较小的弦的运动就变成了 Σ的一条边界弦的运动：



(1.12)

因此，如果将向量 $\xi \in \mathbb{V}$ 赋给一条带有（解析）边界参数化 η_i的 Σ 入射弦，那么当我们相对于 η_i平移这条参数化的弦时，无论赋给其他弦什么态，关联函数 $T_\Sigma(\xi \otimes \cdots)$ 都应当关于这种运动是全纯的。因此，我们可以借助复分析来研究 $\mathbb{V}$。$\mathbb{V}$ 称为**顶点算子代数**（VOA）。

我们目前只将 $\mathbb{V}$ 描述为一个向量空间。但 $\mathbb{V}$ 在什么意义上是一个代数呢？一个显而易见的候选定义如下：考虑带有三个标记点 0，z，8 的 $\mathbb{P}^1$，并采用通常的坐标，例如在 0，z，8 处分别取 $\eta_0 = \zeta/r_1, \eta_z = (\zeta - z)/r_2, \eta_\infty = R/\zeta$，其中 r_1，$r_2 > 0$ 较小，而 $R > 0$ 较大；ζ 则是 $\mathbb{C}$ 的标准坐标。我们假设 0 和 z 周围的弦是入射的，而 8 周围的弦是出射的。如果将 ξ_1，$\xi_2 \in \mathbb{V}$ 指派给入射弦，那么结果就可以看作 ξ_1 与 ξ_2 的乘积。



尽管这个乘积不具有有限能量，但它确实满足（1.11）中倒数第二行之前的陈述。因此，这个乘积几乎是一个 $\mathbb{V}$中的向量。通过适当地修改这个乘积，我们可以确保 $\mathbb{V}$ 中向量的乘积始终属于 $\mathbb{V}$。详情将在后续章节中给出。

类似于（1.11），我们将 $\mathbb{V} \subset \mathcal{H}$ 定义为满足以下条件的有限能量向量 ξ 的集合：$\langle \nu | T_z \xi \rangle$ 在 z上是反全纯的。真空向量 $\mathbf{1}$ 属于 $\mathbb{V} \cap \mathbb{V}$：将单位圆盘粘合到$A_{z,r,R}$ 的内部后，得到的正是半径为 R 且参数化为 R/ζ, 的圆盘，而该结果与 z无关。因此， $T_z\mathbf{1}$ 以及 $\langle \nu | T_z \mathbf{1} \rangle$ 在 z上都是常数，因而在 z上既是全纯的，也是反全纯的。

1.13

现在我们可以更详细地阐述我们的设想。令 $\mathcal{H}^{\text{fin}}$ 为 $\mathcal{H}$ 中具有“有限能量”的向量所构成的（事实上是稠密）子空间，该空间受 $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$作用。设想：

1. $\mathcal{H}^{\text{fin}}$ 作为一个 $\mathbb{V} \otimes \widehat{\mathbb{V}}$-模具有分解

$$\mathcal{H}^{\text{fin}} = \bigoplus_{i \in \mathfrak{I}} \mathbb{W}_i \otimes \widehat{\mathbb{W}}_i \qquad \supset \mathbb{V} \otimes \widehat{\mathbb{V}} \tag{1.13}$$

其中 $\mathbb{W}_i$、$\widehat{\mathbb{W}}_i$ 分别是不可约的 $\mathbb{V}$-模和 $\mathbb{V}$-模。 $\mathbb{V}$ 和$\widehat{\mathbb{V}}$ 按照其定义（参见（1.11））分别是 $\mathcal{H}^{\text{fin}}$ 的子空间，方法是将它们分别与 $\mathbb{V}\otimes\mathbf{1}$和 $\mathbf{1}\otimes\mathbb{V}$相识别。真空向量 $\mathbf{1}$属于 $\mathcal{H}$，并被识别为 $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$（其属于 $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$）。

2. 对于某些没有出射边界的 Σ，设 T_Σ：$\mathcal{H}^{\otimes N} \to \mathbb{C}$ 为相应的映射。那么，与上述直和分解相对应，我们有

$$T_\Sigma\Big|_{(\mathcal{H}^{\text{fin}})^{\otimes N}} = \sum_{i_1,\dots,i_N \in \mathfrak{I}} \Phi_{\Sigma,i_\bullet} \otimes \Psi_{\overline{\Sigma},i_\bullet} \tag{1.14}$$

其中

$$\Phi_{\Sigma,i_\bullet} : \mathbb{W}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_{i_N} \to \mathbb{C},$$
$$\Psi_{\overline{\Sigma},i_\bullet} : \widehat{\mathbb{W}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\mathbb{W}}_{i_N} \to \mathbb{C}$$

是线性的。此外，当复结构和边界参数化由复变量 $\tau_\bullet$ 解析地参数化时，那么局部地（相对于 $\tau_\bullet$的定义域），T_Σ, $\Psi_{\Sigma,\ i_\bullet}$, $\Psi_{\Sigma,\ i_\bullet}$ 可以选取为使得 $\Psi_{\Sigma,\ i_\bullet}$ 在 $\tau_\bullet$ 上全纯（对所有输入向量均如此），且 $\Psi_{\Sigma,\ i_\bullet}$ 在 $\tau_\bullet$ 上全纯。$\Phi_{\Sigma,\ i_\bullet}$ 和 $\Psi_{\Sigma,\ i_\bullet}$ 称为**共形块**，与 Σ 相关联。

$\overline{\Sigma}$ (resp. Σ) 和 $\mathbb{V}$ (resp. $\widehat{\mathbb{V}}$).

在第一部分中，$\bigoplus$ 可以是有限的（这是本课程的重点）、无限但离散的，或连续的。

第二部分可以概括为：共形场论分为**手征部分**（那些 Φ 或 $\mathbb{W}_i$）和**反手征部分**（那些 Ψ 或 $\mathbb{W}_i$）。这里，“chi- ral”=“全纯”。

当物理学家说一个共形场论是**有理**的时，他们通常是指上述直和是有限的，并且每个 $\mathbb{W}_{i_k}$，$\mathbb{W}_{i_k}$ 都是半单的（因此，通过进一步分解，可以成为不可约的）。到目前为止，共形块的数学理论几乎只对有理共形场论是完备的。这些将是本课程的主要例子。对于非有理的对数共形场论，即使上述设想也需要进行修改。（到目前为止，我们甚至还不清楚该如何修改。）

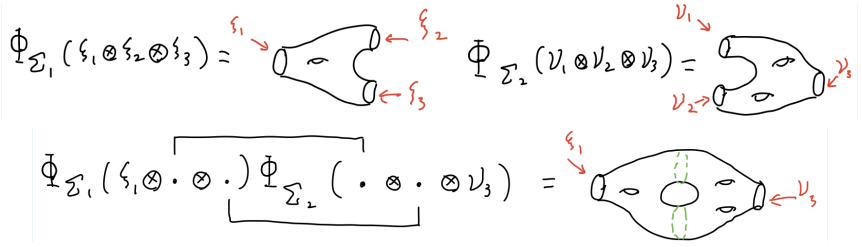
物理学家或多或少将上述描述视为共形块的定义。我们数学家则应当反其道而行：以不同的方式定义共形块，并利用它们按照上述设想来构造共形场论。

1.14

你可能会注意到，为了使这一设想与1.4和1.5相容，必须假设

1. 分别与 Σ_1，Σ_2 相关的共形块的张量积 Φ_{Σ_1}，Φ_{Σ_2} 应当是与 $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$相关的共形块。

2. Φ_{Σ_1}、Φ_{Σ_2} 的复合（或者更准确地说，它们的收缩）应当是与 Σ_1 和 Σ_2的缝合相关联的共形块，其中要进行收缩的那对 $\mathbb{V}$-模必须互为对偶。



（线性代数旁注：如果 $V^\vee$ 是向量空间 V的对偶空间（或对偶空间的一个适当稠密子空间），我们选取一个以$\mathfrak{A}$的元素为标记的基 $\{v_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$，并选取 $V^\vee$ 的对偶基 $\{v_\alpha^\vee\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$（即由 $\langle v_\alpha、v_\beta\rangle = \delta_{\alpha、\beta}$确定的对偶基），那么进行收缩就意味着在向量空间张量积上的线性泛函中代入 $\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} v_\alpha\otimes v_\alpha^\vee$，使得 V、$V^\vee$ 成为张量分量。）

在严格定义共形块之后，我们会看到，第一点显而易见，而第二点则是一个非平凡的定理。

我们简要解释“对偶”的含义，以及为什么对偶模会出现在 $\mathcal{H}$ 中。例如，在上图中，包含 ξ_2 的酉 $\mathbb{V}$-模与包含 η_1 的模互为对偶。作为向量空间，它们互为“分次”对偶空间。（它是完整对偶空间的一个稠密子空间，即由“有限能量”线性泛函组成的子空间。我们将在后续章节中讨论这一点。）在酉共形场论中，所有 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{V}$ 模都是酉的，并且

$\widehat{\Theta}(\mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_i)$ 等价于$\mathbb{W}_i' \otimes \mathbb{W}_i'$ 其中$\mathbb{W}_i'$ 是一个 $\mathbb{V}$-模，与 $\mathbb{W}_i$互为对偶，而$\mathbb{W}_i'$ 一个 $\mathbb{V}$-$\widehat{\ }$模与 $\mathbb{W}_i$互为对偶。对偶模的正式名称是**逆变模**，其严格定义将在第9节给出。

1.15

$\widehat{\ }$让我们更详细地描述一下$\widehat{\Theta}(\mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_i) \simeq \mathbb{W}_i' \otimes \mathbb{W}_i'$ 中的等价关系。

$\widehat{\ }$对于每个 $w_i \otimes \widehat{w}_i \in \mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_i$，向量 $\Theta(w_i \otimes \widehat{w}_i)$ 被视为定义在$\mathbb{W}_i \otimes \widehat{\mathbb{W}}_i$ 上的线性泛函，具体如下。设（显然对称的）双线性形式 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$： $\mathcal{H}^{\otimes 2} \to \mathbb{C}$是标准薄环带$T_{A_{1,\ 1}}$ 的关联函数$A_{1,\ 1}$（具有两个输入且没有输出）。注意，根据（1.8），对于每个 $\xi,\ \nu \in \mathcal{H}$，都有

$$\langle \Theta\xi, \nu \rangle = \langle \xi | \nu \rangle. \tag{1.15}$$

于是， $\Theta(w_i \otimes \widehat{w}_i)$等价于线性泛函

$$\langle \Theta(w_i \otimes \widehat{w}_i), \cdot \rangle = \langle w_i \otimes \widehat{w}_i | \cdot \rangle \tag{1.16}$$

$\widehat{\ }$限制在 $\mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_i$上的线性泛函。

具有 $M+N$个输入的共形块 Φ_Σ： $\mathbb{W}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_{i_N} \otimes \mathbb{W}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_{j_N} \to \mathbb{C}$可以视为具有 N个输入和 M个输出的共形块 Φ_Σ： $\mathbb{W}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_{j_N} \to \mathcal{H}_{i_1}' \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{i_M}'$其中 $\mathcal{H}_{i_k}'$ 是 $\mathbb{W}_{i_k}'$ 的希尔伯特空间完备化，且 $\mathbb{W}_{i_k}'$ 是 $\mathbb{V}$的对偶$\mathbb{W}_{i_k}$-模。利用（1.15），不难证明，对具有输出的共形块取复合，等价于对没有输出的共形块进行缩并。

2 Virasoro关系；边界参数化的变更；弦与穿孔点

2.1

本节的目标是理解与2个标记黎曼球面相关的共形块；等价地说，是带有两条边界弦的亏格为0 的曲面。我们简称它们为**环带**，尽管它们的复结构和边界参数化未必是1.6中所述的标准形式。

我们先来考察一些退化例子，它们的边界参数化未必解析。令 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$ 为 $\mathbb{S}^1$上的保定向微分同胚所构成的拓扑群。对于每个 $g \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$，我们令$A_{1,1}^g$ 表示一个薄环带，其入射弦和出射弦均为 $\mathbb{S}^1$，参数化为

$$\text{Incoming} : z \mapsto z, \qquad \text{Outgoing} : z \mapsto 1/g(z).$$

引理2.1。 如果 $h \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$，那么 $A_{1,\ 1}^{gh}$ 由将 $A_{1,\ 1}^g$ 的入射圆与 $A_{1,\ 1}^h$的出射圆粘合而得到。

证明。由（1.4），点 $z \in A^h_{1,\,1}$ 与 $\zeta \in A^g_{1\,,\,1}$ 粘合，当且仅当 $\zeta \cdot 1/h(z) = 1$, 即 $\zeta = h(z)$。现在，$A^h_{1,\,1}$ 中的点 z 在粘合后变为 $A^g_{1\,,\,1}$ 中的点 $h(z)$，该点由 $A^g_{1\,,\,1}$ 的出射参数化映射到 $1/g(h(z))$。 □

由于我们考虑的是退化环带，这个证明并不严谨。严谨的证明应当是用真正的环带逼近$A^g_{1\,,\,1}$ 和 $A^h_{1,\,1}$，识别缝合后的环带，然后取极限。除非 g和 h 是实解析的（例如旋转），否则这个证明并不容易。不过，我们只需要这个引理来引出下面的讨论。

2.2

因此，我们可以把 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$ 看作乘法为缝合的薄环带群。这个观点的优点在于，它使我们确信，可以将环带半群 Ann 视为 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$的复化。Ann 中的乘法 A_1A_2 是对 A_1, $A_2 \in \mathbf{Ann}$ 进行缝合：利用它们的参数化，将 A_1 的内侧与 A_2 的外侧粘合，从而定义 A_1, A_2。

例如，考虑带有标记点 0，8 和局部坐标 $\eta_0(z) = z$，$\eta_\infty(z) = e^{-\mathbf{i}\tau}/z$,的 $\mathbb{P}^1$，它给出一个对应于旋转 $z \mapsto e^{\mathbf{i}\tau}z$的薄环带，其中 τ为实数。现在将 τ视为复变量 $\tau = s + \mathbf{i}t$。那么出射圆的半径为 e^t。当 $t > 0$时，这就给出一个真正的环带。

设想在1.13 中应扩展为包括以下一点：对于每个环面 $A \in \mathbf{Ann}$，相互作用 T_A：$\mathcal{H} \to \mathcal{H}$（一个传入端和一个传出端）相对于 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}} = \bigoplus_i \mathbb{W}_i \otimes \widehat{\mathbb{W}}_i$ 具有如下形式

$$T_A = \sum_i \pi_i(A) \otimes \hat{\pi}_i(\overline{A}) \tag{2.1}$$

其中，$\pi_i(A)$ 是希尔伯特空间完备化 $\mathcal{H}_i$ 上的有界线性算子，$\hat{\ }$ $\frown\hat{\pi}_i(A)$ 则是完备化 $\overline{\mathcal{H}_i}$上的有界线性算子。(A 是 A的复共轭；参见定义1.2。我们假设 A 的入弦的复共轭是 A的入弦，出弦也有类似的情况。) $\pi_i(A)$ 和 $\hat{\pi}_i(A)$ 的选择在标量乘法意义下是唯一的。如果 A 随某个复变量 $\tau_\bullet$全纯变化，那么在局部范围内，可以选择 $\pi_i(A)$ 和 $\hat{\pi}_i(A)$，使它们分别关于 $\tau_\bullet$和 $\tau_\bullet$全纯变化。最后，如果 $A_1, A_2 \in$ Ann，那么 $\pi_i(A_1A_2)$ 在标量乘法意义下等于 $\pi_i(A_1)\pi_i(A_2)$，而对于 $\hat{\pi}_i$也可以作类似的论述。

也就是说，每个 π_i 都是 **Ann** 在 $\mathcal{H}_i$上的射影表示，而 $\hat{\pi}_i$ 也是其在 $\mathcal{H}_i$上的射影表示。它们应当是 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$的射影酉表示的解析延拓。

我们强调，$\pi_i(A)$ 和 $\hat{\pi}_i(A)$ 分别是与 $\overline{A}$ 和 A 相关联的共形块。粗略地说，π_i 描述了手征部分的共形对称性，而$\hat{\pi}_i$ 描述了反手征部分的共形对称性。A 和 $\overline{A}$ 必须共同作用于整个空间 $\mathcal{H}$。

2.3

因此，对环域的共形场论相互作用的研究归结为对**Ann**的射影表示的研究。我们的目标是用李代数来描述这类表示。

令 $\mathrm{Vec}(\mathbb{S}^1)$ 为 $\mathbb{S}^1$的光滑实向量场所构成的李代数，其元素具有如下形式： $f\partial_\theta$ 其中 ∂_θ 是实直线上的标准单位向量在映射 $\theta \mapsto e^{\mathbf{i}\theta}$下的推前，而 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$。 $f\partial_\theta$ 在 $h \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ 上的作用与通常的作用相反，即$-f(e^{\mathbf{i}\theta}) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} h(e^{\mathbf{i}\theta})$。这是因为，为了符合群乘法的顺序， $g \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$ 在h上的作用应为 $h \circ g^{-1}$。因此， $\mathrm{Vec}(\mathbb{S}^1)$ 中的李括号与通常的李括号相反：

$$[f_1\partial_\theta, f_2\partial_\theta]_{\mathrm{Vec}(\mathbb{S}^1)} = (-f_1\partial_\theta f_2 + f_2\partial_\theta f_1)\partial_\theta. \tag{2.2}$$

2.4

$\mathrm{Vec}(\mathbb{S}^1)$ 的射影酉表示 π 与相应的 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$ 表示 π （若存在）之间的关系如下。（这里，酉是指对每个向量场$f\partial_\theta$，都有 $\pi(f\partial_\theta)^\dagger = -\pi(f\partial_\theta)$，其中 $\dagger$是伴随；若底层内积空间不是柯西完备的，则称为“形式伴随”。）

设 $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto g_t \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$ 是满足$g_0 = \mathbf{1}$的光滑微分同胚族。那么，除加上某个$\mathbf{i}\mathbb{R}$倍的数之外，

$$\frac{d}{dt}\pi(g_t)\Big|_{t=0} = \pi(\partial_t g_0) \tag{2.3}$$

其中 $\partial_t g_0 \in \mathrm{Vec}(\mathbb{S}^1)$ 在 t_0处的导数是由下式确定的向量场：

$$(\partial_t g_0)(h) = \frac{d}{dt}(h \circ g_t)\Big|_{t=0} \tag{2.4}$$

对 $\mathbb{S}^1$上的所有光滑函数 h 均成立。

现在设 $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tf\partial_\theta) \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$是由 $f\partial_\theta \in \mathrm{Vec}(\mathbb{S}^1)$生成的流。因此，它在 $t = 0$处的导数为 $f\partial_\theta$，并且 $\exp((t_1 + t_2)f\partial_\theta) = \exp(t_1 f\partial_\theta) \circ \exp(t_2 f\partial_\theta)$。于是（2.4）表明，除相差一个 $\mathbb{S}^1$倍数外，

$$\pi(\exp(tf\partial_\theta)) = e^{t\pi(f\partial_\theta)}, \tag{2.5}$$

因为 $\pi(\exp(tf\partial_\theta))e^{-t\pi(f\partial_\theta)}$ 的导数是 $\pi(\exp(tf\partial_\theta))(\pi(f\partial_\theta) - \pi(f\partial_\theta))e^{-t\pi(f\partial_\theta)} = 0$。

2.5

维特代数 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}} = \{l_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 是复化 $\mathrm{Vec}(\mathbb{S}^1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$的一个复稠密李子代数。这里，

$$l_n = z^{n+1}\partial_z = -\mathbf{i}e^{\mathbf{i}n\theta}\partial_\theta \tag{2.6}$$

其中 $z = e^{\mathbf{i}\theta}$ 和 $\partial_z = \frac{1}{\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}}\partial_\theta$。（我们使用链式法则来“定义” ∂_z。）可以验证

$$[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n} \tag{2.7}$$

其中的括号与通常的向量场括号互为相反数。

为简单起见，我们假设共形场论是酉的。在分解 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}} = \widehat{\bigoplus_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i}$中，每个 $\mathbb{W}_i$ 都是 π_i 的射影酉表示 $\{l_n\}$，同样地，$\overline{\mathbb{W}}_i$ 是 $\hat{\pi}_i$ 的一个 $\{\overline{l}_n\}$。我们知道，$\pi_i(l_n)$ 的选取在相差一个$\mathrm{i}\mathbb{R}$倍标量加法的意义下是唯一的。下面是关于维特代数射影表示的一个众所周知的事实（例如参见[Was10，第 IV 节。1]）：可以作出 $\pi_i(l_n)$ 的一个特定选取（对每个 n），记作 L_n，使得**Virasoro 关系**

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m+1)m(m-1)\delta_{m,-n} \tag{2.8}$$

成立，并且 $c \in \mathbb{C}$ 被称为**中心荷**。在 π_i 是射影酉的情况下，可以选择 L_n使得$L_n^\dagger = L_{-n}$ 也成立。

我们滥用了记号，将 l_n 在所有 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}_i$ （作为共形场论的手征部分）上的作用都写成 L_n。这样做是合理的，因为正如我们稍后将看到的，l_n 的作用来自 $\mathbb{V}$的作用。具体来说：维拉索罗代数包含于顶点算子代数中。因此，$\{l_n\}$ 在 $\mathbb{W}_i$ 上的作用就是 $\mathbb{V}$的限制。特别地，所有手征部分 $\mathbb{W}_i$共享同一个中心荷 c。

类似地，我们将 $\overline{l}_n$ 在所有 $\overline{\mathbb{W}}_i$ 上的作用写成 $\overline{L}_n$。（$\overline{L}_n$ 上方的横线反映了这样一个事实：$\overline{L}_n$ 描述的是共形场论反手征部分的共形对称性。L_n 与 $\overline{L}_n$并非通过CPT算符 Θ 相关。）对于$\{\overline{L}_n\}$ 而言，中心荷 $\hat{c}$ 与$\overline{\mathbb{W}}_i$ 无关，通常可能不同于 $\{L_n\}$的中心荷 c，尽管在大多数重要情况下二者相等。（例如，当共形场论同时包含闭弦和开弦时。）

2.6

我们将把（2.5）推广到复向量场。首先，考虑一个元素

$$f(z)\partial_z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{n+1}\partial_z$$

其中求和可以是无限的。我们将 $f(z) = \sum_n a_n z^{n+1}$ 视为洛朗级数。现在假设 $f(z)$ 是在邻域 $U \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数 $\mathbb{S}^1$。

$f\partial_z$是 U上的复全纯向量场，将（缩小 U后）给出一个**全纯流** $\tau \in \Delta \mapsto \exp(\tau f\partial_z) \in \mathscr{O}(U)$，其中 $\Delta \subset \mathbb{C}$是 0 的一个邻域。（请回忆记号部分，$\mathscr{O}(U)$是 U上全纯函数的空间。）这意味着：

(1) $(\tau,\ z) \in \Delta \times U \mapsto \exp(\tau f\partial_z)(z)$是全纯的，其在每个切片 $\tau \times U$上的限制都是单射（因此是到其像上的双全纯映射）。

（2）$\exp(0 f\partial_z)(z) = z$。

（3）在包含 $\mathbb{S}^1$的 U 的一个开子集上，$\exp((\tau_1+\tau_2)f\partial_z) = \exp(\tau_1 f\partial_z)\circ\exp(\tau_2 f\partial_z)$。

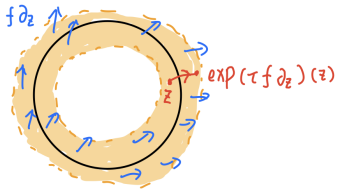
(4) 对于在 U 内的开集上定义的任意全纯函数 h，

$$f\partial_z h = \frac{\partial}{\partial\tau} h\circ\exp(\tau f\partial_z)\Big|_{\tau=0}. \tag{2.9}$$

（参见（2.4）。）该条件等价于

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\exp(\tau f\partial_z)\Big|_{\tau=0} = f. \tag{2.10}$$

（要查看等价性，在一个方向中设为 $h(z) = z$，在另一个方向中使用链式法则。）



注 2.2。需要注意：记号 $f\partial_z$和 $\exp(\tau f\partial_z)$与实数情形中的记号并不兼容。事实上，若假设 τ只取实值 $\tau = t$，那么对（2.10）取实部和虚部，可得 σ_t 是实曲面 U上的实流，由实向量场 $\mathrm{Re}f\cdot\partial_x + \mathrm{Im}f\cdot\partial_y$生成。记 $\partial_x = \partial_z + \partial_z$，$\partial_y = \mathbf{i}(\partial_z - \partial_z)$，可见这个向量场 $f\partial_z$更准确地说应写作 $f\partial_z + f\partial_z$ 其中$f(x) = f(x)$。

这一点也可以由以下事实来证明：如果 k 是反全纯的，那么

$$\overline{f}\partial_{\bar z}k = \frac{\partial}{\partial_{\overline{\tau}}}k\circ\exp(\tau f\partial_z)\Big|_{\tau=0}. \tag{2.11}$$

(证明：在$k = h$（2.10）中取$\exp(\tau f\partial_z)$应写作$\exp(\tau f\partial_z + \tau f\partial_z)$。不过，为了使记号更简洁，我们倾向于省略 $\tau f\partial_z$这一项。

2.7

求得 $\sigma_\tau = \exp(\tau f\partial_z)$ 表达式的一种方法，是求解满足以下初始条件的全纯非线性微分方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_\tau(z) &= f(\sigma_\tau(z)),\\ \sigma_0(z) &= z.\end{aligned} \tag{2.12}$$

这归因于（2.10）以及 $\sigma_{\tau_1+\tau_2} = \sigma_{\tau_1}\circ\sigma_{\tau_2}$。（事实上，全纯流的存在性源于此类方程解的存在性。）

Alte或者，也可以直接用公式计算该流，

$$\begin{aligned}\exp(f\partial_z)(z) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}(f(z)\partial_z)^k z\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}\underbrace{f(z)\partial_z\Big(f(z)\partial_z\big(\cdots f(z)\partial_z}_{k\text{ times}}\, z\big)\cdots\Big).\end{aligned} \tag{2.13}$$

（如果担心收敛问题，可以将此公式视为形式和。）要看出此公式为何成立，只需验证如此定义的 $\exp(\tau f\partial_z)(z) =: \sigma_\tau(z)$ 满足 $\sigma_{\tau_1+\tau_2} = \sigma_{\tau_1}\circ\sigma_{\tau_2}$、$\partial_\tau\sigma_\tau|_{\tau=0} = f$ 和 $\sigma_0(z) = z$。这很容易。

2.8

例 2.3。 $\sigma_\tau(z) = e^\tau z$是由向量场 $l_0 = z\partial_z$ 生成的全纯流，因为 $\frac{\partial}{\partial\tau} e^\tau z|_{\tau=0} = z$。也就是说， —

$$\exp(\tau z\partial_z)(z) = e^\tau z.$$

令 $\lambda = e^\tau$。鉴于 2.1 中的 A_1^g，1，我们考虑双标点球面 $\mathfrak{X} = (\mathbb{P}^1; 0, 8; \zeta, \lambda^{-1}\zeta^{-1})$，其中 ζ： $z \mapsto z$是 $\mathbb{C}$的标准坐标。于是，当 $|\lambda| \leqslant 1$,$\mathfrak{X}$ 定义了一个环带 A（可以是实际环带，也可以是薄环带），其入射圆半径为 1，出射圆半径为 $1/|\lambda|$。因此，与此环带相关联的共形块 $\pi_i(A)$ 是希尔伯特空间完备化 $\mathcal{H}_i$上的线性算子，应为 $e^{\tau L_0} = \lambda^{L_0}$ （将$z\partial_z$ 替换为 L_0）。

容易验证， A同构于由 $(\mathbb{P}^1; 0, 8; \zeta, \lambda^{-1}\zeta^{-1})$所定义的环带。因此，相应的共形块应为 $\widehat{\pi}_i(A) = \lambda^{L_0}$。于是，相互作用映射 T_A： $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 由下式确定：

$$T_A\big|_{\mathcal{H}_i \otimes \widehat{\mathcal{H}}_i} = \lambda^{L_0} \otimes \overline{\lambda}^{\overline{L_0}}. \tag{2.14}$$

在幺正共形场论中， L_0和 L_0（或者更准确地说，它们的闭包）是自伴算子，因此可以定义 λ^{L_0} 和 $\lambda^{\overline{L_0}}$，并且当 $|\lambda| = 1$时它们是酉的。此外，在幺正共形场论中：

假设 2.4 （正能量）。 L_0 和 L_0 的谱均为正（即 $\geqslant 0$）。在这些讲义中，我们主要关注谱为离散的情况。我们将L_0与 $L_0 \otimes \mathbf{1}$ 等同，并将L_0与 $\mathbf{1} \otimes L_0$ 等同，使得 L_0， L_0是作用于 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$ 上具有 $\geqslant 0$特征值的可交换可对角化算子。

现在我们可以解释有限能量的含义：如果 ξ 是 L_0 和 L_0的特征向量的有限和，那么 ξ 的向量 $\mathcal{H}$ 就具有**有限能量**。（一般来说， $\mathcal{H}$ 的向量是特征向量的一个 l^2- 收敛和，可以是有限和，也可以是无限和。）

2.9

例 2.5. 设 $n \neq 0$。为了理解 $e^{\tau L_{-n}}$ 和 $e^{\tau \overline{L_{-n}}}$的几何意义，我们通过求解微分方程 $\sigma_\tau = \exp(\tau z^{-n+1}\partial_z)$来得到 $\partial_\tau \sigma_\tau = (\sigma_\tau)^{-n+1}$，其初始条件为 $\sigma_0(z) = z$ （参见（2.12））。解为

$$\exp(\tau z^{-n+1}\partial_z)(z) = (z^n + n\tau)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.15}$$

□

遗憾的是，这个流并不能给出通常意义上的任何环带。以 $n = 1$ 为例，此时流只是平移 τ。然而，经过微小平移后的圆会与原来的圆相交。因此，不存在出射圆是入射圆平移所得的环带。事实上，在大多数情况下，$\exp(f\partial_z)$ 并不是某个环带的作用。我们必须另寻理解这个算子的途径。

2.10

理解群作用 $G \curvearrowright X$ 有两种方式：（1） $g \in G$ 在 X 上的作用是一种变换。因此，一般而言 $gx \neq x$ 。（2） gx 和 x 是同一元素在不同坐标下的不同表达。坐标变换的规则由 G 的作用给出。我们将采用第二种观点。

设 $\mathfrak{X} = (C;\ x_1, \ldots\ldots, x_N;\ \eta_1, \ldots\ldots, \eta_N)$ 是一个带有 N 个标记点、具有满足假设1.1的局部坐标的紧黎曼曲面。假设采用 2.6中的设定。记 $\sigma_\tau = \exp(\tau f \partial_z)$ 和 $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{n+1}$ 定义在 $U \supset \mathbb{S}^1$ 上。令 $\tau \in \Delta$ 足够接近 0。

注 2.6。如果你想知道“足够接近”的确切含义：对于下文将要讨论的局部坐标 η_i ，我们选择 $\epsilon > 0$ ，使得对所有 $\tau \in \mathbb{D}_\epsilon$， $\sigma_\tau(U \cap \mathrm{Rng}(\eta_i))$ 都包含 $\mathbb{S}^1$ ；其中开集 $\mathrm{Rng}(\eta_i)$ 是 η_i 的值域。

原理 2.7（边界参数化的改变）。假设将处的局部坐标 η_i x_i $\sigma_\tau \circ \eta_i$ $\eta_i^{-1} \circ$ 改为边界 $(\mathbb{S}^1)$ τ $\eta_i^{-1}\big(\sigma_\tau^{-1}(\mathbb{S}^1)\big)$ 参数化，并且边界弦随之逐渐改变（相对于的改变），变为。于是，在共形块和关联函数（不含输出）的表达式中，每个 $w_i \in \mathbb{W}_i$ 都替换为 $e^{\tau\sum_n a_n L_n} w_i$，每个 $\widehat{w}_i \in \widehat{\mathbb{W}}_i$ 都替换为 $e^{\tau\sum a_n L_n}\widehat{w}_i$。

更精确地说，令 $T_\Sigma\colon \mathcal{H}^{\otimes N} \to \mathbb{C}$ 为关联函数，其中 Σ 由 $\mathfrak{X}$ 得到。为简便起见，假设 $i = 1$ 。将局部坐标 η_1 变为 $\sigma_\tau \circ \eta_1$ ，得到一个具有参数化边界 Σ' 的新曲面。那么，除相差一个标量因子外，$T_{\Sigma'}$ 和 T_Σ 满足

$$T_\Sigma(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_N) = T_{\Sigma'}\Big(\big(e^{\tau\sum_n a_n L_n} \otimes e^{\overline{\tau}\sum_n \overline{a_n}\overline{L}_n}\big)\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_N\Big) \tag{2.16}$$

对所有 ξ_1，……，ξ_N 均成立。类似地，若 $\Phi_\Sigma\colon \mathbb{W}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_{i_N} \to \mathbb{C}$ 是 Σ 的一个共形块，则由下式定义的 $\Phi_{\Sigma'}$

$$\Phi_\Sigma(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_N) = \Phi_{\Sigma'}\big(e^{\tau\sum_n a_n L_n} w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_N\big) \tag{2.17}$$

是 Σ' 的一个共形块。

2.11

上述小节中的几何直观如下： ξ_1 在 η_1-参数化下与 $(e^{\tau\sum_n a_n L_n} \otimes e^{\tau\sum_n a_n \cdot L_n})\xi_1$ $\sigma_\tau \circ \eta_1$ $\widetilde{\xi}_1$ 在-参数化下是同一个向量（相差一个标量倍数）。我们将这个相同的“抽象”向量称为，其中 $\widetilde{\ }$ 在相差一个标量倍数的意义下是唯一的。我们记作 $\xi_1 = (\mathcal{U}(\eta_1) \otimes \mathcal{U}(\eta_1^*))\xi_1$，并将 $\mathcal{U}(\eta_1) \otimes \mathcal{U}(\eta_1^*)$ 理解为将一个抽象向量映射为其在边界参数化 η_1 下的具体表达式的映射。也就是说， $\mathcal{U}(\eta_1) \otimes \mathcal{U}(\eta_1^*)$ 是一个向量丛平凡化。从 η_1-参数化到 $\sigma_\tau \circ \eta_1$-参数化的过渡函数为

$$\big(\mathcal{U}(\sigma_\tau \circ \eta_1) \otimes \mathcal{U}((\sigma_\tau \circ \eta_1)^*)\big)\big(\mathcal{U}(\eta_1) \otimes \mathcal{U}(\eta_1^*)\big)^{-1} = e^{\tau\sum_n a_n L_n} \otimes e^{\overline{\tau}\sum_n \overline{a_n}\cdot\overline{L}_n}. \tag{2.18}$$

我们有一个与参数化无关的 T（更准确地说，是与参数化的微小变化无关的对象），其在具体边界参数化下的表达式为（相差标量乘法）。

$$
\begin{aligned}
T(\widetilde{\xi}_1 \otimes \cdots) &= T_\Sigma\Big(\big(\mathcal{U}(\eta_1) \otimes \mathcal{U}(\eta_1^*)\big)^{-1}\widetilde{\xi}_1 \otimes \cdots\Big) \\
&= T_{\Sigma'}\Big(\big(\mathcal{U}(\sigma_\tau \circ \eta_1) \otimes \mathcal{U}((\sigma_\tau \circ \eta_1)^*)\big)^{-1}\widetilde{\xi}_1 \otimes \cdots\Big).
\end{aligned}
$$

2.12

让我们举个例子，看看参数化变换公式如何发挥作用。

例 2.8。 设 $\mathfrak{X} = (\mathbb{P}^1;\ 1/3, \infty;\ 2(\zeta - 1/3), \zeta^{-1})$ 其中 ζ：$z \mapsto z$ 是 $\mathbb{C}$的标准坐标。我们选取 $1/3$ 作为输入点，8 作为出射点。相应的边界参数化曲面 Σ 是一个环带，其入射圆 $\{z$：$|2(z-1/3)| = 1\}$ 的中心为 $1/3$，半径为 $1/2$,，而其出射圆为 $\mathbb{S}^1$。让我们求出 T_Σ：$\mathcal{H} \to \mathcal{H}$的表达式。

我们知道，标准薄环带的映射

$A_{1\,1}$ $T_{A_{1\,1}} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ $\underline{\mathfrak{X}}_1 =$, 为 . 。设 ; ; , ，它给 $(\mathbb{P}^1\ 0, \infty\ 2\zeta\ \zeta^{-1})$ Σ_1 $\frac{1}{2}\mathbb{S}^1$ 出一个具有入射弦和出射弦的环带$\mathbb{S}^1$。$A_{1,\ 1}$ 通过将入射边界参数化 Σ_1 变换为 ζ，变为 2ζ。根据例 2.3， $2\zeta = \exp(\log 2 \cdot z\partial_z)$。因此，由于 $e^{\log 2L_0} = 2^{L_0}$ 类似地 $e^{\log 2L_0} = 2^{L_0}$，根据（2.16），T_{Σ_1} 可以是 $(1/2)^{L_0} \otimes (1/2)^{L_0}$。

Σ_1 变为 Σ 通过加上 2ζ 乘以 $-2/3$。根据例 2.5，$\exp(-2/3\partial_z)(z) = z - 2/3$。因此，除相差一个标量乘法外， $T_{\Sigma_1}(\xi) = T_\Sigma((e^{-\frac{2}{3}L_{-1}} \otimes e^{-\frac{2}{3}L_{-1}})\xi)$。所以，答案是

$$
T_\Sigma = \big((1/2)^{L_0} \otimes (1/2)^{\overline{L}_0}\big) \cdot \big((e^{\frac{2}{3}L_{-1}} \otimes e^{\frac{2}{3}\overline{L}_{-1}})\big) = \big((1/2)^{L_0} e^{\frac{2}{3}L_{-1}}\big) \otimes \big((1/2)^{\overline{L}_0} e^{\frac{2}{3}\overline{L}_{-1}}\big).
$$

$(1/2)^{L_0} e^{\frac{2}{3}L_{-1}}$是 Σ 的一个共形块。 □

2.13

涉及某些出射弦时， T_Σ （因而 Φ_Σ）的参数化变换公式是什么？回顾小节 1.15，关联函数$T_{A_{1,\ 1}}$：$\mathcal{H}^{\otimes 2} \to \mathbb{C}$ 是一个对称双线性型 $\langle \xi,\ \nu\rangle = \langle \nu,\ \xi\rangle = \langle \Theta\nu|\xi\rangle$。相对于此形式，我们实际上有

$$
(L_n \otimes \mathbf{1})^{\mathrm{t}} = L_{-n} \otimes \mathbf{1}, \qquad (\mathbf{1} \otimes \overline{L}_n)^{\mathrm{t}} = \mathbf{1} \otimes \overline{L}_{-n}. \tag{2.19}
$$

更精确地说，对于每个 ξ，$\nu \in \mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$，我们有

$$
\langle (L_n \otimes \mathbf{1})\xi, \nu\rangle = \langle \xi, (L_{-n} \otimes \mathbf{1})\nu\rangle
$$

以及关于 L_n 的类似关系。将上述关系改写为关于 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的形式，我们得到 $\langle \Theta(L_n \otimes \mathbf{1})\xi|\nu\rangle = \langle \Theta\xi|(L_{-n} \otimes \mathbf{1})\nu\rangle$。再注意到酉性 $L_n^\dagger = L_{-n}$，便可得出

$$
\Theta(L_n \otimes \mathbf{1}) = (L_n \otimes \mathbf{1})\Theta, \qquad \Theta(\mathbf{1} \otimes \overline{L}_n) = (\mathbf{1} \otimes \overline{L}_n)\Theta. \tag{2.20}
$$

这些关系确实严格成立，而不仅仅是在相差一个标量加法或乘法的意义下成立。

由此可见，对于具有 $N-1$ 个输入和 1 个输出的映射 T_Σ，$T_{\Sigma'}$：$\mathcal{H}^{\otimes(N-1)} \to \mathcal{H}$

$$T_\Sigma = \left(e^{\tau \sum_n a_n L_{-n}} \otimes e^{\overline{\tau} \sum_n \overline{a_n} \overline{L}_{-n}}\right) \circ T_{\Sigma'}. \tag{2.21}$$

你可以很容易地将这个公式推广到具有多个输出的情形。

证明。设 $\xi_\bullet \in \mathcal{H}^{\otimes(N-1)}$ 和 $\nu \in \mathcal{H}$。根据（1.8），对于 Σ 和 Σ' 的关联函数（具有 N 个输入且没有输出）分别为 $\langle \Theta \cdot | T_\Sigma \cdot \rangle$ 和 $\langle \Theta \cdot | T_{\Sigma'} \cdot \rangle$。因此根据（2.16），

$$\begin{aligned}
&\langle \Theta\nu | T_\Sigma(\xi_\bullet)\rangle = \langle \Theta(e^{\tau \sum_n a_n L_n} \otimes e^{\overline{\tau} \sum_n \overline{a_n} \overline{L}_n})\nu | T_{\Sigma'}(\xi_\bullet)\rangle \\
\overset{(2.20)}{=\!=\!=}&\langle (e^{\overline{\tau} \sum_n \overline{a_n} L_n} \otimes e^{\tau \sum_n a_n \overline{L}_n})\Theta\nu | T_{\Sigma'}(\xi_\bullet)\rangle \\
\overset{\text{unitarity}}{=\!=\!=\!=}&\langle \Theta\nu | (e^{\tau \sum_n a_n L_{-n}} \otimes e^{\overline{\tau} \sum_n \overline{a_n} \overline{L}_{-n}}) T_{\Sigma'}(\xi_\bullet)\rangle.
\end{aligned}$$

□

练习 2.9。证明例 2.3 中的公式（2.14）可由（2.21）推出。

2.14

如果你想知道为什么是 $(L_{-n} \otimes \mathbf{1}) = (L_n \otimes \mathbf{1})^{\mathrm{t}}$，下面给出一个几何解释；在此解释中，我们暂且忽略相差标量加法或乘法所导致的唯一性问题。

证明。令 $\mathfrak{X} = (\mathbb{P}^1; 0, \infty; z, z^{-1})$，其中 z 是 $\mathbb{C}$的标准坐标，它给出标准薄环带 $A_{1,1}$。假设两条弦都是入射的。我们知道关联函数为 $\langle \xi, \nu \rangle$，其中假设 ξ 与绕 0 的弦相关联，而ν 与绕 ∞ 的弦相关联。

将局部坐标 z 在 0 处改为 σ_τ，并保持 $\mathfrak{X}$的其他数据不变。这会将$A_{1,1}$ 变为一个新的奇异环带 A。根据（2.16），A 的关联函数为

$$T_A(\xi \otimes \nu) = \langle (e^{-\tau \sum_n a_n L_n} \otimes e^{-\overline{\tau} \sum_n \overline{a_n} \cdot \overline{L}_n})\xi, \nu \rangle.$$

注意，若令 $\zeta = \sigma_\tau(z)$，则 $z^{-1} = 1/\sigma_\tau^{-1}(\zeta),$，根据流的定义，它等于 $1/\sigma_{-\tau}(\zeta)$。也就是说，A 等价于这样一个奇异环带：其入射边界参数化为 z，出射边界参数化为 $1/\sigma_{-\tau}(z)$。为计算采用此边界参数化时的关联函数，注意到 ∞ 处原来的 $1/z$ 变为$1/\sigma_{-\tau}(z)$。因此，若令 $\gamma_\tau(z) = 1/\sigma_{-\tau}(1/z)$，其中它是由某个 $\sum_n b_n z^{n+1}$生成的全纯流，则 T_A 的表达式为

$$T_A(\xi \otimes \nu) = \langle \xi, (e^{-\tau \sum_n b_n L_n} \otimes e^{-\overline{\tau} \sum_n \overline{b_n} \cdot \overline{L}_n})\nu \rangle.$$

对于 T_A 的两个表达式，我们在 $\tau = 0$ 处对其取全纯导数 $-\partial_\tau$，得到

$$\sum a_n \langle (L_n \otimes \mathbf{1})\xi, \nu \rangle = \sum b_n \langle \xi, (L_n \otimes \mathbf{1})\nu \rangle.$$

要完成证明，只需证明 $b_n = a_{-n}$。

回忆一下 $\sum a_n z^{n+1} = \partial_\tau \sigma_\tau|_{\tau=0}$。类似地，$\sum b_n z^{n+1} = \partial_\tau \gamma_\tau|_{\tau=0}$，它是

$$\begin{aligned}\partial_\tau (1/\sigma_{-\tau}(1/z))\big|_{\tau=0} &= -\frac{1}{\sigma_0(1/z)^2}\cdot \partial_\tau(\sigma_{-\tau}(1/z))\big|_{\tau=0}\\ =z^2\cdot \sum a_n (1/z)^{n+1} &= \sum a_n z^{-n+1} = \sum a_{-n} z^{n+1}.\end{aligned}$$

□

2.15

作为参数化变换公式的一个简单应用，我们能够描述映射 T_A : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$，对于由($\mathbb{P}^1$得到的解析环带 $A \in$ **环带** 而言；0，8；η_0，η_∞)，其中 η_0 和 η_∞ 分别是 0，8 处的局部坐标。设 $\varpi = 1/z$。可以写成

$$\eta_0(z) = \exp\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^{n+1}\partial_z\Big)(z), \qquad \eta_\infty(\varpi) = \exp\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \varpi^{n+1}\partial_\varpi\Big)(\varpi),$$

其中系数 a_n，b_n 可以利用（2.13）确定。（我们以后会进一步讨论如何确定这些系数。）当 A 是标准薄环带（即，当 η_0 : $z \mapsto z$，η_∞ : $z \mapsto z^{-1}$时），我们知道 $T_A = \mathbf{1}$。因此，一般而言，根据（2.16）和（2.19），映射 T_A（相差标量乘法）

$$T_A = \Big(e^{\sum_{n\in\mathbb{N}} -b_n L_{-n}} \otimes e^{\sum_{n\in\mathbb{N}} -\overline{b_n}\cdot\overline{L}_{-n}}\Big)\cdot\Big(e^{\sum_{n\in\mathbb{N}} -a_n L_n} \otimes e^{\sum_{n\in\mathbb{N}} -\overline{a_n}\cdot\overline{L}_n}\Big).$$

之所以只涉及 $n \in \mathbb{N}$，是因为 η_0 和 η_∞ 可以在 0 附近定义，并且将 0 映到 0。事实上，对于 $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{n+1}$，假设 $\exp(\tau f\partial_z)(z)$ 在 0 附近有定义，并且对所有足够小的 τ 都将 0 映到 0。那么它在 $z = 0$ 处关于 τ 的导数，即根据 (2.14) 为 $f(\exp(\tau f\partial_z)(0)) = f(0)$，也应当为 0。因此，$f$ 必定具有 $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+1}$ 的形式。

2.16

我们一般将 2.10 和 2.11**称为边界参数化的变化，**而将 2.15**称为局部坐标的变化**。前者包含后者。

改变边界参数化时，标准坐标 z 可以变为 σ_τ（不一定在 0 处有定义），或者更一般地，一个 N 点 $\mathfrak{X} = (C$ 的局部坐标（例如）η_1；$x_\bullet$；$\eta_\bullet)$ 会变为 $\sigma_\tau \circ \eta_1$。这会使边界参数化的黎曼曲面 Σ 变为 Σ'。请注意，这一过程并不违反我们在 1.2 中对解析边界参数化的定义：新曲面 Σ' 是由一个新的 N 点对象 $\mathfrak{X}' = (C'$；$x_\bullet$；$\sigma_\tau \circ \eta_1$，η_1，……，$\eta_N)$ 得到的，其中 C' 是一个新的紧黎曼曲面，它由 Σ 与 N 个单位圆盘片段 $\mathbb{D}_1$ 粘合而成，所用映射为 $\sigma_\tau \circ \eta_1$、η_2、……、η_N。（如果改用映射 η_1、……、η_N，得到的只是 C。）因此，一般而言，改变边界参数化可能会改变底层紧黎曼曲面 C。更多细节将在例 13.6 和 13.7 中给出。

坐标变换是指 $\mathfrak{x}$ 变为 $\mathfrak{x}' = (C;\ x_\bullet;\ \eta'_\bullet)$ 底层紧黎曼曲面 C 及标记点均与原来相同 $x_\bullet$，但这些标记点处的局部坐标不同。如2.15所述，在这一过程中，只涉及 L_0、L_1、L_2、.....（以及L_0、L_1、L_2、.....），而改变边界参数化时，则会涉及所有 L_n。

在前面的讨论中，几乎所有公式都只在相差标量乘法或加法的意义下成立。然而，当只涉及 L_{-1}，L_0，L_1，L_2，.....时，相互作用映射T_Σ 确实可以选取得使所有公式严格成立，而不只是相差标量乘法或加法。这是因为共形反常源于 Virasoro 关系（2.8）中的中心项$c\cdot(m^3-m)\delta_{m,\ -n}/12$，当 $m,\ n\geqslant -1$时，该中心项为零。注意，L_{-1} 负责平移。因此：

原理 2.10. T_Σ 可以选取得在改变局部坐标，或相对于标记点 x_i 的局部坐标平移该点时，不存在歧义 $\eta_{i\circ}$

更准确地说：固定一个紧黎曼曲面 C。那么，对于每一种由 N个标记点 $x_\bullet$ 和局部坐标 $\eta_\bullet$构成的选择，我们都可以选取与边界参数化曲面 $\mathfrak{x}=(C;\ x_\bullet;\ \eta_\bullet)$相关联的关联函数 $T_\mathfrak{x}:\mathcal{H}^{\otimes N}\to\mathbb{C}$，使得

- 对于另一种选择的 N点化 $\mathfrak{x}'=(C;\ x_\bullet;\ \eta'_\bullet)$ 它们具有相同的标记点，但局部坐标不同 $\eta'_\bullet$，$T_\mathfrak{x}$ 并且 $T_{\mathfrak{x}'}$ 之间的关系为（2.16）。
- 若 $\mathfrak{x}'=(C;\ x'_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N;\ \eta'_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_N)$ 其中 $\eta'_1=\eta_1-\eta_1(x'_1)$，且若 x'_1 位于以 U_1 为中心的开圆盘内，x_1 在该圆盘上 η_1 是全纯定义的（更准确地说，这意味着 $\eta_1(U_1)$ 是以 $\eta_1(x_1)=0$为中心的开圆盘），那么 $T_\mathfrak{x}$ 和 $T_{\mathfrak{x}'}$ 之间满足关系（2.16），即（注意到对于2.15）$n=1$)

$$T_\mathfrak{x}(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_N)=T_{\mathfrak{x}'}\Big(\big(e^{-\eta_1(x'_1)L_{-1}}\otimes e^{-\overline{\eta_1(x'_1)}\cdot\overline{L}_{-1}}\big)\xi_1\otimes\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_N\Big).\tag{2.22}$$

当 $T_\mathfrak{x}$ 具有出射弦时，类似的原理也成立。 □

回顾2.11中描述的几何图景。我们看到，在改变局部坐标时，2.11中的所有结论都确实成立，而不仅仅是在标量乘法意义下成立。特别是，~抽象向量 ξ_1 仅允许改变局部坐标时，它是唯一确定的。

2.17

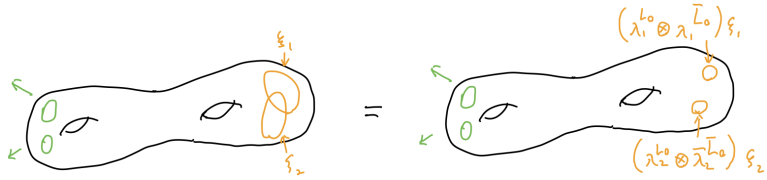
假设 2.11。当我们将^仅有限能量向量（即，属于 $\mathbb{W}_i\otimes\mathbb{W}_i$的 $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$等向量）与入射弦关联时，我们不再要求入射弦满足1.1 。取而代之的是，我们只假设这些（互不相同的）入射点位于出射弦的外侧。

在本课程中，我们主要关注有限能量向量。因此，我们不假设每个 $\eta_i(U_i)$ 都包含 $\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$，也不假设对于不同的 i 和 j，U_i 与 U_j 彼此不相交。在后一种情况下，两个边界弦 $\eta_i^{-1}(\mathbb{S}^1)$ 和 $\eta_j^{-1}(\mathbb{S}^1)$ 可能会重叠。这幅图究竟意味着什么?

请注意，将 η_i 乘以 $\lambda\eta_i$ 相当于将弦 $\eta_i^{-1}(\mathbb{S}^1)$ 的大小缩小 $|\lambda|$，然后旋转该弦。如果 $\lambda > 0$，那么就只有缩小而没有旋转。因此，对于一个局部坐标 N 点标记的 $\mathfrak{X} = (C;\ x_\bullet;\ \eta_\bullet)$，我们可以找到绝对值足够大的 λ_1、……、$\lambda_N \in \mathbb{C}^\times$，使得新数据 $\mathfrak{X}' = (C;\ x_\bullet;\ \lambda_1\eta_1$、……、$\lambda_N\eta_N)$ 满足假设 1.1。于是，对于有限能量向量 ξ_1、……、$\xi_N \in \mathcal{H}^{\mathrm{fin}} = \bigoplus_i \mathbb{W}_i \otimes \widehat{\mathbb{W}}_i$，$T_{\mathfrak{X}}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N)$ 被理解为

$$T_{\mathfrak{X}}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N) := T_{\mathfrak{X}'}\Big((\lambda_1^{L_0} \otimes \overline{\lambda_1}^{\overline{L}_0})\xi_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda_N^{L_0} \otimes \overline{\lambda_N}^{\overline{L}_0})\xi_N\Big). \tag{2.23}$$

这个定义与选取充分大的 λ_1、……、λ_N无关。而且每个$\lambda_j^{L_0} \otimes \lambda_j^{\ L_0}$ 都在 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$ 上按对角方式作用，因为 $L_0 \otimes L_0$ 也是如此。（回顾假设 2.4。）



按照上一小节的思路，你应将有限能量向量ξ_j 和 $(\lambda_j^{L_0} \otimes \lambda_j^{\ L_0})\xi_j$ 视为同一向量 ξ_j的两种坐标表示，而不是两个不同的向量。当 $|\lambda_j|$ 变得无限大时，ξ_j 的弦收缩为围绕 x_j 的无穷小弦，即作为一个**穿孔**收缩到 x_j。将这个不与任何特定弦相关联、而是与该穿孔 x_j 相关联的抽象有限能量向量 ξ_j 视为这样的对象非常有用。因此，$\mathfrak{X}$ 的标记点 $x_\bullet$ 也称为穿孔点。

注记 2.12。附带说明：当我们进行局部坐标变换时，有限能量向量会变为有限能量向量。

因此，在上述讨论中，我们不必拘泥于形如 $\eta_j \mapsto \lambda_j\eta_j$ 的坐标变换：任何局部坐标变换都是有效的。我们将在后面的章节中证明上述断言。

2.18

让我们选择 $\mathbb{W}_i \otimes \widehat{\mathbb{W}}_i$ 在 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$内。根据假设2.4，$\widehat{\ }$可对角化算子 L_0（在 $\mathbb{W}_i$上）和L_0（在 $\mathbb{W}_i$上）的特征值为 $\geqslant 0$。现在选择特征向量 $w \in \mathbb{W}_i$ 和 $\widehat{w} \in \mathbb{W}_i$，使得 $L_0 w = \Delta w$，$L_0\widehat{w} = \Delta\widehat{w}$ 其中 Δ，$\Delta \geqslant 0$。

关于这两个特征值，有一点很重要：它们不一定是整数，这意味着 $\lambda^{L_0}w$ 和 $\lambda^{L_0}\widehat{w}$ 可能会关于 λ呈现多值性，也就是说，它们可能还取决于辐角的取值方式 $\arg\lambda$。然而，根据无歧义原理2.10，表达式

$$(\lambda^{L_0} \otimes \lambda^{\overline{L}_0})(w \otimes \widehat{w}) = \lambda^{\Delta}\overline{\lambda}^{\hat{\Delta}} \cdot w \otimes \widehat{w}$$

关于 λ 必须是单值的，也就是说，它不依赖于 $\arg\lambda$ 的取值方式。由于 $\widehat{\lambda} = |\lambda| e^{\mathbf{i}\arg\lambda}$，因此 $\lambda^{\Delta}\widehat{\lambda}^{\widehat{\Delta}} = |\lambda|^{\Delta+\widehat{\Delta}} e^{\mathbf{i}(\Delta-\widehat{\Delta})\overline{\arg}\lambda}$，我们得出

$$\Delta - \widehat{\Delta} \in \mathbb{Z}. \tag{2.24}$$

这对 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$ 可能具有的 $\mathbb{V}\otimes\widehat{\mathbb{V}}$-子模施加了约束。

这 $\lambda^{L_0}w$ 可能是多值的，这是共形场论中的一个关键性质，与共形反常无关。事实上，它与将 T_Σ 分解为共形块时的不唯一性有关。因此，无歧义原理 *2.10* 不适用于共形块。

3 顶点算子代数的定义，I

3.1

我们首先给出顶点算子代数的严格定义，以及一个稍弱的版本——分次顶点代数。然后我们解释公理的含义。

定义 3.1. 分次顶点代数是一个（复）向量空间 $\mathbb{V}$，连同一个作用于 $\mathbb{V}$ 上的可对角化算子 L_0，其特征值均属于 $\mathbb{N}$。我们将 $\mathbb{V}$ 的 L_0-分次记为 $\mathbb{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{V}(n)$。（注意：从第 11 节开始，我们将假设所有 $\mathbb{V}(n)$ 都是有限维的。） L_0 的任意特征向量 v（包括 0）都称为（L_0）-齐次的，并且如果 $v\in\mathbb{V}(n)$（即 $L_0v = nv$），我们记作 $\mathrm{wt}v = n$，并称 $\mathrm{wt}v$ 为 v 的权。此外，我们有一个线性映射

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &\to \big(\mathrm{End}(\mathbb{V})\big)[[z^{\pm1}]] \\ u &\mapsto Y(u,z) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} Y(u)_n z^{-n-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中每个 $Y(u)_n \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ 称为一个 **（傅里叶）模**。这里，z 被视为一个形式变量。因此 $Y(u,z)v \in \mathbb{V}[[z^{\pm1}]]$ 对每个 $v\in\mathbb{V}$。将 z^{-n-1} 与 $Y(u)_n$ 关联起来的原因是，我们本可以（回想一下（0.2））

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, Y(u,z)z^n dz = Y(u)_n. \tag{3.2}$$

$Y(u,\ z)$ 称为一个**顶点算子**。

此外，还满足以下公理：

- 存在一个特殊向量 $\mathbf{1}\in\mathbb{V}(0)$，称为 **真空向量**，满足

$$Y(\mathbf{1},z) = \mathbf{1}_{\mathbb{V}}.$$

即 $Y(\mathbf{1})_{-1} = \mathbf{1}_{\mathbb{V}}$ 和 $Y(\mathbf{1})_n = 0$，如果 $n\neq -1$。

- **创生性质**：对于每个 $v\in\mathbb{V}, Y(v,\ z)\mathbf{1} = v + \bullet z + \bullet z^2 + \cdots$ 其中每个 $\bullet$ 都属于$\mathbb{V}$。也就是说，

$$Y(v)_{-1}\mathbf{1} = v, \tag{3.3}$$

并且对所有 $n > -1$ 都有 $Y(v)_n\mathbf{1} = 0$。此性质简称为

$$\lim_{z\to0} Y(v,z)\mathbf{1} = v.$$

- **分次性质**：对于每个 $v \in \mathbb{V}$,

$$[L_0, Y(v,z)] = Y(L_0 v, z) + z\frac{d}{dz}Y(v,z). \tag{3.4}$$

- **平移性质**：存在一个特殊的线性算子 L_{-1} 作用于 $\mathbb{V}$，使得

$$L_{-1}\mathbf{1} = 0, \tag{3.5}$$

并且对于每个 $v \in \mathbb{V}$,

$$[L_{-1}, Y(v,z)] = \frac{d}{dz}Y(v,z). \tag{3.6}$$

- **雅可比恒等式**：这是最关键但也最复杂的公理。我们将推迟到下一节再定义它。（参见定义 4.5。）

如果 $\mathbb{V}$ 是一个**顶点算子代数**（VOA），那么 L_0, L_{-1} 可以扩展为一列线性算子 $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 作用于 $\mathbb{V}$，并满足某个中心荷 $c \in \mathbb{C}$下的 Virasoro 关系（2.8），且存在一个特殊向量 $\mathbf{c} \in \mathbb{V}$，称为**共形向量**，使得

$$Y(\mathbf{c})_n = L_{n-1}, \tag{3.7}$$

或者等价地,

$$Y(\mathbf{c}, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}. \tag{3.8}$$

□

你可能会想，为什么（3.7）右边不是 L_n 或 L_{n-a}，其中$a \neq 1$是某个常数。事实上，如果它不是 L_{n-1}，那么 Virasoro 关系就会与雅可比恒等式不相容。定义雅可比恒等式后，我们将对此作更详细的解释。（参见习题 5.4。）

提醒读者注意，我们对分次顶点代数和顶点算子代数的定义略强于顶点算子代数文献中的通常定义；通常的定义并不要求 L_0 具有非负特征值。这一正性条件 $L_0 \geqslant 0$ 非常宽松，且大多数有趣的例子都满足，包括所有酉例子。由于假设这一条件会使证明更简单，我们将其保留在定义中。

此外，在大多数有趣的情形下，每个 $\mathbb{V}(n)$ 都是有限维的。我们在此处的顶点算子代数定义中不包含这一点，但从第 11节起，我们将假设这一事实。

大多数顶点算子代数教材和论文都用 ω 或 ν 表示共形向量$\mathbf{c}$。在我们的讲义中，ω 和 ν 另有用途，因此为避免记号冲突，它们不表示共形向量。

我们为何应假设 $\sum L_n z^{-n-2}$ 可以写成 $Y(\mathbf{c}\ z)$，其中$\mathbf{c} \in \mathbb{V}$，本节暂不解释。我们将在第 5.4小节中对此进行解释。

存在一种**酉顶点算子代数**的概念，本课程不会对其进行定义（尽管我们的动机主要来源于酉共形场论）。有关详细信息，请读者参阅 [CKLW18、DL14]。

3.2

在说明这些公理的动机之前，我们先推导一些有用的事实。

展开级数（3.4），并取每个 z^{-n-1} 前的系数。这给出了分次性质的以下等价形式：

$$[L_0, Y(v)_n] = Y(L_0 v)_n - (n+1)Y(v)_n. \tag{3.9}$$

更具体地，假设 v 是齐次的，则

$$[L_0, Y(v)_n] = (\mathrm{wt}v - n - 1)Y(v)_n. \tag{3.10}$$

也就是说： $Y(v)_n$ 将权提高 $\mathrm{wt}v-n-1$。请注意，在顶点算子代数理论中，当 n 足够负时， $Y(v)_n$ 会提高权；而当 n 足够正时，则会降低权。作为一个相关事实，当

$$[L_0, L_n] = -nL_n \tag{3.11}$$

根据 Virasoro 关系（2.8）， L_{-n} 将权提高（相应地， L_n 将权降低） n。

备注 **第 3.2 节**。作为（3.11）的一个应用，我们计算 $L_n\mathbf{c}$ 当 $n \geqslant 0$时。由于 $\mathbf{e}$

$$\mathbf{c} = Y(\mathbf{c})_{-1}\mathbf{1} = L_{-2}\mathbf{1}, \tag{3.12}$$

并且由于 L_{-2} 使权提高 2，我们看到

$$L_0\mathbf{c} = 2\mathbf{c}. \tag{3.13}$$

根据 $[L_1, L_{-2}] = 3L_{-1}$, $[L_2, L_{-2}] = 4L_0 + \frac{1}{2}c$，并且当 $n > 0$时有 $L_n\mathbf{1} = 0$（因为其权为 < 0），我们得到

$$L_1\mathbf{c} = 0, \qquad L_2\mathbf{c} = \frac{c}{2}\mathbf{1}. \tag{3.14}$$

3.3

根据（3.10），对于每个 u, $v \in \mathbb{V}$，我们知道 $Y(u)_n v$ 当 n 足够大时会消失。等价地，我们有

$$Y(u,z)v \in \mathbb{C}((z)). \tag{3.15}$$

这个重要事实称为**下截断性质**。它使我们能够利用亚纯函数研究顶点算子代数。

在分次顶点代数的定义中，如果将分次性质替换为下截断性质，并且特别是不引入可对角化的 L_0，那么 $\mathbb{V}$ 就称为 **顶点代数**。我们不会在笔记中讨论这一最一般的概念。

3.4

我们令

$$\mathbb{V}' = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(n)^*$$

其中 $\mathbb{V}(n)^*$ 是 $\mathbb{V}$的对偶空间。 $\mathbb{V}'$ 称为 $\mathbb{V}$的**分次对偶空间**。我们令L_0 作用于 $\mathbb{V}'$，使得当 $v' \in \mathbb{V}(n)$*时， $L_0v' = nv'$。于是 $L_0^{\mathrm{t}} = L_0$。和之前一样， $\mathbb{V}'$ 的**齐次**向量要么为 0，要么是 L_0的特征向量。根据定义，显然当 $m \neq n$时， $\mathbb{V}'(m) = \mathbb{V}(m)^*$ 与 $\mathbb{V}(n)$ 之间的求值为零。

命题 3.3。 对于每个 u、 $v \in \mathbb{V}$、 $v' \in \mathbb{V}'$、 $\langle v'$、 $Y(u$、 $z)v\rangle$: $= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle v'$、 $Y(u)_n v\rangle z^{-n-1}$ 是关于 z的劳朗多项式，即

$$\langle v', Y(u,z)v\rangle \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}].$$

因此，在**有限能量向量**（即 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{V}'$的向量）之间求值时，$Y(u,\ z)$ 不仅是形式级数，而且是关于 $\mathbb{P}^1$ 的亚纯函数，其极点位于 0，8。

证明。 我们必须证明 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle v', Y(u)_n v\rangle z^{-n-1}$ 是有限和。由线性性，只需假设 u, v, v' 是齐次的。于是 $Y(u)_n v$ 是齐次的，其权为 $\mathrm{wt}u + \mathrm{wt}v - n - 1$。因此，只有当 $\mathrm{wt}v' = \mathrm{wt}u + \mathrm{wt}v - n - 1$时， $\langle v', Y(u)_n v\rangle$ 才非零。所以

$$\langle v', Y(u,z)v\rangle = \langle v', Y(u)_{\mathrm{wt}u+\mathrm{wt}v-\mathrm{wt}v'-1}\cdot v\rangle \cdot z^{\mathrm{wt}v'-\mathrm{wt}u-\mathrm{wt}v}.$$

□

注 3.4。 现在可以从解析意义上理解公式 $\lim_{z\to 0} Y(u,z)\mathbf{1}$： 根据创生性质，对于每个 $v' \in \mathbb{V}, \langle v', Y(u,z)\mathbf{1}\rangle$都是 z 的多项式，因为它不含负幂 z。所以

$$\lim_{z\to 0}\langle v', Y(u,z)\mathbf{1}\rangle = \langle v', u\rangle \tag{3.16}$$

其中左边是一个多项式函数的极限。

3.5

分次性质和平移性质以“导数形式”给出。我们将以积分形式来呈现它们。为此做准备，我们引入

$$\mathbb{V}^{\mathrm{cl}} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(n) = \big\{(v_0, v_1, v_2, \dots) : v_n \in \mathbb{V}(n)\big\}, \tag{3.17}$$

称为 $\mathbb{V}$ 的**代数完备化** 。 $\mathbb{V}^{\mathrm{cl}}$ 自然是 $\mathbb{V}'$ 的对偶空间 $(\mathbb{V}')^*$的一个子空间。（事实上，我们主要关注每个 $\mathbb{V}(n)$ 都是有限维的情形。在这种情况下，很容易验证 $\mathbb{V}^{\mathrm{cl}} = (\mathbb{V}')^*$。）我们令

$$P_n : \mathbb{V}^{\mathrm{cl}} \to \mathbb{V}(n), \qquad (v_0, v_1, v_2, \dots) \mapsto v_n \tag{3.18}$$

为到第 n 个分量的典范投影。于是，对于每个 $z \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$，我们有

$$Y(u,z)v \in \mathbb{V}^{\mathrm{cl}}$$

其在 $\mathbb{V}(\mathsf{wt}u + \mathsf{wt}v - n - 1)$ 上的投影为 $Y(u)_n v \cdot z^{-n-1}$。

注意， L_0 和 λ^{L_0} 以显然的方式作用于 $\mathbb{V}^{\mathrm{cl}}$：

$$L_0(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nv_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda^{L_0}(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda^n v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

3.6

命题 3.5(尺度协变性)。对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$，我们有

$$\lambda^{L_0} Y(u,z)\lambda^{-L_0} v = Y(\lambda^{L_0}u, \lambda z)v \tag{3.19}$$

o在 $\mathbb{V}^{\mathrm{cl}}$ 的层上。我们省略符号 v，并将上述关系简写为 a s

$$\lambda^{L_0} Y(u,z)\lambda^{-L_0} = Y(\lambda^{L_0}u, \lambda z).$$

以下证明中的方法将在我们的笔记中反复出现。 .

证明。 回忆 $L_0^{\mathrm{t}} = L_0$。 固定 $z \in \mathbb{C}^\times$。我们证明，对于每个齐次 u， v， v'，

$$\langle \lambda^{L_0} v', Y(u,z)\lambda^{-L_0} v\rangle = \langle v', Y(\lambda^{L_0}u, \lambda z)v\rangle. \tag{3.20}$$

左边 f 是一个标量乘以 $\lambda^{\mathrm{wt}v' - \mathrm{wt}v}$，右边 g 是 λ的一个劳朗多项式。因此，两者都是 $\mathbb{C}^\times$上的全纯函数。显然，当 $\lambda = 1$时，这两个表达式相等。下面我们通过证明它们满足相同的微分方程，来证明它们对所有 $\lambda \neq 0$ 都相等。

从 f 的形式可以清楚地看出， $\partial_\lambda f(\lambda) = (\mathsf{wt}v' - \mathsf{wt}v)\lambda^{-1} f(\lambda)$。为了计算 $\partial_\lambda g$，我们先计算一个较简单的导数 $\partial_\lambda\langle v',\ Y(u,\ \lambda z)v\rangle$。根据链式法则，我们有

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle v', Y(u,\lambda z)v\rangle = z\frac{d}{d\zeta}\langle v', Y(u,\zeta)v\rangle\Big|_{\zeta=\lambda z},$$

由于分次性质，等于

$$\begin{aligned}&\lambda^{-1}\Big\langle v', \big([L_0, Y(u,\lambda z)] - Y(L_0u, \lambda z)\big)v\Big\rangle\\ =&(\mathrm{wt}v' - \mathrm{wt}v - \mathrm{wt}u)\lambda^{-1}\big\langle v', Y(u,\lambda z)v\big\rangle.\end{aligned}$$

So

$$\partial_\lambda g(\lambda) = \partial_\lambda\big\langle v', Y(\lambda^{L_0}u, \lambda z)v\big\rangle = \partial_\lambda\big(\lambda^{\mathrm{wt}u}\big\langle v', Y(u,\lambda z)v\big\rangle\big) = (\mathrm{wt}v' - \mathrm{wt}v)\lambda^{-1} g(\lambda).$$

□

非正式地说，积分形式 (3.19)（即尺度协变性）也意味着对 λ 求偏导后可得导数形式 (3.9)。因此，从不严谨的层面来看，这两种形式是等价的。但积分形式具有更清晰的几何意义，我们将在后文给出。

在上述证明中，我们完成了第一次真正的顶点算子代数计算。你应该对这些计算熟悉到能够“立即看出”这两种形式等价。

$[L_{-1},\ Y(u,\ z)] = \partial_z Y(u,\ z)$ 的积分形式为

$$e^{\tau L_{-1}} Y(u,z) e^{-\tau L_{-1}} = Y(u, z+\tau),$$

称为**平移协变性**。你可以通过验证两边满足相同的“线性微分方程”，自行给出一个非正式证明。严格处理起来比尺度协变性更困难，因此我们将其留到本节末尾讨论。

3.7

现在我们来说明顶点算子代数定义背后的动机。也就是说，我们将解释，从前两节的观点来看，这些公理为何是自然的假设。以下说明是启发式的，并不严谨。

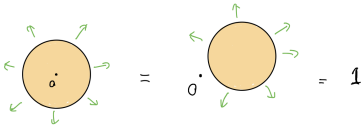
回顾一下（非严谨的）“定义” $\mathbb{V}$，见（1.11）。我们知道 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{V}$ 是 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$的子空间，而 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$ 分解为 $\mathbb{V}\otimes\hat{\mathbb{V}}$-子模时，包含一个部分 $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$；此外，该部分还包含 $\mathbb{V}\simeq\mathbb{V}\otimes\mathbf{1}$ 和 $\mathbb{V}\simeq\mathbf{1}\otimes\mathbb{V}$。真空向量是$\mathbf{1}\simeq\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$。

我们在第 1.8 小节中说过，标准单位闭圆盘 $\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$ 没有输入，且其边界 $\mathbb{S}^1$ 由 $z\mapsto z^{-1}$ 参数化，因此凭空产生真空向量 $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$。也就是说，真空向量来自数据 $(\mathbb{P}^1;\infty;\zeta^{-1})$，其中 ζ 是标准坐标。通过双全纯映射 $z\in\mathbb{P}^1\mapsto\lambda z\in\mathbb{P}^1$，此数据等价于 $(\mathbb{P}^1;\infty;\lambda^{-1}\zeta^{-1})$（其中 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$）。根据局部坐标变换公式（原理 2.10），后一个几何数据唯一地产生向量 $(\lambda^{L_0}\otimes\lambda^{L_0})\mathbf{1}$；由于这两组几何数据等价，该向量等于 $\mathbf{1}$。将 ∂_λ 和 ∂_λ 应用于 $(\lambda^{L_0}\otimes\lambda^{L_0})\mathbf{1}=\mathbf{1}$，我们看到 $L_0\mathbf{1}=L_0\mathbf{1}=0$。这解释了定义 3.1 中的 $\mathbf{1}\in\mathbb{V}(0)$。



因此，由（2.24），L_0 的特征值是整数，因此 $\geqslant 0$是整数，这由正能量假设2.4可知。这解释了谱$(L_0)\subset\mathbb{N}$。

同样地，标准圆盘 $\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$等价于经过某个 $\tau\in\mathbb{C}$的平移。因此我们必须有 $(e^{\tau L_{-1}}\otimes e^{\tau L_{-1}})\mathbf{1}=\mathbf{1}$，从而同样有 $L_{-1}\mathbf{1}=L_{-1}\mathbf{1}=0$。这解释了平移性质的一部分。



3.8

回顾一下

$$[L_0, L_n] = -nL_n, \qquad [\overline{L}_0, \overline{L}_n] = -n\overline{L}_n. \tag{3.21}$$

由于 L_0 和 L_0 的谱是 $\geqslant 0$，并且 $\mathbf{1}$ 是它们的零特征向量，我们必有

$$L_n\mathbf{1} = \overline{L}_n\mathbf{1} = 0 \qquad (n \geqslant -1). \tag{3.22}$$

由（3.22）可知，对于每个 $v \in \mathbb{V}$，若边界参数化的变化不涉及 L_{-2}、L_{-3}、..... 和 L_{-2}、L_{-3}、.....，则所有 L_n 都可以忽略：

$$\left(e^{\sum_{n\geqslant -1} a_n L_n} \otimes e^{\sum_{n\geqslant -1} \overline{a_n}\overline{L}_n}\right) v = e^{\sum_{n\geqslant -1} a_n L_n} v. \tag{3.23}$$

为此，将 v 与 $v \otimes \mathbf{1} \in \mathbb{V} \otimes \widehat{\mathbb{V}} \subset \mathcal{H}$ 等同起来，并注意到 $\mathbf{1}$ 在 $e^{\sum_{n\geqslant -1} a_n L_n}$ 作用下保持不变。

因此，我们得出结论：对于 $\mathbb{V}$ 的向量，局部坐标变换公式的平移不涉及 L_n。特别要注意，（3.23）右边几乎是 $\mathbb{V}$ 中的一个向量。当它具有有限能量时，它才是 $\mathbb{V}$ 中的真正向量。因此，局部坐标变换和平移几乎保持 $\mathbb{V}$。实际上，局部坐标变换确实保持 $\mathbb{V}$，这一点我们将在后面的章节中看到。

一般的边界参数化变换并不一定会以任何弱意义保持 $\mathbb{V}$。

3.9

我们来描述 $Y(u,z)v$ 的含义。对于每个 $z \in \mathbb{C}^\times$，我们定义一个局部坐标三点标记球面

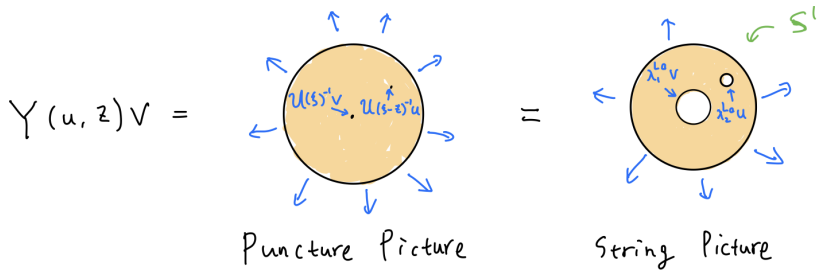
$$\mathfrak{P}_z = \{\mathbb{P}^1; 0, z, \infty; \zeta, \zeta - z, \zeta^{-1}\} \tag{3.24}$$

其中，ζ 是 $\mathbb{C}$ 的标准坐标。

我们将 $0, z$ 视为入射穿孔点，将 ∞ 视为出射穿孔点。粗略地说，$Y(u,z)v$ 就是 $T_{\mathfrak{P}_z}(v \otimes u)$，其中 v 与 0 相关联，而 u 与 z 相关联，这种关联通过适当的坐标变换来理解。首先假设 $0 < |z| < 1$。将 ζ 和 $\zeta - z$ 缩放至 $\lambda_1\zeta, \lambda_2(\zeta - z)$，从而使两条入射弦收缩，假设 1.1 便得到满足。将新的 N 标记球面记为 $\mathfrak{P}^{\lambda_1}{}_z{}^{\lambda_2}$。注意，在 ζ 坐标下的 v 在 $\lambda_1\zeta$ 坐标下变为 $(\lambda_1^{L_0} \otimes \lambda_1{}^{L_0})v = \lambda_1^{L_0} v$。类似地，$u$ 在新坐标下变为 $\lambda_2^{L_0} u$。于是，$Y(u, z)v$（从物理意义上）定义为 $T_{\mathfrak{P}^{\lambda_1}{}_z{}^{\lambda_2}}(\lambda_1^{L_0} v \otimes \lambda_2^{L_0} u)$。

与第 2.17 小节中一样，我们可以用*puncture* 图示将 u 和 v 视为与穿孔点 0、z 相对于局部坐标 ζ、$\zeta - z$ 所关联的态。此外，也可以像第 2.11 小节那样，以坐标无关的方式表述：我们将抽象向量 $\mathcal{U}(\zeta)^{-1}v$（即在坐标 ζ 下显式表达为 v 的那个）关联到

穿孔点 0 和 $\mathcal{U}(\zeta-z)^{-1}v$ 到 z。那么：



(3.25)

根据第 2.11 小节中的记号，抽象向量应写作 $\big(\mathcal{U}(\zeta)\otimes\mathcal{U}(\zeta^*)\big)^{-1}v$ 和 $\big(\mathcal{U}(\zeta-z)\otimes\mathcal{U}((\zeta-z)^*)\big)^{-1}u$。这里我们省略第二个张量分量，因为根据（3.23），$\mathbb{V}$ 向量的局部坐标变换不涉及 L_n。

3.10

在（3.25）的弦图中，将 u 设为 $\mathbf{1}$，意味着用实心圆盘填充 z 周围的孔。由此得到一个环带 $\mathcal{A}_{\lambda_1,\,1}$，其内侧参数化为 $\lambda_1\zeta$，外侧参数化为 ζ^{-1}。[1] 根据坐标变换公式，该环带的相互作用映射 $\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 满足 $T_{\mathcal{A}_{\lambda_1,\,1}}(\lambda_1^{L_0}v)=T_{A_{1,\,1}}v=v$。这解释了 $Y(\mathbf{1},\ z)v=v$。

如果改为设定 $v=\mathbf{1}$，那么我们就用实心圆盘填充 0 周围的孔。由此得到一个偏心环带 $\mathcal{A}_{z,\lambda_2,\mathbf{1}}$，其内边界参数化为 $\lambda_2(\zeta-z)$，外侧参数化为 ζ^{-1}。令 $T_{\mathcal{A}_{z,\lambda_2,\mathbf{1}}}:\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 为相互作用映射。那么根据（3.25），$Y(u,z)\mathbf{1}=T_{\mathcal{A}_{z,\lambda_2,1}}(\lambda_2^{L_0}u)$。令 $z\to 0$。那么 $\mathcal{A}_{z,\lambda_2,\mathbf{1}}$ 收敛到 $\mathcal{A}_{0,\lambda_2,\mathbf{1}}$，也就是同心环带 $\mathcal{A}_{\lambda_2,\mathbf{1}}$。我们有 $T_{\mathcal{A}_{\lambda_2,1}}(\lambda_2^{L_0}u)=u$。这解释了 $\lim_{z\to 0}Y(u,z)\mathbf{1}=u$。

3.11

对于一般的 $z\in\mathbb{C}^\times$，在弦图中，我们还必须收缩出射弦，才能得到真正的曲面 Σ。因此我们选取 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$，使得 $|\lambda|>1$。令

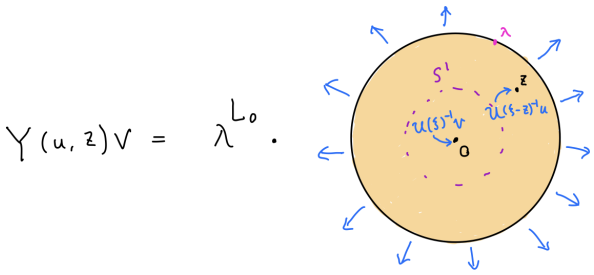
$$\mathfrak{P}_z^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda}=\{\mathbb{P}^1;0,z,\infty;\lambda_1\zeta,\lambda_2(\zeta-z);\lambda\zeta^{-1}\}.$$

那么，$Y(u,\ z)v$ 在物理上被“定义”为

$$Y(u,z)v=\lambda^{L_0}T_{\mathfrak{P}_z^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda}}(\lambda_1^{L_0}v\otimes\lambda_2^{L_0}u).\tag{3.26}$$

[1] 我们此前定义了一个环带 $A_{r,\,R}$ 其中有入射弦 $|z|=r$ 和出射弦 $|z|=R$。根据该定义，$\mathcal{A}_{r^{-1},\,1}=A_{r,\,1}$。

在穿孔图示中，它是



$Y(u)_n$ 的含义很清楚：

$$\langle v', Y(u)_n v\rangle = \oint_0 \langle v', Y(u,z)v\rangle z^n \cdot \frac{dz}{2\mathbf{i}\pi} = \mathrm{Res}_{z=0}\, \langle v', Y(u,z)v\rangle z^n dz.$$

其中 t 下标中的 $\oint$ 表示积分沿着任意一条绕 0 的回路进行。

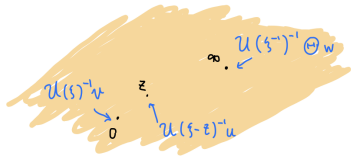
3.12

如果我们不想对 ζ^{-1}进行缩放，可以将输出点设为 ∞ 输入。为此，注意 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$根据第 1.14 节和第 1.15节，我们知道每个 $\Theta(\mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_i)$ 都等价于 $\mathbb{W}_i' \otimes \mathbb{W}_i'$，$\widehat{\ }$即 $\mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_i$上的有限能量对偶向量空间。在 $\mathbb{V}$的情形下，我们得到一个等价关系

$$\Theta\mathbb{V} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V}', \qquad \Theta w \mapsto \langle \Theta w, \cdot\rangle\big|_{\mathbb{V}} = \langle w|\cdot\rangle\big|_{\mathbb{V}}$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是与 $A_{1,\ 1}$相关联的关联函数。（从 $\langle w|\cdot\rangle\big|_{\mathbb{V}}$ 可以看出这个线性映射为何是同构。这里，可以假设每个 $\mathbb{V}(n)$ 都是有限维的，甚至可以假设 $\mathbb{V}$ 是有限维的。）然后，在穿孔图示中，顶点算子与 $\mathfrak{P}_z$ 的关联函数（限制为$\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}\otimes\Theta\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}'$上的一个线性泛函）之间的关系为

$$\langle \Theta w, Y(u,z)v\rangle = \langle w|Y(u,z)v\rangle \overset{(1.8)}{=\!=\!=}$$



对于所有 $u,\ v,\ w \in \mathbb{V}$，因此有 $\Theta w \in \Theta\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}'$。

3.13

实际上，我们有

$$\Theta\mathbb{V} = \mathbb{V} \tag{3.27}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$并且类似地 $\Theta\mathbb{V} = \mathbb{V}$。解释如下：

证明。首先， Θ 将有限能量向量映射为有限能量向量，因为 Θ 与能量算子 $L_0 \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes L_0$ 对易。（见第2.13小节。）根据式（1.11）中$\mathbb{V}$的物理定义，对于每个 $u \in \mathbb{V}$， 与$\mathfrak{P}_{z,r,R} = (\mathbb{P}^1; z, 8; (\zeta - z)/r, R/\zeta)$ 相关联的关联函数 T_z， 当 u 与穿孔 z相关联时，会全纯变化。也就是说，对于所有 $\nu \in \mathcal{H}$， $T_z(u \otimes \nu)$都是全纯的。容易看出，$\mathfrak{P}_{z,r,R}$ 的共轭（通过复平面的标准共轭）等价于$\mathfrak{P}_{z,r,R} = (\mathbb{P}^1; z, 8; (\zeta - z)/r, R/\zeta)$，其关联函数为$T_z$。因此，由式（1.9）可得

$$T_z(\Theta u \otimes \nu) = \overline{T_{\bar{z}}(u \otimes \Theta \nu)},$$

它在 z上也是全纯的。这证明了 $\Theta u \in \mathbb{V}$， 如果 $u \in \mathbb{V}$。 □

因此， $\mathbb{V} = \Theta\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}'$。等价由下式给出：

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V}', \qquad u \mapsto \langle u, \cdot \rangle \tag{3.28}$$

由于这种等价，我们称顶点算子代数 $\mathbb{V}$ 为**自对偶**。

因此，在所有幺正共形场论中（事实上，在许多非幺正共形场论中也是如此），顶点算子代数都是自对偶的。我们指出，自对偶性有一个严格的数学定义，它在 $\mathbb{V}$-模的张量范畴中发挥着重要作用。然而，一般顶点算子代数的定义并不要求自对偶性，因为许多性质无需假设自对偶性即可推导出来。

3.14

设ζ为通常所用的标准坐标。对于每个 $\lambda \neq 0$，我们都有一个等价 e

$$(\mathbb{P}^1; 0, z, \infty; \zeta, \zeta - z, \zeta^{-1}) \simeq (\mathbb{P}^1; 0, \lambda z, \infty; \lambda^{-1}\zeta, \lambda^{-1}\zeta - z, \lambda\zeta^{-1}) \tag{3.29}$$

由 $\mathbb{P}^1$的双全纯映射 $\gamma \mapsto \lambda\gamma$ 实现。（你应该验证右侧局部坐标的拉回与左侧的局部坐标相同。）左侧在$v \otimes u \otimes w \in \mathbb{V}^{\otimes 3}$上的关联函数为$\langle w, Y(u, z)v \rangle$。式（3.29）右侧是通过分别将 ($\mathbb{P}^1$的局部坐标 $0, \lambda z, 8; \zeta, \zeta - \lambda z, \zeta^{-1}$)（其在 $\mathbb{V}^{\otimes 3}$ 上的关联函数形式为 $\langle w, Y(u, \lambda z)v \rangle$) 缩放 $\lambda^{-1}, \lambda^{-1}, \lambda$ 得到的。根据坐标变换公式，式（3.29）右侧的关联函数（暂记为 ω）必须满足

$$\langle w, Y(u, \lambda z)v \rangle = \omega(\lambda^{-L_0} v \otimes \lambda^{-L_0} u \otimes \lambda^{L_0} w),$$

也就是说， ω 应为 $\langle \lambda^{-L_0} w, \ Y(\lambda^{L_0} u, \ \lambda z)\lambda^{L_0} v \rangle$。由于等价关系（3.29），这个最后的等式必须等于$\langle w, \ Y(u, \ z)v \rangle$。这解释了尺度协变性。

3.15

类似地，对于每个 $\tau \in \mathbb{C}$，考虑由下式诱导的等价

$$(\mathbb{P}^1; 0, z, \infty; \zeta, \zeta - z, \zeta^{-1}) \simeq \Big(\mathbb{P}^1; \tau, z + \tau, \infty; \zeta - \tau, \zeta - z - \tau, \frac{1}{\zeta - \tau}\Big) \tag{3.30}$$

$\gamma \mapsto \gamma + \tau$ 的双全纯映射 $\mathbb{P}^1$。右侧是从 $(\mathbb{P}^1;\ 0,\ z+\tau,\ 8;\ \zeta,\ \zeta - z - \tau,\ \zeta^{-1})$ 进行的参数化变换（其关联函数为$\langle w,\ Y(u,\ z+\tau)v\rangle$），其中 ζ变为 $\zeta - \tau$（这是一个平移），而 $\eta := \zeta^{-1}$变为 $1/(\eta^{-1} - \tau)$。这个平移对应于 $e^{-\tau L_{-1}}$。根据例 2.5，第二个坐标变换为 $\exp(\tau z^2 \partial_z)$，由此得到 $e^{\tau L_1}$。

令 ω 现在为右侧（限制在 $\mathbb{V}^{\otimes 3}$ 上的）关联函数。于是我们有

$$\langle w, Y(u, z+\tau)v\rangle = \omega(e^{-\tau L_{-1}} v \otimes u \otimes e^{\tau L_1} w).$$

因此，ω等于 $\langle e^{-\tau L_1} w,\ Y(u,\ z+\tau)e^{\tau L_1} v\rangle = \langle w,\ e^{-\tau L_{-1}} Y(u,\ z+\tau)e^{\tau L_1} v\rangle$，它必定等于$\langle w,\ Y(u,\ z)v\rangle$这是由等价关系（3.30）所致。这解释了平移协变性。

习题3.6。为 $Y(u,\ z+\tau) = Y(e^{\tau L_{-1}} u,\ z)$找出一个几何解释。

平移协变性还有一个更简短的几何解释：$e^{\tau L_{-1}} Y(u,\ z)v$ 相当于将（3.25）中的弦图里的出射大弦平移 $-\tau$。这等同于固定出射弦，并将两条入射弦平移 τ。将围绕 0 的那条弦平移，会将 v 变为 $e^{\tau L_{-1}} v$；而将围绕 z 的那条弦平移，只会将 z 变为 $z+\tau$。

然而，第二种解释不如第一种严谨。但无论如何，第一种解释本身也并不严谨。那么，我们为什么还要在这里在意严谨性这个问题呢？嗯，我们对平移协变性的第一个几何解释，以及小节3.14 中对旋转协变性的解释，更为严谨，因为用这种方法可以很容易地得到正确的公式。你可以尝试使用我们的第二种方法，对旋转协变性给出一个简短的解释。然后你会发现，要得到正确的公式并不容易，因为局部坐标的变化并不容易直观地表示出来。

3.16

现在我们回到严格数学。我们将严格地证明平移协变性。为此，我们需要将尺度协变性证明中的微分方程方法推广到以下向量值形式：

引理 3.7。设 W 是一个（不一定是有限维的）向量空间，且 $f \in W[[z]]$。假设对于某个 $A \in \mathrm{End}(W)$，有 $\frac{d}{dz} f(z) = A f(z)$。另外假设 $f(0) = 0$，即幂级数 $f(z)$ 的常数项为 0。那么 $f = 0$。

证明。写出 $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n$ 其中每个 $f_n \in W$。假设说明 $f_0 = 0$ 一个 d

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n f_n z^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} A f_n z^n.$$

因此 $n f_n = A f_{n-1}$ 其中 $n > 0$。这证明了所有 f_n 均为 0。 □

3.17

我们已经说过，$[L_{-1}、Y(u、z)] = \partial_z Y(u、z)$ 的积分形式为

$$\langle v', e^{\tau L_{-1}} Y(u,z) e^{-\tau L_{-1}} v\rangle = \langle v', Y(u, z+\tau)v\rangle. \tag{3.31}$$

与尺度协变性相比，这个关系更难处理，因为两边实际上都包含关于 τ 的幂的无穷和。我们的目标是弄清楚：这个关系在哪个定义域上成立？当然，我们需要 $\tau \neq -z$。但这个条件远远不够。

首先，让我们把两边理解为关于 τ 和 z的无穷级数。无妨假设 $u、v、v'$ 都是齐次的。右边具有 $a(z+\tau)^m$的形式，其中 $a \in \mathbb{C}$，$m \in \mathbb{Z}$。这个表达式当然可以作为有理函数来理解，但我们首先将其视为关于 $\tau、z$的形式级数，方法是在定义域$|\tau| < |z|$上展开 $(z+\tau)^m$，即 $(z+\tau)^m = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{m}{k} z^{m-k}\tau^k$。因此，(3.31) 的右边作为 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}][[\tau]]$中的元素，可理解为

$$\langle v', Y(u, z+\tau)v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{-n-1}{k} \langle v', Y(u)_n v\rangle \cdot z^{-n-1-k}\tau^k.$$

这里，对 $n \in \mathbb{Z}$ 求和是有限的；当这些向量是齐次的时，至多只有一项可能非零。

但我们为什么要在 $(z+\tau)^m$ 上展开 $|\tau| < |z|$? 为什么不展开 $|z| < |\tau|$? 这是因为这样会得到 $\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{m}{k} z^k \tau^{m-k}$，其中包含 τ的负幂。但（3.31）的左边实际上只含有 τ的非负幂。

那么我们来看（3.31）的左边。我们不妨先理解为什么

$$\langle v', e^{\lambda L_{-1}} Y(u,z) e^{-\mu L_{-1}} v\rangle \tag{3.32}$$

是 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}][[\lambda,\mu]]$的一个元素。首先，我们想把 $e^{\lambda L_{-1}}$ 移到括号的左边。一般来说，如果 L_n 定义在 $\mathbb{V}$上，我们将 L_{-n} 在 $\mathbb{V}'$ 上的转置定义为 L_n:$L_{-n} = L_n^{\mathrm{t}}$，更精确地说，

$$\langle L_{-n}v', v\rangle := \langle v', L_n v\rangle. \tag{3.33}$$

如果你怀疑这个转置为何存在，我们可以把定义写得更加精确：假设 $v' \in \mathbb{V}'(m)$。那么 $L_{-n}v'$ 是 $\mathbb{V}(m+n)$ 上的线性泛函（因此 L_{-n} 会使权增加 n），其在任意 $v \in \mathbb{V}(m+n)$ 处的取值为 $\langle v', L_n v\rangle$。（记得 L_n 会使权降低 n，所以 $L_n v \in \mathbb{V}(m)$。）并且，当 $a \neq m+n$时，$L_{-n}v'$ 在 $\mathbb{V}(a)$ 上为零。

现在，(3.32) 等于

$$f(z,\lambda,\mu) := \langle e^{\lambda L_1} v', Y(u,z) e^{-\mu L_{-1}} v\rangle = \sum_{n,l\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^n(-\mu)^l}{n!l!} \langle L_1^n v', Y(u,z) L_{-1}^l v\rangle. \tag{3.34}$$

这属于 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}][[\lambda, \mu]]$。事实上，它属于 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}][[\mu]][\lambda]$，因为 $L_1^n v'$会使权降低 n，因此当 $n >$ wtv'时为零。但这里我们不需要这个事实。

现在，(3.31) 的左边可以理解为 $f(z, \tau, \tau)$，注意以下事实：

引理 3.8。 设 W 是一个向量空间。如果 $\varphi(z_1、\ \dots、\ z_N) \in W[[z_1、\ \dots、\ z_N]]$，那么 $\varphi(z、\ \dots、\ z)$ 自然可以理解为 $W[[z]]$ 的一个元素。
证明。 写作 $\varphi(z_\bullet) = \sum a_{n_1,\dots,n_N} z_1^{n_1} \cdots z_N^{n_N}$。于是

$$\varphi(z,\dots,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{n_1+\cdots+n_N=n} a_{n_1,\dots,n_N} z^n$$

其中内层求和显然是有限的。 □

3.18

命题 3.9 (平移协变性)。 对于每个 $u、\ v \in \mathbb{V}、\ v' \in \mathbb{V}'$，下列等式在 $\mathbb{C}[z^{\pm1}][[\tau]]$ 层上成立：

$$\big\langle v', e^{\tau L_{-1}} Y(u,z) e^{-\tau L_{-1}} v\big\rangle = \big\langle v', Y(u, z+\tau) v\big\rangle. \tag{3.35}$$

这里，右端先验上是关于 $z+\tau$ 的劳朗多项式，将其展开时视作 $|\tau| < |z|$。

证明。 令 $f_z(\tau)$ 和 $g_z(\tau)$ 分别为 (3.35) 的左右两端，将它们视为 τ 的形式幂级数，其系数属于 $\mathbb{C}[z^{\pm1}]$。那么显然 $f_z(0) = g_z(0)$ 是关于 $z^{\pm1}$ 的多项式。因此，只需证明 f_z 和 g_z 满足相同的线性微分方程。左端为 $f_z(\tau,\ \tau)$ 其中

$$f_z(\lambda,\mu) = \big\langle e^{\lambda L_1} v', Y(u,z) e^{-\mu L_{-1}} v\big\rangle \qquad \in \mathbb{C}[z^{\pm1}][[\lambda,\mu]].$$

作为关于多变量形式幂级数的一般结果，我们有链式法则

$$\partial_\tau f_z(\tau,\tau) = (\partial_\lambda + \partial_\mu) f_z(\lambda,\mu)\big|_{\lambda=\mu=\tau}.$$

（相信这是正确的也很合理。不过，你也可以通过展开这两个级数并检查它们的系数是否一致，给出严格的证明！）因此，作为

$$\begin{aligned}\partial_\lambda f_z(\lambda,\mu) &= \big\langle e^{\lambda L_1} L_1 v', Y(u,z) e^{-\mu L_{-1}} v\big\rangle,\\ \partial_\mu f_z(\lambda,\mu) &= -\big\langle e^{\lambda L_1} v', Y(u,z) e^{-\mu L_{-1}} L_{-1} v\big\rangle,\end{aligned}$$

我们有

$$\partial_\tau f_z(\tau) = \big\langle e^{\tau L_1} L_1 v', Y(u,z) e^{-\tau L_{-1}} v\big\rangle - \big\langle e^{\tau L_1} v', Y(u,z) e^{-\tau L_{-1}} L_{-1} v\big\rangle.$$

这个表达式不是关于 $\mathbb{C}[z^{\pm1}]$-系数幂级数 f_z 的微分方程。不过，我们可以通过固定 u、改变 $v,\ v'$，并将 f_z 视为关于 τ 的 $\mathcal{V} := \mathrm{Hom}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}',\ \mathbb{C}[z^{\pm1}])$ 值幂级数，从而将其化为常微分方程。于是 $\partial_\tau f_z = A f_z$ 其中 $A \in \mathrm{End}\mathcal{V}$ 定义为将每个 $\Phi : \mathbb{V}\otimes\mathbb{V}' \to \mathbb{C}[z^{\pm1}]$ 映射到

$$A\Phi = \Phi \circ (\mathbf{1}\otimes L_1 - L_{-1}\otimes \mathbf{1}).$$

现在，我们来计算（注意，对于每个固定的 u， v，下面的和都是有限的）

$$\partial_\tau g_z(\tau) = \partial_\tau \langle v', Y(u, z+\tau)v\rangle = \partial_\tau \Big(\sum_n a_n (z+\tau)^n\Big)$$

$$= \sum_n n a_n (z+\tau)^{n-1} = \partial_\zeta \Big(\sum_n a_n \zeta^n\Big)\Big|_{\zeta=z+\tau} = \partial_\zeta \langle v', Y(u,\zeta)v\rangle\big|_{\zeta=z+\tau}.$$

根据平移性质，上式等于

$$\partial_\tau g_z(\tau) = \langle v', [L_{-1}, Y(u,\zeta)]v\rangle\big|_{\zeta=z+\tau},$$

它也等于 $Ag_z(\tau)$ 如果我们现在改变 v， v' 并将 g 视为 $\mathcal{V}$-值的。因此，$f_z(\tau) = g_z(\tau)$ 根据引理 3.7。 □

3.19

我们来考虑命题 3.9 的一个有用变体。注意，当 v' 被替换为L_1^n，并且等式两边同时乘以 τ^n时，（3.35）仍然成立。因此，若将 v' 替换为 $e^{-\tau L_1}v'$，则（3.35）在 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}][[\tau]]$的层上成立。即:

$$\langle v', Y(u,z)e^{-\tau L_{-1}}v\rangle = \langle e^{-\tau L_1}v', Y(u, z+\tau)v\rangle. \tag{3.36}$$

注 3.10。 当 $|\tau| < |z|$时，(3.35) 和 (3.36) 的左侧绝对收敛，因为右侧绝对收敛。这些右侧是 $(z+\tau)^m$ 的线性组合，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 的展开式 $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} a_{j,k} z^j \tau^k := \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{m}{n} z^{m-n}\tau^n$ 显然满足

$$\sup_{(z,\tau)\in K} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |a_{j,k} z^j \tau^k| < +\infty \tag{3.37}$$

在每个紧子集上 K的 $\{(z,\ \tau):\ |\tau| < |z|\}$。因此，式（3.35）和（3.36）左端也具有相同的收敛性质。我们将这一性质称为**绝对且局部一致收敛**，这也是本课程研究的重点。

因此，我们实际上已经证明了本课程中的第一个收敛性结果。这里所使用的方法是顶点算子代数理论中的标准方法：我们通过将一个形式幂级数与一个全纯函数的幂级数展开相对应，证明该形式幂级数收敛，而这可以借助线性微分方程来实现。

3.20

令我们在 $v = \mathbf{1}$ 公式（3.35）中取 $L_{-1}\mathbf{1} = 0$，则我们得到

$$\langle v', e^{\tau L_{-1}} Y(u,z)\mathbf{1}\rangle = \langle v', Y(u, z+\tau)\mathbf{1}\rangle \tag{3.38}$$

在 $\mathbb{C}[z$的层面上，$\tau]$，由于根据注记 3.4，右边是关于 $z+\tau$的多项式。由于 $z \to 0$，左边收敛到 $\langle e^{\tau L_1}v',\ u\rangle = \langle v',\ e^{\tau L_{-1}}u\rangle$ 根据（3.16）。因此我们得出:

推论 3.11。 对于每个 $u \in \mathbb{V}, v \in \mathbb{V}'$，方程

$$\left\langle v', e^{\tau L_{-1}} u \right\rangle = \left\langle v', Y(u,\tau)\mathbf{1} \right\rangle$$

作为关于 τ 的多项式成立。等价地，方程

$$e^{\tau L_{-1}} u = Y(u,\tau)\mathbf{1}$$

在 $\mathbb{V}[[\tau]]$ 的层面上成立，这等价于对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$Y(u)_{-n-1}\mathbf{1} = \frac{1}{n!} L_{-1}^n u. \tag{3.39}$$

我们把留给读者去寻找 $e^{\tau L_{-1}} u = Y(u,\ \tau)\mathbf{1}$ 的几何解释 .

4 顶点算子代数的定义，II：雅可比恒等式

4.1

原理 4.1。 将黎曼球面粘合起来得到新的球面时，公式 $T_{\Sigma_1} \circ T_{\Sigma_2} = T_{\Sigma_1 \# \Sigma_2}$ 确实成立，当且仅当用于缝合的点处的局部坐标是 M¨obius 变换，即具有 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ 的形式，其中 $ad - bc \neq 0$。

这一无歧义原理的一个粗略解释是，在 M¨obius 变换之间的坐标变换公式中只涉及 $L_0, L_{\pm 1}$，而它们之间的李括号关系不涉及中心荷。

4.2

我们将说明雅可比恒等式的动机。

我们先简述第1.4小节中紧黎曼曲面的缝合。假设给定数据 $\mathfrak{X} = (C;\ x_\bullet;\ \eta_\bullet)$ 以及 $\mathfrak{X}' = (C';\ y_\bullet;\ \eta'_\bullet)$，并沿着 x_1 和 x'_1将它们缝合。为简单起见，令 $\xi = \eta_1,\ \varpi = \eta'_1$。由（1.4），我们知道粘合律为：任意$x \in \xi^{-1}(\mathbb{S}^1)$（回忆一下，$\xi^{-1}(\mathbb{S}^1)$ 是相应曲面的一个边界弦 Σ，对于 $\mathfrak{X}$）以及任意 $y \in \varpi^{-1}(\mathbb{S}^1)$ 均按以下规则等同

$$x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi(x)\varpi(y) = 1. \tag{4.1}$$

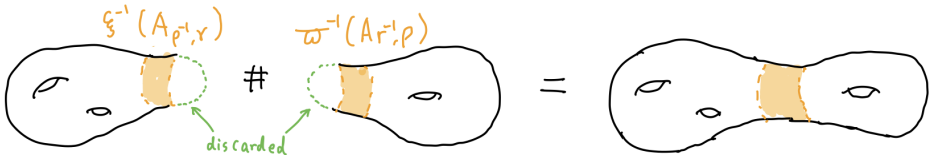
这个粘合的定义是拓扑的，而不是复解析的。从解析的角度看，我们实际上是按照规则（$\xi^{-1}(\mathbb{S}^1)$ 和 $\varpi^{-1}(\mathbb{S}^1)$）4.1，对所有$x$ 第一邻域中的点以及 y 第二个邻域中的点进行粘合。显然，在第一个邻域上局部定义的函数是全纯的，当且仅当它在第二个邻域上也是全纯的。这就定义了 $C\#C'$上的复解析结构。

注 4.2. 让我们更精确地描述这些邻域的形状。设 ξ 和 ϖ 分别定义在 U, U' 上（且为单射）。选择 $r > 1, \rho > 1$ 使得 $\xi(U) \supset$

$\mathbb{D}_r, \varpi(U') \supset \mathbb{D}_\rho$。则 $\xi^{-1}(\mathbb{S}^1)$ 和 $\varpi^{-1}(\mathbb{S}^1)$ 的以下邻域通过关系（4.1）粘合：

$$\begin{array}{c} \xi^{-1}(A_{\rho^{-1},r}) = \{x \in U : \rho^{-1} < |\xi(x)| < r\} \\ \updownarrow \text{identified via (4.1)} \\ \varpi^{-1}(A_{r^{-1},\rho}) = \{y \in U' : r^{-1} < |\varpi(y)| < \rho\} \end{array} \tag{4.2}$$

粘合时会丢弃部分 $\{x \in U : |\xi(x)| \leqslant \rho^{-1}\}$ 和 $\{y \in U' : |\varpi(y)| \leqslant r^{-1}\}$。



(4.3)

4.3

如前所述，当我们将有限能量向量与入射弦/点关联时，可以对其局部坐标进行缩放。然而，对于输出点以及待缝合点处的局部坐标，则不允许任意缩放。因此，我们假设在对入射点处的局部坐标进行缩放（通过某个 λ，使 $|\lambda|$任意大）之后，假设1.1 仍然成立。这相当于以下

假设 4.3。如果 x_i 是出射点或要与另一个点缝合的点，那么在 x_i 处定义于邻域 $U_i \ni x_i$ 上的局部坐标 η_i 满足 $\eta_i(U_i) \supset \mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$；如果 x_j 是出射点或要缝合的点，则满足 $\eta_i^{-1}(\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}) \cap \eta_j^{-1}(\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}) = \varnothing$；如果 x_j 是入射点且不进行缝合，则满足 $x_j \in \eta_i^{-1}(\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}})$。

注 4.4。确实有一种方法可以略微放宽上述假设。使用（4.1）的记号。那么我们可以假设，假设 4.3 在将 ξ 按某个 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ 以及 ϖ 按 λ^{-1}缩放后仍然成立。于是，粘合（4.1）的规则不变。在相互作用映射 T_Σ一侧，这一变化 $\xi \rightsquigarrow \lambda\xi$ 会给 T_Σ中的一个张量分量 $\lambda^{-L_0} \otimes (\lambda)^{-L_0}$ 乘上因子 $\xi \rightsquigarrow \lambda^{-1}\xi$，并且 $\lambda^{L_0} \otimes \lambda^{L_0}$会乘上因子。这两个因子在进行收缩或复合后相互抵消。

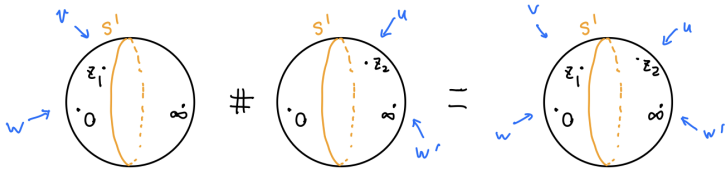
4.4

我们希望理解乘积 $\langle w', Y(u, z_2)Y(v, z_1)w\rangle$。令 ζ 为 $\mathbb{C}$的标准坐标。根据 Segal 图景中的缝合性质，这个表达式应当对应于以下对象的缝合：

$$\mathfrak{P}_{z_1} = (\mathbb{P}_1^1; 0, z_1, \infty; \zeta, \zeta - z_1, \zeta^{-1}), \qquad \mathfrak{P}_{z_2} = (\mathbb{P}_2^1; 0, z_2, \infty; \zeta, \zeta - z_2, \zeta^{-1})$$

沿着这些点 ∞ 属于 $\mathfrak{P}_{z_1}$ 以及 0 属于 $\mathfrak{P}_{z_2}$。（这里，两个 $\mathbb{P}_1^1$ 和 $\mathbb{P}_2^1$ 都是 $\mathbb{P}^1$。我们假设两个 ∞ 在缝合之前都是出射的。）当4.3 成立时 $0 < |z_1| < 1 < |z_2| < +\infty$，如果我们将所有不用于缝合的点都视为入射点。缝合规则为

当 $\gamma_1 \in \mathbb{P}_1^1$，$0 < |\gamma_1^{-1}| < +\infty$ 与 $\gamma_2 \in \mathbb{P}_2^1$，$0 < |\gamma_2| < +\infty$ 当且仅当$\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2 = 1$，也就是说 $\gamma_1 = \gamma_2$。（这里，我们设定 $r = \rho = \infty$ 以便应用注记 4.2。被舍弃的点是 ∞ 属于 $\mathbb{P}_1^1$ 以及 0 属于 $\mathbb{P}_{2\circ}^1$。）因此，缝合就是将第一个球面放到第二个球面上。



缝合的结果是

$$\mathfrak{P}_{z_1,z_2} = (\mathbb{P}^1; 0, z_1, z_2, \infty, \zeta - z_1, \zeta - z_2, \zeta^{-1}) \tag{4.4}$$

假设将 $\mathfrak{P}_{z_1,z_2}$ 的所有点都视为入射点，对于每个 $u, v, w, w' \in \mathbb{V}$ ，

$$T_{\mathfrak{P}_{z_1,z_2}}(w, v, u, w') = \langle w', Y(u, z_2)Y(v, z_1)w\rangle \qquad (\text{if } 0 < |z_1| < |z_2| < +\infty). \tag{4.5}$$

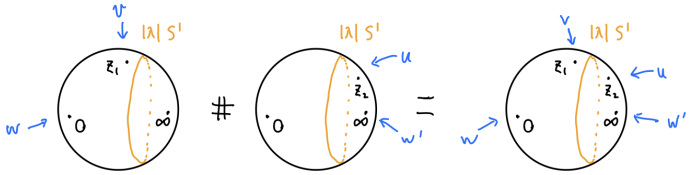
t 的原因 $|z_1| < 1$ 和 $1 < |z_2|$ 可以省略的原因将在下文解释。

4.5

我们来解释为什么只要4.5就成立 $0 < |z_1| < |z_2| < +\infty$.

选取 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $|z_1| < |\lambda| < |z_2|$。按照注释 4.4中的指引，我们将 ζ^{-1} 的 $\mathfrak{P}_{z_1}$ 局部坐标替换为 $\lambda\zeta^{-1}$，并将 ζ 的 $\mathfrak{P}_{z_2}$ 替换为 ζ/λ。于是，假设4.3 再次成立。特别地，$\mathbb{P}_1^1$ 在∞ 附近的出射弦，以及$\mathbb{P}_2^1$ 在0 附近的入射弦 $|\lambda|\mathbb{S}^1$都。

相互作用映射 $T_{\mathfrak{P}_{z_1}}$： $\mathcal{H}^{\otimes 2} \to \mathcal{H}$ 作用于 $w \otimes v$ 为 $\lambda^{-L_0}Y(v, z_1)w_\circ$ $T_{\mathfrak{P}_{z_2}}$ 将 $u \otimes \_ \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ 映射到 $Y(u, z_2)\lambda^{L_0}$。用$w' \in \mathbb{V}$计算这两个表达式的复合，结果仍为式（4.5）右边。缝合的结果仍为 $\mathfrak{P}_{z_1,\ z_2\circ}$ 因此，式（4.5）一般成立。



4.6

根据第 $\mathbb{V}$ 小节中的1.12 物理定义以及无歧义原理2.10，我们知道，当插入 $\mathbb{V}$ 的向量时，相关函数会随着标记点及其局部坐标的平移而全纯变化。因此，$T_{\mathfrak{P}_{z_1,\ z_2}}(w,\ v,\ u,\ v')$ 是定义在$\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ ={(z_1上的全纯函数：$z_2) \in \mathbb{C}^\times$。由于类似于（4.5），我们也有

$$T_{\mathfrak{P}_{z_1,z_2}}(w, v, u, w') = \langle w', Y(v, z_1)Y(u, z_2)w\rangle \qquad (\text{if } 0 < |z_2| < |z_1| < +\infty), \tag{4.6}$$

由此得出，定义在 $0 < |z_1| < |z_2|$ 上的 $\langle w', Y(u, z_2)Y(v, z_1)w\rangle$ 和定义在 $0 < |z_2| < |z_1|$ 上的 $\langle w', Y(v, z_1)Y(u, z_2)w\rangle$ 可以延拓为 $\mathbf{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ 上的同一个全纯函数。这个结论对所有 $w,\ w' \in \mathbb{V}$（或者更一般地说，在不假设 $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}'$ 成立时，对所有 $w \in \mathbb{V},\ w' \in \mathbb{V}'$）都成立，简写为

$$Y(u, z_2)Y(v, z_1) \sim Y(v, z_1)Y(u, z_2). \tag{4.7}$$

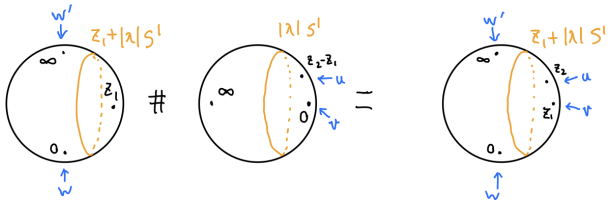
这一性质称为**交换性**。

4.7

现在我们来考虑缝合的

$$\mathfrak{P}_{z_1} = (\mathbb{P}^1_1; 0, z_1, \infty; \zeta, \zeta - z_1, \zeta^{-1}), \qquad \mathfrak{P}_{z_2-z_1} = (\mathbb{P}^1_{21}; 0, z_2 - z_1, \infty; \zeta, \zeta - z_2 + z_1, \zeta^{-1})$$

（其中 $\mathbb{P}^1_{21} = \mathbb{P}^1$）沿着点 $z_1 \in \mathbb{P}^1_1$ 和 $\infty \in \mathbb{P}^1_{21}$。我们假设 $0 < |z_2 - z_1| \lhd |z_1| < +\infty$。选取满足 $|z_2 - z_1| < |\lambda| < |z_1|$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$。将 $\mathfrak{P}_{z_1}$ 的局部坐标 $\zeta - z_1$ 替换为 $\lambda^{-1}(\zeta - z_1)$，并将 $\mathfrak{P}_{z_2-z_1}$ 的局部坐标 ζ^{-1} 替换为 $\lambda\zeta^{-1}$。于是，假设 4.3 得以满足。缝合规则是：当且仅当 $(\gamma_1 - z_1) = \gamma_{21}$ 时，将 $\gamma_1 \in \mathbb{P}^1_1$、$0 < |\lambda^{-1}(\gamma_1 - z_1)| < +\infty$ 与 $\gamma_{21} \in \mathbb{P}^1_{21}$、$0 < |\lambda\gamma_{21}^{-1}| < +\infty$ 识别。因此，将 $\mathfrak{P}_{z_1-z_1}$ 粘合到 $\mathfrak{P}_{z_1}$ 相当于将 $\mathfrak{P}_{z_2-z_1}$ 平移到 $\mathfrak{P}_{z_2}$。缝合后，$\mathfrak{P}_{z_2-z_1}$ 上的点 0 和 $z_2 - z_1$ 变为 z_1 和 z_2。（$\mathfrak{P}_{z_1}$ 上的点 z_1 以及 $\mathfrak{P}_{z_2-z_1}$ 上的点 8 被舍弃。）



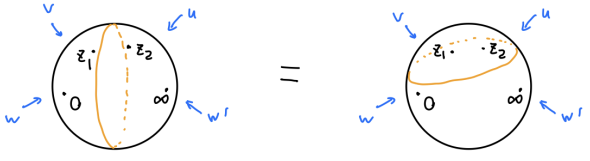
这个缝合图给出

$$T_{\mathfrak{P}_{z_1,z_2}}(w, v, u, w') = \langle w', Y(Y(u, z_2 - z_1)v, z_1)w\rangle \quad (\text{if } 0 < |z_2 - z_1| < |z_1| < +\infty). \tag{4.8}$$

因此我们具有**结合律** 性质

$$\begin{gathered}\langle w', Y(u, z_2)Y(v, z_1)w\rangle = \langle w', Y(Y(u, z_2 - z_1)v, z_1)w\rangle \\ \text{if } 0 < |z_2 - z_1| < |z_1| < |z_2|.\end{gathered} \tag{4.9}$$

几何　　地，这意味着以下方式的缝合球面等价：



4.8

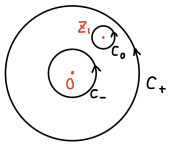
对于所有 u、v、$w\in\mathbb{V}$、$w'\in\mathbb{V}'$，（4.5）、（4.6）和（4.8）都可以在给定定义域上定义为关于 z_1、z_2 的全纯函数（其确切含义将在后文给出），并且这三个表达式可以延拓为同一个全纯函数（即$T_{\mathfrak{P}_{z_1,\,z_2}}(w\otimes v\otimes u\otimes w')$），定义在 $\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ 上，这称为复解析形式的 **雅可比恒等式**。（精确表述见定义 7.16。）粗略地说，

$$\text{Jacobi identity} = \text{Commutativity} + \text{Associativity}. \tag{4.10}$$

目前，我们将推导出一种代数形式，并将其作为定义 3.1 中雅可比恒等式的形式化定义。3.1。

写出 $f(z_1,z_2)=T_{\mathfrak{P}_{z_1,z_2}}(w\otimes v\otimes u\otimes w')$。固定 $z_1\in\mathbb{C}^\times$，并将 f视为 z_2 上的全纯函数。（此外，由 (4.5)、(4.6)、(4.8) 以及下截断性质 (3.15)，容易看出 f在 $z_1=0,z_2,8$ 处有有限个极点。因此，f是亚纯函数。）根据留数定理，对于 $\mathbb{P}^1$ 上的任意亚纯 1-形式 μ，其可能的极点仅为 $0,z_1,8$，我们必有 $(\mathrm{Res}_{z_2=0}+\mathrm{Res}_{z_2=z_1}+\mathrm{Res}_{z_2=\infty})f\mu=0$。容易看出，这样的 μ 可表示为形如 $z_2^m(z_2-z_1)^n dz_2$的线性组合。

等价地，选取 C_+ 为以 0 为圆心、半径为 $>|z_1|$的圆，C_- 为以 0 为圆心、半径为 $<|z_1|$的圆，并将 C_0 取为围绕 z_1、位于 C_+ 与 C_-之间的一个小圆。



分别令 f_+、f_-、f_0 为 (4.5)、(4.6)、(4.8) 的右端。那么，当 z_2 分别位于C_+、C_-、C_0 上时，f等于 f_+、f_-、f_0。于是，事实 f_+、f_-、f_0 在各自定义域上定义，并延拓为 $\mathbb{P}^1$ 上具有极点 0、z_1、8 的同一个亚纯函数，意味着对于任意 m、$n\in\mathbb{Z}$ 和 $\mu=z_2^m(z_2-z_1)^n dz_2$，都有

$$\oint_{C_+}\frac{f_+\mu}{2\mathbf{i}\pi}-\oint_{C_-}\frac{f_-\mu}{2\mathbf{i}\pi}=\oint_{C_0}\frac{f_0\mu}{2\mathbf{i}\pi}. \tag{4.11}$$

事实上，后者也蕴含前者。这由所谓的强留数定理保证，该定理将在小节11.11中讨论。强留数定理将说明，雅可比恒等式的解析形式与代数形式是等价的。

回想一般公式 $\oint_C Y(u,z)z^k\frac{dz}{2\mathbf{i}\pi}=Y(u)_k$ 若 C 是围绕原点的圆。当 $z_2\in C_+$时，μ有绝对收敛的展开式 $\mu=\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{n}{l}(-z_1)^l z_2^{m+n-l}dz_2$。因此

$$\begin{aligned}\oint_{C_+}\frac{f_+\mu}{2\mathbf{i}\pi}&=\sum_{l\in\mathbb{N}}\oint_{C_+}\binom{n}{l}(-z_1)^l z_2^{m+n-l}\langle w',Y(u,z_2)Y(v,z_1)w\rangle\frac{dz_2}{2\mathbf{i}\pi}\\&=\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{n}{l}(-z_1)^l\langle w',Y(u)_{m+n-l}Y(v,z_1)w\rangle=:a(z_1)\end{aligned}$$

当 $z_2 \in C_-$ 时，

$$\oint_{C_-} \frac{f_-\mu}{2\mathbf{i}\pi} = \sum_{l\in\mathbb{N}} \oint_{C_+} \binom{n}{l} (-z_1)^{n-l} z_2^{m+l} \langle w', Y(v,z_1)Y(u,z_2)w\rangle \frac{dz_2}{2\mathbf{i}\pi}$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{n}{l} (-z_1)^{n-l} \langle w', Y(v,z_1)Y(u)_{m+l}w\rangle =: b(z_1)$$

当 $z_2 \in C_0$ 时，由于 $0 < |z_2 - z_1| < |z_1|$，我们得到绝对收敛展开式 $\mu = (z_1 + (z_2 - z_1))^m (z_2 - z_1)^n dz_2 = \sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{m}{l} z_1^{m-l} (z_2 - z_1)^{n+l} dz_2$。因此

$$\oint_{C_0} \frac{f_0\mu}{2\mathbf{i}\pi} = \sum_{l\in\mathbb{N}} \oint_{C_0} \binom{m}{l} z_1^{m-l} (z_2 - z_1)^{n+l} \langle w', Y(Y(u,z_2-z_1)v,z_1)w\rangle \frac{dz_2}{2\mathbf{i}\pi}$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{m}{l} z_1^{m-l} \langle w', Y(Y(u)_{n+l}v,z_1)w\rangle := c(z_1)$$

现在我们有 $c(z_1) = a(z_1) - b(z_1)$。令 z_1 变化。对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，将等式两边乘以 $z_1^k \frac{dz_1}{2\mathbf{i}\pi}$，并对 $z_1 = 0$ 取留数。于是得到（略去 w' 和 w）

定义4.5（**雅可比恒等式**（代数形式））。对于每个 u，v，$w \in \mathbb{V}$，以及每个 m，n，$k \in \mathbb{Z}$，有

$$\begin{aligned} &\sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{m}{l} Y\big(Y(u)_{n+l}v\big)_{m+k-l} \\ =&\sum_{l\in\mathbb{N}} (-1)^l \binom{n}{l} Y(u)_{m+n-l}Y(v)_{k+l} - \sum_{l\in\mathbb{N}} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} Y(v)_{n+k-l}Y(u)_{m+l}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

这就完成了定义3.1。

在上述三项中，对每个 $w \in \mathbb{V}$ 作用时，由于下截断性质，对 $l \in \mathbb{N}$ 的求和都是有限的。

5 雅可比恒等式的推论；重构定理

5.1

雅可比恒等式的代数形式非常复杂。很少有人能够在不查阅参考资料，或不使用第4.8小节中的冗长论证重新证明这一公式的情况下，准确写出正确的公式。但我们将尽力解释如何使用这一公式，以及这一公式意味着什么。

首先，如果（4.12）在 $m = 0$ 或 $n = 0$ 的情况下成立，那么它一般也成立。我们不会对此给出严格证明。不过，由于（4.12）是对所有 $\mu = z_2^m (z_2 - z_1)^n dz_2$ 由（4.11）推导而来的，读者可以通过以下基本事实确信这一结论：

练习 5.1. 证明 $z_2^m(z_2-z_1)^n$ 是 z_2^k 和 $(z_2-z_1)^l$ 的 $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}]$-线性组合，其中 $k,l\in\mathbb{Z}$ 和 $l<0$。（提示：不失一般性，假设 $m,n<0$。对 $|m|$ 和 $|n|$ 使用归纳法证明此命题。）

因此，我们可以通过限制到特殊情形 $m=0$、$n<0$ 或$n=0$来理解 (4.12)。

5.2

现在我们回到严格数学。考虑 $n=0$ 的情形，即 $\mu=z_2^m dz_2$。那么（4.12）可写为

$$\big[Y(u)_m,Y(v)_k\big]=\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{m}{l}Y\big(Y(u)_l v\big)_{m+k-l}. \tag{5.1}$$

这是一个李括号关系。有趣的是，这个一般公式并非来自李群，而是来自留数定理。然而，在许多具体例子中，这类李括号关系确实具有李理论起源。

借此机会，我想简要谈谈顶点算子代数理论与李理论之间的相似之处和区别。在顶点算子代数理论中，留数定理是从复解析世界过渡到代数世界的标准方法。反方向的过渡则通过强留数定理实现。这与李理论截然不同。在李理论中，人们通过取导数，从微分几何表述（即李群）过渡到代数表述（即李代数），反之则通过求幂/积分实现。因此，尽管李括号确实出现在顶点算子代数中，但将顶点算子代数视为李代数的推广，并不总是有益的。这两种数学对象具有截然不同的几何直观。此外，如果我们从复解析的角度看待顶点算子代数，那么根据（4.10），顶点算子代数更接近交换代数。因此，顶点算子代数可以被视为李代数和交换代数二者的量子版本。

5.3

取 u 为共形向量 $\mathbf{c}$，在（5.1）中，并回忆 $Y(\mathbf{c})_{m+1}=L_m$。我们得到

$$\begin{aligned}[L_m,Y(v)_k]&=\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{m+1}{l}Y(L_{l-1}v)_{m+k+1-l}\\ &=Y(L_{-1}v)_{m+k+1}+\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{m+1}{l+1}Y(L_l v)_{m+k-l}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

两边乘以 z^{-k-1}，并对所有 $k\in\mathbb{Z}$ 求和，我们得到

$$[L_m,Y(v,z)]=z^{m+1}Y(L_{-1}v,z)+\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{m+1}{l+1}z^{m-l}Y(L_l v,z) \tag{5.3}$$

无论是在 $\mathrm{End}(\mathbb{V})[[z^{\pm 1}]]$ 的层次上，还是在任意 $w \in \mathbb{V}$ 与 $w' \in \mathbb{V}'$ 之间取值时作为 z 的劳朗多项式。接着，情形 $m = -1$ 和 $m = 0$ 意味着

$$[L_{-1}, Y(v,z)] = Y(L_{-1}v, z) \tag{5.4a}$$
$$[L_0, Y(v,z)] = zY(L_{-1}v, z) + Y(L_0 v, z). \tag{5.4b}$$

注意，这两个等式仅由雅可比恒等式推出。由平移性质可得

$$Y(L_{-1}v, z) = \frac{d}{dz} Y(v,z). \tag{5.5}$$

等价地，应用 $\mathrm{Res}_{z=0}(\cdot) z^n dz$，可得一个重要关系

$$Y(L_{-1}v)_n = -nY(v)_{n-1}. \tag{5.6}$$

（得到右侧公式最快的方法是分部积分。）

练习 5.2。 证明 (3.39) 可由 (5.6) 和创生性质推出。

练习 5.3。 假设 $\mathbb{V}$ 满足下截断性质 (3.15)，并满足定义 3.1 中顶点算子代数的所有公理，但分次性质和平移性质除外。利用 (5.4) 证明下列条件等价。

1. 分次性质。
2. $Y(L_{-1}v,\ z) = \partial_z Y(v,\ z)$ 对所有 $v \in \mathbb{V}$ 均成立。
3. 平移性质。
4. 不假设 $L_{-1}\mathbf{1} = 0$的平移性质。

因此，我们可以使用下截断性质和这四个条件中的任意一个，来替换顶点算子代数定义中的分次和平移性质。

练习 5.4。 在 (5.2) 中，令 $v = \mathbf{c}$，并证明该公式与 Virasoro 关系相容。

5.4

我们看到，对于 5.3)，（$m = 0,\ -1$（连同（5.5））表示分次和平移性质，它们积分后得到旋转协变性和平移协变性。对于一般的m，(5.3) 也有几何解释。为简化讨论，我们假设 v 是初级的，并给出相应的解释。

定义 5.5。向量 $v \in \mathbb{V}$ 称为**初级向量**，如果它是齐次的，并且对所有 $n > 0$都有 $L_n v = 0$。

一些重要的顶点算子代数（例如仿射顶点算子代数）由初级向量生成。而共形场论中的许多重要公式最初是由物理学家证明的，他们假设其理论是由初级向量生成的，具体含义如下：

定义 5.6。 如果 $\mathbb{V}$ 由形如 $Y(v_1)_{n_1}\cdots Y(v_k)_{n_k}\mathbf{1}$ 的向量张成，其中 $k\in\mathbb{N}$、 n_1，……，$n_k\in\mathbb{Z}$ 和 v_1，……， $v_k\in E$，我们就称一个顶点算子代数 $\mathbb{V}$ 由子集 $E\subset\mathbb{V}$ **生成**。

确实，公式（5.3）对于任意初级向量 v 是这样一个例子；结合（5.5），可得

$$[L_m,Y(v,z)]=z^{m+1}\partial_z Y(v,z)+(m+1)\mathrm{wt}v\cdot z^m Y(v,z). \tag{5.7}$$

物理学家称之为（更准确地说，它等价于物理学家所称的）**共形 Ward 恒等式**。

取一个全纯向量场 $f(z)\partial_z=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n z^{n+1}\partial_z$，定义在$\mathbb{S}^1$的一个邻域上。令 $\sigma_\tau=\exp(\tau f\partial_z)$为全纯流。于是，（5.7）（其中 L_m、 z^m替换为$\sum_m a_m L_m$、 $\sum_m a_m z_m$）积分后得到

$$e^{\tau\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nL_n}Y(v,z)e^{-\tau\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nL_n}=\big(\partial_z\sigma_\tau(z)\big)^{\mathrm{wt}v}Y\big(v,\sigma_\tau(z)\big), \tag{5.8}$$

称为**共形协变性**。目前，我们不以严格的方式处理这个公式。不过，读者可以验证等式两边关于 τ 都满足相同的线性微分方程，从而自行确信这一点。

（5.8）的右边看起来很熟悉。设 $\tau=1$， $\sigma=\sigma_1$，且 $\Delta=\mathrm{wt}v$。那么公式（5.8）类似于函数 $\big(\partial(\varphi\circ\sigma)\big)^\Delta=\big(\partial\varphi\circ\sigma\big)^\Delta\cdot(\partial_z\sigma)^\Delta$ 和 $\varphi=\varphi(z)$的变量代换公式；其中 ∂ 是标准的全纯导数。确实，主场 $Y(v,\ z)$ 可以看作是 $(\partial\varphi)^\Delta$的量子化，或者更一般地说，是 $\partial\varphi_1\cdots\partial\varphi_\Delta$的量子化。将（5.8）写成如下形式也很有意思：

$$e^{\sum a_nL_n}\big(Y(v,z)dz^\Delta\big)e^{-\sum a_nL_n}=Y(v,\sigma)d\sigma^\Delta. \tag{5.9}$$

共形协变性（5.8）可以用与我们在小节 3.14 和 3.15中解释旋转协变性和平移协变性时类似的几何方式来理解。（我们将在之后假设 $f=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{n+1}\partial_z$，再给出这种解释。）因此，从共形场论的角度来看，这个公式自然地源自第 2 节中的参数化变换公式，以及第 $Y(v$ 节 $z)$ 中顶点算子的物理定义 3（如果我们暂且忽略标量乘法带来的唯一性问题）。特别是，我们用于公式（5.7）的几何直观是李理论的，因为维拉索罗代数与参数化变换公式之间的关系，类似于李代数表示与李群表示之间的关系。不过，我们也从雅可比恒等式推导出了（5.7），其几何直观则依赖于留数定理。我们该如何看待这两种几何图景之间的这种巧合?

我的回答是，我们应该将李理论的解释视为共形协变性/Ward 恒等式的根本解释。事实上，为了利用雅可比恒等式得到 (5.7)，我们假设 $\sum L_nz^{-n-2}$ 是 $\mathbb{V}$中某个向量的顶点算子，也就是共形向量 $\mathbf{c}$。但第 3 节并未解释为何这一假设应纳入 VOA 的定义。这里我们简要说明一下：稍后我们将看到（参见重构定理 5.12 和注 5.13），如果域 $A(z)$ 的傅里叶模 $A_m\in\mathrm{End}(\mathbb{V})$ 与生成子集 $E\subset\mathbb{V}$内 v 对应的模 $Y(v)_k$ 满足正确的雅可比恒等式（例如 (5.1) 或 (5.7)），那么 $A(z)$ 必定是 $Y(u,\ z)$ 对于某个

$u \in \mathbb{V}$。因此，（在我看来）更好的观点是，我们使用共形 Ward 恒等式（其几何直观依赖于参数化变换公式和 $Y(u,\ z)$ 的物理意义）以及雅可比恒等式，来解释 $\sum L_n z^{-n-2}$由 $\mathbb{V}$ 中的一个向量 $\mathbf{c}$ 表示这一事实，而不是用顶点算子代数 Jacobi 恒等式来解释 Ward 恒等式。

5.5

我们称 $\mathbb{V}$ 为**CFT型**，如果对每个 n都有 $\dim \mathbb{V}(n) < +\infty$，并且 $\mathbb{V}(0) = \mathbb{C}\mathbf{1}$。CFT型条件非常自然且宽松，我们笔记中的所有例子都满足这一条件。它表明，能量为零的量子态只有真空。

在本小节中，我们假设 $\mathbb{V}$ 是CFT型，并研究5.1对 $\mathbb{V}(1)$中向量的情形。对每个 $u \in \mathbb{V}(1)$，我们将 $Y(u)_m$ 简记为 u_m。由3.10可知，u_l 使权降低 l。于是，5.1表明 $[u_m,\ v_n] = (u_0 v)_{m+n} + m(u_1 v)_{m+n-1}$，其中 $u_l v$ 在 $l > 1$ 时为零，因为它的权是 $1 - l$。由于 $u_1 v \in \mathbb{V}(0) \in \mathbb{C}$，我们可以写成

$$u_1 v = (u, v)\mathbf{1} \tag{5.10}$$

其中 $(\cdot,\ \cdot)$ 是 $\mathbb{V}(1)$上的双线性形式。因此 $(u_1 v)_{m+n-1} = (u,\ v)\delta_{m,\ -n}$，因为 $Y(\mathbf{1},\ z) = \mathbf{1}$。令

$$[u, v] := u_0 v. \tag{5.11}$$

Then

$$[u_m, v_n] = [u, v]_{m+n} + m(u, v)\delta_{m,-n}. \tag{5.12}$$

命题 5.7。 $[\cdot,\cdot]$ 在 $\mathbb{V}(1)$ 上定义了一个李代数结构，并且 $(\cdot,\cdot)$ 是一个不变的对称双线性型，即 $(u, v) = (v, u)$ 以及 $([w, u], v) = -(u, [w, v])$。

证明。由于创生性质，$w \in \mathbb{V}(1) \mapsto w_{-1}$ 是单射，因为 $w_{-1}\mathbf{1} = w$。根据 (5.12)，$[u, v]_{-1} = [u_0, v_{-1}] = -[v_{-1}, u_0] = -[v, u]_{-1}$。这证明了 $[u, v] = -[v, u]$。利用 (5.12) 计算$[u_1, v_{-1}]$和 $[v_{-1}, u_1]$，我们得到 $(u, v) = (v, u)$。(5.12) 蕴含

$$[w_k, [u_m, v_n]] = [w, [u, v]]_{k+m+n} + k(w, [u, v])\delta_{k+m+n,0}.$$

应用线性算子的李括号所满足的雅可比恒等式，我们得到 $[\cdot,\ \cdot]$ 在 $\mathbb{V}(1)$ 上的雅可比恒等式，令 $k = -1$，$m = n = 0$；令 $k = 0$，$m = 1$，$n = -1$，则得到 $(\cdot,\ \cdot)$的不变性。 □

向量空间 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_n,\ \mathbf{1}_{\mathbb{V}}:\ n \in \mathbb{Z}\}$ 是一个李代数，其括号运算是线性算子的标准括号。由于它满足（5.12），我们称其为与有限维复李代数 $\mathbb{V}(1)$相关联的 $\mathbb{V}$ 仿射李代数，它由 $\mathbb{V}(1)$生成时，我们称$\mathbb{V}$ 为**仿射顶点算子代数**。

我们主要关注 $(\cdot,\cdot)$ 非退化的情形。当共形场论（或顶点算子代数）是酉的，这一点总是成立，因为 $(\cdot,\cdot)$ 确实是将 $A_{1,1}$ 限制到 $\mathbb{V}^{\otimes 2}$上所得关联函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\Theta\cdot|\cdot\rangle$ 的负值。此外，一个酉仿射顶点算子代数 $\mathbb{V}$ 是

确实由其李子代数唯一确定 $\mathbb{V}(1)$，其中 $\mathbb{V}(1)$ 是一个阿贝尔李代数与一个半单李代数的直和。（关于酉顶点算子代数与其“酉”李子代数之间关系的详细说明，请参阅 [Gui19第 1 节，以及 2] $\mathbb{V}(1)$。）严格意义上的仿射李代数和仿射顶点算子代数，是指 $\mathbb{V}(1)$ 为单李代数的情形。另一方面，如果 $\mathbb{V}(1)$ 是阿贝尔的，那么 $\mathbb{V}$ 则称为**自由玻色子顶点算子代数**或**海森堡顶点算子代数**。

如果 $\mathbb{V}$ 由c生成，我们称 $\mathbb{V}$ 为一个**Virasoro 顶点算子代数**。

5.6

现在我们转向 $m=0,\ n<0$ 顶点算子代数 Jacobi 恒等式（4.12）中的情形。首先考虑 $n=-1$。那么（4.12）可写为

$$Y\big(Y(u)_{-1}v\big)_k=\sum_{l\in\mathbb{N}}Y(u)_{-1-l}Y(v)_{k+l}+\sum_{l\in\mathbb{N}}Y(v)_{k-1-l}Y(u)_l. \tag{5.13}$$

这个公式可以用一种紧凑的方式来表示。对于一般的级数 $f(z)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}a_lz^{-l-1}\in W[[z^{\pm1}]]$，其中 W 是一个向量空间，我们令

$$f(z)_+=\sum_{l\in\mathbb{N}}a_lz^{-1-l},\qquad f(z)_-=\sum_{l\in\mathbb{N}}a_{-l-1}z^l \tag{5.14}$$

(s所以我们有 $f(z)=f(z)_++f(z)_-$）。定义**正规序积** t

$$:Y(u,z)Y(v,z):=Y(u,z)_-Y(v,z)+Y(v,z)Y(u,z)_+ \tag{5.15}$$

它通常是非交换的。于是（5.13）可以简写为

$$Y\big(Y(u)_{-1}v,z\big)=:Y(u,z)Y(v,z): \tag{5.16}$$

由（5.6）可得

$$Y(u)_{-j-1}=\frac{1}{j!}Y(L_{-1}^ju)_{-1} \tag{5.17}$$

当 $j\geqslant0$。将此与 $Y(L_{-1}^ju,\ z)=\partial_z^jY(u,\ z)$结合起来，我们得到

$$Y\big(Y(u)_{-j-1}v,z\big)=\frac{1}{j!}:\big(\partial_z^jY(u,z)\big)Y(v,z): \tag{5.18}$$

其中，正规序乘积的定义方式类似，使用 $\partial_z^jY(u,\ z)$的正部和负部。留给读者验证，当 4.12 中 $m=0,\ n<0$。

因此，一旦我们知道对于小生成子集 E 中所有 u，$Y(u,\ z)$ 的形式，就可以利用公式写出任意 $w\in\mathbb{V}$ 的 $Y(w,\ z)$ 的公式

$$Y\big(Y(u_1)_{-j_1-1}\cdots Y(u_k)_{-j_k-1}v,z\big)=\frac{1}{j_1!\cdots j_k!}:\partial_z^{j_1}Y(u_1,z)\cdots\partial_z^{j_k}Y(u_k,z)\cdot Y(v,z): \tag{5.19}$$

其中，多个算子的正规序乘积通过以下递归方式定义。

$$:A_1A_2\cdots A_n:=:A_1(:A_2\cdots A_n:): \tag{5.20}$$

5.7

还可以使用（ $Y(Y(u)_n v)\ \ z$) 写出 $n \geqslant 0$ 的显式公式，其中使用了（4.12），这里 $m=0,\ \ n \geqslant 0$。但正如我所说，（4.12）由特殊情形 $m=0,\ \ n<0$和 $n=0$决定。因此我们希望 $Y(Y(u)_n v,\ \ z),\ \ n \geqslant 0$ 可以使用（5.1）计算出来。事实确实如此。

将（5.1）写成等价形式

$$\big[Y(u)_m, Y(v,z)\big] = \sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{m}{l} z^{m-l} Y\big(Y(u)_l v, z\big). \tag{5.21}$$

因此，对于 $m \geqslant 0, Y(Y(u)_m v,\ \ z)$ 可以通过以下方式归纳计算

$$\begin{aligned} Y\big(Y(u)_0 v, z\big) &= \big[Y(u)_0, Y(v,z)\big] \\ Y\big(Y(u)_m v, z\big) &= \big[Y(u)_m, Y(v,z)\big] - \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} z^{m-l} Y\big(Y(u)_l v, z\big). \end{aligned} \tag{5.22}$$

我们现在看到了顶点算子的李括号与数据 $Y\big(Y(u)_m v,\ \ z\big),\ \ m \geqslant 0$ 之间的密切关系。后者所起的作用与 $Y\big(Y(u)_m v,\ \ z\big),\ \ m<0$ 大不相同。为了更好地理解这种关系，我们将结合关系（4.9）写成

$$Y(u,z_2)Y(v,z_1) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (z_2-z_1)^{-m-1} Y(Y(u)_m v, z_1) \tag{5.23}$$

当 $0<|z_2-z_1|<|z_1|$时。这里，我们将 $Y(u,\ \ z_2)Y(v,\ \ z_1)$ 理解为 $Y(v,\ \ z_1)Y(u,\ \ z_2)$，其中 $0<|z_1|<|z_2|$，或者更一般地，将其理解为 $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ 上的一个线性泛函，它将 $w\otimes w'$ 映射到 $T_{\mathfrak{P}_{z_1,\ z_2}}(w\otimes_v \otimes u\otimes w')$（与（4.4）相关联的关联函数），对所有 $(z_1,\ \ z_2)\in \mathsf{Conf}$ 均成立。那么，（5.23）中的部分 $m \geqslant 0$ 则对应于 $T_{\mathfrak{P}_{z_1,\ z_2}}(w\otimes v\otimes u\otimes w')$ 在 $z_2=z_1$ 处的极点。

（5.23）中的求和项在 m充分大的正值时为零。在物理学中，形式如下的级数展开

$$A(z_2)B(z_1) = \sum_{m\geqslant -N} (z_2-z_1)^m C^m(z_1)$$

称为场 **的算子乘积展开（算子乘积展开）** $A(z_2),\ \ B(z_1)$。因此，在顶点算子代数的语境中，算子乘积展开就是结合性(4.9)。算子乘积展开对物理学家很有用，因为它能将 4点关联函数的计算化简为3点关联函数的计算，或者一般地，将 N点化为 $(N-1)$点。

我们将（5.23）的右端分为两部分： $m \geqslant 0$，称为**正则项**，因为它在 $z_2=z_1$处没有极点；而 $m<0$ 称为**奇异项**。因此

$$Y(u,z_2)Y(v,z_1) = \frac{Y(Y(u)_{N-1}v,z_1)}{(z_2-z_1)^N} + \cdots + \frac{Y(Y(u)_0 v,z_1)}{(z_2-z_1)} + \text{regular terms},$$

或者，用物理学语言来说，

$$Y(u,z_2)Y(v,z_1) \sim \frac{Y(Y(u)_{N-1}v,z_1)}{(z_2-z_1)^N} + \cdots + \frac{Y(Y(u)_0 v,z_1)}{(z_2-z_1)}. \tag{5.24}$$

因此，总结而言，（5.1）确立了顶点算子的李括号、关联函数 $T_{\mathfrak{P}_{z_1,\ z_2}}$ 在 $z_1 = z_2$处的有限个极点，以及顶点算子的算子乘积展开中有限个奇异项之间的密切关系。作为一种特殊情形，由（5.21）和（5.22）可知，两个顶点算子 $Y(u,\ z_2)$，$Y(v,\ z_1)$ 可交换（即，它们的傅里叶模$Y(u)_m$，$Y(v)_k$ 可交换），当且仅当 $Y(u,\ z_2)Y(v,\ z_1)$ 的算子乘积展开中没有奇异项；当且仅当$T_{\mathfrak{P}_{z_1,\ z_2}}(\cdot \otimes v \otimes u \otimes \cdot)$ 在 $z_2 = z_1$ 的某个邻域上全纯。</final>

5.8

在上一小节中，我们根据顶点算子代数的定义（特别是顶点算子代数 Jacobi 恒等式）推导出了这一关系。因此，一个自然的问题是：这一关系是否依赖于完整的雅可比恒等式？例如，它是否依赖于（5.18）？

答案是否定的。粗略地说，以下三者中的任意一项都能推出另外两项，而无需假设完整的雅可比恒等式。

1. 场算子 $A(z_2)$、$B(z_1)$满足适当的李括号关系。
2. $\langle w'$、$A(z_2)B(z_1)w\rangle$ 在 $z_2 = z_1$处的（解析延拓的）有限个极点。
3. $A(z_2)B(z_1)$的算子乘积展开中的有限个奇异项，尤其是此类算子乘积展开的存在性。

显然，第三项先验地蕴含第二项，因为第二项并不假设算子乘积展开的存在。因此，正如我们所说，算子乘积展开大致等同于结合律，由此可见，结合律（事实上，完整的雅可比恒等式）可以从上述第一项或第二项推导出来。这称为**重构定理**，因为它使我们能够通过仅检验雅可比恒等式的一小部分，即李括号关系，来构造顶点算子代数的例子。这一定理是构造顶点算子代数例子时最重要的定理。

上述三个陈述等价性的严谨详细讨论将在第 7 节给出。第一和第二个陈述对应 **局部性** 的三种看似不同、实则等价的定义，适用于 $A(z_2)$，$B(z_1)$。（描述第二种定义有两种方式：形式变量方式和复解析方式。）这里，我们先给出第一种定义的严谨表述。

5.9

设 $\mathbb{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(n)$ 是一个由可对角化算子 L_0 分次的 $\mathbb{N}$-分次向量空间。我们不假设 $\mathbb{V}$ 和 L_0 来自任何分次顶点代数。

定义 5.8. 一个（L_0-）**齐次域（算子）**在 $\mathbb{V}$ 上是一个元素

$$A(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n z^{-n-1} \in \mathrm{End}(\mathbb{V})[[z^{\pm 1}]]$$

（其中每个 A_n 都属于 $\mathrm{End}(\mathbb{V})$），满足

$$[L_0, A(z)] = \Delta_A \cdot A(z) + z\partial_z A(z) \tag{5.25}$$

或者等价地,

$$[L_0, A_n] = (\Delta_A - n - 1)A_n \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}). \tag{5.26}$$

Δ_A 称为 $A(z)$的**权**。

显然，齐次场 $A(z)$ 满足**下截断性质** $A(z)w \in \mathbb{C}((z))$ （对于所有 $w \in \mathbb{V}$）。

定义 5.9 (局部场 (李代数版本))。 给定齐次场 $A(z)$ 和$B(z)$，我们称 $A(z)$ 与 $B(z)$ 是**局部** 的，如果存在 $C^j(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^j z^{-n-1} \in \mathrm{End}(\mathbb{V})[[z^{\pm 1}]]$（其中 $j = 0, 1, \ldots, N-1$，对某个 $N \in \mathbb{N}$）满足

$$[A_m, B_k] = \sum_{l=0}^{N-1} \binom{m}{l} C^l_{m+k-l} \tag{5.27}$$

对于所有 $m, k \in \mathbb{Z}$。我们将（5.27）的右端视为 0，如果 $N = 0$。

注 5.10。 $A(z)$ 对 $B(z)$ 是局部的，当且仅当存在 $D^0(z), \ldots, D^{N-1}(z) \in \mathrm{End}(\mathbb{V})[[z^{\pm 1}]]$，使得对所有 $m, k \in \mathbb{Z}$，都有

$$[A_m, B_k] = \sum_{l=0}^{N-1} m^l D^l_{m+k}. \tag{5.28}$$

这是因为 $\widetilde{C}^l_j := C^l_{j-l}$ 和 D^l_j 之间存在如下关系$\widetilde{C}^l_j + \sum_{p=l+1}^{N-1} a_{p,\,l} \cdot \widetilde{C}^p_j = D^l_j$ 其中每个$a_{p,\,l} \in \mathbb{R}$ 都由 $\binom{m}{p} = m^p + \sum_{l=1}^{p-1} a_{p,\,l} \cdot m^l$确定。

练习 5.11. 利用 (5.28) 证明：若 $A(z)$ 与 $B(z)$ 局部，则 $B(z)$ 与 $A(z)$局部 .

5.10

粗略地说，重构定理指出，若我们有一小组 $\mathcal{E}$ 算子 $A(z) \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$，它们生成 $\mathbb{V}$，并满足分次顶点代数/顶点算子代数定义中的所有公理，只是将雅可比恒等式替换为一个较弱的条件，即 $\mathcal{E}$ 中的算子两两局部，则雅可比恒等式会自动成立，因此 $\mathbb{V}$ 是一个分次顶点代数/顶点算子代数。该定理将在第 8节证明。

定理 5.12 (重构定理)。 令 $\mathcal{E}$ 为 L_0-齐次场在 $\mathbb{V}$ 上的集合。假设满足以下条件。则 $\mathbb{V}$ 具有唯一的分次顶点代数结构，使得每个 $A(z) \in \mathcal{E}$ 都是一个顶点算子（即，具有 $Y(u, z)$ 的形式，其中 $u \in \mathbb{V}$ 为某个元素），并且真空向量$\mathbf{1}$ 和算子 L_{-1} 如下所述。

- 创生性质：存在一个特定的向量 $\mathbf{1} \in \mathbb{V}(0)$，使得对于所有 $A(z) \in \mathcal{E}$，$A(z)\mathbf{1}$ 都不含 z 的负幂。
- 平移性质：存在一个特殊的 $L_{-1} \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ 使得 $L_{-1}\mathbf{1} = 0$，并且对于每个 $A(z) \in \mathcal{E}$，我们都有 $[L_{-1}, A(z)] = \partial_z A(z)$。

- 生成性质：形如 $A^1_{n_1}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1}$ 的向量（其中 $k\in\mathbb{N}, A^1(z),\ldots,A^k(z)\in\mathcal{E}$，以及 $n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}$）张成 $\mathbb{V}$。
- 局部性：$\mathcal{E}$ 的任意两个场都是局部的。

此外，若 L_0，L_{-1} 可以扩展为一列算子 $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 作用于 $\mathbb{V}$，使得$\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}$ 属于 $\mathcal{E}$，并且 *Virasoro* 关系 (2.8) 对某个 $c\in\mathbb{C}$成立，那么 $\mathbb{V}$ 就是一个顶点算子代数，其共形向量 $\mathbf{c}$ 满足 $Y(\mathbf{c}\ z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}$。

注意，分次顶点代数/顶点算子代数结构的唯一性可直接由（5.19）推出。当然，这个定理的非平凡部分在于此类结构的存在性。

注 5.13。重构定理 5.12 的结尾意味着，要证明一个分次顶点代数 $\mathbb{V}$ 是顶点算子代数，只需证明 L_0，L_{-1} 可以扩展为 $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，并满足 Virasoro 关系；证明 $T(z)=\sum L_nz^{-n-2}$ 满足创生性质（也就是说，$L_n\mathbf{1}=0$ 对所有 $n\geqslant -1$均成立）；并证明 $T(z)$ 与 $\mathcal{E}$ 中的任意域都局部（例如，通过证明共形 Ward 恒等式 $[L_m,A(z)]=z^{m+1}\partial_zA(z)+\Delta_A\cdot z^mA(z)$对所有 $A(z)\in\mathcal{E}$ 成立，如果预期所有 $A(z)$ 都是“初级”的）。由于 Virasoro 关系，平移性质自动成立 $[L_{-1},\ L_n]=-(n+1)L_{n-1}$。

6 构造顶点算子代数的例子

6.1

上一节中，我们提到了一些重要的顶点算子代数例子：仿射顶点算子代数和 Virasoro 顶点算子代数。但我们没有解释它们为何存在。本节将完成这一任务。本节的标准参考文献是 [LL，第 6] 章，以及 [Was10]（着重讨论幺正性方面）。

本节的风格与前几节不同：它带有浓厚的李理论色彩。本节中的方法今后不会用到（讨论顶点算子代数模的例子时除外）。因此，如果读者不想费心探究存在性问题，可以放心略过本节。（但至少应阅读关于张量积顶点算子代数的第 6.17 小节。）

我们首先介绍的一类例子是 Virasoro 顶点算子代数，也就是由共形向量 $\mathbf{c}$ 生成的顶点算子代数。首先，**维拉索罗代数** 是李代数 Vir $=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{L_n,\ K:n\in\mathbb{Z}\}$ satisfying the bracket relation

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{K}{12}(m+1)m(m-1)\delta_{m,-n},$$
$$[K,L_n]=0.$$

我们知道，任意顶点算子代数都必须对所有 $n\geqslant -1$ 满足 $L_n\mathbf{1}=0$。受这一事实启发，我们得到：

命题6.1。设 $\mathbb{V}$ 是一个 *Vir* 表示，其中 L_0 可对角化且具有 $\mathbb{N}$-谱。假设 $\mathbb{V}$ 有一个由$\mathbf{1}$ 表示的特殊向量，该向量被所有 $n\geqslant -1$ 对应的 L_n 湮灭，并且形如

$L_{n_1}\cdots L_{n_k}\mathbf{1}$（其中 $k\in\mathbb{N}$、n_1、……、$n_k\in\mathbb{Z}$）的向量张成 $\mathbb{V}$，且 K 作用为常数 $c\in\mathbb{C}$。那么 $\mathbb{V}$ 具有唯一的自然 *Virasoro* 顶点算子代数结构。其中心荷为 c。

证明。 这直接由重构定理得出。 5.12。注意，由（5.28），$\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}$ 由于 Virasoro 关系，它与自身局部。 □

6.2

因此，仍需构造满足命题 Vir-模 6.1。我们先找出一个这样的"最大"模。我们预期这个模应有基$L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\mathbf{1}$其中 $n_1\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 2$，因为：

练习 6.2。 设 $\mathbb{V}$如命题 6.1所述。利用关于 k 的归纳法证明， $L_{n_1}\cdots L_{n_k}\mathbf{1}$（对于任意 n_1，.. . ， n_k）可以写成以下元素的线性组合：$L_{-m_1}\cdots L_{-m_l}\mathbf{1}$ 其中$l\in\mathbb{N}$， m_1，.. . ， $m_l\geqslant 2$。 （提示：如果 $n_j\leqslant -2$，利用 Virasoro 关系将 L_{n_j} 移至最右端。）

现在让我们为每个 $c\in\mathbb{C}$ 构造这个最大的模 $V_{\mathrm{Vir}}(c,\ 0)$。它的基由 $(-n_1,\ \ldots\ldots,\ -n_k)$ 组成，其中 $k\in\mathbb{N}$ 且 $n_1\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 2$。其中 $k=0$ 的元素记作 $\mathbf{1}$。若 $n\geqslant n_1$，我们只需定义 L_{-n} 对每个 $(-n_1,\ \ldots\ldots,\ -n_k)$ 的作用为 $(-n,\ -n_1,\ \ldots\ldots,\ -n_k)$。但我们也希望定义 L_n 对 $(-n_1,\ \ldots\ldots,\ -n_k)$ $=L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\mathbf{1}$ 的作用，其中 $n\in\mathbb{Z}$ 取遍所有值。实际上，我们可以利用 Virasoro 关系显式写出公式。例如：$L_0L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\mathbf{1}=(n_1+\cdots+n_k)L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\mathbf{1}$，并且

$$\begin{aligned}&L_3L_{-4}L_{-3}\mathbf{1}=[L_3,L_{-4}]L_{-3}\mathbf{1}+L_{-4}[L_3,L_{-3}]\mathbf{1}\\=&7L_{-1}L_{-3}\mathbf{1}+6L_{-4}L_0\mathbf{1}+2cL_{-4}\mathbf{1}=(14+2c)L_{-4}\mathbf{1}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

关于这种方法，一个自然的问题是：我们如何验证这样定义的 Vir 在 $V_{\mathrm{Vir}}(c,0)$ 上的作用保留 Vir 的李括号关系?

6.3

处理这个问题的标准方法是使用 **庞加莱´–伯克霍夫–维特（PBW）**定理，其内容如下：设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数（定义在任意域上）。设 $U(\mathfrak{g})$ 是它的泛包络代数，即包含向量空间 $\mathfrak{g}$ 并由其生成的最大含幺结合代数，使得对所有 $x,y\in\mathfrak{g}$，都有 $xy-yx=[x,y]$。若 E 是$U(\mathfrak{g})$ 的一组基，并带有全序 $\leqslant$，则形如以下形式的向量

$$x_1x_2\cdots x_k\qquad(k\in\mathbb{N},x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_k\in E)\tag{6.3}$$

（当 $k=0$ 时，我们将此表达式理解为 1）构成 $U(\mathfrak{g})$ 的一组基。

PBW 定理的非凡之处在于，若我们定义一个向量空间 V，使其以形如（6.3）的向量为基，并定义 $x\in\mathfrak{g}$的作用时使用 $\mathfrak{g}$ 的李括号关系（类似于（6.2）中的论证），那么这就给出了一个良定义的 $\mathfrak{g}$在 V上的作用，并保留 $\mathfrak{g}$的括号关系；也就是说，这给出了一个良定义的 $\mathfrak{g}$的表示。

为了将 PBW 定理应用于我们构造顶点算子代数的过程中，我们需要以下结果：

练习 6.3。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 其中 $\mathfrak{g}_1$，$\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}$的李子代数。利用 PBW 定理证明存在一个向量空间同构 $U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2) \to U(\mathfrak{g})$，它将每个 $x_1 \cdots x_k \otimes y_1 \cdots y_l$映到 $x_1 \cdots x_k y_1 \cdots y_k$，其中 $x_\bullet \in \mathfrak{g}_1$，$y_\bullet \in \mathfrak{g}_2$。

证明是一个 PBW 定理的一个简单应用，留给读者完成 .

6.4

考虑以下 Vir 的李子代数:

$$V_- = \mathrm{Span}\{L_n : n \leqslant -2\}, \qquad V_+ = \mathrm{Span}\{K, L_n; n \geqslant -1\}.$$

$\mathbb{C}_c = \mathbb{C}$ 是 V_+ 的表示，如果我们令 L_n 作用为 0，并令 K 为 c。因此，$\mathbb{C}_c$ 也是一个 $U(V_+)$-模。现在，$U(\mathrm{Vir})$ 显然是一个右 $U(V_+)$-模。因此。

$$\mathrm{Ind}_{U(V_+)}^{U(V)} \mathbb{C}_c := U(\mathrm{Vir}) \otimes_{U(V_+)} \mathbb{C}_c$$

是一个（左） $U(\mathrm{Vir})$-模，称为 $\mathbb{C}_c$ 的诱导表示。这是一个 Vir-模，并且根据练习 6.3，该向量空间同构于 $U(V_-) \otimes_{\mathbb{C}} U(V_+) \otimes_{(U(V_+))} \mathbb{C}_c \simeq U(V_-)$。根据 PBW 定理，它具有如下形式的向量构成的基：$L_{-n_1} \cdots L_{-n_k}\mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1}$ 是单位元 1，且 $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_k \geqslant 2$。因此，我们可以将 $V_{\mathrm{Vir}}(c, 0)$ 视为 $\mathrm{Ind}_{U(V_+)}^{U(V)} \mathbb{C}_c$。特别地，这证明了 $V_{\mathrm{Vir}}(c, 0)$ 自然地具有 Vir 的表示结构。因此，根据命题 6.1，$V_{\mathrm{Vir}}(c, 0)$ 是一个中心荷为 c 的 Virasoro 顶点算子代数。

练习 6.4. 求出 $Y(L_{-4}\mathbf{c}\ z)$ 在 $V_{\mathrm{Vir}}(c,\ 0)$ 上的显式表达式，用 Virasoro 算子 L_n表示。

6.5

$V_{\mathrm{Vir}}(c,\ 0)$ 并不总是不可约的Vir-模。但不可约的情形最有趣。例如，每个 CFT 型酉顶点算子代数都是不可约的。（参见[CKLW18]。）

在李理论中，构造不可约例子的方法相当标准：我们取 $V_{\mathrm{Vir}}(c, h)$ 的最大商。更准确地说，注意，对于 $V_{\mathrm{Vir}}(c, h)$ 的任意真 Vir-不变子空间 W，注意 L_0 在 W,[2] 上可对角化，即 W 具有一个 L_0-分次，其最低权不能为 0，否则它就包含 1，因而必定是 $V_{\mathrm{Vir}}(c, 0)$。令 I 为所有此类 W 的张成空间，则 I 是最大的真 Vir-子空间，因为 I 没有非零零权向量。然后

$$L_{\mathrm{Vir}}(c, 0) := V_{\mathrm{Vir}}(c, 0)/I$$

是不可约的 bleVir-模，它根据命题 6. 1.

[2]一般来说，如果 D 是向量空间 M 上的可对角化线性算子，且 W 是 M的 D-不变子空间，那么 $D|_W$ 可对角化。为此，任取 $w \in M$，将其写成有限和 $w_1 + \cdots + w_k$，其中每一项都是 M中 D 的特征向量，且它们对应的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$各不相同。利用多项式插值，求得一个多项式 p，使得$p(\lambda_j) = \delta_{1,j}\lambda_1$。因此 $w_1 = p(D)w \in M$。

6.6

人们可能会想知道，何时 $L_{\mathrm{Vir}}(c,0)$ 等于 $V_{\mathrm{Vir}}(c,0)$，也就是说，何时 I 是平凡的。实际上， I 非平凡当且仅当

$$c = c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \tag{6.4}$$

其中 $p, q \in \{2, 3, 4, \dots\}$ 互素。（参见 [LL，注 6.1。13] 以及其中的参考文献。）在此情形下， $L_{\mathrm{Vir}}(c,0)$ 称为**极小模型**。它有有限多个不可约模。极小模型是一类重要的“有理”顶点算子代数。更准确地说：**有理且 C_2-余有限的** 顶点算子代数。我们将在后续章节给出这些术语的确切含义。这类顶点算子的共形块理论已相当成熟。

<escape>这是一个深刻的结果： $L_{\mathrm{Vir}}(c,\ 0)$ 是一个酉Vir-模，当且仅当 $c \geqslant 1$ 或 c 满足（6.4），其中 $|p-q| = 1$，即：</escape>

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \tag{6.5}$$

对于某个整数 $m \geqslant 2$。有关详情，请参阅 [FMS，第 8] 章，以及 [Was10，第四章] 。

6.7

现在我们转向仿射顶点算子代数。固定一个有限维复李代数 $\mathfrak{g}$ ，连同一个非退化的对称不变双线性型 $(\cdot,\ \cdot)$。（事实上，在定义维拉索罗算子之前，我们不会用到非退化性。）回想一下，不变性意味着

$$([X,Y],Z) = -(Y,[X,Z]). \tag{6.6}$$

一个**仿射李代数**是具有基 X_n， K （其中 $X \in \mathfrak{g}$， $n \in \mathbb{Z}$）的 $\hat{\mathfrak{g}}$，满足李括号关系

$$= [X,Y]_{m+n} + m(X,Y)\delta_{m,-n}K,$$
$$[K, X_m] = 0.$$

添加一个基元素 D （它将成为我们顶点算子代数的 L_0 ），加入到 $\hat{\mathfrak{g}}$ 中，从而得到一个稍大的李代数 $\tilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}} \rtimes \mathbb{C}D$，这样

$$[D, X_m] = -mX_m, \qquad [D,K] = 0.$$

$\tilde{\mathfrak{g}}$也称为仿射李代数。

6.8

$\tilde{\mathfrak{g}}$ 分解为李子代数 $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_- \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_+$，其中

$$\tilde{\mathfrak{g}}_- = \mathrm{Span}\{X_n : X \in \mathfrak{g}, n < 0\}, \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_+ = \mathrm{Span}\{X_n, K, D : X \in \mathfrak{g}, n \geqslant 0\}.$$

那么 $U(\tilde{\mathfrak{g}}) \simeq U(\tilde{\mathfrak{g}}_-) \otimes U(\tilde{\mathfrak{g}}_+)$ 根据练习6.3。对于每个 $l \in \mathbb{C}$ 称为**层**，我们令 $\mathbb{C}_l = \mathbb{C}$ 为一个 $\tilde{\mathfrak{g}}_+$-模，使得 K 作用为 l，并且 X_n，D 均平凡作用。我们关注两类相关的顶点算子代数：

$$V_{\mathfrak{g}}(l, 0) := \mathrm{Ind}_{U(\tilde{\mathfrak{g}}_+)}^{U(\tilde{\mathfrak{g}})} \mathbb{C}_l = U(\tilde{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\tilde{\mathfrak{g}}_+)} \mathbb{C}_l \tag{6.7}$$

它作为向量空间自然等价于 $U(\tilde{\mathfrak{g}}_-)$。令 $\mathbf{1}$ 为 $U(\tilde{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\tilde{\mathfrak{g}}_+)} \mathbb{C}_l$ 中的 $1 \otimes 1$。那么 $V_{\mathfrak{g}}(l, 0)$ 有一组向量基

$$X_{-n_1}^{i_1} \cdots X_{-n_k}^{i_k} \mathbf{1}$$

（其 D-权为 $n_1 + \cdots + n_k$），按字典序排列，其中 $\{X^1, X^2, \ldots\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基，而 $n_1, \ldots\ldots, n_k > 0$。因此，$D$ 在 $V_{\mathfrak{g}}(l, 0)$ 上可对角化，其谱非负，且每个特征空间均为有限维。与第6.5小节中的论证类似，我们可以取一个单商

$$L_{\mathfrak{g}}(l, 0) = V_{\mathfrak{g}}(l, 0)/I \tag{6.8}$$

其中 I 是最大的真 $\tilde{\mathfrak{g}}$-子模。

$V_{\mathfrak{g}}(0, 0)$ 和 $L_{\mathfrak{g}}(0, 0)$ 永不相等，因为：

练习 6.5。证明 $L_{\mathfrak{g}}(0, 0)$ 由 $\mathbf{1}$ 张成。等价地，证明若 $l = 0$，则 I 包含所有特征值为 > 0 的 D-特征向量。

接下来，我们讨论如何将 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$ 构造成顶点算子代数，因为 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$ 是我们主要感兴趣的对象。同样的方法也适用于 $V_{\mathfrak{g}}(l, 0)$。

对每个 $X \in \mathfrak{g}$，X_n 都以显然的方式作用于 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$。我们将 $X(z) \in \mathrm{End}(L_{\mathfrak{g}}(l, 0))[[z^{\pm 1}]]$ 定义为

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n z^{-n-1}.$$

它是一个齐次场（相对于 D），权为 $\mathbf{1}$，因为 $[D, X_n] = -nX_n$。容易验证这些场满足创生性质和局部性，并且它们生成 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$。因此，剩下的工作是构造 L_{-1} 并验证平移性质。实际上，我们将以统一的方式构造所有 L_n。

6.9

选取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 E，由此得到一组对偶基 $\{\check{e} : e \in E\}$，也就是说，对每个 $e, f \in E$，$\check{e}(e, f) = \delta_{e,f}$，相对于给定的非退化对称双线性形式 $(\cdot, \cdot)$。由线性代数可知，

$$\sum_{e \in E} e \otimes \check{e} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \tag{6.9}$$

与基 E的选择无关。由此立即可得:

$$\sum_{e\in E}\check{e}\otimes e=\sum_{e\in E}e\otimes\check{e}. \tag{6.10}$$

借助 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\ X\otimes Y\mapsto[X,\ Y]$，这表明 $\sum[\check{e},\ e]=\sum[e,\ \check{e}]=-\sum[\check{e},\ e]$，即,

$$\sum_{e\in E}[\check{e},e]=0. \tag{6.11}$$

引理 6.6. 对每个 $X\in\mathfrak{g}$，我们有

$$\sum_{e\in E}\check{e}\otimes[e,X]=-\sum_{e\in E}[\check{e},X]\otimes e. \tag{6.12}$$

证明。 使用 $Y\otimes Z$ 利用 $(\cdot,\ \cdot)$并利用不变性条件（6.6证明两边均等于 $(Y,\ [X,\ Z])$。 □

因此，在每个 $\mathfrak{g}$-模 V 上，我们有 $\sum\check{e}[e,\ X]+\sum[\check{e},\ X]e=0$，也就是说,

$$\sum_{e}[\check{e}e,\mathfrak{g}]=0. \tag{6.13}$$

因此，当 V 为有限维，且不可约或平凡时，根据舒尔引理，$\Omega=\sum\check{e}e\in\mathrm{End}(V)$ 是一个常数，称为**卡西米尔元**。算子 Ω 通常给出李群作用的负拉普拉斯算子。

假设 6.7. 我们假设，对于伴随表示 $\mathfrak{g}\rightharpoonup\mathfrak{g},X\mapsto[X,\cdot]$，Casimir 元素是一个常数 $2h^\vee\in\mathbb{C}$，即,

$$\sum_{e\in E}[\check{e},[e,\cdot]]=2h^\vee\mathbf{1}_{\mathfrak{g}}. \tag{6.14}$$

当 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的（此时 $h^\vee=0$）或单的时，这总是成立。我们假设

$$l+h^\vee\neq 0.$$

6.10

我们定义 Virasoro 算子，仿佛共形向量是

$$\mathbf{c}=\gamma^{-1}\sum_{e}\check{e}_{-1}e_{-1}\mathbf{1}\qquad\big(\text{where }\gamma=2(l+h^\vee)\big). \tag{6.15}$$

因此，利用（5.13）和 $L_m=Y(\mathbf{c})_{m+1}$，并注意到 $\check{e}_ie_j=e_i\check{e}_j$ 由（6.10），写出定义

$$L_m=\gamma^{-1}\sum_{e}\Big(\sum_{k\leqslant-1}\check{e}_ke_{m-k}+\sum_{k\geqslant0}\check{e}_{m-k}e_k\Big) \tag{6.16}$$

作用于 $L_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$。这称为 **Sugawara 构造**。可以验证，这个和作用于任意向量时都是有限的。

为了使用重构定理，我们需要以下关键事实:

命题 6.8。对于每个 m， $n \in \mathbb{Z}$ 和 $X \in \mathfrak{g}$,

$$[L_m, X_n] = -nX_{m+n}. \tag{6.17}$$

（注意，若假设顶点算子代数结构存在，那么（6.17）可由共形 Ward 恒等式（5.7）以及 $X_{-1}\mathbf{1}$ 确实是初级的这一事实推出。）

约定 6.9。 在本节余下部分，如果可能，我们省略 $\sum_e$。

由此命题可知， $T(z) = \sum_m L_m z^{-m-2}$ 和 $X(z)$ 是局部的，而$X(z)$ 满足平移性质。为了使用重构定理，我们需要验证以下事实:

引理 6.10。 以下结论成立。

(a) $T(z)$ 满足创生性质，即若 $n \geqslant -1$，则 $L_n\mathbf{1} = 0$ 。

(b) L_0 与 D一致。

(c) $\{L_n\}$满足 *Virasoro* 关系。

证明。 (a) 假设 $m \geqslant -1$。由于根据我们的构造，所有 $X_0\mathbf{1}$ 都为零，因此 $\sum_{k\geqslant 0} \breve{e}_{m-k}e_k\mathbf{1}$ 为 0。因为 $m-k \geqslant m+1 \geqslant 0$，所以 $\sum_{k\leqslant -1} \breve{e}_k e_{m-k}\mathbf{1}$ 为 0。

(b) 由于 $L_0\mathbf{1} = 0$和 $[L_0, X_n] = -nX_n = [D, X_n]$、 L_0和 D在任意$X^1_{n_1}\cdots X^k_{n_k}\mathbf{1}$上的作用相同。因此 $L_0 = D$。

(c) 根据重构定理， $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$ 是一个分次顶点代数。根据我们对 L_m 和 $\mathbf{c}$的定义，显然 $L_m = Y(\mathbf{c})_{m+1}$。我们可以用（5.1）或（5.2）来证明

$$[L_m, L_n] = Y(L_{-1}\mathbf{c})_{m+n+2} + \sum_{l\geqslant 0}\binom{m+1}{l+1} Y(L_l\mathbf{c})_{m+n+1-l}. \tag{6.18}$$

根据表达式$\mathbf{c}$，显然 $L_0\mathbf{c} = D\mathbf{c} = 2\mathbf{c}$。此外，由 Sugawara 构造可知，显然有 $[D, L_m] = -mL_m$，即 $[L_0, L_m] = -mL_m$。因此，若 $l > 2$，则 $L_l\mathbf{c} = 0$。为了求出$[L_m, L_n]$，我们需要求出 $L_1\mathbf{c}$ 和 $L_2\mathbf{c}$。

利用（6.17），我们计算得到 $\gamma L_1\mathbf{c}$ 等于

$$L_1\breve{e}_{-1}e_{-1}\mathbf{1} = [L_1, \breve{e}_{-1}]e_{-1}\mathbf{1} + \breve{e}_{-1}[L_1, e_{-1}]\mathbf{1} = \breve{e}_0 e_{-1}\mathbf{1} + \breve{e}_{-1}e_0\mathbf{1} = \breve{e}_0 e_{-1}\mathbf{1}.$$

并且 $\breve{e}_0 e_{-1}\mathbf{1} = [\breve{e}_0, e_{-1}]\mathbf{1} = [\breve{e}, e]_{-1}\mathbf{1}$ 等于0 由（6.11）可得。回忆一下， K 在 l 上作用为 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$。于是$\gamma L_2\mathbf{c}$ 等于

$$\begin{aligned} &L_2\breve{e}_{-1}e_{-1}\mathbf{1} = [L_2, \breve{e}_{-1}]e_{-1}\mathbf{1} + \breve{e}_{-1}[L_2, e_{-1}]\mathbf{1} = \breve{e}_1 e_{-1}\mathbf{1} + \breve{e}_{-1}e_1\mathbf{1} \\ =&\breve{e}_1 e_{-1}\mathbf{1} = [\breve{e}_1, e_{-1}]\mathbf{1} = [\breve{e}, e]_0\mathbf{1} + l(\breve{e}, e)\mathbf{1}, \end{aligned}$$

这等于 $l\cdot$维数$\mathfrak{g}\cdot\mathbf{1}$。因此，利用（5.6），我们发现（6.18）变为 Virasoro 关系，其中 $\frac{c}{2} = \gamma^{-1}l\cdot$维数$\mathfrak{g}$。 □

因此，根据重构定理5.12，我们得出:

定理 6.11。 对于 $l \neq -h^\vee$， $V_{\mathfrak{g}}(l, 0)$和 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$是满足 $Y(X_{-1}\mathbf{1}, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n z^{-n-1}$ （对于所有 $X \in \mathfrak{g}$）的顶点算子代数，若我们将共形向量 $\mathbf{c}$ 定义为 (6.15)中的形式。中心荷为 $\frac{l\cdot\text{维数}\,\mathfrak{g}}{l+h^\vee}$。

6.11 ⋆

剩下的任务是证明命题 6.8。回顾约定 6.9，我们省略了 $\sum_e$。以下讨论聚焦于 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$，不过同样的论证也适用于 $V_{\mathfrak{g}}(l, 0)$。

引理 6.12。对于所有的 $i, j, n \in \mathbb{Z}$，在 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$ 上我们有 $[\check{e}_i e_j, X_n] = A_{i,j,n} + B_{i,j,n}$ 其中

$$A_{i,j,n} = \check{e}_i[e, X]_{j+n} - \check{e}_{i+n}[e, X]_j \tag{6.19a}$$
$$B_{i,j,n} = -nl(\delta_{j,-n} X_i + \delta_{i,-n} X_j). \tag{6.19b}$$

特别是，$B_{i,j,n} = B_{j,i,n}$.

证明。我们计算

$$[\check{e}_i e_j, X_n] = \check{e}_i[e_j, X_n] + [\check{e}_i, X_n] e_j = A_{i,j,n} + B_{i,j,n}$$

其中

$$A_{i,j,n} = \check{e}_i[e, X]_{j+n} + [\check{e}, X]_{i+n} e_j$$
$$B_{i,j,n} = -nl\delta_{j,-n} \cdot \check{e}_i(e, X) - nl\delta_{i,-n}(\check{e}, X) e_j.$$

$B_{i,\ j,\ n}$ 显然等于（6.19b），这是由（对偶）基的基本性质得到的。注意，一般而言，对于所有 $i,\ j \in \mathbb{Z}$，根据引理 6.6 以及映射 $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(L_{\mathfrak{g}}(l,\ 0))$ 将 $Y \otimes Z$ 映射到 $Y_i Z_j$，我们有

$$[\check{e}, X]_i e_j = -\check{e}_i[e, X]_j. \tag{6.20}$$

这就证明了$A_{i,\ j,\ n}$ 等于（6.19a）。 □

命题 *6.8* 的证明。我们计算

$$[\gamma L_m, X_n] = \sum_{k \leqslant -1} [\check{e}_k e_{m-k}, X_n] + \sum_{k \geqslant 0} [\check{e}_{m-k} e_k, X_n]$$
$$= \sum_{k \leqslant -1} (A_{k,m-k,n} + B_{k,m-k,n}) + \sum_{k \geqslant 0} (A_{m-k,k,n} + B_{m-k,k,n}).$$

由引理 6.12，这两个 B 之和为

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_{k,m-k,n} = -nl \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_{m-k,-n} X_k + \delta_{k,-n} X_{m-k}) = -2nl X_{m+n}.$$

此外，

$$\sum_{k \geqslant 0} A_{m-k,k,n} = \sum_{k \geqslant 0} \check{e}_{m-k}[e, X]_{k+n} - \sum_{k \geqslant 0} \check{e}_{m+n-k}[e, X]_k$$

其中，作用于任意向量时，这两个求和都是有限的。但第一项求和就是（令 $j = k + n$）$\sum_{j \geqslant n} \check{e}_{m+n-j}[e,\ X]_j$。因此

$$\sum_{k \geqslant 0} A_{m-k,k,n} = -\big(\check{e}_{m+n}[e, X]_0 + \check{e}_{m+n-1}[e, X]_1 + \cdots + \check{e}_{m+1}[e, X]_{n-1}\big). \tag{6.21}$$

类似地，令 $i=m-k$,

$$\sum_{k\leqslant -1} A_{k,m-k,n}=\sum_{i\geqslant m+1}\check{e}_{m-i}[e,X]_{i+n}-\sum_{i\geqslant m+1}\check{e}_{m+n-i}[e,X]_i$$
$$=-\left(\check{e}_{n-1}[e,X]_{m+1}+\cdots+\check{e}_0[e,X]_{m+n}\right). \tag{6.22}$$

由引理 6.13，(6.21) 与 (6.22) 之和为 $-2nh^\vee X_{m+n}$。证明至此完成。 □

引理 6.13. 对于每个 i、$j\in\mathbb{Z}$ 和 $X\in\mathfrak{g}$,

$$\check{e}_i[e,X]_j+\check{e}_j[e,X]_i=2h^\vee X_{i+j}. \tag{6.23}$$

这是我们唯一使用.....的定义之处 $h^\vee$ （参见假设6.7）。

证明。由（6.20），

$$\check{e}_i[e,X]_j+\check{e}_j[e,X]_i=\check{e}_i[e,X]_j-[\check{e},X]_j e_i,$$

根据（6.10）和映射 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(L_{\mathfrak{g}}(l,\ 0))$，$Y\otimes Z\mapsto[Y,\ X]_jZ_i$，即是

$$\check{e}_i[e,X]_j-[e,X]_j\check{e}_i=[\check{e}_i,[e,X]_j]=[\check{e},[e,X]]_{i+j}+il\delta_{i,-j}(\check{e},[e,X]).$$

现在，由于 $(\cdot,\ \cdot)$，$(\check{e},\ [e,\ X])=([\check{e},\ e],\ X)$，其根据（6.11）等于 0。根据 $h^\vee$ 的定义，$[\check{e},\ [e,\ X]]=2h^\vee X$。证明完成。 □

6.12

现在我们讨论仿射顶点算子代数的幺正性问题。首先考察海森堡顶点算子代数，即假设 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的。假设 $\mathfrak{g}$ 配备了内积 $(\cdot|\cdot)$（对第一个变量共轭线性）以及反酉对合 $X\in\mathfrak{g}\mapsto X^*\in\mathfrak{g}$。回想一下，“反酉”意味着 $*$ 是共轭线性的、双射的，并且满足

$$(X^*|Y^*)=(Y|X).$$

对合意味着 $X^{**}=X$。将 $\mathfrak{g}$ 视为一个（阿贝尔）**酉李代数**，我们把 $*$ 和 $(\cdot|\cdot)$ 视为 $\mathfrak{g}$ 的组成部分。

练习 6.14. 证明 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathbb{C}^n$ 在保留标准内积的情况下酉同构，其中对合为 $(z_1,\dots,z_n)\mapsto(z_1,\dots,z_n)$，这是唯一固定 $\mathbb{R}^n$ 的对合。（提示：先找出一个实同构 $\{X\in\mathfrak{g}:\ X^*=X\}$ 到 $\mathbb{R}^n$，使其保留内积。）

容易验证，由下式定义的双线性形式 $(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathfrak{g}$ 上

$$(X,Y)=(X^*|Y) \tag{6.24}$$

是对称的 。（显然是不变的。）我们使用这个双线性形式来定义 $V_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$。

命题6.15。 $l>0$ 当且仅当在 $V_{\mathfrak{g}}(l$上存在一个内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$， $0)$ 满足$\langle\mathbf{1}|\mathbf{1}\rangle=1$，使得 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 在 $V_{\mathfrak{g}}(l$上的表示$0)$ 是酉的，也就是说，对于每个 $X\in\mathfrak{g}$、 u、 $v\in V_{\mathfrak{g}}(l$、 $0)$、 $n\in\mathbb{Z}$,

$$\langle u|X_n v\rangle=\langle (X^*)_{-n}u|v\rangle,\qquad \langle u|Kv\rangle=\langle Ku|v\rangle,\qquad \langle u|Dv\rangle=\langle Dv|u\rangle,$$

或简写为简写为 y $(X_n)^\dagger=X^*_{-n}$、 $K^\dagger=K$、 $D^\dagger=D$。如果存在，这样的 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 是唯一的。

"如果"部分很容易解释：我们计算得到 $\langle X_{-1}\mathbf{1}|X_{-1}\mathbf{1}\rangle=\langle\mathbf{1}|X_1^*X_{-1}\mathbf{1}\rangle=\langle\mathbf{1}|[X^*,\ X]_0\mathbf{1}\rangle+l(X^*,X)=l(X|X)$。因此，如果 $\langle\cdot|\cdot\rangle$是一个内积，那么对于每个 $X\neq 0$, $l(X|X)$ 都是 >0。所以 $l>0$。现在我们解释"仅当"部分。为简化讨论，通过将 $(\cdot|\cdot)$ 以及因此将 $(\cdot,\ \cdot)$ 缩放为 l，并将 K 缩放为 l^{-1}, 我们只需假设 $l=1$。（实际上，人们在讨论海森堡顶点算子代数时通常直接假设 $l=1$。）

6.13 ⋆

假设 $l=1$。 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的唯一性很容易证明：

$$\langle X^1_{n_1}\cdots X^k_{n_k}\mathbf{1}|Y^1_{m_1}\cdots Y^l_{m_l}\mathbf{1}\rangle=\langle\mathbf{1}|(X^k)^*_{-n_k}\cdots(X^1)^*_{-n_1}Y^1_{m_1}\cdots Y^l_{m_l}\mathbf{1}\rangle=:\langle\mathbf{1}|w\rangle.$$

如果 $n_1+\cdots+n_k=m_1+\cdots+m_l$, 那么 w 的 D-权为 0。但权为 0 的齐次向量是 $\mathbb{C}\mathbf{1}$。因此 $w=\lambda\mathbf{1}$, 而 λ 由李括号关系唯一确定。如果 $n_1+\cdots+n_k\neq m_1+\cdots+m_l$, 那么 w 的权不为 0。因此 $w=0$，因为 $\langle D\mathbf{1}|w\rangle=\langle\mathbf{1}|Dw\rangle$。

存在性部分可由对称 Fock 空间的一般构造得到。设 W 是一个（复）内积空间，并带有一个反酉对合 $*$。注意，对于每个 $N\in\mathbb{N}$, $W^{\otimes N}$ 自然构成一个内积空间。假设 W 有一个标准正交基 $\{e_i:\ i\in\mathfrak{I}\}$（它在代数意义下张成 W）。设 $\mathfrak{S}_N$ 为 $\{1,\ldots,N\}$上的排列集合。对于每个 $v_1,\ldots,\ v_N\in W$，我们定义

$$v_1\cdots v_N:=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(N)},$$

并令 $S^N(W)\subset W^{\otimes N}$由所有此类向量张成。我们将 $S^0(W)$视为标准的一维内积空间 $\mathbb{C}$。特别地，它有一个单位向量 $\mathbf{1}$。$S^N(W)$有一个由向量组成的正交归一基。

$$\frac{(e_{i_1})^{m_1}\cdots(e_{i_k})^{m_k}}{\sqrt{m_1!\cdots m_k!}}\qquad(\text{where } i_1,\ldots,i_k\in\mathfrak{I}\text{ are distinct and }\sum_{j=1}^k m_j=N).\tag{6.25}$$

定义一个内积空间

$$S^\bullet(W)=\bigoplus_{N\in\mathbb{N}}S^N(W),\tag{6.26}$$

称为与 W 相关的**对称 Fock 空间**。对于每个 $v\in W$，定义线性映射$a^+(v)$, $a^-(v)$于 $S^\bullet(W)$ 上，由下式确定：

$$a^+(v)1=v,\qquad a^+(v)v_1\cdots v_N=vv_1\cdots v_N.\tag{6.27a}$$

$$a^-(v)1=0,\qquad a^-(v)v_1\cdots v_N=\sum_{j=1}^{N}\langle v^*|v_j\rangle\cdot v_1\cdots v_{j-1}v_{j+1}\cdots v_N. \tag{6.27b}$$

这些映射 $a^{\pm}(v)$ 是定义良好的，这得益于基（6.25）。

练习 6.16。 证明以下关系。

1. $a^+(v)^\dagger=a^-(v^*)$，即，对于所有 ξ， $\nu\in S^\bullet(W)$都成立$\langle\xi|a^+(v)\nu\rangle=\langle a^-(v^*)\xi|\nu\rangle$。（提示：将$\xi$， ν， v表示为前面提到的标准正交基向量的形式。）
2. $[a^-(u),\ a^+(v)]=\langle u^*|v\rangle\mathbf{1}_{S^\bullet(W)}$。这称为**正则对易关系（CCR）**。

现在令 $W=t^{-1}\cdot\mathfrak{g}[t^{-1}]$，其内积为

$$\langle Xt^{-m}|Yt^{-n}\rangle=m(X|Y)\delta_{m,n}$$

对于所有 m， $n\in\mathbb{Z}_+$都成立。对合定义为 $(Xt^{-m})^*=X^*t^{-m}$。根据 $S^\bullet(W)$的基的描述，通过将**1** 与 **1** 对应起来， $V_{\mathfrak{g}}(1,\ 0)$与 $S^\bullet(W)$线性等价，并且

$$X^1_{-n_1}\cdots X^k_{-n_k}\mathbf{1}\qquad\text{with}\qquad X^1t^{-n_1}\cdots X^kt^{-n_k}. \tag{6.28}$$

我们使用 $S^\bullet(W)$上的内积来定义 $V_{\mathfrak{g}}(1,\ 0)$上的内积。利用正则对易关系，不难验证 X_n在 $V_{\mathfrak{g}}(1,\ 0)\simeq S^\bullet(W)$上的作用为

$$X_n=\begin{cases}a^+(Xt^{-|n|}) & \text{if } n<0,\\ 0 & \text{if } n=0,\\ a^-(Xt^{-n}) & \text{if } n>0.\end{cases} \tag{6.29}$$

因此， $\tilde{\mathfrak{g}}$在 $V_{\mathfrak{g}}(1,\ 0)$上的表示是酉的。

6.14

当 $l>0$、 $L_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$和 $V_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$具有相同的酉性时，因为：

命题6.17。 若 $l\in\mathbb{C}^\times$，则 $V_{\mathfrak{g}}(l,0)$是一个不可约的 $\tilde{\mathfrak{g}}$-模，即 $V_{\mathfrak{g}}(l,0)=L_{\mathfrak{g}}(l,0)$。

证明。 我们假设 $l>0$，并利用酉性证明不可约性。任取 $V_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$的一个非零 $\tilde{\mathfrak{g}}$-子模 W。我们将证明 $W=V_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$。

由于 W是 D-不变子空间， D 在 W上可对角化。因此 W具有 D-分次 $W=\bigoplus_{n\geqslant a}W(n)$，其中 a是 D在 W上的最小特征值。我们声称 $a=0$。那么，由于 $V_{\mathfrak{g}}(l$ 中权为 0 的子空间$0)$显然由 **1** 张成，我们必有 $\mathbf{1}\in W$。由此可知 $W=V_{\mathfrak{g}}(l,0)$。

假设 $a>0$。我们选取一个非零的 $w\in W(a)$，它必定是形如 $X^1_{-n_1}\cdots X^k_{-n_k}\mathbf{1}$ 的向量之和，其中正整数 $n_1,\dots,n_k$ 的和为 a。于是，根据幺正性， $\langle w|w\rangle$（它非零）是 $\langle\mathbf{1}|(X^k)^*_{n_k}\cdots(X^1)^*_{n_1}w\rangle$之和。因此，对于某个

$X^1_{n_1}$，向量 $v=(X^1)^*_{n_1}w$ 必须非零。但 v 的 D-权为 $a-n_1<a$，而显然 $v\in W$。这是一个矛盾。

现在，对于一般的 $l=|l|e^{\mathbf{i}\theta}\in\mathbb{C}^\times$，我们可以将 $(\cdot,\ \cdot)$ 替换为 $e^{\mathbf{i}\theta}(\cdot,\ \cdot)$，并将 K 替换为 $e^{-\mathbf{i}\theta}K$。那么 $(\cdot|\cdot)$ 与新的 $(\cdot,\ \cdot)$ 满足关系 $(X|Y)=(e^{\mathbf{i}\theta}X^*,\ Y)$，而且 $X\mapsto e^{\mathbf{i}\theta}X^*$ 显然是一个反酉对合。因此，在新的对合和双线性形式下，$V_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$ 变为 $V_{\mathfrak{g}}(|l|,\ 0)$；后者已被证明是不可约的。□

6.15

一般而言，我们称一个有限维（复）李代数 $\mathfrak{g}$ 是**酉**的，如果它配备了一个内积 $(\cdot|\cdot)$ 和一个满足以下条件的反酉对合 $*$：

1. $[X,\ Y]^*=[Y^*,\ X^*]$。

2. 该内积是**不变的**，也就是说，$\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示是酉的：

$$([X,Y]|Z)=(Y|[X^*,Z]).$$

于是，$(X,\ Y):=(X^*|Y)$ 在 $\mathfrak{g}$上定义了一个对称不变双线性型。

练习 6.18. 设 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个 $\mathfrak{g}$-不变且 $*$-不变（即 $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},\mathfrak{k}^*=\mathfrak{k}$）子空间。设 $\mathfrak{k}^\perp$ 是 $\mathfrak{g}$中 $\mathfrak{k}$ 的正交补。

1. 证明 $\mathfrak{k}^\perp$ 也是 $\mathfrak{g}$-不变且 $*$-不变的。

2. 证明 $[\mathfrak{k},\ \mathfrak{k}^\perp]=0$，从而 $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{k}]=[\mathfrak{k},\ \mathfrak{k}]$。因此，如果 $\mathfrak{k}$ 是不可约的$\mathfrak{g}$-子模，那么 $\mathfrak{k}$ 是一个不可约 $\mathfrak{k}$-模；若进一步 $[\mathfrak{k},\ \mathfrak{k}]\neq 0$，则根据定义，它是一个单李代数。

设 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}$的中心，它显然是 $\mathfrak{g}$-不变且 $*$-不变的。设$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}=\mathfrak{z}^\perp$，使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{z}\oplus^\perp\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$。于是，伴随表示 $\mathfrak{g}\curvearrowright\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$（等价地，$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}\curvearrowright\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$）具有正交的、不可约的 $*$-不变分解 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}=\mathfrak{g}_1\oplus^\perp\cdots\oplus^\perp\mathfrak{g}_N$。每个 $\mathfrak{g}_j$都是单酉李代数，其分类由 A–G 型 Dynkin 图给出。

反过来，设 $\mathfrak{g}$ 是一个复单李代数，它是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的复化；$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 是一个有限维紧实李群 G 的实李代数。李理论中众所周知，实向量空间 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上存在一个唯一的（相差 $\mathbb{R}_{>0}$ 标量乘法）G 不变（等价地，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 不变）内积；得益于实直和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\oplus\mathbf{i}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，该内积可扩张为 $\mathfrak{g}$ 上的复不变内积 $(\cdot|\cdot)$。$\mathfrak{g}$ 上的反酉对合定义为唯一一个固定$\mathbf{i}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 的反酉对合。因此，$\mathfrak{g}$ 是酉的。

因此，一般而言，如果 $\mathfrak{z}$ 是阿贝尔的，而 $\mathfrak{g}_1$、.....、$\mathfrak{g}_N$ 是单的，那么 $\mathfrak{g}=\mathfrak{z}\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_N$ 自然是一个酉李代数。因此，酉李代数的酉仿射顶点算子代数研究可归结为阿贝尔情形（我们已经完成）和单情形。

6.16

当 $\mathfrak{g}$ 是单的时，$V_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$ 和 $L_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$ 的幺正性性质与阿贝尔情形大不相同。实际上，在阿贝尔情形中，缩放内积不会改变阿贝尔酉李代数的酉等价类。（这是因为将向量缩放一个非零常数是阿贝尔李代数的一个同构。）但对于非阿贝尔李代数，这一点不再成立。此外，事实证明，对于单的 $\mathfrak{g}$，$V_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$ 永远不是酉 $\widetilde{\mathfrak{g}}$-模，而 $L_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$ 在固定不变内积时，仅对一组离散层 l 是酉的；或者在固定层 l 时，仅对一组离散的不变内积是酉的。

假设 $\mathfrak{g}$ 是一个具有紧形式分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\oplus\mathfrak{i}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$的单李代数。令$*$ 为固定$\mathfrak{i}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$的唯一对合。正如我们所说，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$（因而也包括 $\mathfrak{g}$）上的不变双线性形式在相差一个标量乘法的意义下唯一。因此，最好固定其中一个。人们通常选择的是：

约定 6.19。我们选择 $\mathfrak{g}$ 上的不变内积（在此内积下，$*$ 是反酉的），使得 $\mathfrak{g}$ 的最长根的长度为$\sqrt{2}$。

由 $(\cdot|\cdot)$ 的不变性可知 $h^\vee$（在假设6.7中定义）是一个正数。（为验证这一点，可以取 E 为 $\mathfrak{g}$的一组标准正交基，并检验其对偶基 $\{\check{e}:\ e\in E\}$ 满足 $\check{e}=e^*$。）与约定6.19 中的内积相对应的 $h^\vee$ 称为**对偶 Coxeter 数**。我们已经说过，$L_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$ 和 $V_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$在 $l\neq -h^\vee$时是顶点算子代数。因此，当 $l\geqslant 0$时，这一点成立。

定理 6.20. $L_{\mathfrak{g}}(l,0)$ 是酉的，当且仅当 $l\in\mathbb{N}$。对于这样的 l，$L_{\mathfrak{g}}(l,\ 0)$ 称为维斯-祖米诺-威滕（***WZW***）模型。

这是一个极其深奥的结果，其证明依赖于深刻的李理论。我们请读者参阅 [Was10, 第 III 章第 2 节和 10] 中的证明。此外，与极小模型一样，WZW 模型也是 C_2-余有限且有理的。因此，它们的表示范畴极为良好。由于这些性质，WZW 模型是研究共形场论和顶点算子代数的核心对象。（然而，海森堡顶点算子代数既非 C_2-余有限，也非有理的。）

6.17

我们已经证明，当酉李代数 $\mathfrak{g}$是阿贝尔或单李代数时，仿射顶点算子代数存在。一般情形可以通过张量积顶点算子代数来处理。

设 $\mathbb{V}_1$，$\mathbb{V}_2$ 为顶点算子代数。我们使用可对角化算子 $L_0\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{V}_2}+\mathbf{1}_{\mathbb{V}_1}\otimes L_0$ 来定义 $\mathbb{V}_1\otimes\mathbb{V}_2$ 上的分次。真空向量为 $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$。显然，$\mathbb{V}_1\otimes\mathbb{V}_2$ 由$Y(v_1)_m\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{V}_2}$和 $\mathbf{1}_{\mathbb{V}_1}\otimes Y(v_2)_n$ 生成，其中 $v_j\in\mathbb{V}_j$，并且 $Y(v_1,\ z)\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{V}_2}$显然与$Y(u_1,\ z)\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{V}_2}$局部相容（其中 $u_1\in\mathbb{V}_1$），且与 $\mathbf{1}_{\mathbb{V}_1}\otimes Y(v_2,\ z)$局部相容。可以验证，$L_{-1}\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{V}_2}+\mathbf{1}_{\mathbb{V}_1}\otimes L_{-1}$满足平移性质。因此，根据重构定理，$\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ 自然构成一个分次顶点代数。其顶点算子满足

$$Y(v_1\otimes\mathbf{1},z)=Y(v_1,z)\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{V}_2},\qquad Y(\mathbf{1}\otimes v_2,z)=\mathbf{1}_{\mathbb{V}_1}\otimes Y(v_2,z).\tag{6.30}$$

习题 6.21。 利用（5.13）或（5.16）证明

$$Y(v_1 \otimes v_2, z) = Y(v_1, z) \otimes Y(v_2, z). \tag{6.31}$$

等价地,

$$Y(v_1 \otimes v_2)_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1+n_2=n-1} Y(v_1)_{n_1} Y(v_2)_{n_2}. \tag{6.32}$$

当 $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ 是共形向量分别为$\mathbf{c}_1$,$\mathbf{c}_2$、中心荷分别为 c_1, c_2的顶点算子代数时，容易验证 $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$ 是一个共形向量为$\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{c}_2$的顶点算子代数。特别地，其维拉索罗算子为 $Y(\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{c})_{n+1} = L_n \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{V}_2} + \mathbf{1}_{\mathbb{V}_1} \otimes L_n$。我们称 $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$为 $\mathbb{V}_1$ 与 $\mathbb{V}_2$的**张量积顶点算子代数**。

习题 6.22。 证明 $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$ 的中心荷为 $c_1 + c_2$。

我们指出，如果 $\mathbb{V}_1$ 和 $\mathbb{V}_2$ 是酉的，那么它们的张量积也酉（参见[DL14、CKLW18]）。

习题 6.23。 设 $\mathfrak{g}_1$，……，$\mathfrak{g}_N$为阿贝尔代数或单代数。设 $\mathbb{V} = L_{\mathfrak{g}_1}(l_1, 0) \otimes \cdots \otimes L_{\mathfrak{g}_N}(l_N, 0)$。证明权1子空间 $\mathbb{V}(1)$作为李代数（参见第 5.5小节），自然同构于 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_N$。证明 $\mathbb{V}(1)$ 生成 $\mathbb{V}$。

习题 6.24. 证明 $L_{\mathbb{C}^n}(1,0) \simeq \underbrace{L_{\mathbb{C}}(1,0) \otimes \cdots \otimes L_{\mathbb{C}}(1,0)}_{n \text{ 倍}}$.

7 局部场

7.1

考察了一些重要的例子之后，我们现在回到一般理论。本节的目标是理解第 5.8 小节中三个陈述之间的密切关系。陈述 1 的精确表述是局部场的李括号版本，如定义 5.9 或注记 5.10. 对于陈述 2，我们给出两种严谨的描述：局部场的复解析版本和形式变量版本。我们先给出复解析版本，它更为直观。

我们首先需要定义：

定义 7.1. 设 Ω 是一个局部紧豪斯多夫空间。若一个函数级数 $\sum_n f_n$ 在 Ω 上**绝对且局部一致（a.l.u.）收敛**，则称其为在 Ω 上**绝对且局部一致（a.l.u.）收敛**，如果对每个 $x_0 \in \Omega$，都存在一个邻域 U 使得

$$\sup_{x \in U} \sum_n |f_n(x)| < +\infty.$$

等价地，对于每个紧子集 $K \subset \Omega$，我们有 $\sup_{x \in K} \sum_n |f_n(x)| < +\infty$

显然，如果每个 $\sum f_n$ 都一致几乎处处收敛，且每个 f_n 都是连续的（分别地，全纯的），那么极限 $\sum f_n$ 也具有相同性质。

7.2

现在设 $\mathbb{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(n)$ 按可对角化的 L_0分次。回忆投影P_n：$\mathbb{V}^{\mathrm{cl}} = \prod_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(m) \to \mathbb{V}(n)$（参见（3.18））。设 $A(z) = \sum A_n z^{-n-1}$、 $B(z) = \sum B_n z^{-n-1}$ 是权为 Δ_A、 Δ_B的齐次场（参见定义 5.8）。对每个 $n \in \mathbb{N}$和 v， $v' \in \mathbb{V}$，我们有

$$\langle v', A(z_1)P_n B(z_2)v\rangle \quad \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times) \tag{7.1}$$

由于当 v、 v' 为齐次时，该表达式等于

$$\langle v', A_{n_1} B_{n_2} v\rangle z_1^{-n_1-1} z_2^{-n_2-1}$$

其中 n_2、 n_1 由 $\Delta_B + \mathsf{wt} v - n_2 - 1 = n$ 和 $\Delta_A + n - n_1 - 1 = \mathsf{wt} v'$确定。

定义 7.2（**局部场**（复解析版本））。如果对于每个 $v \in \mathbb{V}$、 $v' \in \mathbb{V}'$ 以下条件均成立，我们称 $A(z)$ 和 $B(z)$ 彼此**局部**。

1. 级数

$$\langle v', A(z_1)B(z_2)v\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle v', A(z_1)P_n B(z_2)v\rangle \tag{7.2a}$$

$$\langle v', B(z_2)A(z_1)v\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle v', B(z_2)P_n A(z_1)v\rangle \tag{7.2b}$$

分别在开集 $\Omega_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 0 < |z_2| < |z_1|\}$和 $\Omega_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 0 < |z_1| < |z_2|\}$上一致几乎处处收敛，因此（7.2a）和（7.2b）自动是在Ω_1 和 Ω_2上的全纯函数。

2. (7.2a) 和 (7.2b) 可解析延拓为同一个全纯函数$f_{v,\ v'}$ 定义在 $\mathsf{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ 上。此外，存在一个仅依赖于 A， B 而不依赖于 v， v' 的函数，使得

$$(z_1 - z_2)^N f_{v,v'}(z_1, z_2) \tag{7.3}$$

在 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ 上全纯。

粗略地说，这一定义表明，(7.2a) 和 (7.2b) 在 Ω_1,Ω_2上几乎处处局部一致收敛，并延拓为定义在 $\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ 上的同一个全纯函数，其在 N处的极点阶数至多为 $z_1 = z_2$，其中 N与 v， v' 无关。

7.3

读者会立即注意到，关于 $A(z_1)B(z_2)$ 还有另一个自然的收敛条件：$\langle v',\ A(z_1)B(z_2)v\rangle$ 作为 z_1， z_2 的形式洛朗级数，在 Ω_1上一致几乎处处收敛。更准确地说，联合级数

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle v', A_m B_n v\rangle z_1^{-m-1} z_2^{-n-1} \tag{7.4}$$

在 Ω 上几乎一致收敛。这与定义 7.2 中的收敛陈述等价吗？答案是肯定的。但人们很容易忽略证明这种等价性的必要性。而且，我们需要收敛的这两种表述，因为它们在不同情形下都很有用。例如，要证明形式变量蕴含复解析，证明形式洛朗级数几乎一致收敛会更容易；要证明反方向，最好使用式（7.2a）和（7.2b）右端的几乎一致收敛。

遗憾的是，还有另一种理解收敛（7.2a）的方式：我们将右端视为由形式洛朗级数构成的级数，z_1，z_2它在形式意义下也收敛到左端，作为形式洛朗级数，其含义如下：

定义 7.3。我们称一个序列（以 k为指标）

$$f_k(z_1,\dots,z_M)=\sum_{n_1,\dots,n_M\in\mathbb{Z}} f_{k,n_\bullet} z_1^{n_1}\cdots z_M^{n_M}$$

由 $W[[z_1^{\pm1}$、……、$z_M^{\pm1}]]$ **中的元素构成的，形式收敛**到

$$f(z_1,\dots,z_M)=\sum_{n_1,\dots,n_M\in\mathbb{Z}} f_{n_\bullet} z_1^{n_1}\cdots z_M^{n_M}$$

if 对于每个 $n_\bullet$，系数 $f_{k,\ n_\bullet}$ 除有限多个 k外都等于 $f_{n_\bullet}$。

注意，在应用中，k 可以取任意可数集：$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}^2$，等等 .
我们将借助下面这个显然的引理，证明两种几乎一致收敛的等价性。

引理 7.4。设 X 是一个复流形。设 $f_k(x、\ z_\bullet)$ 是关于 $z_1^{\pm1}$、……、$z_M^{\pm1}$ 的以 $\mathscr{O}(X)$ 为系数的单项式级数，即 $f_k(x、\ z_\bullet)=g_k(x)z^{n_{k,\ 1}}\cdots z^{n_{k,M}}{}^{M}$ 其中每个 $g_k\in\mathscr{O}(X)$ 和 $n_{k,j}\in\mathbb{Z}$。假设如果 $k\neq k'$，那么 $n_{k,j}\neq n_{k',j}$ 对某个 $1\leqslant j\leqslant M$ 成立。那么 $\sum_k f_k(x、\ z_\bullet)$ 显然形式收敛到某个 $f\in\mathscr{O}(X)[[z_1^{\pm1}$、……、$z_M^{\pm1}]]$。也就是说，形式上有如下结论：

$$f(x,z_\bullet)=\sum_k f_k(x,z_\bullet). \tag{7.5}$$

此外，设 Ω 为 $\mathbb{C}^M$ 的一个开子集。则 $f(x,\ z_\bullet)$作为 $\mathscr{O}(X)$-系数的 $z_\bullet$（按 $z_\bullet$的幂次索引）形式洛朗级数，在 $X\times\Omega$ 上一致几乎处处收敛，当且仅当级数$\sum_k f_k(x,\ z_\bullet)$（按 k索引）在 $X\times\Omega$上一致几乎处处收敛。若如此，则两个极限相等，即(7.5) 作为全纯函数在 $X\times\Omega$ 上成立。

7.4

现在证明，作为关于 n 的无穷级数，(7.2a) 在Ω_1 上一致几乎处处收敛，当且仅当 (7.2a) 的左端作为关于 z_1，z_2 的形式洛朗级数在Ω_1上一致几乎处处收敛。注意，这两种收敛性在取线性组合后都保持不变。因此，只需假设 v，v'是齐次的。[3] 我们通过检验和式 (7.2a) 满足引理7.4中的假设来证明这一结论：

[3]如果 7.4 不是齐次的，就无法直接应用引理 v，v'。

由于 $B(z_2)$ 是齐次的，与命题 3.5 的证明类似，我们有平移协变性

$$B(\lambda z_2) = \lambda^{-\Delta_B} \cdot \lambda^{L_0} B(z_2) \lambda^{-L_0}. \tag{7.6}$$

这表明

$$B(z_2) = z_2^{-\Delta_B} \cdot z_2^{L_0} B(1) z_2^{-L_0}. \tag{7.7}$$

类似的关系 对 $A(z_1)$成立。因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有（在 $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}$的意义下）])

$$\begin{aligned} &\langle v', A(z_1) P_n B(z_2) v \rangle = \langle v', z_1^{L_0 - \Delta_A} A(1) z_1^{-L_0} P_n z_2^{-\Delta_B + L_0} B(1) z_2^{-L_0} v \rangle \\ =& z_1^{\mathrm{wt} v' - \Delta_A} z_2^{-\Delta_B - \mathrm{wt} v} \cdot \Big(\frac{z_2}{z_1}\Big)^n \big\langle v', A(1) P_n B(1) v \big\rangle, \end{aligned} \tag{7.8}$$

注意到 $z_1^{-L_0} P_n = z_1^{-n} P_n$ 和 $P_n z_2^{L_0} = P_n z_2^n$。

习题 7.5. 设 $\mathbb{V}$ 是一个分次顶点代数。取 $u, v \in \mathbb{V}$ 和 $v' \in \mathbb{V}'$。利用（3.36）和引理 7.4 证明

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \big\langle v', Y(u, z) P_n e^{-\tau L_{-1}} v \big\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \big\langle v', e^{-\tau L_{-1}} P_n Y(u, z + \tau) v \big\rangle, \tag{7.9}$$

其中两端在 $\{z \neq 0, |\tau| < |z|\}$ 上一致几乎处处收敛到同一个函数。（注意，右端是有限和。）

7.5

定义 7.6 (局部场 (形式变量版本)). 存在 $N \in \mathbb{N}$，其仅取决于 A 和 B，使得该方程

$$(z_1 - z_2)^N [A(z_1), B(z_2)] = 0 \tag{7.10}$$

在 $\mathrm{End}(\mathbb{V})[[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]$ 的层面上成立。

这种局部场的版本在文献中最为常见，部分原因是它最为简洁。事实上，由于局部性蕴含雅可比恒等式，许多人在定义顶点算子代数时用局部性代替雅可比恒等式。我们不采用这种做法，因为局部性本身也有局限：在定义顶点算子代数模和共形块时，我们需要完整的雅可比恒等式，而不仅仅是局部性。

7.6

几乎每个人第一次看到这个定义时都会提出这样的问题：难道（7.10）不意味着 $[A(z_1), B(z_2)] = 0$? 答案是否定的：对于向量空间 W，一般来说，可能存在 $fg = 0$，使得 $f(z_1, z_2), g(z_1, z_2) \in W[[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]$ 尽管 $f \neq 0$, $g \neq 0$。换句话说，为简单起见，假设 $W = \mathbb{C}$，那么 $\mathbb{C}[[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]$ （与 $\mathbb{C}[[z_1, z_2]]$不同）具有

“零因子”。（这里加上引号是因为 $\mathbb{C}[[z_1^{\pm 1},\ z_2^{\pm 1}]]$ 实际上并不是一个环。）

确实，取 $N>0$。那么 $(z_1-z_2)^{-N}$ 可以用两种方式展开：$f=\sum_{j\geqslant 0}\binom{-N}{j}z_1^j(-z_2)^{-N-j}$，仿佛 $|z_1|<|z_2|$；以及 $g=\sum_{j\geqslant 0}\binom{-N}{j}z_1^{-N-j}(-z_2)^j$，仿佛 $|z_1|>|z_2|$。于是 $f\neq g$，但 $(z_1-z_2)^N f=(z_1-z_2)^N g=1$。因此 $(z_1-z_2)^N$ 是一个零因子。类似地，通过将$(1+z)^{-N}$分别仿佛 $|z|<1$ 和仿佛 $|z|>1$那样展开，可以证明 $(1+z)^N$（其中 $N>0$）是 $\mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ 中的一个零因子。

这一现象与以下事实密切相关：$\mathbb{C}[[z_1^{\pm 1},\ z_2^{\pm 1}]]$（$\mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$也同样如此）不是一个环：任意两个元素的乘积都无法定义。这与下面的基本事实形成对比：

引理 7.7。如果 $\mathbb{F}$ 是一个域，那么 $\mathbb{F}((z))$ 自然也是一个域。特别地，$\mathbb{F}((z))$ 在乘积和逆（对于非零元素）运算下封闭。

习题 7.8。假设 $f(z)\in\mathbb{F}((z))$ 非零。找出一种确定逆 $1/f(z)$的算法。

因此，通过取 $\mathbb{F}=\mathbb{C}((z_1))$，我们看到 $\mathbb{C}((z_1))((z_2))$ 也是一个域。这意味着$(z_1-z_2)^N$ 在 $\mathbb{C}((z_1))((z_2))$中不是零因子：假设 $(z_1-z_2)^N f(z_1,\ z_2)=0$，并且 $f\in\mathbb{C}((z_1))((z_2))$，即

$$f(z_1,z_2)=\sum_{\substack{n_2\geqslant L\\ n_1\geqslant K_{n_2}}} f_{n_1,n_2}z_1^{n_1}z_2^{n_2}$$

对于每个 n_2，有某些 $L\in\mathbb{Z}$ 和 $K_{n_2}\in\mathbb{Z}$。于是 $f=0$，因为 $f=(z_1-z_2)^{-N}(z_1-z_2)^N f=0$，其中 $(z_1-z_2)^{-N}$ 是 $\mathbb{C}((z_1))((z_2))$ 中 $(z_1-z_2)^N$ 的逆，即 $\sum_{j\geqslant 0}\binom{-N}{j}z_1^{-N-j}(-z_2)^j$。（如果我们将 $(z_1-z_2)^{-N}$ 按照 $|z_1|<|z_2|$的方式展开，就会得到 $\mathbb{C}((z_2))((z_1))$ 中 $(z_1-z_2)^N$ 的逆。）

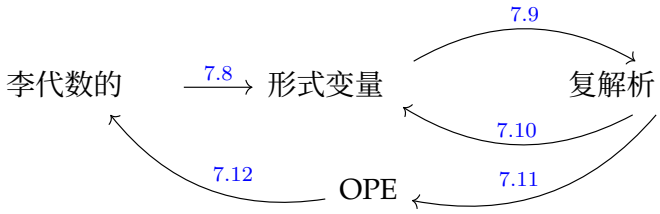
然而，如果 $f\in\mathbb{C}[[z_1^{\pm 1},z_2^{\pm 1}]]$ 既不属于 $\mathbb{C}((z_2))((z_1))$ 也不属于 $\mathbb{C}((z_1))((z_2))$，那么 $(z_1-z_2)^N f=0$ 并不意味着 $f=0$，因为我们无法将等式两边同时乘以$(z_1-z_2)^N$的任一逆。（即使等式两边都能定义，$\mathbb{C}[[z_1^{\pm 1},z_2^{\pm 1}]]$中也不存在结合律 $(fg)h=f(gh)$。）

7.7

这三个版本各有其优势，本节的目标就是证明它们彼此等价。这是证明重构定理的关键一步。此外，请注意，在这三个版本中，每个版本都包含一个数 N。我们可以证明同一个 N的三个版本彼此等价。

李代数版本最容易通过具体例子验证：我们在上一节已经见过这一点。相比之下，复解析版本最难验证。但复解析版本最接近物理学家对局部场的理解。因此，我们可以用类似物理学文献中的方式证明结果。例如：我们将使用局部场的复解析版本证明算子乘积展开的存在性。借助算子乘积展开，我们可以证明复解析版本蕴含李括号

版本，其方式与利用留数定理从复解析版本推导代数雅可比恒等式相同。最后，要从李代数版本证明复解析版本，我们需要借助形式变量版本。此外，利用形式变量版本，我们可以将定义7.2中的陈述推广到两个以上的场。这一推广对于证明重构定理至关重要。



从上面的图卡可以看出，为了证明这三个版本彼此等价，没有必要直接从复解析形式证明到形式变量形式。我们仍会给出这样的证明，因为：在顶点算子代数理论中，许多定义和性质既可以用代数语言（即形式变量）表述，也可以用复解析语言表述。学会如何在这两种语言之间转换非常重要。

7.8

李代数的意味着形式变量的证明是通过蛮力完成的。假设齐次场 $A(z)$, $B(z)$ 满足（5.27）。让我们证明 $(z_1-z_2)^N[A(z_1),\ B(z_2)]=0$。

证明。 证明 $(z_1-z_2)^N[A(z_1),\ B(z_2)]=0$ 等价于证明对于所有 $m,\ n\in\mathbb{Z}$，以下表达式都为零:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{z_1=0}\mathrm{Res}_{z_2=0}\ z_1^m z_2^n\cdot(z_1-z_2)^N[A(z_1),B(z_2)]dz_1dz_2\\
=&\sum_{j=0}^{N}\mathrm{Res}_{z_1=0}\mathrm{Res}_{z_2=0}\binom{N}{j}z_1^{m+j}z_2^{n+N-j}(-1)^{N-j}[A(z_1),B(z_2)]dz_1dz_2\\
=&\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(-1)^{N-j}[A_{m+j},B_{n+N-j}]\\
=&\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(-1)^{N-j}\sum_{l=0}^{N-1}\binom{m+j}{l}C^l_{m+n+N-l}.
\end{aligned}\tag{7.11}$$

根据下面的引理，这个表达式为零。 □

引理 7.9. 对于每个 $N\in\mathbb{Z}_+$、 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $l=0$、1、. . . 、 $N-1$，我们有

$$\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(-1)^{N-j}\binom{m+j}{l}=0.$$

证明. 函数 $f(z)=(1+z)^m z^N$ 在 $\mathbb{D}_1$ 上全纯，其幂级数展开中不含低于 N 次的 z 幂。但我们可以按以下方式展开 $f(z)$：

$$f(z)=(1+z)^m(-1+1+z)^N=\sum_{j=0}^{N}(1+z)^m\cdot\binom{N}{j}(-1)^{N-j}(1+z)^j$$
$$=\sum_{j=0}^{N}\cdot\binom{N}{j}(-1)^{N-j}(1+z)^{m+j}=\sum_{j=0}^{N}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{N}{j}(-1)^{N-j}\binom{m+j}{l}z^l.$$

T z^l 之前的系数在 $l<N$ 时消失。这证明了我们的公式 . □

7.9

我们来证明，形式变量蕴含复解析。此方法归功于[FHL93]。

证明。假设 $(z_1-z_2)^N[A(z_1),\ B(z_2)]=0$。取齐次的 $v\in\mathbb{V},\ v'\in\mathbb{V}'$。令

$$f(z_1,z_2)=\langle v',A(z_1)B(z_2)v\rangle,\qquad g(z_1,z_2)=\langle v',B(z_2)A(z_1)v\rangle$$

它们都属于 $\mathbb{C}[[z_1^{\pm1},\ z_2^{\pm1}]]$。因此也有

$$\phi(z_1,z_2)=(z_1-z_2)^N f(z_1,z_2)=(z_1-z_2)^N g(z_1,z_2).$$

步骤 1。我们断言 ϕ 实际上属于 $\mathbb{C}[z_1^{\pm1},\ z_2^{\pm1}]$。注意

$$f(z_1,z_2)=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\langle A_m^{\mathrm{t}}v',B_nv\rangle z_1^{-m-1}z_2^{-n-1}. \tag{7.12}$$

由于 B_n 使权增加 Δ_B-n-1，因此对于足够大的正值n，有 $B_nv=0$。 A_m^{t} 是 A 的转置，它将每个 $u'\in\mathbb{V}'(k)$ 映射到 $u'\circ A_m$。容易验证，A_m^{t} 使权降低 Δ_A-m-1。因此，对于足够大的负值 m， $A_m^{\mathrm{t}}v'$ 为零。因此，当 z_2 的幂足够负，或 z_1的幂足够正时，f 的系数为零。对于 $\phi=(z_1-z_2)^N f$也可以得出相同的结论。类似地，当 z_1 （分别为 z_2）的幂足够负（分别为正）时， g 的系数为零，对于 ϕ也可以得出相同的结论。因此， ϕ 只有有限项： $\phi(z_1,z_2)\in\mathbb{C}[z_1^{\pm1},z_2^{\pm1}]$。特别是， $\phi\in\mathscr{O}(\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^\times)$。

步骤 2. 由 (7.12) 可知， $f(z_1,z_2)$ 属于 $\mathbb{C}[z_1^{\pm1}]((z_2))\subset\mathbb{C}((z_1))((z_2))$。因此，$f(z_1,z_2)=(z_1-z_2)^{-N}\phi(z_1,z_2)$，其中 $(z_1-z_2)^{-N}\in\mathbb{C}((z_1))((z_2))$是 $(z_1-z_2)^N$在 $|z_2|<|z_1|$中的展开形式的逆（参见第 7.6 小节）。所以，形式洛朗级数 $f(z_1,z_2)$在 $0<|z_2|<|z_1|$上以一致几乎处处的方式收敛到有理函数 $(z_1-z_2)^{-N}\phi(z_1,z_2)$，因为 $(z_1-z_2)^{-N}\phi(z_1,z_2)$的级数展开确实如此。类似地， $g(z_1,z_2)$在 $0<|z_1|\lhd|z_2|$上一致几乎处处收敛到 $(z_1-z_2)^{-N}\phi(z_1,z_2)$。这就完成了证明。 □

7.10

我们现在证明复解析蕴含形式变量。为证明做准备，请注意，对于任意 $k \in \mathbb{N}$、任意 $m,\ n \in \mathbb{Z}$，以及任意 $R_1,\ R_2 > 0$,

$$\oint_{|z_1|=R_1} \oint_{|z_2|=R_2} z_1^m z_2^n \langle v', A(z_1) P_k B(z_2) v\rangle \frac{dz_1 dz_2}{(2\mathbf{i}\pi)^2} = \langle v', A_m P_k B_n v\rangle. \tag{7.13}$$

事实上，当$\mathbb{V}(k)$ 是有限维时，这一点显而易见，此时$\langle v',\ A(z_1)P_kB(z_2)v\rangle = \sum_e \langle v',\ A(z_1)e\rangle\langle \check{e},\ B(z_2)v\rangle$其中 $\{e\}$是 $\mathbb{V}(k)$的一组基，而 $\{\check{e}\}$是其对偶基。在一般情况下，我们可以先固定 z_2，并将 z_1 视为 $\mathbb{V}(k)$中的固定向量来积分，然后将 z_2 视为 $\mathbb{V}'(k) = \mathbb{V}(k)^*$中的一个元素来积分，其中$\langle v',\ A_m P_k \cdot\rangle$。

证明。 假设定义 7.2 中的陈述成立。令 $f_{v,\ v'} \in \mathscr{O}(\mathsf{Conf}^2(\mathbb{C}^\times))$ 如定义 7.2所述。由于 ϕ:$= (z_1 - z_2)^N f_{v,\ v'}$属于 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)$，根据复分析，对于每个 $m,\ n \in \mathbb{Z}$，其值

$$\Gamma := \oint_{|z_1|=R_1} \oint_{|z_2|=R_2} z_1^m z_2^n \phi(z_1, z_2) \frac{dz_1 dz_2}{(2\mathbf{i}\pi)^2}$$

与 R_1, R_2 的具体取值无关。（这正是我们用到 ϕ 在 $z_1 = z_2$ 处没有极点这一事实的地方。）

我们通过两种方式计算 Γ。假设 $R_1 > R_2$。那么，由于 $0 < |z_2| < |z_1|$，我们有

$$\phi(z_1, z_2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (z_1 - z_2)^N \langle v', A(z_1) P_k B(z_2) v\rangle.$$

因此，利用（7.13），我们可以计算

$$\Gamma = \oint_{|z_1|=R_1} \oint_{|z_2|=R_2} \sum_{k\in\mathbb{N}} z_1^m z_2^n (z_1 - z_2)^N \langle v', A(z_1) P_k B(z_2) v\rangle \frac{dz_1 dz_2}{(2\mathbf{i}\pi)^2}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \oint_{|z_1|=R_1} \oint_{|z_2|=R_2} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} z_1^{m+j} z_2^{n+N-j} (-1)^{N-j} \langle v', A(z_1) P_k B(z_2) v\rangle \frac{dz_1 dz_2}{(2\mathbf{i}\pi)^2}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^{N-j} \langle v', A_{m+j} P_k B_{n+N-j} v\rangle = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^{N-j} \langle v', A_{m+j} B_{n+N-j} v\rangle$$

由于几乎一致收敛，$\sum_{k\in\mathbb{N}}$ 可以与这两个围道积分交换。类似地，如果我们假设 $R_1 < R_2$，那么 $\phi(z_1,\ z_2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (z_1 - z_2)^N \langle v',\ B(z_2) P_k A(z_1) v\rangle$，因此

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^{N-j} \langle v', B_{n+N-j} A_{m+j} v\rangle.$$

这表明 $\sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^{N-j} [A_{m+j},\ B_{n+N-j}] = 0$。将其与（7.11）开头几行进行比较，可以看出这等价于 $(z_1 - z_2)^N [A(z_1),\ B(z_2)] = 0$ 在$\mathrm{End}\mathbb{V}[[z_1^{\pm 1},\ z_2^{\pm 1}]]$。

□

7.11

在本小节中，我们假设定义 7.2 中的陈述成立，并推导出算子乘积展开 $A(z_1)B(z_2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(z_1-z_2)^{-k-1}(A_kB)(z_2)$，类似于 $Y(u,z_1)Y(v,z_2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(z_1-z_2)^{-k-1}Y(Y(u)_kv,z_2)$，其中场 $(A_kB)(z)$。只需对函数 z_1-z_2 在定义 $f_{v,v'}$ 中的 7.2 取洛朗级数展开即可。由此，算子乘积展开的存在性直接源于复分析。由于我们处理的是多变量全纯函数，为了严谨地讨论几乎一致收敛的定义域，我们在下文提供一些细节。

定义 7.10. 对于每个 $k\in\mathbb{Z}$ 和 $z\in\mathbb{C}^\times$，令 $f_{v,v'}\in\mathscr{O}(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times))$ 如定义 7.2所述。我们定义线性映射

$$(A_kB)(z):\mathbb{V}'\otimes\mathbb{V}\to\mathbb{C},\qquad v'\otimes v\mapsto\langle v',(A_kB)(z)v\rangle$$

为

$$\langle v',(A_kB)(z_2)v\rangle = \oint_{C(z_2)}(z_1-z_2)^k f_{v,v'}(z_1,z_2)\frac{dz_1}{2\mathbf{i}\pi} \tag{7.14}$$

其中 $C(z_2)$ 是 $\mathbb{C}^\times$ 中包围 z_2的任意一条圆。注意，$(A_kB)(z)v$ 自然是 $(\mathbb{V}')^* = \prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{V}(n)^{**}$ 的一个元素，而 $(\mathbb{V}')^* = \prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{V}(n)^{**}$是 $\mathbb{V}'$的（代数）对偶空间。此外，$\langle v',(A_kB)(z_2)v\rangle$ 显然是 $\mathbb{C}^\times$上的关于 z_2 的全纯函数。

引理 7.11. $A_kB=0$ 只要 $k\geqslant N$。

证明。当 $k\geqslant N$，$(z_1-z_2)^kf_{v,v'}$ 在 $z_1=z_2$处没有极点。因此，式（7.14）的右端为零。□

命题 7.12. 对于每个 $v\in\mathbb{V}$，$v'\in\mathbb{V}'$，都有

$$f_{v,v'}(z_1,z_2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(z_1-z_2)^{-k-1}\langle v',(A_kB)(z_2)v\rangle \tag{7.15}$$

其中右端的级数在$\Omega_0=\{(z_1,z_2):0<|z_1-z_2|<|z_2|\}$一致几乎处处收敛到左端。

证明。只需证明对所有 $r>0$，命题在 $\{(z_1,z_2):0<|z_1-z_2|<r,r<|z_2|\}$ 上成立。由下面这个基本引理即可轻松得到结论。□

引理 7.13。 设 U 是 $\mathbb{C}^m$ 的一个开子集，并设 $f=f(z_1,\dots,z_m,q_1,\dots,q_n)$ 是定义在 $U\times A_{r_1,R_1}\times\cdots\times A_{r_n,R_n}$ 上的全纯函数，其中每个 $0\leqslant r_i<R_i\leqslant+\infty$ 和 $A_{r_i,R_i}=\{q_i\in\mathbb{C}:r_i<|q_i|<R_i\}$。那么 f 的洛朗级数展开为

$$f(z_\bullet,q_\bullet) = \sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}} f_{k_\bullet}(z_\bullet)q_1^{-k_1-1}\cdots q_n^{-k_n-1} \tag{7.16}$$

在 $U\times A_{r_1,R_1}\times\cdots\times A_{r_n,R_n}$ 上一致几乎处处收敛，其中每个

$$f_{k_\bullet}(z_\bullet) = \oint_{C_n}\cdots\oint_{C_1} f(z_\bullet,q_\bullet)q_1^{k_1}\cdots q_n^{k_n}\frac{dq_1\cdots dq_n}{(2\mathbf{i}\pi)^n} \tag{7.17}$$

（其中 C_j 是围绕 0 的逆时针圆）显然在 U 上是全纯的。

证明。为简单起见，我们假设 $n=1$ 并记 $q_1=q$，$r_1=r$，$R_1=R$。我们将证明 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 在 $(z_\bullet, q)\in U\times A_{\tilde{r},\tilde{R}}$ 上的一致几乎处处收敛，其中对所有满足 $r<\tilde{r}<R<R$ 的 $\tilde{r}$，R 均成立。令 $\sim$ $C_-=\{q\in\mathbb{C}:\ |q|=(r+\tilde{r})/2\}$，并令 $C_+=\{q\in\mathbb{C}:\ |q|=(R+R)/2\}$。于是，在 $U\times A_{\tilde{r},\tilde{R}}$ 上，

$$f(z_\bullet,q)=\mathrm{Res}_{p=q}\frac{f(z_\bullet,p)}{p-q}dp=\left(\oint_{C_+}-\oint_{C-}\right)\frac{f(z_\bullet,p)}{p-q}\frac{dp}{2\mathbf{i}\pi}.$$

我们有 $\frac{f(z_\bullet,p)}{p-q}=\sum_{k\leqslant -1}q^{-k-1}p^kf(z_\bullet,p)$，其中右端由基本分析可知在 $(z_\bullet,q,p)\in(U\times A_{\tilde{r},\tilde{R}}\times C_+)$ 上收敛到左端。若将 C_+ 替换为 C_-，则对 $\frac{f(z_\bullet,p)}{p-q}=-\sum_{k\geqslant 0}q^{-k-1}p^kf(z_\bullet,p)$ 也可作同样论述。因此，鉴于 (7.17)，并注意到由于几乎一致收敛，积分与无穷和可交换，$\oint_{C_+}\frac{f(z_\bullet,p)}{p-q}\frac{dp}{2}\mathbf{i}\pi=\sum_{k\leqslant -1}f_k(z_\bullet)q^{-k-1}$（分别地，$\oint_{C_-}\frac{f(z_\bullet,p)}{p-q}\frac{dp}{2}\mathbf{i}\pi=-\sum_{k\geqslant 0}f_k(z_\bullet)q^{-k-1}$）的右端在 $U\times A_{\tilde{r},\tilde{R}}$ 上几乎一致收敛到右端。证明完毕。

□

7.12

我们继续上一节中的讨论。令 $(A_nB)_k:\ \mathbb{V}'\otimes\mathbb{V}\to\mathbb{C}$ 使得

$$\langle v',(A_nB)_kv\rangle=\mathrm{Res}_{z=0}\langle v',(A_nB)(z)v\rangle z^kdz.$$

换句话说，$(A_nB)_k$ 是一个线性映射 $\mathbb{V}\to(\mathbb{V}')^*=\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{V}(n)^{**}$。

命题 7.14。假设 $A(z)$、$B(z)$ 满足定义 7.2。则以下雅可比恒等式成立：

$$\begin{aligned}&\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{m}{l}(A_{n+l}B)_{m+k-l}\\&=\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\binom{n}{l}A_{m+n-l}B_{k+l}-\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^{n+l}\binom{n}{l}B_{n+k-l}A_{m+l}.\end{aligned}\tag{7.18}$$

注 7.15。这个命题有两个直接推论。首先，通过设定$m=0$，我们得到一个公式，可以用 $A(z)$ 和 $B(z)$的模来表示 $(A_nB)_k$。从这个表达式可以很容易地验证，$(A_nB)_k$ 将每个 $\mathbb{V}(a)$ 映射到 $\mathbb{V}(b)$，其中 $b=a+\Delta_A+\Delta_B-n-k-2$。这表明 $(A_nB)_k$ 是 $\mathbb{V}$上的线性算子，并且$(A_nB)(z)$ 是权为 $\Delta_A+\Delta_B-n-1$的齐次场。其次，通过设定 $n=0$，我们看到 $A(z)$在李代数意义下局部于 $B(z)$。

命题 7.14 的证明。思路与第 4.8 小节中顶点算子代数 Jacobi 恒等式的证明相同。（注意，此处 z_1，z_2 在第 4.8 小节中的角色互换了。）对每个 $z_2\in\mathbb{C}^\times$，我们选取一个以 0 为中心的大圆 C_+ 和一个小圆 C_-，以及一个以 z_2 为中心的小圆 C_0。选取 $\mu=z_1^m(z_1-z_2)^ndz_1$。令 $f=f_{v,v'}$。于是

$$\oint_{C_+}\frac{f\mu}{2\mathbf{i}\pi}-\oint_{C_-}\frac{f\mu}{2\mathbf{i}\pi}=\oint_{C_0}\frac{f\mu}{2\mathbf{i}\pi}.\tag{7.19}$$

当 z_1 位于 C_+上时， f 具有形式 (7.2a)。此外，右端

$$z_1^m(z_1-z_2)^n dz_1 f(z_1,z_2)=\sum_{l,s\in\mathbb{N}}\binom{n}{l}(-z_2)^l z_1^{m+n-l}\langle v', A(z_1)P_sB(z_2)v\rangle$$

几乎一致收敛于 $0<|z_2|<|z_1|$ 上的左端。因此

$$\begin{aligned}\oint_{C_+}\frac{f\mu}{2\mathbf{i}\pi}&=\oint_{C_+}\sum_{l,s\in\mathbb{N}}\binom{n}{l}(-z_2)^l z_1^{m+n-l}\langle v', A(z_1)P_sB(z_2)v\rangle\frac{dz_1}{2\mathbf{i}\pi}\\&=\sum_{l,s\in\mathbb{N}}\binom{n}{l}\oint_{C_+}(-z_2)^l z_1^{m+n-l}\langle v', A(z_1)P_sB(z_2)v\rangle\frac{dz_1}{2\mathbf{i}\pi}\\&=\sum_{l,s\in\mathbb{N}}\binom{n}{l}(-z_2)^l\langle (A_{m+n-l})^{\mathrm{t}}v', P_sB(z_2)v\rangle\frac{dz_1}{2\mathbf{i}\pi}\end{aligned}$$

其中，由于几乎一致收敛，围道积分与无穷级数可以交换；$(A_{m+n-l})^{\mathrm{t}}$ 是 A_{m+n-l}的转置，它将 v' 映射为一个 $\mathbb{V}(s)$ 的向量，其中 $s=\mathrm{wt}v'-\Delta_A+m+n-l+1$。因此，当 s 不是这个权时，上述被加项为零。于是我们可以将上述表达式写成

$$\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{n}{l}(-z_2)^l\langle (A_{m+n-l})^{\mathrm{t}}v', B(z_2)v\rangle\frac{dz_1}{2\mathbf{i}\pi}.$$

对 C_- 的积分也可以用类似的方法处理。根据命题 7.12,

$$\oint_{C_0}\frac{f\mu}{2\mathbf{i}\pi}=\oint_{C_0}\sum_{l,s\in\mathbb{N}}\binom{m}{l}z_2^{m-l}(z_1-z_2)^{n+l}\cdot(z_1-z_2)^{-s-1}\langle v', (A_sB)(z_2)v\rangle\frac{dz_1}{2\mathbf{i}\pi}$$

其中，被积函数中的级数在 $0<|z_1-z_2|<|z_2|$上一致几乎处处收敛。因此，我们可以交换积分与求和来计算结果

$$\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{m}{l}z_2^{m-l}\langle v', (A_{n+l}B)(z_2)v\rangle.$$

这就计算出了（7.19）。现在，这三项显然都是 z_2 在 $\mathbb{C}^\times$上的全纯函数。将它们乘以 $z_2^k dz_2$ 并在 $z_2=0$处取留数，得到（7.18）。 □

7.13

现在我们可以证明 Jacobiidentity 的复解析版本与代数形式之间的等价性。

定义 7.16 (雅可比恒等式 (复解析版本))。 对于每个 $u,v,w\in\mathbb{V}$ 和$w'\in\mathbb{V}$，以下级数

$$\big\langle w', Y(u,z_1)Y(v,z_2)w\big\rangle:=\sum_{n\in\mathbb{N}}\big\langle w', Y(u,z_1)P_nY(v,z_2)w\big\rangle, \tag{7.20a}$$

$$\langle w', Y(v,z_2)Y(u,z_1)w\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle w', Y(v,z_2)P_nY(u,z_1)w\rangle, \tag{7.20b}$$

$$\langle w', Y\big(Y(u,z_1-z_2)v,z_2\big)w\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle w', Y\big(P_nY(u,z_1-z_2)v,z_2\big)\rangle \tag{7.20c}$$

分别在以下区域一致几乎处处收敛

$$\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : 0<|z_2|<|z_1|\}, \tag{7.21a}$$

$$\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : 0<|z_2|<|z_2|\}, \tag{7.21b}$$

$$\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : 0<|z_1-z_2|<|z_2|\} \tag{7.21c}$$

并且可以延拓为同一个全纯函数$f_{w,\ u,\ v,\ w'}$在 $\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ 上。

定理 7.17。 复解析形式与代数形式的雅可比恒等式等价。

证明。 复解析形式蕴含代数形式：这可由第 4.8 小节中的论证或命题 7.14 的证明得出。

代数形式蕴含复解析形式：假设 u、v、w、w' 是齐次的。令 $A(z)=Y(u,z)$ 和 $B(z)=Y(v,z)$。则 A 和 B 是局部的。此外，顶点算子代数 Jacobi 恒等式将 $Y(Y(u)_nv,z)$ 表示为 $Y(u,z)$、$Y(v,z)$ 的形式，而 (7.18) 将 $(A_nB)(z)$ 表示为 $A(z)$、$B(z)$ 的形式。从这两个表达式可以清楚看出

$$Y(Y(u)_nv,z)=(A_nB)(z). \tag{7.22}$$

因此，A 和 B 的复解析局部性证明了复解析 Jacobi 恒等式。注意，(7.20c) $=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle w', Y(Y(u)_mv)w\rangle(z_1-z_2)^{-m-1}$ 的几乎一致收敛（注意 $P_nY(u,z_1-z_2)v=Y(u)_m(z_1-z_2)^{-m-1}v$ 其中 $n=\mathrm{wt}u+\mathrm{wt}v-m-1$）可由 (7.15) 的收敛性推出。□

8 n点顶点算子函数；重构定理的证明

8.1

本节的目标有两个。我们首先证明 n点函数的两个解析性质，它们推广了定义 7.2。然后利用这些结果证明重构定理。

定理 8.1。 假设齐次场 $A^1(z)$、……、$A^M(z)\in(\mathrm{End}\mathbb{V})[[z^{\pm1}]]$ 彼此局部。则对于每个 $v\in\mathbb{V}$、$v'\in\mathbb{V}'$ 以及 $\{1$、……、$M\}$的每个排列 σ，级数

$$\langle v', A^{\sigma(1)}(z_{\sigma(1)})\cdots A^{\sigma(M)}(z_{\sigma(M)})v\rangle \qquad \in(\mathrm{End}\mathbb{V})[[z_1^{\pm1},\dots,z_M^{\pm1}]] \tag{8.1}$$

在……上一致几乎处处收敛

$$\Omega_\sigma=\{z_\bullet\in\mathbb{C}^M : 0<|z_{\sigma(M)}|<\cdots<|z_{\sigma(1)}|\} \tag{8.2}$$

并且可以延拓到某个$f_{v,\ v'} \in \mathscr{O}(\mathrm{Conf}^M(\mathbb{C}^\times))$，且与 σ无关。此外，存在$N \in \mathbb{N}$，对所有 v、v'，使得

$$f_{v,v'}(z_\bullet) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant M} (z_i - z_j)^N \tag{8.3}$$

在 $(\mathbb{C}^\times)^M$ 上全纯。（事实上，它是 $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1},\ \ldots\ldots,\ z_M^{\pm 1}]$ 的一个元素。）

$f_{v,\ v'}$ 称为与场$A^\bullet(z)$相关联的 $(M+2)$**点（亏格 0 关联）函数**。如果每个 $A^i(z)$ 都是顶点算子 $Y(u_i,\ z)$，则 $f_{v,\ v'}$ 是与（将 ζ 设为 $\mathbb{C}$的标准坐标）相关联的关联函数

$$(\mathbb{P}^1; 0, z_1, \ldots, z_M, \infty; \zeta, \zeta - z_1, \ldots, \zeta - z_M, \zeta^{-1}), \tag{8.4}$$

其中 $v, u_1, \ldots, u_M, v'$分别进入穿孔点 $0, z_1, \ldots, z_M, 8$。

注 8.2。 在 Ω_σ 上，形式洛朗级数（8.1）的一致几乎处处收敛等价于函数级数的几乎处处收敛

$$\begin{aligned} &\left\langle v', A^{\sigma(1)}(z_{\sigma(1)}) \cdots A^{\sigma(M)}(z_{\sigma(M)}) v \right\rangle \\ :=& \sum_{n_2, \ldots, n_M \in \mathbb{N}} \left\langle v', A^{\sigma(1)}(z_{\sigma(1)}) P_{n_2} A^{\sigma(2)}(z_{\sigma(2)}) P_{n_3} \cdots P_{n_M} A^{\sigma(M)}(z_{\sigma(M)}) v \right\rangle. \end{aligned} \tag{8.5}$$

事实上，为简单起见，假设 $\sigma = 1$ 和 v、v' 都是齐次的。于是，根据尺度协变性（7.7），上述公式的右端等于

$$\begin{aligned} &\sum_{n_2, \ldots, n_M \in \mathbb{N}} \left\langle v', A^1(1) P_{n_2} A^2(1) P_{n_3} \cdots P_{n_M} A^M(1) v \right\rangle \\ &\qquad \cdot \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{n_2} \left(\frac{z_3}{z_2}\right)^{n_3} \cdots \left(\frac{z_M}{z_{M-1}}\right)^{n_M} \cdot z_1^{\mathrm{wt} v'} z_M^{-\mathrm{wt} v} \cdot \prod_{i=1}^M z_i^{-\Delta_{A^i}}, \end{aligned} \tag{8.6}$$

这与引理7.4一起证明了该断言。

8.2

定理 *8.1* 的证明。 (参见 [FHL93]。)方法与第 7.9 小节相同。取 N 使得 $(z_i - z_j)^N [A^i(z_i), A^j(z_j)] = 0$ 对所有 $i,\ j$。令

$$f^\sigma(z_\bullet) = \left\langle v', A^{\sigma(1)}(z_{\sigma(1)}) \cdots A^{\sigma(M)}(z_{\sigma(M)}) v \right\rangle \qquad \in \mathbb{C}[[z_\bullet^{\pm 1}]] = \mathbb{C}[[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_M^{\pm 1}]]. \tag{8.7}$$

那么形式洛朗级数

$$\phi(z_\bullet) = f^\sigma(z_\bullet) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant M} (z_i - z_j)^N \tag{8.8}$$

与排列 σ无关。由

$$f^1(z_\bullet) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle (A_m^1)^{\mathrm{t}} v', A^2(z_2) \cdots A^{M-1}(z_{m-1}) A_n^M v \rangle \cdot z_1^{-m-1} z_M^{-n-1}$$

以及下截断性质可知， $f^1(z_\bullet)$ 的系数，因此也是$\phi(z_\bullet)$ 的系数，在 z_M 的幂次足够负（分别地， z_1的幂次足够正）时为零。由于我们可以用 $\sigma(M)$ 替换 M ，并用 $\sigma(1)$替换 1，可知 ϕ 的系数只有在幂次 z_1、……、 z_M都被某些固定常数从下方和上方界定时才可能非零。也就是说， $\phi(z_\bullet) \in \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}$、……、 $z_M^{\pm 1}]$。特别地， ϕ可视为定义在 $(\mathbb{C}^\times)^M$上的全纯函数。

将 $f^1(z_\bullet)$展开为关于 z_1、……、 z_M的形式洛朗级数后，不难看出（例如对 M 进行归纳，或利用（8.6））

$$f^1(z_\bullet) \in \mathbb{F} := \mathbb{C}((z_1))((z_2))\cdots((z_M)). \tag{8.9}$$

因此，对于 $\sigma = 1$， （8.8）在域 $\mathbb{F}$中成立。因此

$$f^1(z_\bullet) = \phi(z_\bullet) \cdot \prod_{1\leqslant i<j\leqslant M} (z_i - z_j)^{-N} \tag{8.10}$$

其中， $g(z_\bullet) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant M}(z_i - z_j)^{-N} \in \mathbb{F}$ 在区域 Ω_1 （由（8.2）定义）中展开，参见第7.6小节。也就是说，

$$g(z_\bullet) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant M} z_i^{-N} \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{-N}{k} \Big(-\frac{z_j}{z_i}\Big)^k \qquad \in \mathbb{F}$$

我们断言，级数 $g(z_\bullet)$ 在 Ω_1上一致几乎处处收敛。于是， $\phi(z_\bullet)g(z_\bullet)$ 作为形式级数在 Ω_1 上一致几乎处处收敛到 $\phi(z_\bullet)g(z_\bullet)$这一有理函数（该函数在 Ω_1上全纯）。我们将此有理函数记为 $f_{v,\ v'}$。那么，当排列 1 被替换为任意 σ时，该陈述同样成立，因此证明完成。

为了证明这一断言，只需证明 $g(q_1,\ q_1q_2,\ \ldots\ldots,\ q_1q_2\cdots q_M)$作为 $q_1 = z_1$, $q_2 = z_2/z_1, q_3 = z_3/z_2, \ldots, q_M = z_M/z_{M-1}$,的形式洛朗级数，在 $\Omega' = \{(q_1,\ \ldots\ldots,\ q_M) \in \mathbb{C}^M$上一致几乎处处收敛： $0 < |q_1|,\ 0 < |q_j| < 1$若 $2 \leqslant j \leqslant M\}$。但这显然成立，因为

$$g = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant M} (q_1q_2\cdots q_i)^{-N} \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{-N}{k} (-q_{i+1}q_{i+2}\cdots q_j)^k \qquad \in \mathbb{C}((q_1,\ldots,q_M))$$

是洛朗　　级数展开，在多环带 Ω' 上对应于全纯函数

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant M} (q_1q_2\cdots q_i - q_1q_2\cdots q_j)^{-N} \qquad \in \mathscr{O}(\Omega')$$

□

8.3

定义 8.3。 设 $A^1,\ \ldots\ldots,\ A^M$彼此局部。对于每个 $z_\bullet \in \mathsf{Conf}^M(\mathbb{C}^\times)$,

$$A^1(z_1)\cdots A^M(z_M) : \mathbb{V}' \otimes \mathbb{V} \to \mathbb{C} \tag{8.11}$$

定义为将 $v' \otimes v$ 映射到 $f_{v\text{的线性映射},\ v'}$ 见定理 8.1。等价地， $A^1(z_1)\cdots A^M(z_M)$ 是从 $\mathbb{V}$ 到 $(\mathbb{V}')^* = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(n)^{**}$的线性映射。

根据这一记号，对于局部的 A， B 我们有

$$A(z_1)B(z_2) = B(z_2)A(z_1), \qquad (A_nB)(z_2) = \mathrm{Res}_{z_1=z_2} A(z_1)B(z_2)(z_1-z_2)^n dz_1. \tag{8.12}$$

以下是我们关于 n点函数的第二个解析性质。

T定理 8.4. 假设 $A^1, \cdots, A^m, B^1, \ldots, B^n$ 两两局部。那么在

$$\Omega = \{(z_1, \ldots, z_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathrm{Conf}^{m+n}(\mathbb{C}^\times) : |z_i| > |\zeta_j| \textit{ for all } i, j\},$$

对于每个 $v \in \mathbb{V}$、 $v' \in \mathbb{V}'$， 右端的

$$\begin{aligned} &\langle v', A^1(z_1)\cdots A^m(z_m)B^1(\zeta_1)\cdots B^n(\zeta_n)v\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v', A^1(z_1)\cdots A^m(z_m)P_k B^1(\zeta_1)\cdots B^n(\zeta_n)v\rangle \end{aligned} \tag{8.13}$$

几乎处处收敛到左端。

$A^1(z_1)\cdots A^m(z_m)$ 和 $B^1(\zeta_1)\cdots B^n(\zeta_n)$ 的乘积的含义是明确的：它对应于（将 ζ 设为 $\mathbb{C}$的标准坐标）缝合。

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= (\mathbb{P}^1; 0, z_1, \ldots, z_m, \infty; \zeta, \zeta - z_1, \ldots, \zeta - z_m, \zeta^{-1}), \\ \mathfrak{X}_2 &= (\mathbb{P}^1; 0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, \infty; \zeta, \zeta - \zeta_1, \ldots, \zeta - \zeta_n, \zeta^{-1}) \end{aligned}$$

沿着 $0 \in \mathfrak{X}_1$ 和 $\infty \in \mathfrak{X}_2$，假设所有这些场都是顶点算子。此外，这一图景以及该定理，都可以很容易地推广到若干串彼此局部的场的乘积。

注 8.5. 注意，(8.13) 右端的每一项在 $(z_\bullet, \zeta_\bullet) \in \mathrm{Conf}^m(\mathbb{C}^\times) \times \mathrm{Conf}^n(\mathbb{C}^\times)$ 上都是全纯的。当 $\mathbb{V}(k)$ 是有限维时，这是由定理 8.1 以及 P_k 可以写成 $\sum_e e\rangle\langle\check{e}$ （其中 $\{e\}$ 是 $\mathbb{V}(k)$ 的一组基，而 $\{\check{e}\}$是其对偶基）可知的。

在一般情况下， $\mathbb{V}(k)$ 不一定是有限维的， P_k 是从 $(\mathbb{V}')^*$ 到 $\mathbb{V}(k)^{**}$的投影。在（8.13）中的每个级数$A^i(z_i) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A^i_n z_i^{-n-1}$中， A^i_n 被理解为将每个 $\mathbb{V}(a)^{**}$ 映射到 $\mathbb{V}(b)^{**}$ 的 $(A^i_n)^{\mathrm{tt}}$ ，其中 $b = a + \Delta_A - n - 1$。那么，在此意义下A^1，.....， A^m 是两两局部的。（8.13）右端的每一项在$(z_\bullet, \zeta_\bullet) \in \mathrm{Conf}^m(\mathbb{C}^\times) \times \mathrm{Conf}^n(\mathbb{C}^\times)$上都是连续的；对于固定的 $z_\bullet$，通过将$\langle v'$，$A^1(z_1)\cdots A^m(z_m)P_k\cdot\rangle$视为 $\mathbb{V}(k)^*$的一个元素，它在 $\zeta_\bullet$ 上是全纯的；类似地，它在 $z_\bullet$上也是全纯的。因此，同样地，它在$\mathrm{Conf}^m(\mathbb{C}^\times) \times \mathrm{Conf}^n(\mathbb{C}^\times)$上是全纯的。

8.4

定理的证明思路8.4 如下。为了证明函数级数$\sum_n f_n(z_\bullet)$在定义域 U上一致几乎处处收敛，我们尝试找到 $r > 1$和一个更小的 U'，使得 $\sum_n f_n(z_\bullet)q^n$ 在 $z_\bullet \in U'$ 上一致几乎处处收敛，并且 $q \in \mathbb{D}_r^\times$收敛到一个在 f上全纯的函数 $U \times \mathbb{D}_r^\times$。由引理 7.13，$\sum_n f_n(z_\bullet)q^n$ 是 f的级数展开，因此必定在 $U \times \mathbb{D}_r^\times$上一致几乎处处收敛。

定理 *8.4* 的证明。只需证明将Ω 替换为所有可能的

$$\Omega_r = \{(z_1, \dots, z_m, \zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathrm{Conf}^{m+n}(\mathbb{C}^\times) : |z_i| > r|\zeta_j| \text{ for all } i, j\}$$

其中 $r > 1$。为澄清这一微妙之处，令 $\widetilde{A}_n^i : \mathbb{V}(a)^{**} \to \mathbb{V}(b)^{**}$ 表示 $A_n^i : \mathbb{V}(a) \to \mathbb{V}(b)$ 的双重转置。为简化讨论，我们假设 $m = n = 2$。考虑 $\mathscr{O}(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)^2)[[q]]$ 中的以下元素：

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v', \widetilde{A}^1(z_1)\widetilde{A}^2(z_2)P_k B^1(\zeta_1)B^2(\zeta_2)v\rangle q^k. \tag{8.14}$$

注意 $P_k q^k = P_k q^{L_0}$。根据尺度协变性，作为 $\mathrm{Hom}(\mathbb{V}' \otimes \mathbb{V}, \mathbb{C})$ 的元素，

$$q^{L_0} B^1(\zeta_1)B^2(\zeta_1) = q^{\Delta_{B^1}+\Delta_{B^2}} B^1(q\zeta_1)B^2(q\zeta_2)q^{L_0} \tag{8.15}$$

只要 $0 < |\zeta_2| < |\zeta_1|$。因此，由于全纯性，它对所有 $\zeta_\bullet \in \mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ 都成立。因此，存在 $d \in \mathbb{Z}$ 使得（8.14），作为 $(z_\bullet, \zeta_\bullet, q)$ 的函数级数，等于

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q^d \langle v', \widetilde{A}^1(z_1)\widetilde{A}^2(z_2)P_k B^1(q\zeta_1)B^2(q\zeta_2)v\rangle. \tag{8.16}$$

在 $\Omega'_r = \{(z_\bullet \text{上}, \zeta_\bullet) : 0 < r|\zeta_2| < r|\zeta_1| < |z_2| < |z_1|\}$ 和 $q \in \mathbb{D}_r^\times$，（8.16）等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{s\in\mathbb{N}} q^d \langle v', \widetilde{A}^1(z_1)P_s\widetilde{A}^2(z_2)P_k B^1(q\zeta_1)B^2(q\zeta_2)v\rangle \\
\overset{\text{Rem. 8.6}}{=\!=\!=}\ &\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{s\in\mathbb{N}}\sum_{t\in\mathbb{N}} q^d \langle v', \widetilde{A}^1(z_1)P_s\widetilde{A}^2(z_2)P_k B^1(q\zeta_1)P_t B^2(q\zeta_2)v\rangle \\
=\ &\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{s\in\mathbb{N}}\sum_{t\in\mathbb{N}} q^d \langle v', A^1(z_1)P_s A^2(z_2)P_k B^1(q\zeta_1)P_t B^2(q\zeta_2)v\rangle
\end{aligned} \tag{8.17}$$

根据定理 8.1，此级数（因而级数 (8.14)）在 $\Omega_r \times \mathbb{D}_r^\times$ 上一致几乎处处收敛到全纯函数

$$g(z_\bullet, \zeta_\bullet, q) = q^d \langle v', A^1(z_1)A^2(z_2)B^1(q\zeta_1)B^2(q\zeta_2)v\rangle.$$

因此，(8.14) 是 g 在 $(z_\bullet, \zeta_\bullet) \in \Omega'_r$ 时的洛朗级数展开。也就是说：(8.14) 的系数与 g 在 $(z_\bullet, \zeta_\bullet) \in \Omega'_r$ 时展开中的系数相等。将引理 7.13 应用于 $\Omega_r \times \mathbb{D}_r^\times$ 上的全纯函数 $g(z_\bullet, \zeta_\bullet, q)$，可知当$(z_\bullet, \zeta_\bullet) \in \Omega_r$ 时此结论成立（因为这些系数在 Ω_r 上全纯），并且 g 的级数展开在 $\Omega_r \times \mathbb{D}_r^\times$ 上一致几乎处处收敛到 g。因此，(8.14) 在 $\Omega_r \times \mathbb{D}_r^\times$ 上一致几乎处处收敛到 g。令 $q = 1$，证明即告完成。 □

注 8.6。注意，在（8.17）中，我们用到了一个显然的事实：$\sum_t P_k B^1(q\zeta_1)P_t B^2(q\zeta_2)v$ 在 $*$-弱意义下收敛于 $\mathbb{V}(k)^{**}$，即它与 $\mathbb{V}(k)^*$ 中的每个元素配对所得的值都收敛。我们还用到了这样一个事实：假设$v' \in \mathbb{V}(m)^*$，线性算子 $P_m\widetilde{A}^1(z_1)P_s\widetilde{A}^2(z_2)P_k : \mathbb{V}(k)^{**} \to \mathbb{V}(m)^{**}$，它是 $P_m A^1(z_1)P_s A^2(z_2)P_k : \mathbb{V}(k) \to \mathbb{V}(m)$的双重转置，在弱$*$拓扑下是连续的。下面这个简单引理说明了这一点。

引理 8.7. 设 $T\colon U \to V$是向量空间的线性映射。那么 $T_{\mathrm{t}}\colon V^* \to U^*$是 $*$-弱连续的，这意味着如果 v_n^* 是 V^* 中的一个序列（或更一般地，一个网），并且弱-$*$ 收敛到 $v^* \in V^*$，即对于所有 $v \in V$都有 $\lim_n \langle v_n^*, v\rangle = \langle v^*, v\rangle$，那么 $T^{\mathrm{t}} v_n^*$ 就-$*$弱收敛到 $T^{\mathrm{t}} v^*$。

8.5

现在我们讨论重构定理 5.12 的证明。假设定理 5.12 中关于分次顶点代数的假设成立。我们可以扩展 $\mathcal{E}$，使其也包含单位场 $\mathbf{1}(z) = \mathbf{1}_{\mathbb{V}}$。具体而言，$\mathbf{1}_n = \delta_{n,\,-1}\mathbf{1}_{\mathbb{V}}$。受（7.22）启发，对于每个$A^1$，……，$A^k \in \mathcal{E}$以及 n_1，……，$n_k \in \mathbb{Z}$，我们定义

$$Y\big(A^1_{n_1}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1}, z\big) = \big(A^1_{n_1}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1}\big)(z) \tag{8.18}$$

其中右端通过归纳定义如下

$$\big(A^1_{n_1}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1}\big)(z) = \big(A^1_{n_1}(A^2_{n_2}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1})\big)(z).$$

根据生成性质，我们可以利用（$Y(u,\ z)$ 对每个 $u \in \mathbb{V}$ 定义8.18）以及线性性。

这种方法有两个显而易见的问题：首先，要归纳定义（8.18）的右端，我们需要知道 $A^1_{n_1}(z)$ 与 $(A^2_{n_2}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1})(z)$ 局部（“Dong 引理”）。其次，我们需要证明上述对 $Y(u,\ z)$ 的定义是唯一的，即与 u 如何写成 $A^1_{n_1}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1}$ 的线性组合无关（“Goddard 唯一性”）。除了这两点，我们还需要检验如此定义的 $Y(u,\ z)$ 满足平移性质。我们先来检验平移性质。

8.6

引理 8.8。 假设齐次场 $A(z)$、$B(z)$ 是局部的，并满足平移性质 $[L_{-1}、\ A_k] = -kA_{k-1}$、$[L_{-1}、\ B_k] = -kB_{k-1}$。那么每个 A_nB 也满足这些性质：

$$[L_{-1}, (A_nB)_k] = -k(A_nB)_{k-1}. \tag{8.19}$$

证明。 由雅可比恒等式（7.18），

$$(A_nB)_k = \sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\binom{n}{l}A_{n-l}B_{k+l} - \sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^{n+l}\binom{n}{l}B_{n+k-l}A_l, \tag{8.20}$$

从而

$$-k(A_nB)_{k-1} = \sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\binom{n}{l}(-k)A_{n-l}B_{k+l-1} + \sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^{n+l}\binom{n}{l}kB_{n+k-l-1}A_l.$$

因此，根据 $A,\ B$ 的平移性质，

$$[L_{-1}, (A_nB)_k] = \sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\binom{n}{l}(-n+l)A_{n-l-1}B_{k+l} + \sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\binom{n}{l}(-k-l)A_{n-l}B_{k+l-1}$$

$$+\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^{n+l}\binom{n}{l}(n+k-l)B_{n+k-l-1}A_l+\sum_{l\geqslant 1}(-1)^{n+l}\binom{n}{l}lB_{n+k-l}A_{l-1}.$$

看右端。在第一项求和中，注意 $(-1)^l\binom{n}{l}(-n+l)=(-1)^{l+1}\binom{n}{l+1}(l+1)$ 并将l 替换为 $l-1$; 在第四项求和中，注意 $(-1)^{n+l}\binom{n}{l}l=(-1)^{n+l-1}\binom{n}{l-1}(l-1-n)$ 并将 l替换为 $l+1$。这样我们就明白了为什么（8.19）成立。 □

8.7

命题 8.9 (Dong 引理)。 设 $A(z),B(z),C(z)$ 是互相局域的齐次场。那么对于每个 $n\in\mathbb{Z}$, $C(z)$ 都与 $(A_nB)(z)$ 局域。

我们证明 $C(z)$ 与 $(A_nB)(z)$ 复解析局域。

证明。 步骤 1。选择 $v\in\mathbb{V}$， $v'\in\mathbb{V}'$。然后我们得到级数

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle v',(A_nB)(z_2)P_kC(z_3)\rangle=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{Res}_{z_1=z_2}(z_1-z_2)^n\langle v',A(z_1)B(z_2)P_kC(z_3)v\rangle dz_1. \quad (8.21)$$

在区域 $\Omega_1=\mathrm{Conf}^3(\mathbb{C}^\times)\cap\{|z_1|>|z_3|,\ |z_2|>|z_3|\}$ 上，右端的

$$f(z_1,z_2,z_3):=\langle v',A(z_1)B(z_2)C(z_3)v\rangle=\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle v',A(z_1)B(z_2)P_kC(z_3)v\rangle$$

根据定理，几乎处处一致收敛到左端 8.4。因此，在Ω_1，（8.21）右端的求和与留数（即围道积分）可交换，并且（8.21）在 $|z_2|\succ|z_3|>0$上几乎处处一致收敛到

$$g(z_2,z_3)=\mathrm{Res}_{z_1=z_2}(z_1-z_2)^nf(z_1,z_2,z_3)dz_1$$

它在$\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ 上全纯，因为 f 在$\mathrm{Conf}^3(\mathbb{C}^\times)$ 上全纯，由定理 8.1可知。同样， $\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle v',C(z_3)P_k(A_nB)(z_2)\rangle$在 $|z_3|>|z_2|>0$ 上一致几乎处处收敛到 $g(z_2,\ z_3)$。

步骤 2。为完成证明，我们需要证明 $(z_2-z_3)^kg$ 在$z_2=z_3$ 附近全纯，其中 k。由定理 8.1可知， $(z_1-z_2)^nf$ 是以下各项的线性组合：

$$z_1^az_2^bz_3^c(z_1-z_2)^{n-N}(z_1-z_3)^{-N}(z_2-z_3)^{-N}$$

对于某个 $N\in\mathbb{N}$和 $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$。为证明此结论，不妨假设 $(z_1-z_2)^nf$恰好具有这种形式。那么在 $z_1=z_2$附近， $(z_1-z_2)^nf$ 有一致几乎处处收敛的级数展开

$$(z_1-z_2)^nf=\sum_{i,j\geqslant 0}\binom{a}{i}(z_1-z_2)^{n-N+i}z_2^{a-i+b}z_3^c\binom{-N}{j}(z_1-z_2)^j(z_2-z_3)^{-2N-j}.$$

应用 $\mathrm{Rep}_{z_1=z_2}\cdot dz_1$。这意味着取 $(z_1-z_2)^{n-N+i+j}$ 的系数，其中 $n-N+i+j=-1$。因此我们令 $i=N-n-j-1$。由于 $i\geqslant 0$，我们取 $0\leqslant j\leqslant N-n-1$。所以

$$g(z_2,z_3)=\sum_{j=0}^{N-n-1}\binom{a}{N-n-j-1}z_2^{a-(N-n-j-1)+b}z_3^c\binom{-N}{j}(z_2-z_3)^{-2N-j},$$

显然，它在 $z_2=z_3$处有有限个极点。 □

8.8

命题 8.10 (Goddard 唯一性)。 设 $\mathcal{E}$ 是一组齐次场，满足重构定理中关于分次顶点代数的假设。5.12。若 $A^1(z)$, $A^2(z) \in \mathcal{E}$满足 $A^1_{-1}\mathbf{1} = A^2_{-1}\mathbf{1}$，则 $A^1(z) = A^2(z)$。

证明。令 $A = A^1 - A^2$，并且不失一般性地假设 $A \in \mathcal{E}$。那么 $A_{-1}\mathbf{1}$ =0。根据生成性质，我们可以通过证明如下命题来得到 $A(z) = 0$：对于任意的 $v' \in \mathbb{V}'$,$B^1, \dots, B^k \in \mathcal{E}$，以及 $n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$,

$$\langle v', A_n B^1_{n_1} \cdots B^k_{n_k}\mathbf{1}\rangle = 0. \tag{8.22}$$

假设我们可以证明

$$\langle v', A(z)B^1(z_1)\cdots B^k(z_k)\mathbf{1}\rangle = 0 \tag{8.23}$$

作为 $\mathrm{Conf}^{k+1}(\mathbb{C}^\times)$上的函数。然后将其乘以任意一个关于$z, z_1, \dots, z_N$的劳朗多项式，并对 $|z| = R$, $|z_1| = r_1, \dots, |z_k| = r_k$进行围道积分，其中$0 < r_k < \cdots < r_1 < R$，即可得到（8.22）。

由于（8.23）的左端是全纯的，只需在 $0 < |z| < |z_1| < \cdots < |z_k|$时证明（8.23），即证明在此定义域中

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} \langle v', B^1(z_1)\cdots B^k(z_k)P_s A(z)\mathbf{1}\rangle = 0.$$

因此，只需证明 $A(z)\mathbf{1} = 0$。由于 $A(z)$ 满足平移性质和创生性质$\lim_{z\to 0} A(z)\mathbf{1} = A_{-1}\mathbf{1}$, 与推论3.11 的证明类似，我们有$A(z)\mathbf{1} = e^{zL_{-1}}A_{-1}\mathbf{1}$。因此， $A(z)\mathbf{1}$ 必定是0。

□

8.9

重构定理5.12的证明。假设 $\mathcal{E}$ 包含单位场 $\mathbf{1}(z) = \mathbf{1}_{\mathbb{V}}$。若 $A(z)$, $B(z) \in \mathcal{E}$，那么利用（8.20），容易验证 A_nB 满足创生性质，其中

$$(A_nB)_{-1}\mathbf{1} = A_nB_{-1}\mathbf{1}. \tag{8.24}$$

因此，根据引理8.8 和 Dong 引理，若将 A_nB 加入 $\mathcal{E}$，那么新的 $\mathcal{E}$ 仍满足定理5.12中关于分次顶点代数的假设。由归纳法，当A^1, ..., $A^k \in \mathcal{E}$时，我们有

$$(A^1_{n_1}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1})_{-1}\mathbf{1} = A^1_{n_1}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1}. \tag{8.25}$$

因此，通过加入任意形如 $A^1_{n_1}\cdots A^k_{n_k}\mathbf{1}$ in$\mathcal{E}$ 的向量的线性组合，我们可以假设，对于每个齐次 $u \in \mathbb{V}$，都存在 $A(z) \in \mathcal{E}$ 使得$A_{-1}\mathbf{1} = u$。根据 Goddard 唯一性，这样的 $A(z)$ 是唯一的，因此可以写作 $Y(u, z)$。

我们现在证明 Y 的雅可比恒等式，因为分次顶点代数的其他公理显而易见。取 $A(z)=Y(u,\ z)$ 和 $B(z)=Y(v,\ z)$ 属于 $\mathcal{E}$。注意 $v=B_{-1}\mathbf{1}$。通过扩张 $\mathcal{E}$，我们可以假设每个 A_nB 都属于 $\mathcal{E}$。为了证明顶点算子代数 Jacobi 恒等式（4.12），根据（7.18），只需证明 $Y(Y(u)_nv,\ z)=(A_nB)(z)$。这由 Goddard 唯一性以及

$$(A_nB)_{-1}\mathbf{1}=A_nB_{-1}\mathbf{1}=A_nv=Y(u)_nv.$$

因此 $\mathbb{V}$ 是一个分次顶点代数。定理 5.12 中关于顶点算子代数的最后一段是显然的。

□

9 顶点算子代数模；逆变模

9.1

设 $\mathbb{V}$ 是一个顶点算子代数。

定义 9.1。一个向量空间 $\mathbb{W}$ 配备一个线性映射

$$\begin{aligned}Y_{\mathbb{W}}:\mathbb{V}&\to(\mathrm{End}\mathbb{W})[[z^{\pm1}]],\\ v&\mapsto Y_{\mathbb{W}}(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}Y_{\mathbb{W}}(v)_nz^{-n-1}\end{aligned}$$

（其中每个 $Y_{\mathbb{W}}(v)_n\in\mathrm{End}\mathbb{W}$）称为一个**弱 $\mathbb{V}$-模**，如果满足以下条件：

- （下截断） $Y_{\mathbb{W}}(v,\ z)w\in\mathbb{W}((z))$ 对于每个 $v\in\mathbb{V},\ w\in\mathbb{V}$。
- $Y_{\mathbb{W}}(\mathbf{1},\ z)=\mathbf{1}_{\mathbb{W}}$。
- （雅可比恒等式）对于每个 $u,\ v\in\mathbb{V}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{m}{l}Y_{\mathbb{W}}\big(Y(u)_{n+l}v\big)_{m+k-l}\\ =&\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\binom{n}{l}Y_{\mathbb{W}}(u)_{m+n-l}Y_{\mathbb{W}}(v)_{k+l}-\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^{n+l}\binom{n}{l}Y_{\mathbb{W}}(v)_{n+k-l}Y_{\mathbb{W}}(u)_{m+l}.\end{aligned}\tag{9.1}$$

定义 9.2。一个**可容许的 $\mathbb{V}$-模** $\mathbb{W}$（或简称为 $\mathbb{V}$-模）是一个弱 $\mathbb{V}$-模$\widetilde{\ }$，满足 $\mathbb{W}=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{W}(n)$ 按一个可对角化算子 L_0 分次，并满足分次性质

$$[\widetilde{L}_0,Y_{\mathbb{W}}(v,z)]=Y_{\mathbb{W}}(L_0v,z)+z\partial_zY_{\mathbb{W}}(v,z)\tag{9.2}$$

对于每个 v。等价地，对于齐次 v,

$$[\widetilde{L}_0,Y_{\mathbb{W}}(v)_n]=(\mathrm{wt}v-n-1)Y_{\mathbb{W}}(v)_n,\tag{9.3}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$即，$Y_{\mathbb{W}}(v,\ z)$ 是 L_0-齐次的，其权为 $\mathrm{wt}v$。L_0 的零向量和特征向量称为（$\widetilde{L}_0$）**-齐次向量**。若 $w\in\mathbb{W}(n)$，则 $\widetilde{\ }\mathrm{wt}w:=n$ 称为 w的（$\widetilde{L}_0$）**-权**。若每个 $\mathbb{W}(n)$ 都是有限维的，我们称 $\mathbb{W}$ 是**有限可容许**的。

在可容许模的定义中，下截断性质是多余的，因为它可由分次性质推出。

约定 9.3。 $\mathbb{V}$ 本身是一个可容许的 $\mathbb{V}$-模，称为**真空模**。（它类似于李代数的伴随表示。）我们总是将$\sim L_0$ 在 $\mathbb{V}$ 上的算子取为 L_0。

9.2

命题 9.4。 设 $\mathbb{W}$ 是一个弱 $\mathbb{V}$-模。则对每个 $u \in \mathbb{V}$，以下平移性质成立：

$$[L_{-1}, Y_{\mathbb{W}}(v,z)] = Y_{\mathbb{W}}(L_{-1}v, z) = \partial_z Y_{\mathbb{W}}(v,z). \tag{9.4}$$

证明。 对 $[Y_{\mathbb{W}}(\mathbf{c})_0$应用雅可比恒等式，$Y_{\mathbb{W}}(u)_k]$ 得到 $[L_{-1},\ Y(u)_k] = Y(L_{-1}u)_k$。由（3.39），$L_{-1}u = Y(u)_{-2}\mathbf{1}$。对 $Y_{\mathbb{W}}(Y(u)_{-2}\mathbf{1})_k$ 应用雅可比恒等式可知，它等于 $-kY_{\mathbb{W}}(u)_{k-1}$。

□

Pro命题 9.5。 设 $\mathbb{W}$ 是一个弱 $\mathbb{V}$-模。定义 L_n 在 $\mathbb{W}$ 上的作用为 e

$$L_n = Y_{\mathbb{W}}(\mathbf{c})_{n+1} \tag{9.5}$$

于是 $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足具有与 $\mathbb{V}$相同的中心荷 c 的维拉索罗关系。

证明。使用雅可比恒等式、平移性质和注释 3.2 来计算$[Y_{\mathbb{W}}(\mathbf{c})_{m+1},\ Y_{\mathbb{W}}(\mathbf{c})_{k+1}]$。

□

习题 9.6。证明 $[L_0,\ Y_{\mathbb{W}}(v,\ z)] = Y_{\mathbb{W}}(L_0 v,\ z) + z\partial_z Y_{\mathbb{W}}(v,\ z)$。

~注 9.7. 上述练习表明，若 $\mathbb{W}$ 是可容许的，那么 $A := L_0 - L_0$ 与 $\mathbb{V}$ 在 $\mathbb{W}$ 上的作用相交换，即 $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W})$。特别地，它与$\sim L_0 = Y_{\mathbb{W}}(\mathbf{c})_1$ 相交换，因而也与 L_0 相交换。因此，$L_0 - L_0$ 是可容许的 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}$ 上一个与 L_0相交换的自同态。另请注意，由 (9.3) 可知，L_n 将 L_0-权降低 n：

$$[\tilde{L}_0, L_n] = -nL_n. \tag{9.6}$$

<escape>~</escape>**约定 9.8**。可容许的 $\mathbb{V}$-模的分次始终指 L_0-分次，即使 L_0 是可对角化的。

9.3

我们讨论不可约模的一些基本性质。

约定 9.9。 弱模/可容许模/有限可容许模之间的同态 $A : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ 始终指交织 $\mathbb{V}$作用的线性映射。

定义 9.10. 不可约 $\mathbb{V}$**-模** 是一个有限可容许的 $\mathbb{V}$-模，且不含任何~真分次 $\mathbb{V}$-不变子空间（即不含任何真 $\mathbb{V}$-和 L_0-不变子空间）。

引理 9.11（舒尔引理）。设 $\mathbb{W}$ 是一个不可约 $\mathbb{V}$-模。设 $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W})$ 满足 $[L_0, A] = 0$。则 $A \in \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathbb{W}}$。

证明。根据 $[L_0, A] = 0$，A 在每个 $\mathbb{W}(n)$上限制为线性算子。选取 n 使得$\mathbb{W}(n) \neq 0$。由于 $\mathbb{W}(n)$ 是有限维的，$A|_{\mathbb{W}(n)}$ 有一个特征值 λ。因此，子空间 $\mathrm{Ker}(A-\lambda)$ 非零（显然是 $\mathbb{V}$-不变的）。它也在 L_0 下不变，因为 $[L_0, A-\lambda] = 0$。因此 $\mathrm{Ker}(A-\lambda) = \mathbb{W}$。 □

推论 9.12. 设 $\mathbb{W}$ 是一个不可约 $\mathbb{V}$-模。那么 $L_0 = L_0 + \lambda$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$成立。特别地，L_0 在 $\mathbb{W}$上可对角化。

*P*顶。这由注释 9.7 和舒尔引理 9.11 . □

由此推论可知，不可约模的 L_0-分次唯一确定，至多相差一个标量。

推论 9.13。任何不可约 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}$ 都没有非平凡的 $\mathbb{V}$-不变子空间。

证明。设 $\mathbb{M}$ 是 $\mathbb{W}$ 的一个 $\mathbb{V}$-不变子空间。由于 $L_0 = Y_{\mathbb{W}}(\mathbf{c})_1$，因此 $\mathbb{M}$ 是 L_0-不变的。所以 $\mathbb{M}$ 是 L_0-不变的，即一个分次子空间。因此，$\mathbb{M}$ 不是真子空间。 □

通过相同的推理，我们有：

推论 9.14 (舒尔引理**)**。设 $\mathbb{W}$ 是一个不可约 $\mathbb{V}$-模。那么 $\mathrm{End}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}) = \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathbb{W}}$。

定义 9.15。如果任意可容许的 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}$ 都是完全可约的，即 $\mathbb{W}$ 是不可约 $\mathbb{V}$-模的直和，则称 $\mathbb{V}$ 是**有理**的。

9.4

通过将 L_0 替换为 L_0，第 7 节及第 8.1-8.7 小节中的所有结果均适用于可容许模。

练习 9.16。给出雅可比恒等式的复解析定义（参见定义 7.16），适用于可容许的 $\mathbb{V}$-模，并证明它与代数雅可比恒等式（9.1）等价。

然而，由于缺少真空向量$\mathbf{1}$，Goddard 唯一性以及重构定理对模并不成立。因此，仅检查局部性不足以证明 $\mathbb{V}$-模结构的存在。要构造模的实例，需要采用新的方法。

以下是一种构造顶点算子代数模的简便方法。假设 $\mathbb{V}$ 是顶点算子代数 $\mathbb{U}$ 的一个子代数，且 $\mathbb{U}$ 上的 L_0 限制为 $\mathbb{V}$。（我们不假设 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{U}$ 具有相同的共形向量。）如果我们已经构造出一个可容许的 $\mathbb{U}$-模 $\mathbb{M}$（例如，$\mathbb{M} = \mathbb{U}$），那么将 $\mathbb{M}$ 视为一个 $\mathbb{V}$-模后，$\mathbb{M}$ 的任何 $\mathbb{V}$-不变分次子空间显然都是一个 $\mathbb{V}$-模。特别是，如果我们已经知道 $\mathbb{M}$ 是一个酉 $\mathbb{U}$-模，那么这样构造出的 $\mathbb{V}$-模就是酉的。

9.5

这里我们陈述一些关于与仿射和 Virasoro 顶点算子代数相关的不可约模的结果，但不提供证明。有关详细内容，请读者参阅 [LL，第 6], [Was10],以及 [FZ92，Wang93] 。

令 $\mathfrak{g}$ 为阿贝尔代数或单李代数。设 W 是 $\mathfrak{g}$的有限维不可约表示。固定层 $l \in \mathbb{C}$ 使得 $l+h^\vee \neq 0$。回忆分解$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_+$ 为第6.8节中定义的李子代数:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_- = \mathrm{Span}\{X_n : X \in \mathfrak{g}, n < 0\}, \qquad \widetilde{\mathfrak{g}}_+ = \mathrm{Span}\{X_n, K, D : X \in \mathfrak{g}, n \geqslant 0\}. \tag{9.7}$$

于是， $\mathfrak{g}$-模 W 可扩展为一个 $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$-模结构，使得当 $n > 0$时， X_n 在 W上平凡作用， X_0 作用为 X，而 $D = 0$、 $K = l$在 W上作用。令

$$V_{\mathfrak{g}}(l, W) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathfrak{g}}_+}^{\widetilde{\mathfrak{g}}}(W) = U(\widetilde{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widetilde{\mathfrak{g}}_+)} W, \qquad L_{\mathfrak{g}}(l, W) = V_{\mathfrak{g}}(l, W)/I$$

其中 I是最大的真 D-和 $\widetilde{\mathfrak{g}}$-不变子空间。于是 $V_{\mathfrak{g}}(l、 W)$ 和 $L_{\mathfrak{g}}(l、 W)\widetilde{}$具有唯一的有限可容许 $V_{\mathfrak{g}}(l、 0)$-模结构，使得 $D = L_0$ ，并且令 $\mathbb{W}$ 为其中任一个，则对于每个 $X \in \mathfrak{g}$、 $n \in \mathbb{Z}$， $Y_{\mathbb{W}}(X_{-1}\mathbf{1})_n$ 等于 X_n 在 $\mathbb{W}$ 上的作用。$L_{\mathfrak{g}}(l、 W)$ 是不可约的。当 $\mathfrak{g}$为阿贝尔代数、 W是酉的且 $l > 0$时， $V_{\mathfrak{g}}(l、 W) = L_{\mathfrak{g}}(l、 W)$ 是酉模。

假设 $\mathfrak{g}$ 是单的，且 $l \in \mathbb{N}$。那么 W 自然是一个酉 $\mathfrak{g}$-模。于是，WZW 模型 $L_{\mathfrak{g}}(l, 0)$ 的所有不可约模都是酉的，且都由所有满足以下性质的 $L_{\mathfrak{g}}(l, W)$ 给出，其中 W 是一个不可约 $\mathfrak{g}$-模。（如果你不熟悉李代数表示论，可以跳过这一部分。）设 W 的最高权为 λ。设 $\mathfrak{g}$ 的最高根（也是最长根）为 θ ，即 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示的最高权。回顾 $\mathfrak{g}$ 上满足 $(\theta|\theta) = 2$ 的内积 $(\cdot|\cdot)$ ，它在 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 上诱导出一个内积。由此可在对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ （即权空间）上自然地定义一个内积。那么， $(\theta|\lambda)$ （它总是 $\geqslant 0$ ）应当满足 $\leqslant l$。这样的 W 只有有限多个等价类。

同样，Vir $=$ Vir$^+ \oplus$Vir$^-$ 其中

$$\mathrm{Vir}^- = \mathrm{Span}\{L_n : n \leqslant -1\}, \qquad \mathrm{Vir}^+ = \mathrm{Span}\{K, L_n : n \geqslant 0\}.$$

对于每个 $c, h \in \mathbb{C}$， 令 $\mathbb{C}_{c,h}$ 为一个一维 Vir$^+$-模，使得 $K = c, L_0 = h$ ，并且对所有 $n > 0$ 都成立。令

$$M_{\mathrm{Vir}}(c, h) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Vir}^+}^{\mathrm{Vir}} \mathbb{C}_{c,h} = U(\mathrm{Vir}) \otimes_{U(\mathrm{Vir}^+)} \mathbb{C}_{c,h}, \qquad L_{\mathrm{Vir}}(c, h) = M_{\mathrm{Vir}}(c, h)/I$$

其中， I仍然是最大的真子模。于是，存在唯一的有限可容许$\sim V_{\mathrm{Vir}}(l, 0)$-模结构，定义在 $\mathbb{W} = M_{\mathrm{Vir}}(l, h)$或 $\mathbb{W} = L_{\mathrm{Vir}}(l, h)$上，并满足 $L = L_0 - h$ ，使得$Y_{\mathbb{W}}(\mathbf{c})_n$ 是 L_{n-1} 在 $\mathbb{W}$上的作用。

当 c 满足 (6.4) 时，极小模型 $L_{\mathrm{Vir}}(c, 0)$ 的不可约模由所有 $L_{\mathrm{Vir}}(c, h_{m,n})$ 分类，其中 m, n 是满足 $0 < m < p, 0 < n < q$ 的整数，并且

$$h_{m,n} = \frac{(np - mq)^2 - (p - q)^2}{4pq}. \tag{9.8}$$

当 c 满足（6.5）时， $L_{\mathrm{Vir}}(c, 0)$ 且其所有不可约模都是酉的。

9.6

本节剩余部分将用于研究逆变模（即对偶模）。设 $\mathbb{W}=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{W}(n)$ 是一个容许的 $\mathbb{V}$-模。照例，对于每个n，我们按典范方式定义代数完备化到 $\mathbb{W}(n)$ 的投影：

$$P_n:\mathbb{W}^{\mathrm{cl}}=\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{W}(n)\to\mathbb{W}(n). \tag{9.9}$$

定义分次对偶空间

$$\mathbb{W}'=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{W}'(n):=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{W}(n)^*$$

像通常那样。则 $P_n:\ \mathbb{W}'\to\mathbb{W}(n)^*$ 以显然的方式定义。

9.7

我们的目标是在 $\mathbb{W}'$上定义一个容许的 $\mathbb{V}$-模结构 $Y_{\mathbb{W}'}$。为了找到 $Y_{\mathbb{W}'}$的公式，考虑以下数据

$$\mathfrak{X}=(\mathbb{P}^1;0,z,\infty;\zeta,\zeta-z,\zeta^{-1})$$

其中 ζ 是 $\mathbb{C}$的标准坐标。如果 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$ 包含 $\mathbb{W}\otimes\widehat{\mathbb{W}}$，其中 $\widehat{\mathbb{W}}$ 是一个 $\hat{\mathbb{V}}$-模，$\widehat{\ }$，并且如果 $w\otimes\widehat{w}\in\mathbb{W}\otimes\mathbb{W}$、 $v\otimes\hat{v}\in\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$、$w'\otimes\widehat{w}'\in\mathbb{W}'\otimes\mathbb{W}'$ 分别进入穿孔点0， z，8，那么关联函数由下式给出

$$\langle w'\otimes\widehat{w}',Y_{\mathbb{W}}(v,z)w\otimes W_{\widehat{\mathbb{W}}}(\hat{v},\overline{z})\widehat{w}\rangle=\langle w',Y_{\mathbb{W}}(v,z)w\rangle\langle\widehat{w}',Y_{\widehat{\mathbb{W}}}(\hat{v},\overline{z})\widehat{w}\rangle. \tag{9.10}$$

为简化讨论，我们聚焦于手征部分。与 $\mathbb{W}$、 $\mathbb{V}$、 $\mathbb{W}'$相关联、对应于0、 z、8的标准共形块由 $\langle w'$、 $Y_{\mathbb{W}}(v$、 $z)w\rangle$给出。事实上，若我们选择 $\hat{v}=\mathbf{1}$，再选择 $\widehat{w}$、 $\widehat{w}'$ 使得 $\langle\widehat{w}'$、$\widehat{w}\rangle=1$，并通过将 w 与 $w\otimes\widehat{w}$对应起来，将 $\mathbb{W}$ 与 $\mathbb{W}\otimes\widehat{w}$ 等同；同样地，将 $\mathbb{W}'$ 与 $\mathbb{W}'\otimes\widehat{w}'$等同，那么关联函数（9.10）恰好变为共形块 $\langle w'$、 $Y_{\mathbb{W}}(v$、 $z)w\rangle$。因此，我们也可以将 $\langle w'$、$Y_{\mathbb{W}}(v$、 $z)w\rangle$ 视为一个（受限的）关联函数。

我们希望与.....相关的关联函数/标准共形块

$$\mathfrak{Z}=(\mathbb{P}^1;0,z^{-1},\infty;\zeta,\zeta-z^{-1},\zeta^{-1})$$

is

$$\psi(w'\otimes v\otimes w)=\langle Y_{\mathbb{W}'}(v,z^{-1})w',w\rangle$$

其中， $\mathbb{W}'$， $\mathbb{V}$， $\mathbb{W}$ 分别与 0， z^{-1} 8 相关联。现在，双全纯映射 $\gamma\in\mathbb{P}^1\mapsto\gamma^{-1}\in\mathbb{P}^1$几乎给出了 $\mathfrak{X}$ 与 $\mathfrak{Y}$之间的一个等价：唯一的例外是，沿此映射拉回的局部坐标$\zeta-z$满足 $\zeta^{-1}-z$，但不满足 $\zeta-z^{-1}$。因此，我们来考虑一下。

$$\mathfrak{Y}=(\mathbb{P}^1;0,z^{-1},\infty;\zeta,\zeta^{-1}-z,\zeta^{-1})$$

等价于 $\mathfrak{X}$ 通过 $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$。同样，我们将 $\mathbb{W}', \mathbb{V}, \mathbb{W}$ 关联到 $0, z^{-1}, \infty$，与 $\mathfrak{Z}$ 相同。那么 $\mathfrak{Y}$ 的标准共形块仍然是

$$\phi(w' \otimes v \otimes w) = \langle w', Y_{\mathbb{W}}(v,z)w \rangle.$$

现在我们利用坐标变换公式联系 ϕ 和 ψ，注意到 $\zeta - z^{-1} = \vartheta_z \circ (\zeta^{-1} - z)$，其中（对每个 $t \in \mathbb{P}^1$）

$$\vartheta_z(t) = \frac{1}{z+t} - \frac{1}{z}. \tag{9.11}$$

因此

$$\phi(w' \otimes v \otimes w) = \psi(w' \otimes \mathcal{U}(\vartheta_z)v \otimes w) \tag{9.12}$$

其中，$\mathcal{U}(\vartheta_z)$ 是作用在（$\mathbb{W}$ 的希尔伯特空间完备化上的）与 $\mathbb{V}$ 相关的算子。

9.8

还需要求出 $\mathcal{U}(\vartheta_z)$。为避免记号冲突，我们在第 $z^{n+1}\partial_z$ 节将 2 记为$\zeta^{n+1}\partial_\zeta$。于是根据（2.15），$\exp(z\zeta^2\partial_\zeta)$ 将 γ 映射为 $(1/\gamma - z)^{-1}$，因此 $-z^{-2}\gamma$ 映射为 $\vartheta_z(\gamma)$。这意味着

$$\vartheta_z = \exp(z\zeta^2\partial_\zeta) \circ \exp(\log(-z^{-2})\zeta\partial_\zeta) = \exp(z\zeta^2\partial_\zeta) \circ (-z^{-2})^{\zeta\partial_\zeta}. \tag{9.13}$$

因此，在 $\mathbb{V}$ 上，

$$\mathcal{U}(\vartheta_z) = e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}. \tag{9.14}$$

展开（9.12），得到

$$\big\langle w', Y_{\mathbb{W}}(v,z)w \big\rangle = \big\langle Y_{\mathbb{W}'}\big(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}v, z^{-1}\big)w', w \big\rangle$$

交换 $\mathbb{W}$ 和 $\mathbb{W}'$ 的角色，我们得到定义：

定义 9.17。设 $\mathbb{W}$ 是一个可容许的 $\mathbb{V}$-模。则 $Y_{\mathbb{W}'}$：$\mathbb{V} \to (\mathrm{End}\mathbb{W}')[[z^{\pm 1}]]$ 定义为

$$\big\langle Y_{\mathbb{W}'}(v,z)w', w \big\rangle = \big\langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}v, z^{-1}\big)w \big\rangle \tag{9.15}$$

for each $v \in \mathbb{V}$，$w \in \mathbb{W}$，$w' \in \mathbb{W}'$。假设 v 为齐次的，这意味着

$$Y_{\mathbb{W}'}(v,z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!} \cdot (-z^{-2})^{\mathrm{wt}v} \cdot Y_{\mathbb{W}}\big(L_1^k v, z^{-1}\big)^{\mathrm{t}}. \tag{9.16}$$

展开两边可知，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$,

$$Y_{\mathbb{W}'}(v)_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{\mathrm{wt}v}}{k!} \big(Y_{\mathbb{W}}(L_1^k v)_{-n-k-2+2\mathrm{wt}v}\big)^{\mathrm{t}}. \tag{9.17}$$

习题 9.18。设 L_n 是 $Y_{\mathbb{W}'}(\mathbf{c})_{n+1}$ 在 $\mathbb{W}'$。利用（9.17），证明对于每个 $w \in \mathbb{W}$，$w' \in \mathbb{W}'$,

$$\langle L_n w', w \rangle = \langle w', L_{-n} w \rangle. \tag{9.18}$$

9.9

本小节的目的是证明推论 9.20。

~**练习 9.19**。 利用 $[L_0,\ L_1]=-L_1$ 证明作用于 $w\in\mathbb{W}$ 时，

$$L_1\lambda^{\tilde{L}_0}=\lambda^{\tilde{L}_0+1}L_1, \tag{9.19a}$$

$$e^{\tau L_1}\lambda^{\tilde{L}_0}=\lambda^{\tilde{L}_0}e^{\tau\lambda L_1} \tag{9.19b}$$

分别在 $\mathbb{W}[\lambda]$ 和 $\mathbb{W}[\lambda,\ \tau]$。

(提示。方法 1：计算 ∂_λ 对应第一个方程的值，∂_τ 对应第二个方程的值，并应用引理 3.7。方法 2：利用 L_1 将权降低 1 这一事实，验证当 v 为齐次时这些方程成立。)

对 ∂_λ （9.19b）在 $\lambda=1$处取

$$e^{\tau L_1}\tilde{L}_0=\tilde{L}_0e^{\tau L_1}+\tau L_1e^{\tau L_1}. \tag{9.20}$$

推论 9.20。我们有

$$Y_{\mathbb{W}}(v,z)=Y_{\mathbb{W}'}\big(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}v,z^{-1}\big)^{\mathrm{t}}. \tag{9.21}$$

因此，如果 $\mathbb{W}$ 是有限可容许的，那么 $\mathbb{W}''=\mathbb{W}$ 和 $Y_{\mathbb{W}''}=Y_{\mathbb{W}}$。

证明。由（9.15），

$$Y_{\mathbb{W}'}\big(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}v,z^{-1}\big)^{\mathrm{t}}=Y_{\mathbb{W}}\big(e^{z^{-1}L_1}(-z^2)^{L_0}e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}v,z^{-1}\big)^{\mathrm{t}},$$

这等于 $Y_{\mathbb{W}}(v,\ z)$ 因为 $(-z^2)^{L_0}e^{zL_1}=e^{-z^{-1}L_1}(-z^2)^{L_0}$ 根据（9.19b）。 □

9.10

在本节的其余部分，我们证明本节的以下主要结果 .

定理 9.21。 设 $(\mathbb{W},Y_{\mathbb{W}})$ 是一个可容许 $\mathbb{V}$-模。则 $(\mathbb{W}',Y_{\mathbb{W}'})$ 是一个可容许 $\mathbb{V}$-模，称为 $\mathbb{W}$ 的对偶 $\mathbb{V}$-模 。如果 $\mathbb{W}$ 是有限可容许的，则 $\mathbb{W}'$也是如此，并且在典范识别 $\mathbb{W}=\mathbb{W}''$ 下有 $Y_{\mathbb{W}}=Y_{\mathbb{W}''}$。

定理的最后一句得到了证明。为验证 $\mathbb{W}'$ 是一个可容许模，我们从以下简单观察开始。

~**引理 9.22. </style}若 是齐次的，则 , 是 -齐次的，权为 wt$v$。**

~证明. 利用 (9.6) 和 (9.17)，容易计算得 $[L_0,Y_{\mathbb{W}'}(v)_n]=(\mathrm{wt}v-n-1)Y_{\mathbb{W}'}(v)_n$。 □

显然 $Y_{\mathbb{W}'}(\mathbf{1},z)=\mathbf{1}_{\mathbb{W}'}$。要证明 $Y_{\mathbb{W}'}$ 满足可容许模的公理，还需检验雅可比恒等式。我们先证明局部性：

引理 9.23. 设 u、$v\in\mathbb{V}$ 是齐次的。则 $Y_{\mathbb{W}'}(u、\ z)$ 和 $Y_{\mathbb{W}'}(v、\ z)$ 是局部的。

证明. 我们证明复解析局部性。对于每个 $w \in \mathbb{W}$， $w' \in \mathbb{W}'$，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Y_{\mathbb{W}'}(u,z_1)P_nY_{\mathbb{W}'}(v,z_2)w', w\rangle \tag{9.22}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(e^{z_2L_1}(-z_2^{-2})^{L_0}v, z_2^{-1}\big)P_nY_{\mathbb{W}}\big(e^{z_1L_1}(-z_1^{-2})^{L_0}u, z_1^{-1}\big)w\rangle \tag{9.23}$$

它在 $0 < |z_1^{-1}| < |z_2^{-1}|$ 上一致几乎处处收敛，这是由 $Y_{\mathbb{W}}(u、 z)$ 和 $Y_{\mathbb{W}}(v、 z)$ 的局部性所致。此外，这种局部性表明，上述表达式和

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Y_{\mathbb{W}'}(v,z_2)P_nY_{\mathbb{W}'}(u,z_1)w', w\rangle \tag{9.24}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(e^{z_1L_1}(-z_1^{-2})^{L_0}u, z_1^{-1}\big)P_nY_{\mathbb{W}}\big(e^{z_2L_1}(-z_2^{-2})^{L_0}v, z_2^{-1}\big)w\rangle \tag{9.25}$$

（它在 $0 < |z_2^{-1}| < |z_1^{-1}|$ 上一致几乎处处收敛）可以延拓为 $\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}^\times)$ 上同一个全纯函数 f。该函数是形如 $\langle w'、 Y_{\mathbb{W}}(\cdot、 z_1)Y_{\mathbb{W}}(\cdot、 z_2)w\rangle$ 的四点关联函数的 $\mathbb{C}[z_1^{\pm1}、 z_2^{\pm1}]$-线性组合；乘以某个 $(z_1-z_2)^N$ 后，它在 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ 上全纯，其中 N 为某个值。因此， f 也具有相同的性质。 □

9.11

设 $A(z) = Y_{\mathbb{W}'}(u、 z)$ 和 $B(z) = Y_{\mathbb{W}'}(v、 z)$。由于 A 和 B 是局部的，对于 $A(z)$、$B(z)$、 $(A_\bullet B)(z)$，我们有雅可比恒等式（7.18）。若能证明，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$ 和齐次的 $w \in \mathbb{W}$、 $w' \in \mathbb{W}'$，作为 $\mathbb{C}[z_2^{\pm1}]$的元素，我们有，则这蕴含了 $Y_{\mathbb{W}'}$的雅可比恒等式

$$\big\langle (A_kB)(z_2)w', w\big\rangle = \big\langle Y_{\mathbb{W}'}(Y(u)_kv, z_2)w', w\big\rangle. \tag{9.26}$$

根据（7.14）， （9.26）的左端是 留数$_{z_1=z_2}(z_1-z_2)^k f(z_1, z_2)dz_1$其中 f是在引理 9.23 的证明中定义的。由（9.25）以及 $Y_{\mathbb{W}}$的复解析 Jacobi 恒等式， （

$$f(z_1,z_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(P_nY\big(e^{z_1L_1}(-z_1^{-2})^{L_0}u, z_1^{-1}-z_2^{-1}\big)\cdot e^{z_2L_1}(-z_2^{-2})^{L_0}v, z_2^{-1}\big)w\rangle \tag{9.27}$$

几乎处处一致收敛到左端上的 $0 < |z_1^{-1}-z_2^{-1}| < |z_2^{-1}|$。

（9.26）的右端是将 $\mathrm{Res}_{z_1-z_2=0}\cdot(z_1-z_2)^k d(z_1-z_2)$ 作用于以下 $\mathbb{C}[z_2^{\pm1}][[(z_1-z_2)^{\pm1}]]$元素：

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} (z_1-z_2)^{-n-1}\big\langle Y_{\mathbb{W}'}\big(Y(u)_nv, z_2\big)w', w\big\rangle \\
=&\big\langle Y_{\mathbb{W}'}\big(Y(u, z_1-z_2)v, z_2\big)w', w\big\rangle \\
=&\big\langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(e^{z_2L_1}(-z_2^{-2})^{L_0}Y(u, z_1-z_2)v, z_2\big)w\big\rangle \\
=&\big\langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(e^{z_2L_1}Y\big((-z_2^{-2})^{L_0})u, z_2^{-2}(z_2-z_1)\big)(-z_2^{-2})^{L_0}v, z_2\big)w\big\rangle.
\end{aligned} \tag{9.28}$$

其中，最后一个等式用到了尺度协变性。

练习 9.24。 设定 $\mathbb{C}[z_2^{\pm 1}][[(z_1-z_2)^{\pm 1}]]$ 的以下元素:

$$g_n(z_2,z_1-z_2)=\big\langle w',Y_{\mathbb{W}}\big(P_n e^{z_2L_1}Y\big((-z_2^{-2})^{L_0}u,z_2^{-2}(z_2-z_1)\big)(-z_2^{-2})^{L_0}v,z_2\big)w\big\rangle.$$

证明对每个 $k\in\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Res}_{z_1-z_2=0}\,(z_1-z_2)^k g_n(z_2,z_1-z_2)d(z_1-z_2) \tag{9.29}$$

是 $z_2^{\pm 1}$的单项式，当 $n>$ 权$u+$ 权$v-k-1$时为零。由此得出，将 留数 $_{z_1-z_2=0}\cdot(z_1-z_2)^k d(z_1-z_2)$作用于 (9.28) 等于对所有 n 的 (9.29) 求和（该和自动为有限和）。

由此可见，如果我们能够证明以下命题，式（9.26）便成立：对于任意 $v'\in\mathbb{V}'(n)=\mathbb{V}(n)^*$ （例如，$\langle v',\ \cdot\rangle=\langle w',\ Y_{\mathbb{W}}(P_n\cdot,\ z_2)w\rangle$，作为 z_2 在 $\mathbb{C}^\times$上的全纯函数，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z_1=z_2}(z_1-z_2)^k\big\langle v',Y\big(e^{z_1L_1}(-z_1^{-2})^{L_0}u,z_1^{-1}-z_2^{-1}\big)\cdot e^{z_2L_1}(-z_2^{-2})^{L_0}v\big\rangle dz_1\\ =&\mathrm{Res}_{z_1-z_2=0}(z_1-z_2)^k\big\langle v',e^{z_2L_1}Y\big((-z_2^{-2})^{L_0}u,z_2^{-2}(z_2-z_1)\big)(-z_2^{-2})^{L_0}v\big\rangle d(z_1-z_2)\end{aligned} \tag{9.30}$$

其中，左端是全纯函数的留数，右端是形式洛朗级数的留数。只要我们能够证明，便可得出这一结论。

$$\begin{aligned}&\big\langle v',Y\big(e^{z_1L_1}(-z_1^{-2})^{L_0}u,z_1^{-1}-z_2^{-1}\big)\cdot e^{z_2L_1}(-z_2^{-2})^{L_0}v\big\rangle\\ =&\big\langle v',e^{z_2L_1}Y\big((-z_2^{-2})^{L_0}u,z_2^{-2}(z_2-z_1)\big)(-z_2^{-2})^{L_0}v\big\rangle\end{aligned} \tag{9.31}$$

其中，右端作为 z_2,z_1-z_2 的形式洛朗级数，一致几乎处处收敛于 $0<|z_1-z_2|\lhd|z_2|$ 上的左端，而左端是 z_1,z_2 的全纯函数。

显然，作为 $\mathbb{C}[[z_2^{\pm 1},\ (z_1-z_2)^{\pm 1}]]$ 中的元素，该和

$$\begin{aligned}&\big\langle v',e^{z_2L_1}Y\big((-z_2^{-2})^{L_0}u,z_2^{-2}(z_2-z_1)\big)(-z_2^{-2})^{L_0}v\big\rangle\\ =&\sum_{n\in\mathbb{N}}\big\langle v',e^{z_2L_1}P_nY\big((-z_2^{-2})^{L_0}u,z_2^{-2}(z_2-z_1)\big)(-z_2^{-2})^{L_0}v\big\rangle\end{aligned} \tag{9.32}$$

满足引理 7.4中的条件。如果我们能够证明右端在 $0<|z_1-z_2|<|z_2|$ 上一致几乎处处收敛到式 (9.31) 的左端，那么根据引理 7.4，证明就完成了。该断言可由以下“$e^{\tau L_1}$-协变性”推出（其中 $\tau=z_2,\ z=z_2^{-2}(z_2-z_1)$），我们对 $Y_{\mathbb{W}}$ 证明它，尽管实际上只需对 $Y=Y_{\mathbb{V}}$证明。

命题 9.25。 设 $\mathbb{W}$ 是可容许的。那么对每个 $v\in\mathbb{V}$、$w\in\mathbb{W}$、$w'\in\mathbb{W}'$，.....的左端

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\big\langle w',e^{\tau L_1}P_nY_{\mathbb{W}}(v,z)w\big\rangle=\big\langle w',Y_{\mathbb{W}}\big(e^{\tau(1-\tau z)L_1}(1-\tau z)^{-2L_0}v,z/(1-\tau z)\big)e^{\tau L_1}w\big\rangle \tag{9.33}$$

在 $\{(z、\ \tau)\in\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}$ 上一致几乎处处收敛：$|\tau|<|z^{-1}|\}$到右端。

该定理是共形协变性定理的一个特殊情形。 10.7 该定理将在后文解释。然而，定理 10.7 的证明相当复杂。因此，下面我们给出命题 9.25的一个初等证明。

9.12

我们将 $e^{\tau L_1}$ 对 $Y_{\mathbb{W}}$ 的协变性视为 $Y_{\mathbb{W}'}$ 的平移协变性的转置。因此，我们首先需要证明后者。

引理 9.26。我们有 $[L_{-1},\ Y_{\mathbb{W}'}(v,\ z)] = \partial_z Y_{\mathbb{W}'}(v,\ z)$。

证明。 假设 v 是齐次的。只需证明

$$\big[L_1, Y_{\mathbb{W}}\big(e^{zL_1}z^{-2L_0}v, z^{-1}\big)\big] = -\partial_z Y_{\mathbb{W}}\big(e^{zL_1}z^{-2L_0}v, z^{-1}\big). \tag{9.34}$$

它是我们要证明的公式转置后再乘以 $(-1)^{\mathrm{wt}v}$。对于 $Y_{\mathbb{W}}$ 的雅可比恒等式蕴含（5.3），其中 Y 被替换为 $Y_{\mathbb{W}}$。由（5.3），

$$[L_1, Y_{\mathbb{W}}(v,z)] = z^2 Y_{\mathbb{W}}(L_{-1}v, z) + 2zY_{\mathbb{W}}(L_0 v, z) + Y_{\mathbb{W}}(L_1 v, z). \tag{9.35}$$

利用这个关系，可以验证（9.34）的左端等于

$$Y_{\mathbb{W}}(L_1 e^{zL_1}z^{-2L_0}v, z^{-1}) + 2z^{-1}Y_{\mathbb{W}}(L_0 e^{zL_1}z^{-2L_0}v, z^{-1}) + z^{-2}Y_{\mathbb{W}}(L_{-1}e^{zL_1}z^{-2L_0}v, z^{-1}). \tag{9.36}$$

根据链式法则很容易猜出，并且可以通过级数展开严格验证，

$$-\partial_z Y_{\mathbb{W}}(v, z^{-1}) = z^{-2}Y_{\mathbb{W}}(L_{-1}v, z^{-1}).$$

因此，(9.34) 的右端为

$$-Y_{\mathbb{W}}(L_1 e^{zL_1}z^{-2L_0}v, z^{-1}) + 2z^{-1}Y_{\mathbb{W}}(e^{zL_1}L_0 z^{-2L_0}v, z^{-1}) + z^{-2}Y_{\mathbb{W}}(L_{-1}e^{zL_1}z^{-2L_0}v, z^{-1})$$

这等于（9.36），这是由于（9.20）。 □

9.13

现在我们已经得到了$Y_{\mathbb{W}'}$的平移性质，因此也得到了形式如（3.36）的平移协变性，或者等价地，练习7.5。我们需要后一种形式：左端的

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \big\langle Y_{\mathbb{W}'}(u,z)P_n e^{\tau L_{-1}}w', w\big\rangle = \big\langle Y_{\mathbb{W}'}(u, z-\tau)w', e^{\tau L_1}w\big\rangle, \tag{9.37}$$

在 $|\tau| < |z|$ 上几乎处处一致收敛于右端。

命题的证明 9.25。 根据推论 9.20，作为全纯函数的和，我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \big\langle w', e^{\tau L_1}P_n Y_{\mathbb{W}}(v,z)w\big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big\langle P_n e^{\tau L_{-1}}w', Y_{\mathbb{W}}(v,z)w\big\rangle$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \big\langle Y_{\mathbb{W}'}(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}v, z^{-1})P_n e^{\tau L_{-1}}w', w\big\rangle,$$

由（9.37），在 $|\tau| < |z^{-1}|$ 上一致几乎处处收敛到

$$\big\langle Y_{\mathbb{W}'}\big(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}v, z^{-1}-\tau\big)w', e^{\tau L_1}w\big\rangle.$$

利用（$Y_{\mathbb{W}'}$ 9.15），我们将其移到右边。于是上式变为

$$\big\langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(e^{(z^{-1}-\tau)L_1}(-(z^{-1}-\tau)^{-2})^{L_0}e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}v, (z^{-1}-\tau)^{-1}\big)e^{\tau L_1}w\big\rangle.$$

这等于（9.33）的右端，因为根据（9.19b），作用于 $\mathbb{V}$ 时，

$$(-(z^{-1}-\tau)^{-2})^{L_0}e^{zL_1} = e^{-z(z^{-1}-\tau)^2L_1}(-(z^{-1}-\tau)^{-2})^{L_0}.$$

□

定理的证明9.21 已经完成。

9.14

~~**定义 9.27**。 我们称 $\mathbb{V}$ 是**自对偶** 的，如果真空模 $\mathbb{V}$ （带有分次 $L_0 = L_0$）同构于其逆变模 $\mathbb{V}'$。

张量积模的构造要容易得多：

命题 9.28. 设 $\mathbb{V}_1$、$\mathbb{V}_2$ 为顶点算子代数，$\mathbb{W}_i$ 为一个可容许的 $\mathbb{V}_i$-模。那么，向量空间 $\mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{W}_2$ 具有唯一的可容许 $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$-模结构，其分次为 $L_0 \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{W}_2} + \mathbf{1}_{\mathbb{W}_1} \otimes L_0$，使得对于每个 $v_i \in \mathbb{V}_i$,

$$Y_{\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_2}(v_1 \otimes v_2, z) = Y_{\mathbb{W}_1}(v_1, z) \otimes Y_{\mathbb{W}_2}(v_2, z). \tag{9.38}$$

等价地，对于每个 $w_i \in \mathbb{W}_i, w_i' \in \mathbb{W}_i'$,

$$\big\langle w_1' \otimes w_2', Y_{\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_2}(v_1 \otimes v_2, z)(w_1 \otimes w_2)\big\rangle = \langle w_1', Y_{\mathbb{W}_1}(v_1, z)w_1\rangle \cdot \langle w_2', Y_{\mathbb{W}_2}(v_2, z)w_2\rangle. \tag{9.39}$$

证明。 利用（9.39），容易验证$Y_{\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_2}$ 满足复解析 Jacobi 恒等式。

□

10 坐标变换定理

10.1

本节的目标是以严谨的方式研究局部坐标的变换。由于存在一些收敛问题，很难证明给定的在 0 处的局部坐标 $\mathbb{C}$ 可以写成 $\exp(f\partial_z)$，其中 $f\partial_z$ 是一个全纯向量场。因此，我们首先讨论形式坐标，并找出生成它们的形式向量场。

定义 $z \cdot \mathbb{C}[[z]]$ 的以下两个子空间

$$\mathcal{G} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n z^n : a_1 \neq 0\Big\}, \qquad \mathcal{G}_+ = \Big\{ z + \sum_{n\geqslant 2} a_n z^n \in \mathcal{G}\Big\}. \tag{10.1}$$

$\mathcal{G}$ 的元素被视为 $\mathbb{C}$ 在 0 处的形式局部坐标。同样，设

$$\mathbb{G} = \Big\{\alpha(z) \in \mathcal{G} : \sum_n |a_n| r^n < +\infty \text{ for some } r > 0\Big\}, \qquad \mathbb{G}_+ = \mathbb{G} \cap \mathcal{G}_+. \tag{10.2}$$

那么， $\mathbb{G}$ 的元素是 $\mathbb{C}$ 在 0 处的局部坐标，或者等价地说，是局部坐标的变换。

$\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{C}((z))$ 上有一个显然的右作用，由复合 $f \mapsto f \circ \alpha$ 定义，其中$f \in \mathbb{C}((z))$ 且 $\alpha \in \mathcal{G}$。其良定义性留给读者验证。因此， $\mathcal{G}$ 是一个群，其乘积为复合，单位元为 z。

10.2

根据第 2 节，为了求出每个 $\mathcal{U}(\alpha)$ 对应的坐标变换算子 $\alpha \in \mathcal{G}$，我们需要将它写成 $\alpha = \exp(\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{n+1}\partial_z)$。当 $\alpha \in \mathcal{G}_+$ 时，这项任务很容易。事实上，写作

$$\alpha(z) = z + \sum_{n\geqslant 2} a_n z^n. \tag{10.3}$$

那么我们确实可以取 $c_0 = 0$，并且

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}\Big(\sum_{n\geqslant 1} c_n z^{n+1}\partial_z\Big)^k (z) \\ &= z + \sum_{n_1\geqslant 1} c_{n_1} z^{n_1+1} + \frac{1}{2!}\sum_{n_1,n_2\geqslant 1} (n_1+1) c_{n_1} c_{n_2} z^{n_1+n_2+1} \\ &\quad + \frac{1}{3!}\sum_{n_1,n_2,n_3\geqslant 1} (n_1+1)(n_1+n_2+1) c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} z^{n_1+n_2+n_3+1} + \cdots . \end{aligned} \tag{10.4}$$

这意味着，对于每个 $m \geqslant 1$,

$$a_{m+1} = c_m + \sum_{\substack{2\leqslant l\leqslant m \\ n_1,\dots,n_l\in\mathbb{Z}_+ \\ n_1+\cdots+n_l=m}} \frac{1}{l!}(n_1+1)\cdots(n_1+n_2+\cdots+n_{l-1}+1) c_{n_1}\cdots c_{n_l}. \tag{10.5}$$

T这表明，给定系数 c_1，c_2，..... a_2，a_3，.....，就可以求解 .

对于一般的 $\alpha \in \mathcal{G}$，与其求解 $\alpha = \exp(\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{n+1}\partial_z)$，不如直接求解更容易。

$$\alpha(z) = \alpha'(0)\cdot \exp\Big(\sum_{n\geqslant 1} c_n z^{n+1}\partial_z\Big)(z). \tag{10.6}$$

自 $\alpha(z)/\alpha'(0) \in \mathcal{G}_+$以来。前几项是

$$c_1 = \frac{1}{2}\frac{\alpha''(0)}{\alpha'(0)}, \tag{10.7a}$$

$$c_2 = \frac{1}{6}\frac{\alpha'''(0)}{\alpha'(0)} - \frac{1}{4}\Big(\frac{\alpha''(0)}{\alpha'(0)}\Big)^2. \tag{10.7b}$$

相应的可容许 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}$ 上的线性算子定义为

$$\mathcal{U}(\alpha)=\alpha'(0)^{\tilde{L}_0}\exp\Big(\sum_{n\geqslant 1}c_nL_n\Big)=\alpha'(0)^{\tilde{L}_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{n\geqslant 1}c_nL_n\Big)^k. \tag{10.8}$$

~其逆为 $\mathcal{U}(\alpha)^{-1}=\exp(-\sum_{n\geqslant 1}c_nL_n)\alpha'(0)^{-L_0}$。

~将 L_0 替换为 L_0，目的是避免由 ~ 的非整数 L_0特征值造成的歧义。由于（根据推论 9.12）当 L_0-L_0 不可约时，$\mathbb{W}$ 是常数，因此进行这样的替换并不是什么大问题。

注 10.1。由于 L_n 会使权降低 n，上述双重求和在 $\mathcal{U}(\alpha)$（同理，$\mathcal{U}(\alpha)^{-1}$）作用于任意向量时是有限的。此外，它们对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都保持 $\mathbb{W}^{\leqslant n}$，其中

$$\mathbb{W}^{\leqslant n}=\bigoplus_{0\leqslant j\leqslant n}\mathbb{W}(j). \tag{10.9}$$

因此，$\mathcal{U}(\alpha)$在每个 $\mathbb{W}^{\leqslant n}$ 上的限制都是线性同构。注意，$\mathcal{U}(\alpha)$不保持$\mathbb{W}(n)$。

10.3

在应用中，我们需要考虑一个**（解析）变换的全纯族** $\rho:\ X\to\mathbb{G}$，这意味着 $\rho=\rho_x(z)$ 是 $X\times\mathbb{C}$ 中 $X\times\{0\}$ 的一个邻域上的全纯函数，其中 X 是一个复流形（此处 $(x,\ z)\in X\times\mathbb{C}$），并且对所有 $x\in X$，$\rho_x(0)=0$ 且 $\rho_x'(0)\equiv\partial_z\rho_x(0)\neq 0$。

我们现在将情形限制为 $X\ U\ \mathbb{C}$，令 ζ 为 U的标准变量，但考虑稍微更一般的情形：$\rho=\mathscr{O}(U)[[z]]$，其中$\rho_\zeta(0)=0$，并且对所有 $\zeta\in U$都有 $\rho_\zeta'(0)\neq 0$。等价地，

$$\rho_\zeta(z)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\rho_\zeta^{(n)}(0)z^n \tag{10.10}$$

其中每个 $\zeta\mapsto\rho_\zeta^{(n)}(0)$ 都是 $\mathscr{O}(U)$ 中的元素，并且 $\rho_\zeta'(0)\neq 0$。注意，当 $z\neq 0$时，$\rho_\zeta(z)$ 作为一个值并无意义。我们将 ρ 称为：$U\to\mathcal{G}$ 一个**形式坐标族**。

注 10.2。我们可以通过将每个 $\mathscr{O}(U)$系数分别处理，对 $\mathscr{O}(U)[[z^{\pm 1}]]$ 中的元素取极限和导数。例如，$\partial_z\rho_\zeta(z)$ 在 $\zeta_0\in U$处的导数在解析意义下是有意义的，即为极限$\lim\limits_{\zeta\to\zeta_0}\frac{\rho_\zeta(z)-\rho_{\zeta_0}(z)}{\zeta-\zeta_0}$ 的值。

根据（10.5），

$$\rho_\zeta=\rho_\zeta'(0)\exp\Big(\sum_{n\geqslant 1}c_n(\zeta)z^{n+1}\partial_z\Big) \tag{10.11}$$

其中 $c_1,\ c_2,\ \cdots\in\mathscr{O}(U)$。因此

$$\mathcal{U}(\rho_\zeta)=\rho_\zeta'(0)^{\tilde{L}_0}\exp\Big(\sum_{n\geqslant 1}c_n(\zeta)L_n\Big), \tag{10.12}$$

这表明

$$\mathcal{U}(\rho_\zeta)\big|_{\mathbb{W}^{\leqslant k}} \in \mathrm{End}(\mathbb{W}^{\leqslant k}) \otimes \mathscr{O}(U) \tag{10.13}$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$。

10.4

设 $\rho\colon U \to \mathcal{G}$ 为一族形式坐标。

命题 10.3。设 $0 \in U$ 和 $\rho_0(z) = z$。那么，当作用于 $\mathbb{W}$ 的每个向量时，或等价地，当限制在每个 $\mathbb{W}^{\leqslant k}$时，

$$\partial_\zeta \mathcal{U}(\rho_\zeta)\Big|_{\zeta=0} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\Big(\partial_\zeta \rho_\zeta^{(n)}(0)\Big|_{\zeta=0}\Big)\widetilde{L}_{n-1} \tag{10.14}$$

其中，当 $n \geqslant 1$ 时 $\widetilde{L}_n = L_n$，以及 $\partial_\zeta \rho_\zeta^{(n)}(z) = \partial_\zeta \partial_z^n \rho_\zeta(z)$。

注记 10.4。命题 10.3 的几何意义如下。假设 $\rho\colon U \to \mathbb{G}$ 是一个全纯族，且有 $\rho_0(z) = z$。那么对于每个 z_0 邻近 0的 $\zeta \mapsto \rho_\zeta(z_0)$，它是 $\mathbb{C}$ 中的一条路径，其初始值为 z_0。因此 $\partial_\zeta \rho_\zeta(z_0)\partial_z\big|_{\zeta=0}$ 是在 z_0 处的切向量，描述了该路径的速度。将这些切向量汇集起来，我们得到一个全纯切向量场 $\partial_\zeta \rho_\zeta(z)\partial_z\big|_{\zeta=0}$，其等于

$$\partial_\zeta \rho_\zeta(z)\partial_z\Big|_{\zeta=0} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\partial_\zeta \rho_\zeta^{(n)}(0) z^n \partial_z\Big|_{\zeta=0}. \tag{10.15}$$

鉴于对应关系 $z^n\partial_z \leftrightarrow L_{n-1}$，命题 10.3 表明 $\partial_\zeta \mathcal{U}(\rho_\zeta)\big|_{\zeta=0}$恰好是与切向量场对应的线性算子。

命题 *10.3* 的证明。由（10.12），$\partial_\zeta \mathcal{U}(\rho_\zeta)$可表示为关于 c_n的式子。因此，我们需要将c_n表示为关于 $\partial_\zeta \rho_\zeta^{(n)}(0)$的式子。由（10.11）和（10.4），

$$\rho_\zeta(z) = \rho'_\zeta(0)\Big(z + \sum_{n\geqslant 1} c_n(\zeta) z^{n+1}\Big) + R_\zeta(z)$$

其中 $R_\zeta(z)$ 是由至少两个$c_1(\zeta)$项相乘，并乘以 z 的多项式所得的和，$c_2(\zeta)$，..... 。由于 $\rho_0(z) = z$，等价地说，$\rho'_0(0) = 1$和 $c_1(0) = c_2(0) = \cdots = 0$，我们有 $\partial_\zeta R(z)|_{\zeta=0} = 0$。因此

$$\partial_\zeta \rho_\zeta(z)\Big|_{\zeta=0} = \partial_\zeta \rho'_\zeta(0) z + \sum_{n\geqslant 1} \partial_\zeta c_n(0) z^{n+1}. \tag{10.16}$$

对（10.12）的导数应用类似的论证可得

$$\partial_\zeta \mathcal{U}(\rho_\zeta)\Big|_{\zeta=0} = \partial_\zeta \rho'_\zeta(0)\widetilde{L}_0 + \sum_{n\geqslant 1} \partial_\zeta c_n(0) L_n. \tag{10.17}$$

由（10.16），对所有 $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n!}\partial_\zeta \rho_\zeta^{(n)}(0)\Big|_{\zeta=0} = \partial_\zeta c_{n-1}(0).$$

将此关系代入（10.17）即可证明（10.14）。 □

10.5

定理 10.5 （[Hua97，第 4 节。2]）。 $\mathcal{U}:\ \mathcal{G}\to \mathrm{End}(\mathbb{W})$ 是一个群表示。也就是说，$\mathcal{U}(\alpha\circ\beta)=\mathcal{U}(\alpha)\mathcal{U}(\beta)$ 对于所有 $\alpha,\ \beta\in\mathcal{G}$。

借助此定理，我们可以通过计算 $\partial_\zeta\mathcal{U}(\rho_\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 处的值，而无需假设 $\rho_0(z)=z$，并利用命题 10.3。

证明。只需考虑以下两种情形：(a) $\alpha,\ \beta\in\mathcal{G}_+$ (b) $\alpha\in\mathcal{G}_+$ 且 β 是一个缩放。令 $l_n=z^{n+1}\partial_z$。

情形 (a)。我们写作 $\alpha(z)=\exp(\sum_{n\geqslant 1}a_nl_n)(z)=\exp(X)(z)$ 以及 $\beta(z)=\exp(\sum_{n\geqslant 1}b_nl_n)(z)=\exp(Y)(z)$。由坎贝尔–豪斯多夫定理 [Jac，第 V 节。5]，$\alpha\circ\beta=\exp(Z)$ 其中

$$\begin{aligned}Z=&X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}\big([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]\big)-\frac{1}{24}[X,[Y,[X,Y]]]\\&+H_5+H_6+\cdots\end{aligned}$$

其中每个 H_n 都是由 X 和 Y 的迭代括号构成的有限和，因此是 l_n、l_{n+1}、.....的无限线性组合。因此，H_n 使 z 的幂至少增加 n。由此可见，Z 也具有 $\sum_{n\geqslant 1}c_nl_n$ 的形式，其中某个 c_1、c_2、$\cdots\in\mathbb{C}$。

表示 $l_n\mapsto\pi(l_n)=L_n$ 是维特代数的李子代数 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{l_1、\ l_2、\ \dots\}$ 的表示。（没有中心项！）以类似的方式写出 $\pi(X)=\sum_{n\geqslant 1}a_nL_n$和 $\pi(Y)$、$\pi(Z)$、$\pi(H_n)$。注意，每个 $\pi(H_n)=\bullet L_n+\bullet L_{n+1}+\cdots$都会使 L_0-权至少降低 ~。因此，$\sum_{n\geqslant 1}\pi(H_n)$ 是良定义的。根据坎贝尔–豪斯多夫定理（应用于 $\pi(X)$ 和 $\pi(Y)$），我们有

$$\mathcal{U}(\alpha)\mathcal{U}(\beta)=\exp(\pi(X))\exp(\pi(Y))=\exp\Big(\sum_{n\geqslant 1}\pi(H_n)\Big)=\exp(\pi(Z))=\mathcal{U}(\alpha\circ\beta).$$

情况（b）。将 $\alpha(z)=$ 写成 $\exp(\sum_{n\geqslant 1}a_nl_n)(z)$，并将 $\beta(z)=\lambda z$ 写成 $\lambda\neq 0$。容易验证

$$\alpha\circ\beta(z)=\lambda\cdot\exp\Big(\sum_{n\geqslant 1}a_n\lambda^nl_n\Big)(z).$$

~与练习 9.19中的论证类似 $[L_0,\ L_n]=-L_n$ 推出

$$\exp\Big(\sum_{n\geqslant 1}a_nL_n\Big)\lambda^{\tilde{L}_0}=\lambda^{\tilde{L}_0}\exp\Big(\sum_{n\geqslant 1}a_n\lambda^nL_n\Big)$$

这就完成了证明。 □

10.6

我们的目标是求出在 $0\in\mathbb{C}$ 的局部坐标从标准坐标 ζ 变为定义在 $\mathbb{D}_r$ 上的任意坐标 $\alpha\in\mathbb{G}$ 时，$Y_{\mathbb{W}}$ 的协变公式。取 $z\in\mathbb{D}_r^\times$，并考虑

$$\mathfrak{A}=(\mathbb{P}^1;0,\infty;\alpha^{-1},1/\zeta),\qquad \mathfrak{P}=(\mathbb{P}^1;0,z,\infty;\zeta,\zeta-z,1/\zeta).\tag{10.18}$$

其中 α^{-1} 是 α 的反函数，不要将它与 $1/\alpha$ 混淆。

我们将 $\mathbb{W}$、$\mathbb{W}'$、$\mathbb{W}$、$\mathbb{V}$、$\mathbb{W}'$ 依照上文列出的顺序与五个标记点对应。根据第 2 节中的坐标变换公式，与这两个对象对应的标准共形块为

$$\langle w', \mathcal{U}(\alpha) w \rangle, \qquad \langle w', Y_{\mathbb{W}}(v, z) w \rangle. \tag{10.19}$$

我们沿着 $0 \in \mathfrak{A}$ 和 $\infty \in \mathfrak{P}$ 将 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{P}$ 缝合。按照注 4.4，将 $\mathfrak{A}$ 的 α^{-1} 变换为 α^{-1}/r，并将 $\mathfrak{P}$ 的 $1/\zeta$ 变换为 r/ζ。将 r 替换为一个稍小的数 $> |z|_\circ$ 于是，α^{-1}/r 的值域包含 $\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$（它在 $\mathfrak{A}$ 中被拉回到 $\alpha(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}})$），而单位圆盘在 r/ζ 下的原像是 $\mathbb{P}^1 \backslash \mathbb{D}_r$，它与 z 和 0 不相交。因此，假设 4.3 得以满足。

这次缝合分别将 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{P}$ 的以下部分识别起来

$$A_1 = \{\gamma : 0 < |\alpha^{-1}(\gamma)| < r\}$$
$$A_2 = \{\gamma : 1/r < |1/\gamma| < +\infty\} = \{\gamma : 0 < |\gamma| < r\}$$

（参见（4.2））通过规则 $\alpha^{-1}(\gamma_1) \cdot 1/\gamma_2 = 1$，或者更准确地说，

$$\gamma_1 \in A_1 \text{ is glued to } \gamma_2 \in A_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma_1 = \alpha(\gamma_2). \tag{10.20}$$

$\mathfrak{A}$ 的点 0 和 $\mathfrak{P}$ 的部分 $\{\gamma\colon |1/\gamma| \leqslant 1/r\} = \{\gamma\colon r \leqslant |\gamma| \leqslant +\infty\}$ 被舍弃。因此我们得到一个同构

$$\mathfrak{A} \# \mathfrak{P} \qquad \xrightarrow{\simeq} \qquad \mathfrak{X} = \big(\mathbb{P}^1; 0, \alpha(z), \infty; \alpha^{-1}, \alpha^{-1} - z, 1/\zeta\big) \tag{10.21}$$

其中，$\mathfrak{A}$ 的任意 $\gamma_1 \in \mathbb{P}^1 \backslash \{0\}$ 都与 $\gamma_1 \in \mathfrak{X}$ 等同，而 $\mathfrak{P}$ 的任意 $\gamma_2 \in \mathbb{D}_r$ 都与 $\mathfrak{P}$的 $\alpha(\gamma_2)$ 等同。

10.7

另一方面，$\mathfrak{A} \# \mathfrak{P}$ 的标准共形块是式（4.2）中两个共形块的收缩，即

$$\langle w', \mathcal{U}(\alpha) Y_{\mathbb{W}}(v, z) w \rangle. \tag{10.22}$$

另一方面，由于 $\langle w',\ Y_{\mathbb{W}}(v,\ \alpha(z))w\rangle$ 是$(\mathbb{P}^1; 0, \alpha(z), \infty;\ \zeta, \zeta - \alpha(z), 1/\zeta)$, 的标准共形块，根据第 2节中的坐标变换公式，$\mathfrak{P}$ 的标准共形块应为

$$\big\langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(\mathcal{U}(\varrho(\alpha|\mathbf{1})_z) v, \alpha(z)\big) \mathcal{U}(\alpha) w \big\rangle \tag{10.23}$$

其中 $\varrho(\alpha|\mathbf{1})_z \in \mathbb{G}$ 是从 $\alpha^{-1} - z$ 到 $\zeta - \alpha(z)$ 的变换，即

$$\varrho(\alpha|\mathbf{1})_z(t) = \alpha(z + t) - \alpha(z). \tag{10.24}$$

（记号 $\varrho(\alpha|\mathbf{1})$ 的含义将在（11.9）中解释。）因此（10.22）和（10.23）应该相等。这个结果成为严谨的数学定理，要归功于 Huang。

定理 10.6 ([Hua97]). 设 $\mathbb{W}$ 是一个可容许的 $\mathbb{V}$-模。那么对每个 $w \in \mathbb{W}, w' \in \mathbb{W}', v \in \mathbb{V}$ 和 $\alpha \in \mathbb{G}$，以下等式在 $\mathbb{C}((z))$

$$\langle w', \mathcal{U}(\alpha) Y_{\mathbb{W}}(v,z) w \rangle = \big\langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(\mathcal{U}(\varrho(\alpha|\mathbf{1})_z)v, \alpha(z)\big)\mathcal{U}(\alpha) w \big\rangle. \tag{10.25}$$

等价地，在 $\mathbb{C}((z))$中，

$$\langle w', \mathcal{U}(\alpha) Y_{\mathbb{W}}(v,z) \mathcal{U}(\alpha)^{-1} w \rangle = \big\langle w', Y_{\mathbb{W}}\big(\mathcal{U}(\varrho(\alpha|\mathbf{1})_z)v, \alpha(z)\big) w \big\rangle. \tag{10.26}$$

10.8

我们来解释式（10.25）两端的含义；式（10.26）可用类似的方式理解。

式（10.25）左端的含义是显然的。设 $\alpha \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_r)$。那么 $\langle w', Y(v, \alpha(z)) w \rangle$是 $\alpha(z)$的一个劳朗多项式，它显然在 $\mathbb{D}_r^\times$上全纯，且在0处有有限个极点。 $z \mapsto \varrho(\alpha|\mathbf{1})_z$ 是一个全纯变换族。因此，根据（10.13）， $\mathcal{U}(\varrho(\alpha|\mathbf{1}))v$ 属于 $\mathbb{V} \otimes \mathscr{O}(\mathbb{D}_r)$。由线性性， $\langle w', Y(v, \alpha(z)) w \rangle \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ 的全纯性意味着式（10.25）的右端在 $\mathbb{D}_r^\times$ 上也全纯，且在0处有有限个极点。因此，通过对该全纯函数作洛朗级数展开，式（10.25）的右端可理解为 $\mathbb{C}((z))$ 的一个元素。

更一般地，设 $\alpha\colon X \to \mathbb{G}$ 是在黎曼曲面 X上定义的全纯变换族。若 α 在 $X \times \mathbb{D}_r$ 上全纯，则 (10.25) 的右端自然是 $X \times \mathbb{D}_r^\times$ 上的全纯函数，并在 $z = 0$处有有限个极点。因此，作为通过取洛朗级数展开得到的$\mathscr{O}(X)((z))$ 的元素，它根据引理 7.13在 $X \times \mathbb{D}_r^\times$上一致几乎处处收敛。左端亦然。由此得出：

定理 10.7。 设 $\alpha\colon X \to \mathbb{G}$ 是一个在 $X \times \mathbb{D}_r$上全纯的全纯变换族。那么，(10.25) 和 (10.26) 的两端都是 $\mathscr{O}(X)((z))$ 的元素，并且在 $X \times \mathbb{D}_r^\times$上一致几乎处处收敛到同一个函数。此外，以下级数

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle w', \mathcal{U}(\alpha) P_n Y_{\mathbb{W}}(v,z) w \rangle \tag{10.27}$$

由 $\mathscr{O}(X \times \mathbb{C}^\times)$ 的元素构成的级数在 $X \times \mathbb{D}_r^\times$上一致几乎处处收敛到 (10.25)。

证明。 最后一个结论由引理 7.4 得出，条件是 v、 w、 w' 是齐次的。 □

10.9 ⋆

下面给出（10.26）的证明。其思路与尺度协变性和平移协变性的证明相同。此外，不难看出，下面的证明对 α 中所有的 $\mathcal{G}$都适用。

定理的证明 *10.6*。 步骤 1。首先，假设 $\alpha \in \mathbb{G}_+$ 使得 $\alpha'(0) = 1$。选择 c_1， c_2， $\cdots \in \mathbb{C}$ 使得

$$\alpha(z) = \exp\Big(\sum_{n \geqslant 1} c_n z^{n+1} \partial_z\Big)(z), \tag{10.28}$$

并设置

$$\alpha_\tau(z)=\exp\Big(\sum_{n\geqslant 1}\tau c_n z^{n+1}\partial_z\Big)(z)\qquad\in\mathbb{C}[\tau][[z]]$$

因此 $\alpha_1(z)=\alpha(z)$。注意，我们可以写成

$$\alpha_\tau(z)=z+\sum_{n\geqslant 2}p_n(\tau)z^n \tag{10.29}$$

其中 $p_n(\tau)\in\mathbb{C}[\tau]$。因此我们可以将 $\alpha_\tau(z)$ 视为一个 $\mathbb{C}[[z]]$值全纯函数。极限 $\partial_\tau\alpha_\tau(z)=\lim_{\gamma\to\tau}\frac{\alpha_\gamma(z)-\alpha_\tau(z)}{\gamma-\tau}$ 在解析意义下是有意义的，参见注 10.2。

(10.29)表明

$$1/\alpha_\tau(z)\in z^{-1}\mathbb{C}[\tau][[z]].$$

因此，$\langle w',\ Y_{\mathbb{W}}(v,\ \alpha_\tau(z))w\rangle$是关于 $\alpha_\tau(z)$的劳朗多项式，也必属于$\mathbb{C}[\tau]((z))$。不难验证 $\partial_\tau\alpha_\tau(z)|_{\tau=0}=\sum c_n z^{n+1}$，并且 $\alpha_\gamma\circ\alpha_\tau(z)=\alpha_{\gamma+\tau}(z)$ 对每个 $\gamma,\ \tau\in\mathbb{C}$都成立。按照注 10.2中的意义取导数，可得

$$\partial_\tau\alpha_\tau(z)=\sum_{n\geqslant 1}c_n\alpha_\tau(z)^{n+1}.$$

由此以及平移性质，我们在 $\mathbb{C}[\tau]((z))$ 中得到

$$\partial_\tau\langle w',Y_{\mathbb{W}}(v,\alpha_\tau(z))w\rangle=\sum_{n\geqslant 1}c_n\alpha_\tau(z)^{n+1}\cdot\langle w',Y_{\mathbb{W}}(L_{-1}v,\alpha_\tau(z))w\rangle \tag{10.30}$$

作为 $\mathbb{C}((z))$ 值的全纯函数关于 $\tau\in\mathbb{C}$。

步骤 2。我们来计算 $\partial_\tau\mathcal{U}(\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z)v$。注意，任何与 $z+t$ 复合的形式幂级数都是 $\mathbb{C}[[z,\ t]]$的一个元素。因此，尽管 α_τ是一个形式坐标，$\alpha_\tau(z+t)$仍然有意义，我们可以再次使用（10.24）来定义 $\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z$。也就是说，根据（10.29），

$$\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z(t)=t+\sum_{n\geqslant 2}p_n(\tau)\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j}t^j\qquad\in\mathbb{C}[\tau][[z]][[t]].$$

同样，

$$\begin{aligned}&\varrho(\alpha_\zeta|\mathbf{1})_{\alpha_\tau(z)}(t):=\alpha_\zeta(\alpha_\tau(z)+t)-\alpha_\zeta(\alpha_\tau(z))\\=&t+\sum_{n\geqslant 2}p_n(\zeta)\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\alpha_\tau(z)^{n-j}t^j\end{aligned} \tag{10.31}$$

作为 $\mathbb{C}[\zeta,\ \tau][[z]][[t]]$ 的元素是有意义的。利用 $\alpha_\zeta(\alpha_\tau(z))=\alpha_{\zeta+\tau}(z)$，容易验证

$$\varrho(\alpha_\zeta|\mathbf{1})_{\alpha_\tau(z)}\circ\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z(t)=\varrho(\alpha_{\zeta+\tau}|\mathbf{1})_z(t).$$

将定理 10.5 应用于上述关系，并取∂_ζ 在 $\zeta = 0$，我们得到

$$\partial_\tau \mathcal{U}(\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z)v = \partial_\zeta \mathcal{U}(\varrho(\alpha_\zeta|\mathbf{1})_{\alpha_\tau(z)})\big|_{\zeta=0} \cdot \mathcal{U}(\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1}_z))v. \tag{10.32}$$

显然 $\varrho(\alpha_0|\mathbf{1})_{\alpha_\tau(z)}(t) = t$。通过考察命题 10.3 的证明，我们看到，命题10.3 同样适用于当前情形：作用于 $\mathbb{V}$ 我们有

$$\partial_\zeta \mathcal{U}(\varrho(\alpha_\zeta|\mathbf{1})_{\alpha_\tau(z)})\Big|_{\zeta=0} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k!}\Big(\partial_\zeta \varrho(\alpha_\zeta|\mathbf{1})^{(k)}_{\alpha_\tau(z)}(0)\Big|_{\zeta=0}\Big) L_{k-1}. \tag{10.33}$$

由（10.31），显然

$$\partial_\zeta \varrho(\alpha_\zeta|\mathbf{1})^{(k)}_{\alpha_\tau(z)}(0) = \partial_\zeta \alpha^{(k)}_\zeta(\alpha_\tau(z)).$$

由于（10.28），我们有 $\partial_\zeta \alpha_\zeta(z)\big|_{\zeta=0} = \sum_{n\geqslant 1} c_n z^{n+1}$ 因此

$$\frac{1}{k!}\partial_\zeta \alpha^{(k)}_\zeta(z)\big|_{\zeta=0} = \sum_{n\geqslant 1} \binom{n+1}{k} c_n z^{n-k+1},$$

我们得到

$$\partial_\zeta \mathcal{U}(\varrho(\alpha_\zeta|\mathbf{1})_{\alpha_\tau(z)})\Big|_{\zeta=0} = \sum_{k,n\geqslant 1} \binom{n+1}{k} c_n \alpha_\tau(z)^{n-k+1} L_{k-1}$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} c_n \sum_{l\geqslant 0} \binom{n+1}{l+1} \alpha_\tau(z)^{n-l} L_l. \tag{10.34}$$

总而言之，我们得到

$$\partial_\tau \big\langle w', Y_{\mathbb{W}}(\mathcal{U}(\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z)v, z)w\big\rangle$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} c_n \sum_{l\geqslant 0} \binom{n+1}{l+1} \alpha_\tau(z)^{n-l} \big\langle w', Y_{\mathbb{W}}(L_l \mathcal{U}(\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z)v, z)w\big\rangle. \tag{10.35}$$

将这一关系与（10.30）和（5.3）结合可得

$$\partial_\tau \big\langle w', Y_{\mathbb{W}}(\mathcal{U}(\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z)v, \alpha_\tau(z))w\big\rangle = \sum_{n\geqslant 1} c_n \big\langle w', [L_n, Y_{\mathbb{W}}(\mathcal{U}(\varrho(\alpha_\tau|\mathbf{1})_z)v, \alpha_\tau(z))]w\big\rangle. \tag{10.36}$$

（我们将此无穷级数定义良好与否留给读者验证。）类似的计算表明

$$\partial_\tau \big\langle w', \mathcal{U}(\alpha_\tau) Y_{\mathbb{W}}(v, z) \mathcal{U}(\alpha_\tau)^{-1} w\big\rangle = \sum_{n\geqslant 1} c_n \big\langle w', [L_n, \mathcal{U}(\alpha_\tau) Y_{\mathbb{W}}(v, z) \mathcal{U}(\alpha_\tau)^{-1}]w\big\rangle. \tag{10.37}$$

因此，根据引理 3.7，我们得到（10.26），对所有 $\alpha \in \mathbb{G}_+$。我们还证明了当 α是缩放时，（10.26）成立。一般情形可由这两种情形结合得出。细节留给读者。

□

11 共形块与 VOA 层的定义

11.1

本节的目标是给出共形块的两种等价定义，这两种定义均由 [FB04]提出。

假设 11.1. 从本节开始，我们假设对于每个 n，$\dim \mathbb{V}(n) < +\infty$，并在可能时将 $Y_{\mathbb{W}}$ 写作 Y。我们所说的“$\mathbb{V}$-模”，是指可容许的 $\mathbb{V}$-模。

Let

$$\mathfrak{X} = (C; x_1, \dots, x_N; \eta_1, \dots, \eta_N) \tag{11.1}$$

设其为带有局部坐标的 N 点标记紧黎曼曲面。假设 η_j 在 x_j的邻域 U_j 上全纯（且单射）。假设当 $i \neq j$时， $x_j \notin U_i$。

假设 11.2. 除非另有说明，带有 N 点标记的紧黎曼曲面均假定每个连通分支至少包含一个标记点。

回顾一下，在 Segal 图景中，我们有分解 $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}} = \bigoplus \mathbb{W}_i \otimes \widehat{\mathbb{W}}_i$，且^关联函数分解为 $\mathbb{V}$-共形块和 $\mathbb{V}$-共形块 $T_{\mathfrak{X}} = \sum_{i_1,\dots,i_N \in \mathfrak{I}} \phi_{\mathfrak{X},i_\bullet} \otimes \psi_{\mathfrak{X},i_\bullet}$，如（1.14）所示，其中每个 $\phi_{\mathfrak{X},i_\bullet}$都是 $\mathbb{W}_{i_\bullet} := \widehat{\mathbb{W}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_{i_N}}$上的线性泛函。

在以下讨论中，我们在每个 $\mathbb{W}_i$中固定一个向量 $\widehat{w}_i$，并将每个 $\mathbb{W}_i$ 与$\mathbb{W}_i \otimes \widehat{w}_i$ 等同，从而可以将关联函数 $T_{\mathfrak{X}}$ 限制到$\mathbb{W}_{i_\bullet}$ 上，得到一个共形块。因此，我们不区分共形块与（关联函数的限制）。

11.2

为简便起见，我们记 $\mathbb{W}_{i_k} = \mathbb{W}_k$和 $\phi_{\mathfrak{X}_{i_\bullet}} = \phi$。因此， $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}_1$、……、 $\mathbb{W}_N$分别与 x_1、……、 x_N相关联。回忆记号 $\mathbb{W}_\bullet = \mathbb{W}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_N$。

我们向 $\mathfrak{X}$ 添加一个不同于 x_1、……、 x_N的点 x。于是得到一个新的带 $(N+1)$个标记点的紧黎曼曲面 $\wr\mathfrak{X}_x$。我们将 $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V} \otimes \mathbf{1}$ 的向量插入 x。于是得到一个新的共形块 $\wr\phi_x$：$\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}_\bullet \to \mathbb{C}$，它是关联函数$T_{\wr\mathfrak{X}_x}$ 在 $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}_\bullet$上的限制。 $\wr\phi_x$ 具有以下两个特征。（令 ζ 为$\mathbb{C}$的标准坐标。）

首先，假设 $\eta_j(U_j) \supset \mathbb{D}_{r_j}$。令 $x \in \eta_j^{-1}(\mathbb{D}_{r_j})$。我们为 $\wr\mathfrak{X}_x$ 中的每个标记点指定局部坐标 $\eta_j - \eta_j(x)$ to$x$，使其都有对应的局部坐标。令

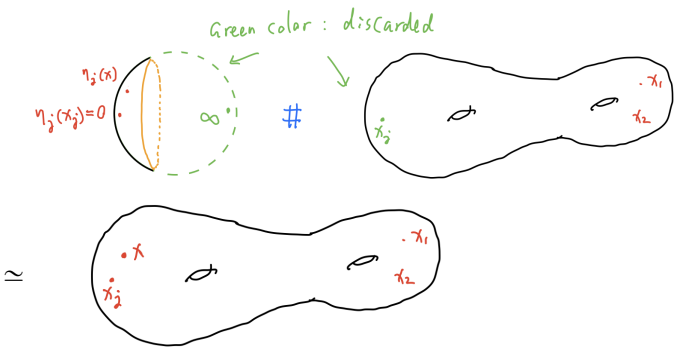
$$\mathfrak{P}_{\eta_j(x)} = (\mathbb{P}^1; 0, \eta_j(x), \infty; \zeta, \zeta - \eta_j(x), 1/\zeta). \tag{11.2}$$

考虑沿 $\infty \in \mathfrak{P}_{\eta_j(x)}$ 和 $x_j \in \mathfrak{X}$进行缝合 $\mathfrak{P}_{\eta_j(x)} \# \mathfrak{X}$。我们有一个等价

$$\mathfrak{P}_{\eta_j(x)} \# \mathfrak{X} \simeq \wr\mathfrak{X}_x \tag{11.3}$$

其中， $\mathfrak{P}_{\eta_j(x)}$ 的 $\mathbb{P}^1 \backslash \mathbb{D}_{r_j}$ 和 $\mathfrak{X}$ 的x_j 被舍弃；任意一个 $\gamma \in \mathbb{D}_{r_j}$ 都等同于 $\wr\mathfrak{X}_x$的 $\eta_j^{-1}(\gamma)$，并在 $\gamma \in \mathbb{D}_{r_j}^\times$时与 $\mathfrak{X}$ 的 $\eta_j^{-1}(\gamma)$ 粘合；特别是，标记

点 0，$\eta_j(x)$ 的$\mathfrak{P}_{\eta_j(x)}$（这些不会被舍弃）分别与$\wr\mathfrak{X}_x$的x_j，x 相识别。



(11.4)

因此，根据缝合-收缩对应，与 $\wr\mathfrak{X}_x$（其中 x 处的局部坐标为 $\eta_j - \eta_j(x)$）相关联的共形块 $\wr\phi_x$ 为

$$\wr\phi_x(v \otimes w_\bullet) = \phi\big(w_1 \otimes \cdots \otimes Y(v, \eta_j(x))w_j \otimes \cdots \otimes w_N\big) \tag{11.5}$$

其中右端是以下两个等价级数的简称（参见引理 7.4），并且在左端的（11.5）上一致几乎处处收敛：

$$\begin{aligned} &\text{RHS of (11.5)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi\big(w_1 \otimes \cdots \otimes Y(v)_n w_j \otimes \cdots \otimes w_N\big) z^{-n-1}\big|_{z=\eta_j(x)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi\big(w_1 \otimes \cdots \otimes P_n Y(v, \eta_j(x))w_j \otimes \cdots \otimes w_N\big). \end{aligned} \tag{11.6}$$

11.3

第二个特点是：根据（1.12），对于任意 x 在 C 上（不一定靠近 $x_\bullet$中的任何一个）$\wr\phi_x(v \otimes w_\bullet)$ 关于 x的移动是全纯的。这种描述的缺点是它依赖于在 x处选取的特定局部坐标：如果在一个局部坐标中 v 是常数，那么在另一个局部坐标中 v 就会变化。因此，我们给出一种与坐标无关的描述：

除了 x的平移外，我们还允许 v 关于x全纯变化。也就是说，设 $U \subset C$ 为开集，取一个充分大的 $n \in \mathbb{N}$，并假设 v 是一个 $\mathbb{V}^{\leqslant n}$值全纯函数，定义在 U上。（回忆一下，根据约定 $\mathbb{V}^{\leqslant n}$，它是有限维的11.1。）也就是说，

$$v \in \mathbb{V}^{\leqslant n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(U). \tag{11.7}$$

假设存在一个**单叶**（即全纯+单射）函数 $\mu\colon U \to \mathbb{C}$.[4]（可以设想 μ 在某点 $y \in U$处取值为零，即 μ 是 y处的一个局部坐标。但严格来说，这并非必要条件。）那么在每个 $x \in U$ 处都存在一个自然的局部坐标

[4]事实上，只需假设 $d\mu$ 在 U上处处非零即可。这样一来，μ 必定是局部单叶的，这对于应用来说已经足够。

$\mu-\mu(x)$。如果我们让 $\wr\phi_x$ 作用于抽象向量而非具体向量，那么对于上述每个 v （使得每个 $\mathcal{U}(\mu-\mu(x))^{-1}v(x)$ 都是一个抽象向量）

$$x\in U\mapsto \wr\phi_x\big(\mathcal{U}(\mu-\mu(x))^{-1}v(x)\otimes w_\bullet\big) \tag{11.8}$$

是一个全纯函数。局部坐标的选择 $\mu-\mu(x)$ 符合$(\zeta-z)/r$ 中的1.10），如果我们假设 $r=1$ 并将 μ 与 ζ 的标准坐标 $\mathbb{C}$相认。

11.4

我们说明为何这一描述与 μ的选择无关。设 $\eta\in\mathscr{O}(U)$ 也为单叶。设 $\varrho(\eta|\mu)_x\in\mathbb{G}$ 为从 $\mu-\mu(x)$ 到 $\eta-\eta(x)$的坐标变换。也就是说

$$\varrho(\eta|\mu)_x\big(\mu(y)-\mu(x)\big)=\eta(y)-\eta(x) \tag{11.9}$$

对于任意接近 x的 $y\in C$。等价地，

$$\varrho(\eta|\mu)_x(z)=\eta\circ\mu^{-1}(z+\mu(x))-\eta(x), \tag{11.10}$$

由此可见 $\varrho(\eta|\mu)$： $U\to\mathbb{G}$， $x\mapsto\varrho(\eta|\mu)_x$ 是一个全纯变换族。因此，由（10.13），$\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))\big|_{\mathbb{V}^{\leqslant n}}$属于$\mathrm{End}\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes\mathscr{O}(U)$。因此，由 $\mathscr{O}(U)$-线性，$\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))$ 将 $\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes\mathscr{O}(U)$ 的每个截面映射到 $\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes\mathscr{O}(U)$，使得其在每个 x处的取值都是自同构 $\mathbb{V}^{\leqslant n}$。

这一性质可以概括如下：令 $\mathscr{O}_U$ 为 U上的平凡全纯线丛（即一维向量丛）。于是 $\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_U$ 是纤维为 $\mathbb{V}^{\leqslant n}$的平凡（全纯）向量丛[5]。那么我们有一个向量丛自同构（等价地，一个 $\mathscr{O}_U$-模自同构）

$$\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu)):\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_U\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_U.$$

根据第 2.11 节，

$$\wr\phi_x\big(\mathcal{U}(\mu-\mu(x))^{-1}v(x)\otimes w_\bullet\big)=\wr\phi_x\big(\mathcal{U}(\eta-\eta(x))^{-1}u(x)\otimes w_\bullet\big)$$

其中 $u(x)=\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu)_x)v(x)$。因此，函数 v 在 U 上全纯，当且仅当 u 全纯。这意味着（11.8）的全纯性与所选 μ无关。

例 11.3。令 ζ 为 $\mathbb{C}^\times$的标准坐标。那么对每个 $\gamma\in\mathbb{C}^\times$，

$$\varrho\big(1/\zeta|\zeta\big)_\gamma=\varrho\big(\zeta|1/\zeta\big)_{1/\gamma}=\vartheta_\gamma \tag{11.11}$$

其中$\vartheta_\gamma(z)=\frac{1}{\gamma+z}-\frac{1}{\gamma}$（参见（9.11））。因此，由（9.14），

$$\mathcal{U}\big(\varrho\big(1/\zeta|\zeta\big)_\gamma\big)=\mathcal{U}\big(\varrho\big(\zeta|1/\zeta\big)_{1/\gamma}\big)=e^{\gamma L_1}(-\gamma^{-2})^{L_0}. \tag{11.12}$$

[5]In 在我们的笔记中，除非另有说明，所有向量丛都是有限秩全纯向量丛 .

11.5

这两个特征结合起来，便给出了共形块的定义。为了简化定义并使其更加精确，让我们引入一些新概念。

我们定义一个向量丛 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$ 在 C 上，其纤维等价于 $\mathbb{V}^{\leqslant n}$，定义如下。回顾一下，只要有全纯过渡函数，就可以构造全纯向量丛。根据（7.7），对于单叶的 $\eta_i \in \mathscr{O}(U)$，$i=1,2,3$，我们有

$$\varrho(\eta_1|\eta_2)_x \circ \varrho(\eta_2|\eta_3)_x = \varrho(\eta_1|\eta_3)_x \tag{11.13}$$

因此满足余循环条件

$$\mathcal{U}(\varrho(\eta_1|\eta_2))\mathcal{U}(\varrho(\eta_2|\eta_3)) = \mathcal{U}(\varrho(\eta_1|\eta_3)) \tag{11.14}$$

根据定理 10.5。因此，存在唯一的（在等价意义下）向量丛 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$，其过渡函数具有如下形式 $\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))$。更准确地说，对于任意开集 $U \subset C$，单叶的 $\eta \in \mathscr{O}(U)$ 对应于一个平凡化（即向量丛/$\mathscr{O}_U$-模的等价）

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta) : \mathscr{V}_C^{\leqslant n}\big|_U \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V}^{\leqslant n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_U \tag{11.15}$$

与对 η 限制到开子集相容（即，如果 $V \subset U$ 是开集，则 $\mathcal{U}_\varrho(\eta|_V) = \mathcal{U}_\varrho(\eta)|_V$），使得若 $\mu \in \mathscr{O}(U)$ 也是单叶的，则

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{U}_\varrho(\mu)^{-1} = \mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu)) : \mathbb{V}^{\leqslant n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_U \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V}^{\leqslant n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_U. \tag{11.16}$$

注释 11.4。直观地说，$\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$ 在每个 $x \in C$ 处的纤维都是向量空间 $\mathscr{W}(\mathbb{V}^{\leqslant n})$，由能量为 $\leqslant n$的抽象顶点算子代数向量构成。平凡化 $\mathcal{U}_\varrho(\eta)$ 通过同构 $\mathcal{U}(\eta - \eta(x))$将每个 x 处的纤维 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}|_x$ 映射到 $\mathbb{V}^{\leqslant n}$，并将每个抽象顶点算子代数向量映射为其 $(\eta-\eta(x))$-坐标表示。如果 $v \in \mathbb{V}^{\leqslant n} \otimes \mathscr{O}(U)$，那么映射 $x \mapsto \mathcal{U}(\eta-\eta(x))^{-1}v(x)$ 恰好是 U 上 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$ 的截面 $\mathcal{U}_\varrho(\eta)^{-1}v$，而 U 上的任何截面都具有这种形式。$\mathscr{V}_C^{\leqslant n}(U)$，$U$ 上 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$ 的所有截面组成的空间，就是能量为 $\leqslant n$ 且在 U 上全纯变化和移动的所有顶点算子代数向量所构成的空间。

注释 11.5。真空向量**1** 在任意坐标变换算子$\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))$ 作用下保持不变，因为它被 $L_{\geqslant 0}$ 湮灭。因此，我们也用**1** 表示 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}(C)$ 中的元素：在任意局部单叶映射 η 下，它的平凡化都是真空向量**1**。我们称**1** 为**真空截面**。

11.6

现在，$\wr\phi$ 关于插入的顶点算子代数向量的运动与变化是全纯的这一性质，可以表述如下：

1. 对于 $C\backslash\{x_\bullet\}$的每个开子集 U，

$$\wr\phi(\cdot \otimes w_\bullet) : \mathscr{V}_C^{\leqslant n}(U) \to \mathscr{O}(U), \qquad \mathbf{v} \mapsto \wr\phi(\mathbf{v} \otimes w_\bullet) \tag{11.17}$$

是一个 $\mathscr{O}(U)$-模（同）态射。（它与$\mathscr{O}(U)$ 的作用相 intertwine，原因显而易见。）

2. $\wr\phi(\cdot\otimes w_\bullet)$ 与对开子集的限制相容。也就是说，如果 $V\subset U$ 是开集，那么 $\wr\phi(\mathbf{v}|_V\otimes w_\bullet)=\wr\phi(\mathbf{v}\otimes w_\bullet)|_V$。

上述两点可以用层论语言概括为：$\wr\phi(\cdot\otimes w_\bullet)$ 是 $\mathscr{O}_{C\setminus\{x_\bullet\}}$-模的一个态射 $\mathscr{V}_{C\setminus\{x_\bullet\}}^{\leqslant n}\to\mathscr{O}_{C\setminus\{x_\bullet\}}$。等价地，

$$\wr\phi(\cdot\otimes w_\bullet)\in H^0\big(C\setminus\{x_\bullet\},(\mathscr{V}_C^{\leqslant n})^\vee\big).$$

11.7

为简化定义和定理的表述，我们考虑直极限层

$$\mathscr{V}_C=\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$$

其在任意连通开集 $U\subset C$（或更一般地，任意具有有限个连通分量的开集 U）上的截面空间为

$$\mathscr{V}_C(U)=\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_C^{\leqslant n}(U).$$

这是可行的，因为对于每个 $n_1\leqslant n_2$，我们都有一个显然的单射 $\mathscr{O}_C$-模态射（即向量丛的态射）$\mathscr{V}_C^{\leqslant n_1}\to\mathscr{V}_C^{\leqslant n_2}$，在任意一个如（11.15）所示的平凡化下，它就是显然的包含映射 $\mathbb{V}^{\leqslant n_1}\otimes\mathscr{O}_U\hookrightarrow\mathbb{V}^{\leqslant n_2}\otimes\mathscr{O}_U$。$\mathscr{V}_C$ 和 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$ 都称为与**顶点算子代数层**相关联的 C 和 $\mathbb{V}$。

等价地，$\mathscr{V}_C$ 是一个无限秩向量丛，对于每个带有单叶 η的连通开集$U\subset C$，我们都有一个平凡化

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta):\mathscr{V}_C|_U\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_U$$

与对 η 在连通开集上的限制相容，并且对于任意另一个单叶 $\mu\in\mathscr{O}(U)$，我们还有 $\mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{U}_\varrho(\mu)^{-1}=\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))$作为$\mathscr{O}_U$-模 $\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_U$的一个自同构。

因此，粗略地说，$\mathscr{V}_C(U)$是所有属于某个 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}(U)$的截面 v的集合。$n\in\mathbb{N}$

在本笔记余下部分中，如果读者对无限秩的局部自由层感到不习惯，可以将 $\mathscr{V}_C$ 替换为 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$，适用于所有可能的 n。

11.8

现在我们可以给出共形块的定义。回忆数据 $\mathfrak{X}$（11.1）以及每个 η_i定义在 $U_i\ni x_i$上。设 $\mathbb{V}$是一个顶点算子代数（VOA），并设 $\mathbb{W}_1$、…、$\mathbb{W}_N$是分别与标记点 $\mathbb{V}$相关联的可容许 x_1-模 x_N。

定义 11.6（复解析版本）。线性泛函 $\phi:\ \mathbb{W}_\bullet=\mathbb{W}_1\otimes\cdots\otimes\mathbb{W}_N\to\mathbb{C}$ 称为与 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{W}_\bullet$ 相关联的**共形块**，如果满足以下条件：对每个 $w_\bullet\in\mathbb{W}_\bullet$，都存在一个（必然唯一的）$\mathscr{O}_{C\setminus\{x_\bullet\}}$-模态射

$$\wr\phi(\cdot,w_\bullet):\mathscr{V}_{C\setminus\{x_\bullet\}}\to\mathscr{O}_{C\setminus\{x_\bullet\}}$$

（等价地，$\wr\phi(\cdot,\ w_\bullet)\in H^0(C\backslash\{x_\bullet\},\ \mathscr{V}_C^\vee)$），使得对每个 $1\leqslant i\leqslant N$，通过识别

$$\mathscr{V}_C|_{U_i}=\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_{U_i}\qquad \text{via } \mathcal{U}_\varrho(\eta_i) \tag{11.18}$$

并作如下识别

$$U_i=\eta_i(U_i)\qquad \text{via } \eta_i \tag{11.19}$$

使得 η_i 变为标准坐标 z，对于每个 $v\in\mathscr{V}_C(U_i)=\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}(U_i)$（限制在 $U_i\backslash\{x_i\}=\eta_i(U_i)\backslash\{0\}$上），等式

$$\wr\phi(v,w_\bullet)_z=\phi\big(w_1\otimes\cdots\otimes Y(v(z),z)w_i\otimes\cdots\otimes w_N\big) \tag{11.20}$$

在 $\mathbb{C}[[z^{\pm1}]]$中成立。 □

注意，式（11.20）的左端是 $\mathscr{O}(\eta_i(U_i)\backslash\{0\})$中的一个元素，通过取洛朗级数展开，将其视为 $\mathbb{C}[[z^{\pm1}]]$中的元素。右端理解为

$$\sum_{m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}}\phi(\cdots\otimes Y(v_m)_nw_i\otimes\cdots)z^{m-n-1}$$

若 v 的展开为 $v(z)=\sum_{m\geqslant0}v_mz^m$，其中每个 $v_m\in\mathbb{V}$。特别地，式（11.20）属于 $\mathbb{C}((z))$。

11.9

我们来对这个定义作一些说明。

注 11.7。由引理 7.13，我们看到，如果 $\eta_i(U_i)\supset\mathbb{D}_{r_i}$，那么 z 在（11.20）右端的形式洛朗级数，等价地（参见（11.6））， 函数级数

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\phi\big(w_1\cdots\otimes P_nY(v(z),z)w_i\otimes\cdots\otimes w_N\big)$$

在 $z\in\mathbb{D}_{r_i}^\times$ 上一致几乎处处收敛到（11.20）的左端。这解释了为什么定义 11.6 被视为一种复解析定义。

注 11.8。$\wr\phi(\cdot,\ w_\bullet)$ 的唯一性源于以下原因。只需将 $\omega=\wr\phi(\cdot,\ w_\bullet)$ 限制在每个 $n\geqslant0$对应的 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$ 上即可。假设 $\omega'=\wr'\phi(\cdot,\ w_\bullet)$ 是另一个满足定义 11.6 中描述的态射。那么，ω 和 ω' 是向量丛$(\mathscr{V}_C^{\leqslant n})^\vee$ 在 $C\backslash\{x_\bullet\}$上的截面。此外，根据（11.20），$\omega-\omega'$ 在每个 $U_i\backslash\{x_i\}$上都为零。因此，若令 $\Omega\subset C\backslash\{x_\bullet\}$ 为所有满足以下条件的点 y 的集合：$\omega-\omega'$ 在y的某个邻域上为零，则根据假设 11.2，Ω 与 C的每个连通分支都有交集。根据复分析，Ω 既是开集又是闭集。因此，$\Omega=C\backslash\{x_\bullet\}$。

注 11.9。根据这一唯一性，我们可以为所有满足 $\wr\phi(\cdot,w)$ 在 w 上线性的 $w\in\mathbb{W}_\bullet$ 定义 $\wr\phi(\cdot,w)$。

注 11.10。根据复分析，显然，共形块的定义与 $x_\bullet$ 的邻域 $U_1,U_2,\ldots$ 的大小和形状无关。

注 11.11。根据 $\mathscr{O}(U_i)$-线性，要验证对所有 $v\in\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}(U_i)$，均满足（11.20），只需验证对所有常数 $v\in\mathbb{V}\simeq\mathbb{V}\otimes\mathbf{1}$均成立。

11.10

例 11.12。固定 $\gamma\in\mathbb{C}^\times$，并令 $\mathfrak{P}=(\mathbb{P}^1;\ 0,\ \gamma,\ 8;\ \zeta,\ \zeta-\gamma,\ 1/\zeta)$，其中 ζ 是 $\mathbb{C}$ 的标准坐标。设 $\mathbb{W}$ 是一个可容许的 $\mathbb{V}$-模，并将 $\mathbb{W}$，$\mathbb{V}$，$\mathbb{W}'$ 与 0，γ，8 相关联。则以下线性泛函是一个共形块，称为**与顶点运算相关的共形块** $Y_{\mathbb{W}}$。

$$\omega:\mathbb{W}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}'\to\mathbb{C},\qquad w_\bullet=w\otimes v\otimes w'\mapsto\langle w',Y(v,\gamma)w\rangle \tag{11.21}$$

证明。我们如下构造 $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^\times\setminus\{\gamma\}}$-模态射 $\wr\omega(\cdot,w_\bullet):\mathscr{V}_{\mathbb{C}^\times\setminus\{\gamma\}}\to\mathscr{O}_{\mathbb{C}^\times\setminus\{\gamma\}}$ 对于每个开集 $U\subset\mathbb{C}^\times\setminus\{\gamma\}$，令

$$\begin{aligned}\wr\omega(\cdot,w_\bullet):\mathscr{V}_{\mathbb{C}^\times\setminus\{\gamma\}}(U)&\to\mathscr{O}(U),\\ \mathcal{U}_\varrho(\zeta)^{-1}u&\mapsto\langle w',Y(u(z),z)Y(v,\gamma)w\rangle\end{aligned}$$

其中 $u\in\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}(U)$，并且我们采用定义 8.3 中的约定，使得当 $z\neq0,\gamma,\infty$ 且 u 全纯时，上述术语有定义且全纯。

不妨假设 u 是一个常截面，即 $u\in\mathbb{V}$。由 $Y_{\mathbb{W}}$的复解析 Jacobi 恒等式，(11.20) 在 ω 满足 γ 接近 0 或 γ时成立。当 z接近 ∞时，$\wr\omega(\cdot,\ w_\bullet)$ 将 $\mathcal{U}_\varrho(\zeta)^{-1}u$ 映到 $\langle w',\ Y(u,\ z)Y(v,\ \gamma)w\rangle$。因此，它将以下内容映到

$$\mathcal{U}_\varrho(1/\zeta)^{-1}u=\mathcal{U}_\varrho(\zeta)^{-1}\mathcal{U}(\varrho(\zeta|1/\zeta))u$$

to

$$\big\langle w',Y\big(\mathcal{U}(\varrho(\zeta|1/\zeta)_z)u,z\big)Y(v,\gamma)w\big\rangle\overset{(11.12)}{=\!=}\big\langle w',Y\big(e^{z^{-1}L_1}(-z^2)^{L_0}u,z\big)Y(v,\gamma)w\big\rangle,$$

由（9.15）等于

$$\big\langle Y\big(u,z^{-1}\big)w',Y(v,\gamma)w\big\rangle=\big\langle Y\big(u,\eta_\infty(z)\big)w',Y(v,\gamma)w\big\rangle$$

其中 $\eta_\infty=1/\zeta$ 是∞处的局部坐标。这证明了当 11.20 中的 z 接近 ∞时，结论成立。 □

习题 11.13。设 $\mathbb{W}_1$，$\mathbb{W}_2$ 为可容许的 $\mathbb{V}$-模，并设 T: $\mathbb{W}_1\to\mathbb{W}_2$ 为一个 $\mathbb{V}$-模同态，即一个保持 $\mathbb{V}$-作用的线性映射。令 $\mathfrak{P}=(\mathbb{P}^1;0,\ 8;\ \zeta,\ 1/\zeta)$,，并分别将 $\mathbb{W}_1$，$\mathbb{W}_2'$ 与 0，8 相关联。证明下列线性泛函是与 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathbb{W}_1$，$\mathbb{W}_2'$ 相关的共形块。

$$\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_2'\to\mathbb{C}\qquad w_1\otimes w_2'\mapsto\langle Tw_1,w_2'\rangle \tag{11.22}$$

11.11

由于 (11.20) 属于 $\mathbb{C}((z))$，我们可以将 $\wr\phi(\cdot,w_\bullet)$ 视为 $(\mathscr{V}_C^{\leqslant n})^\vee$ 的一个截面，它在以下位置有有限个极点 $x_\bullet$:

$$\wr\phi(\cdot,w_\bullet)\in H^0(C,(\mathscr{V}_C^{\leqslant n})^\vee(\star x_\bullet)). \tag{11.23}$$

此记号的含义如下。设 $\mathscr{E}$ 是 C上的一个向量丛。那么对于每个 $k_1,\dots,k_N\in\mathbb{Z}$,

$$\mathscr{E}(k_1x_1+\cdots+k_Nx_N)$$

表示其对应的 $\mathscr{O}_C$-模，其在每个开集 $U\subset C$上的截面空间由所有满足以下条件的 $s\in\mathscr{E}(U\backslash\{x_\bullet\})$构成：对于每个 $1\leqslant i\leqslant N$，函数 $\eta_i^{k_i}\cdot s:x\mapsto\eta_i(x)^{k_i}s(x)$ 在 x_i的某个邻域内全纯（等价地，在 U_i上全纯）。因此，当 $k_1,\dots,k_N\geqslant 0$时，它就是 $\mathscr{E}_{C\backslash\{x_\bullet\}}$ 的截面层，其中的截面在 x_i处的极点阶数至多为 k_i。然后

$$\mathscr{E}(\star x_\bullet)=\varinjlim_{k_1,\dots,k_N\in\mathbb{N}}\mathscr{E}(k_1x_1+\cdots+k_Nx_N)\tag{11.24}$$

是 $\mathscr{E}_{C\backslash\{x_\bullet\}}$ 的截面层，这些截面在 x_1、.....、 x_N 处有有限个极点。

这一观点使我们能够利用强留数定理获得共形块的代数定义。设 ω_C 为 C 的全纯余切线丛，即 C 的开子集上的全纯1-形式层。根据留数定理/斯托克斯定理,

$$\sum_{i=1}^N\mathrm{Res}_{x_i}\lambda=0\tag{11.25}$$

对于所有 $\lambda\in H^0(C\backslash\{x_\bullet\},\ \omega_C)$，因此对于所有 $\lambda\in H^0(C,\ \omega_C(\star x_\bullet))$。

定理11.14 (强留数定理)。 设 $\mathscr{E}$是 C上的一个向量丛。对于每个 $1\leqslant i\leqslant N$，利用 $\mathscr{E}$的一个平凡化及其对应的对偶向量丛 $\mathscr{E}^\vee$的对偶平凡化，固定一个识别

$$\mathscr{E}|_{U_i}=E_i\otimes\mathscr{O}_{U_i},\qquad\mathscr{E}^\vee|_{U_i}=E_i^*\otimes\mathscr{O}_{U_i}\tag{11.26}$$

其中 E_i 是一个有限维向量空间， E_i^*是其对偶空间。取

$$s_i=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_{i,n}\eta_i^n\qquad\in E_i((\eta_i)).\tag{11.27}$$

以下条件等价。

(a) 存在 在每个 x_i 处的洛朗级数展开为 s_i的 $s\in H^0(C、\ \mathscr{E}(\star x_\bullet))$.

(*b*) 对于每个 $\sigma\in H^0(C、\ \mathscr{E}^\vee\otimes\omega_C(\star x_\bullet))$,

$$\sum_{i=1}^N\mathrm{Res}_{x_i}\langle s_i,\sigma\rangle=0.\tag{11.28}$$

这里， $\mathscr{E}^\vee\otimes\omega_C$ 是两个向量丛的张量积。回顾一下，一般而言，若 $\mathscr{E}$和 $\mathscr{F}$ 是复流形 X上的向量丛，则 $\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}$（更准确地说，$\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}$）是一个向量丛，其过渡函数由$\mathscr{E}$和 $\mathscr{F}$ 的过渡函数的张量积给出。等价地， $\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}$是这样一个预层的层化：它在任意开集 $U\subset X$ 上的截面空间为 $\mathscr{E}(U)\otimes_{\mathscr{O}(U)}\mathscr{F}(U)$。当 $\mathscr{E}_U$和$\mathscr{F}_U$ 可平凡化（即等价于自由 $\mathscr{O}_U$-模）时，$(\mathscr{E}\otimes\mathscr{F})(U)$ 等于 $\mathscr{E}(U)\otimes_{\mathscr{O}(U)}\mathscr{F}(U)$。（要看出这一点，只需假设$\mathscr{E}_U=\mathscr{O}_U^{\oplus m}$ 和 $\mathscr{F}_U=\mathscr{O}_U^{\oplus n}$。）

11.12

(11.28)的左端按以下方式理解。由(11.26)，对每个 x_i， σ 可展开为$\sigma = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{i,n}\eta_i^n d\eta_i$ 其中$\varepsilon_{i,n} \in E_i^*$。于是 $\langle s_i, \sigma\rangle = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle e_{i,m}, \varepsilon_{i,n}\rangle \eta_i^{m+n} d\eta_i$。因此，(11.28)可写为

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{m+n=-1} \langle e_{i,m}, \varepsilon_{i,n}\rangle = 0$$

其中，对所有满足 $m+n=-1$ 的 $m,n\in\mathbb{Z}$ 求和，结果是有限的。

注记 11.15。 假设 $\eta_i(U_i) \supset \mathbb{D}_{r_i}$。那么显然，如果 (a) 或 (b) 成立，则级数 $s_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_{i,n}\eta_i^n$ 在 $\eta_i \in \mathbb{D}_{r_i}^\times$上一致几乎处处收敛。值得注意的是，这一解析性质是由代数条件（11.28）推出的。这类似于局部场的形式变量版本蕴含其复解析版本，以及顶点算子代数的代数雅可比恒等式蕴含其复解析版本。

这是 $(a) \Rightarrow (b)$ 由留数定理得出的，因为 $\langle s, \sigma\rangle$ 是$H^0(C$的一个元素，$\omega_C(\star x_\bullet))$。反方向则更为困难。要证明这一点，需要层上同调和 Serre 对偶等更高级的工具。由于篇幅限制，我们无法在此介绍这些内容。读者可参阅 [Muk10，第 1.2 节。2][6], [Gui，第 1 节。4],或 [Gui21，第 7] 节，了解详情。

11.13

现在我们将强留数定理应用于 $\mathscr{E} = (\mathscr{V}_C^{\leqslant n})^\vee$ 的情形。平凡化（11.26）由 $\mathcal{U}_\varrho(\eta_i)$（参见（11.27））及其对偶给出。特别地， $E_i = (\mathbb{V}^{\leqslant n})^*$。我们选择的级数 s_i 是（11.20）的右端，即，

$$s_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_{i,n}\eta_i^n \qquad \in (\mathbb{V}^{\leqslant n})^*((\eta_i))$$

其中，$s_{i,n} \in (\mathbb{V}^{\leqslant n})^*$ 将每个 $v\in\mathbb{V}^{\leqslant n}$ 发送到

$$s_{i,n}(v) = \phi\big(w_1\otimes\cdots\otimes Y(v)_{-n-1}w_i\otimes\cdots\otimes w_N\big).$$

现在，定义 11.6 简单地说，对于所有 n，所有 s_1、……、s_N都是x_1、……、x_N的同一个截面在 $H^0(C$处的$\mathscr{E}(\star x_\bullet))$级数展开，即 $\wr\phi(\cdot, w_\bullet)$。因此，根据强留数定理 11.14，定义 11.6 中的陈述（限制在 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}$ 上时）等价于$\sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{x_i}\langle s_i, \sigma\rangle = 0$ 对于所有 $\sigma\in H^0(C, \mathscr{V}_C^{\leqslant n}\otimes\omega_C(\star x_\bullet))$。也就是说， ϕ 在

$$\sigma\cdot w_\bullet = \sum_{i=1}^{N} w_1\otimes\cdots\otimes\sigma\cdot w_i\otimes\cdots\otimes w_N \tag{11.29}$$

[6]尽管 [Muk10] 仅讨论了 $\mathscr{E}=\mathscr{O}_C$的情形，但其证明适用于所有向量丛。

其中对于每个 i,

$$\sigma \cdot w_i = \mathrm{Res}_{z=0}\, Y(v_i(z), z) w_i dz \qquad \in \mathbb{W}_i \tag{11.30}$$

和 $\sigma|_{U_i} = v_i(z)dz$ 在识别（11.18）和（11.19）之下。

例如，如果 $\sigma|_{U_i} = uz^k dz$，其中 $u \in \mathbb{V}$，那么

$$(uz^k dz) \cdot w_i = Y(u)_k w_i. \tag{11.31}$$

定义 11.16。我们定义 $H^0\big(C、\ \mathscr{V}_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet)\big)$ 在 $\mathbb{W}_\bullet$ 上的线性作用，使得对于每个 σ、$w_\bullet$ 分别属于两个向量空间，$\sigma \cdot w_\bullet$ 由（11.29）和（11.30）定义。我们称之为**留数作用**。

因此，考虑所有 $n \in \mathbb{N}$ 后，我们看到，共形块的复解析定义 11.6 等价于以下代数形式：

定义 11.17（代数形式）。线性泛函 $\phi : \mathbb{W}_\bullet \to \mathbb{C}$ 称为与 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathbb{W}_\bullet$ 相关联的**共形块**，如果它在以下子空间上为零

$$H^0\big(C, \mathscr{V}_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet)\big) \cdot \mathbb{W}_\bullet \tag{11.32}$$

的 $\mathbb{W}_\bullet$，其中我们省略了张成空间$\mathbb{C}$ 在（11.32）中。

定义 11.18. 向量空间

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{x}}(\mathbb{W}_\bullet) = \frac{\mathbb{W}_\bullet}{H^0\big(C, \mathscr{V}_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet)\big) \cdot \mathbb{W}_\bullet} \tag{11.33}$$

称为与 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathbb{W}_\bullet$相关联的**余不变量空间**（也称为余真空空间）。其对偶空间记作 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{x}}(\mathbb{W}_\bullet)$，称为**共形块空间**（或真空空间、不变量空间）。

12 顶点算子代数层的推前与李导数

12.1

我们继续上一节的讨论。σ 在 w_i 上的留数作用在共形块理论中至关重要。下面以一种体现局部坐标 η_i选择的形式给出其定义。

现在我们只假设 σ 是定义在 x_i的某个邻域上的截面 $\mathscr{V}_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet)$，例如定义在 U_i上。（也就是说，σ 是 $\mathscr{V}_C \otimes \omega_C$ 在 $U_i \backslash \{x_i\}$ 上的一个截面，且在 x_i处有有限个极点。）令$\mathcal{V}_\varrho(\eta_i)\sigma$ 属于 $v_i(z)dz$（11.30）。则（11.30）可写为

$$\sigma \cdot w_i = \mathrm{Res}_{z=0}\, Y(\mathcal{V}_\varrho(\eta_i)\sigma, z) w_i. \tag{12.1}$$

让我们以一种更几何的方式描述 $\mathcal{V}_\varrho(\eta_i)$。注意到我们有一个显然的等价性

$$(\eta_i)_* : \mathscr{O}_{U_i} \xrightarrow{\simeq} \mathscr{O}_{\eta_i(U_i)}$$

将 f发送到 $f\circ\eta_i^{-1}$。于是 $\mathbf{1}_{\mathbb{V}}\otimes(\eta_i)_*$： $\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_{U_i}\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_{\eta_i(U_i)}$。我们定义 **推前**

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\varrho(\eta_i):\mathscr{V}_{U_i}&\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_{\eta_i(U_i)}\\ \mathcal{V}_\varrho(\eta_i)&=(\mathbf{1}_{\mathbb{V}}\otimes(\eta_i)_*)\mathcal{U}_\varrho(\eta_i)\end{aligned}\tag{12.2}$$

它与 $(\eta_i)_*=(\eta_i^{-1})^*$ 的张量积 $\omega_{U_i}\xrightarrow{\simeq}\omega_{\eta_i(U_i)}$ 也记作 $\mathcal{V}_\varrho(\eta_i)$:

$$\mathcal{V}_\varrho(\eta_i)\equiv\mathcal{V}_\varrho(\eta_i)\otimes(\eta_i)_*:\mathscr{V}_{U_i}\otimes\omega_{U_i}(\star x_i)\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes\omega_{\eta_i(U_i)}(\star 0).\tag{12.3}$$

12.2

上述几何描述便于同时处理 x_i 上的多个局部坐标及相应的平凡化。作为一项应用，我们来说明， σ 在 $\mathbb{W}_i$ 上的作用可以用与坐标无关的方式表述。

从现在起，我们不再固定 $\mathfrak{X}=(C$的局部坐标； $x_1,\dots,x_N)$。令 $\mathscr{W}(\mathbb{W}_i)$为一个与 $\mathbb{W}_i$同构的抽象向量空间。更精确地说，我们将 $\mathscr{W}(\mathbb{W}_i)$ 视为单点上的一个（无限秩）向量丛，其平凡化为

$$\mathcal{U}(\eta_i):\mathscr{W}(\mathbb{W}_i)\xrightarrow{\simeq}\mathbb{W}_i\tag{12.4}$$

对于 C 在 x_i处的任意局部坐标 η_i ，若 x_i处的 μ_i 也是一个局部坐标，则过渡函数为

$$\mathcal{U}(\eta_i)\mathcal{U}(\mu_i)^{-1}=\mathcal{U}(\eta_i\circ\mu_i^{-1}):\mathbb{W}_i\xrightarrow{\simeq}\mathbb{W}_i.\tag{12.5}$$

注意， $\eta_i\circ\mu_i^{-1}\in\mathbb{G}$ 是从 μ_i 到 η_i的坐标变换，且 $\mathcal{U}(\eta_i\circ\mu_i^{-1})$ 是定义在 $\mathbb{W}_i$ 上的相应可逆算子，由（10.8）定义。

对于每个 $\sigma\in H^0(U_i,\ \mathscr{V}_{U_i}\otimes\omega_{U_i}(\star x_i))$ 以及 $\mathbf{w}\in\mathscr{W}(\mathbb{W}_i)$，定义

$$\sigma\cdot\mathbf{w}=\mathcal{U}(\eta_i)^{-1}\cdot\sigma\cdot\mathcal{U}(\eta_i)\mathbf{w}\tag{12.6}$$

其中 σ 在 $\mathcal{U}(\eta_i)\mathbf{w}$ 上的作用由式（12.1）定义。

12.3

命题 12.1。 留数作用的定义 $\sigma\cdot\mathbf{w}$ 与局部坐标的选择无关 η_i 在 x_i处。

利用平凡化计算 $\mathcal{V}_\varrho(\eta)\sigma$ 的证明是这个命题的一个很好的练习：当η， $\mathscr{V}_{U_i}$，$\mathscr{W}(\mathbb{W}_i)$ 未被认作标准对象时。

证明。 为简便起见，记作 $x_i=x$， $U_i=U$， $\mathbb{W}_i=\mathbb{W}$。令 μ， $\eta\in\mathscr{O}(U)$ 为 U在 x处的坐标。（因此 $\eta(x)=\mu(x)=0$。）通过 μ 将 U 与 $\mu(U)$ 等同，从而将 μ 与 $\mathbb{C}$的标准坐标 $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$等同。我们有 $\eta\in\mathbb{G}$。通过 $\mathcal{U}(\mu)$将 $\mathscr{W}(\mathbb{W})$与 $\mathbb{W}$等同。因此 $\mathcal{U}(\mu)=$

1，并且 $\mathcal{U}(\eta)$： $\mathscr{W}(\mathbb{W}) \to \mathbb{W}$ 与变换 η所对应的算子一致。我们将$\mathbf{w} \in \mathscr{W}(\mathbb{W})$ 记作 $w \in \mathbb{W}$。

由于 上述识别，我们有 $\mu_* = \mathbf{1}$，因此 $\mathcal{V}_\varrho(\mu) = \mathcal{U}_\varrho(\mu)$。记

$$\mathcal{V}_\varrho(\mu)\sigma = \mathcal{U}_\varrho(\mu)\sigma = u(z)dz$$

其中 $u = u(z)$ 属于 $H^0(U,\ \mathbb{V} \otimes \mathscr{O}_U(\star 0))$。因此，由 μ 定义的作用 $\sigma \cdot w$ 就是 $\mathrm{Res}_{z=0} Y(u(z), z)wdz$。

我们用 η计算 $\sigma \cdot w$。根据（12.1）和（12.6），我们计算 $\mathcal{V}_\varrho(\eta)\sigma$。首先，

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta)\sigma = \mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{U}_\varrho(\mu)^{-1}u(z)dz = \mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))u(z)dz = \mathcal{U}(\varrho(\eta|\mathbf{1}_\mathbb{C})_z)u(z)dz.$$

这里，z 是 $\mathbb{C}$的标准变量。应用 $\eta_* = (\eta^{-1})^*$，得到

$$\mathcal{V}_\varrho(\eta)\sigma = \mathcal{U}(\varrho(\eta|\mathbf{1}_\mathbb{C})_{\eta^{-1}(z)})u(\eta^{-1}(z))d\eta^{-1}(z)$$

定义在 $\eta(U) \subset \mathbb{C}$上。因此，用任意向量 $w' \in \mathbb{W}'$求值时，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}(\eta)^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathcal{U}(\eta)w = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}(\eta)^{-1}P_n \cdot \sigma \cdot \mathcal{U}(\eta)w \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}_{z=0}\, \mathcal{U}(\eta)^{-1}P_n Y\big(\mathcal{V}_\varrho(\eta)\sigma, z\big)\mathcal{U}(\eta)w \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}_{z=0}\, \underbrace{\mathcal{U}(\eta)^{-1}P_n Y\big(\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mathbf{1}_\mathbb{C})_{\eta^{-1}(z)})u(\eta^{-1}(z)), z\big)\mathcal{U}(\eta)w}_{A_n} \cdot d\eta^{-1}(z).
\end{aligned}$$

根据坐标变换定理 10.7，$\sum_n \langle w',\ A_n\rangle$ 当 $z \neq 0$ 较小时一致几乎处处收敛。因此我们可以将无穷级数移入留数中，并再次根据定理 10.7，上式等于

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, Y(u(\eta^{-1}(z)), \eta^{-1}(z))w \cdot d\eta^{-1}(z) \xlongequal{\zeta=\eta^{-1}(z)} \mathrm{Res}_{\zeta=0}\, Y(u(\zeta), \zeta)w \cdot d\zeta.$$

证明到此结束。 □

12.4

现在，我们可以给出共形块的一个坐标无关定义。设 $\mathfrak{X} = (C;\ x_\bullet)$ 是一个带有 N 个标记点的紧黎曼曲面，我们不固定局部坐标。同样，我们将可容许的 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}_\bullet$ 与标记点 $x_\bullet$ 相关联。令

$$\mathscr{W}_\mathfrak{X}(\mathbb{W}_\bullet) = \mathscr{W}(\mathbb{W}_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{W}(\mathbb{W}_N). \tag{12.7}$$

那么，对于每种局部坐标 $\eta_\bullet$的选择，我们都有一个平凡化。

$$\mathcal{U}(\eta_\bullet) := \mathcal{U}(\eta_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}(\eta_N) : \mathscr{W}_\mathfrak{X}(\mathbb{W}_\bullet) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{W}_\bullet. \tag{12.8}$$

如果 $\mu_\bullet$ 是另一组局部坐标，那么我们有过渡函数

$$\mathcal{U}(\eta_\bullet)\mathcal{U}(\mu_\bullet)^{-1} = \mathcal{U}(\eta_\bullet \circ \mu_\bullet^{-1}) := \mathcal{U}(\eta_1 \circ \mu_1^{-1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}(\eta_N \circ \mu_N^{-1}). \tag{12.9}$$

对于每个 $\mathbf{w}_\bullet = \mathbf{w}_1 \otimes \cdots \mathbf{w}_N \in \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 和 $\sigma \in H^0(C;\ \mathscr{V}_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet))$，定义留数作用

$$\sigma \cdot \mathbf{w}_\bullet = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{w}_1 \otimes \cdots \otimes \sigma \cdot \mathbf{w}_i \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_N \tag{12.10}$$

（其中每个 $\sigma \cdot \mathbf{w}_i$ 由（12.6）定义）。这给出了 $H^0(C;\ \mathscr{V}_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet))$在 $\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$上的线性作用。

定义 12.2。向量空间

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) = \frac{\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)}{H^0\big(C, \mathscr{V}_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet)\big) \cdot \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)} \tag{12.11}$$

及其对偶空间 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 分别称为与 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{W}_\bullet$相关联的**余不变量空间**和**共形块空间**。

12.5

<escape>让我们将第 12.1 小节中的推前推广到更一般的几何设置。设 X 和 Y为（不一定紧致的）黎曼曲面，并设 $\varphi\colon X \xrightarrow{\simeq} Y$为一个双全纯映射。设</escape>

$$\varphi_* : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y, \qquad f \mapsto f \circ \varphi^{-1} \tag{12.12}$$

是结构层的推前。我们也用 φ_* 表示

$$\varphi_* \equiv \mathbf{1}_{\mathbb{V}} \otimes \varphi_* : \mathbb{V} \otimes \mathscr{O}_X \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V} \otimes \mathscr{O}_Y. \tag{12.13}$$

设 $U \subset X$ 和 $V \subset Y$ 是开且连通的，并且满足 $V = \varphi(U)$。假设存在一个单叶 $\eta \in \mathscr{O}(Y)$。回顾一下，我们有一个等价关系

$$\mathcal{V}_\varrho(\eta) = \eta_* \cdot \mathcal{U}_\varrho(\eta) : \mathscr{V}_V \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V} \otimes \mathscr{O}_{\eta(V)} \tag{12.14}$$

其中推前 η_*：$\mathbb{V} \otimes \mathscr{O}_V \to \mathbb{V} \otimes \mathscr{O}_{\eta(V)}$ 与（12.13）类似。我们定义

$$\mathcal{V}_\varrho(\varphi) : \mathscr{V}_U \xrightarrow{\simeq} \mathscr{V}_V, \qquad \mathcal{V}_\varrho(\eta)\mathcal{V}_\varrho(\varphi) = \mathcal{V}_\varrho(\eta \circ \varphi). \tag{12.15}$$

等价地，

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{V}_\varrho(\varphi) = \varphi_* \cdot \mathcal{U}_\varrho(\eta \circ \varphi). \tag{12.16}$$

证明。注意到 $\mathcal{V}_\varrho(\eta) = \eta_* \cdot \mathcal{U}_\varrho(\eta)$、$\mathcal{V}_\varrho(\eta\circ\varphi) = (\eta\circ\varphi)_* \cdot \mathcal{U}_\varrho(\eta\circ\varphi)$ 和 $(\eta\circ\varphi)_* = \eta_* \cdot \varphi_*$。 □

引理 12.3. $\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$ 的定义与单叶映射 η的选择无关。 .

证明。令 $\mu\in\mathscr{O}(V)$ 为单叶函数。利用（11.9），容易验证

$$\mathcal{U}(\varrho(\eta\circ\varphi|\mu\circ\varphi))=\varphi_*^{-1}\cdot\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))\cdot\varphi_*$$

作为态射 $\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_U\to\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_U$。这意味着

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta\circ\varphi)\mathcal{U}_\varrho(\mu\circ\varphi)^{-1}=\varphi_*^{-1}\cdot\mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{U}_\varrho(\mu)^{-1}\cdot\varphi_*. \tag{12.17}$$

独立性由上述公式和（12.16）立即可得。 □

由此引理，我们得到一个整体等价

$$\mathcal{V}_\varrho(\varphi):\mathscr{V}_X\xrightarrow{\simeq}\mathscr{V}_Y \tag{12.18}$$

由（12.15）或（12.16）在局部定义。我们称 $\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$ 为 **与** φ 相关的推前。我们也用 $\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$ 表示

$$\mathcal{V}_\varrho(\varphi)\equiv\mathcal{V}_\varrho(\varphi)\otimes\varphi_*:\mathscr{V}_X\otimes\omega_X\xrightarrow{\simeq}\mathscr{V}_Y\otimes\omega_Y \tag{12.19}$$

其中 φ_* 是 $(\varphi^*)^{-1}=(\varphi^{-1})^*:\ \omega_X\to\omega_Y$。

12.6

注 12.4. 由（12.15）可清楚看出，$\mathcal{V}_\varrho(\psi\circ\varphi)=\mathcal{V}_\varrho(\psi)\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$ 若 $\psi:\ Y\to Z$ 是复流形之间的双全纯映射。

注 12.5。$\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$、$\mathscr{V}_X\to\mathscr{V}_Y$ 以及公式 (12.16) 的几何含义如下。设 $x\in X$。在纤维 $\mathscr{V}_X|x$ 中取一个向量 $\mathbf{u}$，并将其视为一个抽象的顶点算子代数向量。令 $\mathbf{v}=\mathcal{V}_\varrho(\varphi)\mathbf{u}$。根据 (12.16) 以及 $\mathcal{U}_\varrho(\eta)$ 和 $\mathcal{U}_\varrho(\mu)$的几何含义（参见注 11.4），$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 满足如下关系：对于任意在邻域 y 上全纯的单叶 η，若令 $\mu=\eta\circ\varphi$，则 $\mathbf{u}$ 关于$\mu-\mu(x)$ 的坐标表示与 $\mathbf{v}$ 关于 $\eta-\eta(y)$的坐标表示相同。

我们将简　　称为 μ-平凡化下的 $\mathbf{u}$ 与 η-平凡化下的$\mathbf{v}$ 相等　　1.

注 12.6。 现在 $\mathcal{V}_\varrho(\eta)$ 有两种含义：一种是等价 $\mathscr{V}_V\to\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_{\eta(V)}$ 由（12.14）定义，另一种是等价 $\mathscr{V}_V\to\mathscr{V}_{\eta(V)}$ 其定义方式类似于 $\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$。通过平凡化 $\mathcal{U}_\varrho(\zeta)$（其中 ζ 是 $\mathbb{C}$的标准坐标），将 $\mathscr{V}_{\eta(V)}$ 与 $\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_{\eta(V)}$ 对应起来后，这两种含义便一致。

12.7

可以为（余）切丛以及 VOA 层定义推前，这意味着这两类对象密切相关。事实上，可以将$\mathscr{V}_C$ 视为全纯切线丛 Θ_C与 C的张量积的扭曲直和。（注意，ω_C 是 Θ_C的对偶。）

为此，我们来看看过渡函数 $\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu)):\ \mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes\mathscr{O}_U\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes\mathscr{O}_U$其中 $\mu,\eta\in\mathscr{O}(U)$是单叶的。根据（10.8），$\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))_x=\varrho(\eta|\mu)'_x(0)^{L_0}(1+$

.....的乘积 $L_{>0}$) 作用于 $\mathbb{V}$。由（11.9），$\varrho(\eta|\mu)'_x(0) = \frac{\partial\eta}{\partial\mu}(x)$。因此，由于 $L_{>0}$ 会降低权，我们得出，对于每个 $v = v(x) \in \mathbb{V}^{\leqslant n} \otimes \mathscr{O}_U$，

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{U}_\varrho(\mu)^{-1}v = \mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))v = (\partial\eta/\partial\mu)^n v \qquad \mod \mathbb{V}^{\leqslant n-1} \otimes \mathscr{O}_U. \tag{12.20}$$

因此，商丛 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}/\mathscr{V}_C^{\leqslant n-1}$ 从 μ 坐标到 η 坐标的过渡函数 $\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))\ (\partial\eta/\partial\mu)^n$，与 $\mathbb{V}(n)\otimes_{\mathbb{C}}\Theta_C^{\otimes n}$ 的过渡函数一致。我们得到：

命题 12.7。存在 $\mathscr{O}_C$-模之间的一个等价

$$\mathscr{V}_C^{\leqslant n}/\mathscr{V}_C^{\leqslant n-1} \simeq \mathbb{V}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_C^{\otimes n} \tag{12.21}$$

使得，若 $U \subset C$ 是开集且 $\eta \in \mathscr{O}(U)$ 是单叶的，则对每个 $v \in \mathbb{V}(n)$，$v \otimes \partial_\eta^n$（它是 (12.21) 的右端中的一个元素）等价于 $\mathcal{U}_\varrho(\eta)^{-1}v$ 在 (12.21) 的左端中的等价类。

因此，一般而言，$\mathbb{V}(n) \otimes \Theta_C^{\otimes n}(U)$ 中的一个元素是形如 $v \otimes f\partial_\eta^n$的元素之和，其中 $v \in \mathbb{V}(n)$ 且 $f \in \mathscr{O}(U)$。它与 $f \cdot \mathcal{U}_\varrho(\eta)^{-1}v$ 在 (12.21) 的左端中的元素相对应。

12.8

如果我们只关注初级向量，就可以自然地得到与 Θ_C 张量积的直和等价的 $\mathscr{V}_C$ 子丛，而无需取商。回忆一下，$\mathbb{V}(n)$ 中的初级向量 v 是指被 $L_{>0}$湮灭的向量。因此，v 的坐标变换公式为 $\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu))v = (\partial\eta/\partial\mu)^n v$。于是，若令$\mathbf{P}(n)$ 表示 $\mathbb{V}$中权为 n的初级向量子空间，则 $\mathscr{V}_C$ 有一个向量子丛 $\mathscr{P}_C^n$，其局部平凡化$\mathcal{U}_\varrho(\eta)$为：$\mathscr{P}_C^n|_U \xrightarrow{\simeq} \mathbf{P}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_U$，对任意单叶 $\eta \in \mathscr{O}(U)$均成立。此外，$\mathscr{P}_C^n$与 $\Theta_C^{\otimes n}$ 具有相同的过渡函数。因此，$\mathscr{P}_C^n \simeq \mathbf{P}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_C^{\otimes n}$。

由于线丛的基本性质 $\Theta_C^{\otimes n}$ 众所周知，在共形块数学理论发展的早期，顶点算子代数层尚未定义，因此有时会改用层 $\mathscr{P}_C^n$ 来定义和研究共形块。具体而言，在具有里程碑意义的论文 [TUY89], 中，采用 WZW 模型的共形块$\mathbb{V} = L_l(\mathfrak{g},\ 0)$（其中 $\mathfrak{g}$ 是单的，且 $l \in \mathbb{N}$）是利用

$$\mathscr{P}_C^1 \otimes \omega_C(\star x_\bullet) \simeq \mathbf{P}(1) \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_C(\star x_\bullet).$$

（注意，$\Theta_C \otimes \omega_C \simeq \mathscr{O}_C$ 由于 ω 与 Θ_C互为对偶。）因此，对于 WZW 模型，余不变量空间（针对 $\mathfrak{X}$ 带局部坐标的 [TUY89] 中定义为

$$\frac{\mathbb{W}_\bullet}{H^0\big(C, \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_C(\star x_\bullet)\big) \cdot \mathbb{W}_\bullet}$$

幸运的是，这一定义与使用 $H^0(C,\ \mathscr{V}_C \otimes \omega_C(\star x_\bullet))$定义的定义一致。参见[FB04，第9节。3]。

12.9

在微分几何中，切丛和余切丛（张量积）的截面的李导数，是利用与流相关联的推前映射或拉回映射定义的。同样，我们也可以定义 $\mathscr{V}_C$ 的截面的李导数。

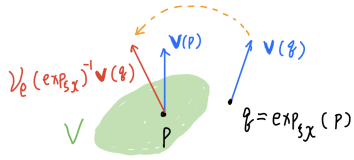
设 $W \subset C$为一个开子集，并选取 $\mathfrak{x} \in \Theta_C(W)$，即 $\mathfrak{x}$是 W上的全纯切向量场。注意，对于任意相对紧的开子集 $V \subset W$（即 V在 W中的闭包是紧的），存在 $T \subset \mathbb{C}$ 的一个 0 的邻域（变量为 ζ），使得全纯流 $\exp(\zeta\mathfrak{x})$ 在 $T \times V$上是全纯的，并且对每个 $\zeta \in T$，作为 V上的函数是单射的。（参见第 2.6小节。）

下文中，我们将 $\exp(\zeta\mathfrak{x})(x)$ 记作 $\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(x)$。

定义 12.8。对于任意$\mathbf{v} \in \mathscr{V}_C^{\leqslant n}(W)$和 $\mathfrak{x} \in \Theta_C(W)$，定义**李导数** $\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\mathbf{v}$为 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}(W)$ 中的一个元素（如果极限存在），如下所示。任取一个相对紧的开子集 V，且 W。于是

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\mathbf{v}\big|_V = \lim_{\zeta\to 0} \frac{\mathcal{V}_\varrho(\exp_{\zeta\mathfrak{x}})^{-1}\big(\mathbf{v}\big|_{\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(V)}\big) - \mathbf{v}\big|_V}{\zeta} \tag{12.22}$$

直观地说：对于每个 $p \in V$，$\mathbf{v}(p) \in \mathscr{V}_C^{\leqslant n}|p$ 是位于 p处的抽象顶点算子代数向量。令 $q = \exp_{\zeta\mathfrak{x}}(p)$。那么，$\mathbf{v}(q) \in \mathscr{V}_C^{\leqslant n}|q$ 是位于 $\mathbf{v}(q)$处的抽象顶点算子代数向量，它通过映射 $\exp_{\zeta\mathfrak{x}}$ 拉回为向量 $\mathcal{V}_\varrho(\exp_{\zeta\mathfrak{x}})^{-1}\mathbf{v}(q) \in \mathscr{V}_C^{\leqslant n}|p$。



(12.23)

于是，当 ζ足够小时，

$$(\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\mathbf{v})(p) \approx \frac{\mathcal{V}_\varrho(\exp_{\zeta\mathfrak{x}})^{-1}\mathbf{v}(q) - \mathbf{v}(p)}{\zeta} \tag{12.24}$$

12.10

命题 12.9。假设 $\eta \in \mathscr{O}(W)$ 是单叶的，并令

$$u = \mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathbf{v} \qquad \in \mathbb{V}^{\leqslant n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(W).$$

记 $\mathfrak{x} = h\partial_\eta$，其中 $h \in \mathscr{O}(W)$。那么 $\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\mathbf{v}$ 存在（即 (12.22) 的右端的极限存在），且作为 $\mathscr{V}^{\leqslant n}(W)$中的元素，其 η-平凡化为

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\mathbf{v} = h\partial_\eta u - \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k!}\partial_\eta^k h \cdot L_{k-1}u. \tag{12.25}$$

证明。我们需要求出 η-平凡化 $\mathcal{V}_\varrho(\exp_{\zeta\mathfrak{x}})^{-1}\big(\mathbf{v}\big|_{\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(V)}\big)$ 在任意 $p \in V$处的，即 η（12.23）中红色向量的 η-平凡化 $\mathbf{v}(q)$ 为 $u(q)$,

由（12.16）或注释 12.5， $\eta\circ$指数$\zeta_{\mathfrak{x}}$-红色向量的平凡化也 $u(q)$。因此，η-红色向量的平凡化（其位于 p处）为

$$\mathcal{U}(\varrho(\eta|\eta\circ\exp_{\zeta\mathfrak{x}})_p)u(\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(p)). \tag{12.26}$$

它在 ζ 处的导数 $\zeta=0$ 给出 $\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\mathbf{v}(p)$ 在 η-平凡化下的结果。（如果读者对这里证明的严谨性不满意，可以查阅 [Gui，第2节。6] ）

函数 $\zeta=0$ 在 $u(\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(p))$ 处的导数正是向量场 $\mathfrak{x}$ 对 u的作用，即$h\partial_\eta u$ 在 p处。（注意（2.9）。）函数 $\mathcal{U}(\varrho(\eta|\eta\circ\exp_{\zeta\mathfrak{x}})_p)$ 在0 处的导数可用命题10.3计算：如果我们将 η 与 $\mathbb{C}$的标准坐标等同，那么

$$\begin{aligned}&\partial_\zeta\mathcal{U}(\varrho(\eta|\eta\circ\exp_{\zeta\mathfrak{x}})_p)(t)\big|_{\zeta=0}\overset{(11.10)}{=\!=\!=}\partial_\zeta\big(\exp_{-\zeta\mathfrak{x}}(t+\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(p))-p\big)\big|_{\zeta=0}\\&=-h(t+p)+h(p).\end{aligned}$$

它在 k处的第 t 阶导数 $t=0$ 于是为 $-\partial_\eta^k h(p)$。因此，根据命题10.3 ，

$$\partial_\zeta\mathcal{U}(\varrho(\eta|\eta\circ\exp_{\zeta\mathfrak{x}})_p)\big|_{\zeta=0}=-\sum_{k\geqslant1}\frac{1}{k!}\partial_\eta^k h\cdot L_{k-1}.$$

□

12.11

在命题12.9中，若假设 $u\in\mathbf{P}(n)\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}(W)$，即 u 的取值是权为 n的初级元素，那么李导数公式为 $h\partial_\eta u-n\partial_\eta h\cdot u$。不出所料，这个结果与 $\Theta_C^{\otimes n}$ 中的李导数公式一致，包括 $n=-m<0$这一情形，此时我们将 $\Theta_C^{\otimes(-m)}=\omega_C^{\otimes m}$ 。

由于我们对 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n}\otimes\omega_C$ 的截面有推前（参见（12.19）），我们也可以用同一公式（12.22）在这个丛中定义李导数。根据莱布尼茨法则，很容易猜出结果，并且可以严格证明：

推论 12.10。设 $\sigma\in\mathscr{V}_C^{\leqslant n}\otimes\omega_C(W)$，并令

$$u\cdot d\eta=\mathcal{U}_\varrho(\eta)\sigma\qquad\in\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes_{\mathbb{C}}\omega_C(W)$$

其中 $u\in\mathbb{V}^{\leqslant n}\in\mathscr{O}(W)$。记 $\mathfrak{x}=h\partial_\eta$，其中 $h\in\mathscr{O}(W)$。那么

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma=h\partial_\eta u\cdot d\eta-\sum_{k\geqslant1}\frac{1}{k!}\partial_\eta^k h\cdot L_{k-1}u\cdot d\eta+\partial_\eta h\cdot u\cdot d\eta. \tag{12.27}$$

13 紧黎曼曲面族与共形块的平行截面

13.1

定义 13.1. 紧黎曼曲面族是如下数据 $\pi\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{B}$，其中 $\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$ 是黎曼曲面，满射全纯映射 π 是适当的（即 π^{-1}(紧致) ），

且是次浸入（即全纯切空间之间的线性映射 $d\pi$ 处处满射），并且对于每个 $b \in \mathcal{B}$，纤维 $\mathcal{C}_b = \pi^{-1}(b)$ 都是紧黎曼曲面。显然，π 是开映射。

根据埃雷斯曼纤维化定理，若 $\mathcal{B}$ 连通，则该族的所有纤维都微分同胚；此外，作为微分流形族，$\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 局部平凡，即当 $V \subset \mathcal{B}$ 是开集且 C 是曲面时，它是 $C \times V \to V$ 的投影。然而，作为复流形族，它并非局部平凡。

定义 13.2。 A **族的** N**点标记紧黎曼曲面**由数据 $\mathfrak{X} = (\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B};\ \varsigma_1, \dots, \varsigma_N)$ 给出，其中 $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 是紧黎曼曲面族，并满足以下条件：

(a) 每个 $\varsigma_i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 都是一个截面，即一个全纯映射，满足 $\pi \circ \varsigma_i = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$。（因此，$\varsigma_i(b)$ 是纤维 $\mathcal{C}_b$上的点。）

(b) $\varsigma_1(b), \dots, \varsigma_N(b)$ 互不相同，并被视为每个纤维 $\mathcal{C}_b$上的标记点。

(c) 每个纤维 $\mathcal{C}_b$ 的每个连通分支至少包含 $\varsigma_1(b)$、……、$\varsigma_N(b)$ 中的一个。

以下是 $\mathcal{C}$中的一个超曲面。

$$S_{\mathfrak{X}} = \bigcup_{j=1}^{N} \varsigma_j(\mathcal{B}) \tag{13.1}$$

族在 ς_i 处的**局部坐标** η_i 是 $\varsigma_i(\mathcal{B})$ 的一个邻域U_i 上的全纯函数，对于每个 $b \in \mathcal{B}$，其在 $\varsigma_i(b)$ 处限制为 $\mathcal{C}_b$ 的局部坐标 $\eta_i|_{\mathcal{C}_b \cap U_i}$，即$\eta_i(\varsigma_i(b)) = 0$ 且 η_i 在纤维上是单射。

$$U_{i,b} = \mathcal{C}_b \cap U_i.$$

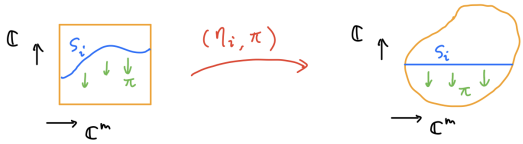
我们称数据 $\mathfrak{X} = (\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B};\ \varsigma_1,\ \dots\dots,\ \varsigma_N;\ \eta_1,\ \dots\dots,\ \eta_N)$ 为一个带有局部坐标的 N **<escape> </escape>点标记的紧黎曼曲面族**。我们定义纤维

$$\mathfrak{X}_b = (\mathcal{C}_b; \varsigma_i(b), \dots, \varsigma_N(b); \eta_1|_{\mathcal{C}_b}, \dots, \eta_N|_{\mathcal{C}_b}) \tag{13.2}$$

这是一个带有 N 个标记点并配备局部坐标的紧黎曼曲面。 . □

13.2

由于 π 是次浸没，在 $p \in \varsigma_i(\mathcal{B})$的某个邻域上，$\pi$ 等价于投影 $D \times V \to V$，其中 $D \subset \mathbb{C}$，$V \in \mathbb{C}^m$ 是开集。因此，将 ς_i 限制在 $V \subset \mathcal{B}$ 上可写为$\varsigma_i(b) = (\sigma_i(b),\ b)$，其中 $\sigma_i\colon V \to D$ 是全纯的。也就是说，$\varsigma_i|_V$是 σ_i的图像。



(13.3)

由 η_i 在每个纤维上都是单射这一事实可知，$\partial_{z_1}\eta_i$ 在 z_1 作为 D的坐标时处处不为零。因此，$(\eta_i,\ \pi)$ 的雅可比行列式处处不为零。于是，根据反函数定理，再结合显而易见的事实：，$\pi)$ 在 U_i上是单射，我们得知 $(\eta_i,\ \pi)$ 是从 U_i 到 $\{0\}\times\mathcal{B}$ 在 $\mathbb{C}\times\mathcal{B}$中的某个邻域上的双全纯映射。(13.3)展示了 V被视为 $\mathbb{C}^m$的一个开子集时的情形。

因此，通过将 U_i 与其在(η_i,π)下的像 W（它是 $\{0\}\times\mathcal{B}$ 的一个邻域）等同起来，我们可以假设 π 是从 W 到 $\mathcal{B}$的投影，ς_i 是典范映射 $\mathcal{B}\to\{0\}\times\mathcal{B}$，而 η_i 是从 $W\subset\mathbb{C}\times\mathcal{B}$ 到 $\mathbb{C}$轴的投影。

13.3

例 13.3. 设 C 是一个连通紧黎曼曲面。那么

$$\mathfrak{X}=(\pi:C\times\mathrm{Conf}^N(C)\to\mathrm{Conf}^N(C);\varsigma_1,\dots,\varsigma_N)$$

这是一个以 N 个点标记的紧黎曼曲面族，其中 π 是到第二个分量的投影，且 ς_i: Conf $^N(C)\ \to\ C\times$Conf$^N(C)$ 将每个 $(x_1,\dots,x_N)$ 映至$(x_i,x_1,\dots,x_N)$。纤维为 $\mathfrak{X}_{x_\bullet}=(C;\ x_1,\dots,x_N)$。

例 13.4. 设 $\mathfrak{P}^N=(\pi\colon\mathbb{P}^1\times\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}^\times)\to\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}^\times);0,\varsigma_1,\dots,\varsigma_N,\infty)$，其中 0, 8 是截面，分别将 $x_\bullet$ 映至 $(0,x_\bullet)$ 和 $(\infty,x_\bullet)$，而 ς_i 与前例中的定义相同。那么 $\mathfrak{P}^N$ 是一个以 $(N+2)$ 个点标记的曲面。此外，$\mathfrak{P}^N$ 可配备局部坐标$\zeta,\eta_1,\dots,\eta_N,1/\zeta$，它们分别位于 $0,\varsigma_1,\dots,\varsigma_N,8$ 处，其中 ζ将 $(z,z_\bullet)$映至 z，$1/\zeta$将 $(z,z_\bullet)$映至 $1/z,$，且每个 η_i 将 $(z,z_\bullet)$ 映至 $z-z_i$。纤维为

$$\mathfrak{P}^N_{z_\bullet}=(\mathbb{P}^1;0,z_1,\dots,z_N,\infty;\zeta,\zeta-z_1,\dots,\zeta-z_N,1/\zeta)$$

其中，ζ 现在是 $\mathbb{C}$的标准坐标。

13.4

例 13.5. 设

$$\widetilde{\mathfrak{X}}=(\widetilde{C};x_1,\dots,x_N,x',x'';\eta_1,\dots,\eta_N;\xi,\varpi)$$

是一个带有 $(N+2)$ 个标记点并配有局部坐标的紧黎曼曲面，使得每个连通分支都包含 x_1、.....、x_N 中的一个。令 U'，U''分别为以 x'，x'' 为中心、半径为 r，ρ 的开圆盘。更确切地说，我们假设 ξ，ϖ定义在 U'，U''上，并且存在双全纯映射。

$$\xi:U'\xrightarrow{\simeq}\mathbb{D}_r,\qquad \varpi:U''\xrightarrow{\simeq}\mathbb{D}_\rho.$$

我们还假设 U'、U''、x_1、.....、x_N两两不相交。

对于每个 $q\in\mathbb{D}^\times_{r\rho}$，我们都可以通过以下缝合操作定义一个带有 N 个标记点的 $\mathfrak{X}_q$。我们将以下环域粘合起来

$$\begin{aligned}\xi^{-1}(A_{|q|/\rho,r})&=\{x\in U':|q|/\rho<|\xi(x)|<r\}\\&\Big\updownarrow\text{identify}\\\varpi^{-1}(A_{|q|/r,\rho})&=\{y\in U'':|q|/r<|\varpi(y)|<\rho\}\end{aligned}\tag{13.4}$$

其中识别规则为

$$x = y \qquad \text{iff} \qquad \xi(x)\varpi(y) = q. \tag{13.5}$$

部分 $Z'_q = \{x \in U' \colon |\xi(x)| \leqslant |q|/\rho\}$和 $Z''_q = \{y \in U'' \colon |\varpi(y)| \leqslant |q|/r\}$被舍弃。通过这一粘合过程，我们得到缝合后的黎曼曲面 $\mathcal{C}_q$，其标记点为$\backsim x_1, \dots, x_N$（与 $\mathfrak{X}$ 的前 N 个标记点相同）。x_i 处的局部坐标也选为 η_i。这定义了 $\mathfrak{X}_q = (\mathcal{C}_q;\ x_1, \dots, x_N;\ \eta_1, \dots, \eta_N)$。

可以将所有 $\mathfrak{X}_q$ 组合起来，形成一个族

$$\mathfrak{X} = (\pi : \mathcal{C} \to \mathbb{D}^\times_{r\rho}; x_1, \dots, x_N; \eta_1, \dots, \eta_N)$$

其在每个 $q \in \mathbb{D}^\times_{r\rho}$ 处的纤维都是 $\mathfrak{X}_q$。（这里我们稍微滥用了记号，用 x_i 表示截面，用 η_i 表示截面 x_i处的局部坐标。）它可以通过以下方式得到：

- We have closed subsets $E' = \bigcup_{q\in\mathbb{D}^\times_{r\rho}} Z'_q \times \{q\}$ and $E'' = \bigcup_{q\in\mathbb{D}^\times_{r\rho}} Z''_q \times \{q\}$ of $\widetilde{C} \times \mathbb{D}^\times_{r\rho}$. Consider the projection

  $$\pi : (\widetilde{C} \times \mathbb{D}^\times_{r\rho}) \backslash (E' \cup E'') \to \mathbb{D}^\times_{r\rho}.$$

  每个 x_i 都是将 $q \in \mathbb{D}^\times_\rho$映射到 (x_i, q)的截面，而当 x 接近 x_i时，η_i 将 (x, q) 映射到 $\eta_i(x)$。将这些数据按适当的全纯关系取商，便得到族$\mathfrak{X}$。

□

在上述示例中，事实上我们可以将 $\mathfrak{X}$ 扩展为定义在 $\mathbb{D}_{r\rho}$ 上的一个族，其中 $\mathfrak{X}_0 = (\mathcal{C}_0;\ x_\bullet;\ \eta_\bullet)$ 是 $\mathfrak{X}_q$在 $q \to 0$趋于 $\mathcal{C}_0$时的“极限”，它作为一个拓扑空间，是通过粘合 $x'^\sim$ 和 x'' 的 C而得到的。$\mathcal{C}_0$ 不是一个光滑流形，因此不能是黎曼曲面。然而，我们可以通过定义一个适当的结构层 $\mathcal{C}_0$，使 $\mathscr{O}_{\mathcal{C}_0}$成为一个奇异复流形（更准确地说：一个复空间）。$\mathcal{C}_0$ 称为**结点曲线**。结点曲线对于共形块的缝合与因子分解的证明至关重要。不过，这一主题超出了本讲义的讨论范围。有关这一主题的详细讨论，请读者参阅 [Gui]。

13.5

例 13.6。令 $\mathfrak{X}_0 = (C;\ x_1, \dots\dots, x_N;\ \eta_1, \dots\dots, \eta_N)$为带有局部坐标的 N 点标记紧黎曼曲面。为简便起见，记 $x_1 = x$ 和 $\eta_1 = \eta$。设 η 定义在一个与 $x_2, \dots\dots, x_N$不相交的邻域 $U = U_1 \ni x_1$上。假设 $\eta(U)$是一个以 0 为中心、半径为 > 1的开圆盘。

设 h 是 $\mathbb{S}^1$ 的一个邻域上的全纯函数。那么 $\mathfrak{x} = h\partial_z$ 是 $\mathbb{S}^1$ 附近的一个全纯切向量场。我们选取 $0 < r < 1 < R$，使得 h 在一个包含 $A_{r,\ R} = \{z \in \mathbb{C}$ 的闭包的开集上有定义：$r < |z| < R\}$。此外，我们选取 0 的一个连通邻域 $\Delta \subset \mathbb{C}$，使得以下条件成立。

1. 存在一个邻域 $\Delta \subset \mathbb{C}$，使得0 处的全纯流 $\tau \in \Delta \mapsto \exp(\tau\mathfrak{x}) = \exp\tau\mathfrak{x}$在 ($z$上有定义，$\tau$) $\in A_{r,\ R} \times \Delta$并且在$z \in A_r$上是单射，$_R$对任意固定的 τ。（参见小节2.6。）

2. 对于每个 $\tau \in \Delta$，我们有 $0 \notin \exp_{\tau\mathfrak{x}}(\mathbb{S}^1)$。

令 Γ_τ 为单闭曲线 $\exp\tau\mathfrak{x}:\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$。于是根据若尔当曲线定理，对于每个 $\tau \in \Delta$，$\mathbb{P}^1\backslash\Gamma_\tau$ 有两个连通分支

$$\mathbb{P}^1\backslash\Gamma_\tau = \Omega_\tau \sqcup \Omega'_\tau$$

其中 Ω'_τ 是包含 8 的那个。在下文中，我们给出一些首次阅读时可以跳过的技术性说明：

- 根据斯托克斯定理，对于每个 $z \in \mathbb{P}^1$，$z \in \Omega_\tau$（分别地，$z \in \Omega'_\tau$）当且仅当$\oint_{\Gamma_\tau} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ 等于 $2\mathbf{i}\pi$（分别地，0）。这意味着

$$O = \{(z,\tau) \in \mathbb{P}^1 \times \Delta : z \in \Omega_\tau\} \qquad O' = \{(z,\tau) \in \mathbb{P}^1 \times \Delta : z \in \Omega'_\tau\}$$

  在 $\mathbb{P}^1 \times \Delta$中都是闭集和开集。总之：$z$ 位于 Γ_τ 内部（分别地，外侧）这一性质关于 τ 和 z的变化是连续的。

- 因此，对于每个$z \in A_{r,R}\backslash\mathbb{S}^1$，所有满足 $\exp_{\tau\mathfrak{x}}(z)$ 属于 Ω_τ（分别地，Ω'_τ）的 $\tau \in \Delta$ 构成 Δ的一个开子集，因而也是闭集，所以必为 $\varnothing$或 Δ。这表明，对于每个$z \in A_{r,R}$，

$$\begin{aligned} |z| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exp_{\tau\mathfrak{x}}(z) \in \Omega_\tau \text{ for all } \tau \in \Delta \\ |z| > 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exp_{\tau\mathfrak{x}}(z) \in \Omega'_\tau \text{ for all } \tau \in \Delta \end{aligned} \tag{13.6}$$

  类似的论证表明，如果对所有 $\tau \in \Delta$，$z \in \mathbb{P}^1$ 和 $z \notin \exp_{\tau\mathfrak{x}}(\mathbb{S}^1)$，那么

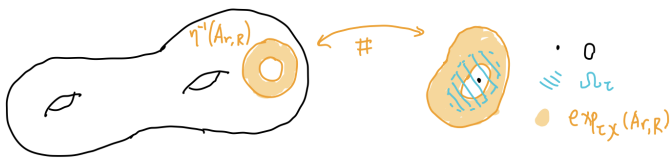
$$\begin{aligned} |z| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad z \in \Omega_\tau \text{ for all } \tau \in \Delta \\ |z| > 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad z \in \Omega'_\tau \text{ for all } \tau \in \Delta \end{aligned} \tag{13.7}$$

  特别地，对所有 $\tau \in \Delta$，$0 \in \Omega_\tau$。

Th我们将构造的族 $\mathfrak{X}$ 的底流形为 Δ。对于每个 $\tau \in \Delta$，令

$$\mathcal{R}_\tau = \exp_{\tau\mathfrak{x}}(A_{r,R}) \cup \Omega_\tau.$$

于是，纤维 $\mathcal{C}_\tau$ 由 $C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}})$ 与 $\mathcal{R}_\tau$ 通过识别子集$\eta^{-1}(A_{r,\ R})$ 以及 $\exp_{\tau\mathfrak{x}}(A_{r,\ R})$ 经由双全纯映射 $\exp\tau\mathfrak{x} \circ \eta$粘合而成。（留给读者验证 $\mathcal{C}_\tau$是一个紧黎曼曲面。（验证序列紧致性时需要用到13.6。）



(13.8)

$\mathcal{C}_\tau$的标记点及其局部坐标选为：$0 \in \mathcal{R}_\tau$，配备 $\mathcal{R}_\tau \subset \mathbb{C}$的标准坐标 ζ；以及 x_2、……、$x_N \in C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}})$，配备$\eta_2$、……、$\eta_N$。由此得到一个带有局部坐标 $\mathfrak{X}_\tau$的 N点标记紧黎曼曲面。留给读者构造一个定义在 Δ 上的族 $\mathfrak{X}$，其纤维为 $\mathfrak{X}_\tau$。 □

13.6

在前面的例子中，假设我们分别将 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_N$与 $0 \in \mathcal{R}_\tau, x_2, \dots, x_N$关联起来，并令 ϕ_τ表示与 $\mathfrak{X}_\tau$相关的共形块。令$\mathfrak{r} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^{n+1}\partial_z$。将 C 在 x_1 处的局部坐标 η 变为 $\mathfrak{X}_\tau$ 中的第一个坐标后，$\mathfrak{X}_0$ 便变为 $\mathfrak{X}_\tau$；将其限制在 $C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}})$ 上时，该坐标为 $\exp^{\tau\mathfrak{r}}\circ\eta$。因此，直观地说，对于每个给定的 ϕ_0，都可以利用形式表达式构造 ϕ_τ

$$\phi_\tau(w_\bullet) = \phi_0(e^{-\tau\sum_n c_n L_n} w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_N) \tag{13.9}$$

这要归功于边界参数化变换公式。在某些良好的情况下，例如当 $c_n = 0$ 对于充分负的 n 时，该表达式实际上收敛。（见例15.18。）当该表达式收敛时，映射 $\phi_0 \mapsto \phi_\tau$ 定义了共形块空间 $\mathcal{T}^*_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet) \to \mathcal{T}^*_{\mathfrak{X}_\tau}(\mathbb{W}_\bullet)$之间的线性映射。由于算子 $e^{-\tau\sum_n c_n L_n}$ 可逆，该映射是一个同构。特别地，$\mathcal{T}^*_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet)$ 和$\mathcal{T}^*_{\mathfrak{X}_\tau}(\mathbb{W}_\bullet)$ 的维数相等。正如我们将在第 15节中看到的，对于任意一个族，我们将用这种方法证明其纤维的共形块空间具有等维性，以及共形块层的局部自由性；其中关键的一步是证明 ϕ_τ收敛。

ϕ_τ满足微分方程 $\partial_\tau\phi_\tau + \sum c_n\phi_\tau\circ(L_n\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_N}) = 0$。这一事实也可以表述为：

$$\nabla_{\partial_\tau} := \partial_\tau + \sum_n c_n(L_n\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_N})^{\mathrm{t}} \tag{13.10}$$

在 Δ 上的共形块层（与 $\mathfrak{X}$ 相关联）上定义了自然联络 ∇，并且 $\tau \mapsto \phi_\tau$ 是该联络下的平行截面。

13.7

例 13.6 可以很容易地推广到这样的情形：在 $\mathbb{S}^1$附近的每个 x_i 邻域中，都关联有一个全纯向量场 $\mathfrak{r}_i$。由这些向量场生成的流定义了一个族。

现在我们考虑例 13.6的另一个重要推广：

例 13.7。 设 $\mathfrak{X}_0$，U 如例 13.6。设 Δ 是$0 \in \mathbb{C}$的一个连通邻域。我们选取 0 的一个邻域 $\Delta \subset \mathbb{C}$ 和一个环带 $A_{r,\ R}$ 其中 $0 < r < 1 < R$，并选取定义在 $(z$ 上的全纯函数 $\beta = \beta_\zeta(z)$，$\zeta) \in A_{r,\ R} \times \Delta$ 使得以下条件成立：

1. $\beta_0(z) = z$.

2. 对于每个 $\zeta\in\Delta$， β_ζ 在 $A_{r,\ R}$ 上是单射。

3. 对于每个 $\zeta\in\Delta$，我们有 $0\notin\beta_\zeta(\mathbb{S}^1)$。

与例 13.6中一样，我们令 $\Gamma_\zeta=\beta_\zeta(\mathbb{S}^1)$，它将 $\mathbb{P}^1$ 分成两个连通分支 $\Omega_\zeta\ni 0$和 $\Omega'_\zeta\ni\infty$。令

$$\mathcal{R}_\zeta=\beta_\zeta(A_{r,R})\cup\Omega_\zeta.$$

于是，可以构造一个族 $\mathfrak{X}$，其底流形为 Δ，使得每个纤维 $\mathcal{C}_\zeta$ 都由 $C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}})$ 与 $\mathcal{R}_\zeta$ 通过识别 $\eta^{-1}(A_{r,\ R})$ 以及 $\beta_\zeta(A_{r,\ R})$ 经由双全纯映射 $\beta_\zeta\circ\eta$粘合而成。按照例 $\mathcal{C}_\zeta$ 13.6 结尾处的相同方式选取 13.6 的标记点和局部坐标。

与例 13.6中一样， $O=\{(z,\ \zeta)\in\mathbb{P}^1\times\Delta:\ \ z\in\Omega_\zeta\}$ 是一个开集。令

$$\mathcal{A}=\{(\beta_\zeta(z),\zeta)\in\mathbb{C}\times\Delta:z\in A_{r,R}\}.$$

于是，作为一个族， $\mathcal{C}$ 由 $\Delta\times(C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}}))$ 和 $\mathcal{A}\cup O$ 粘合而成，并且每个纤维上的粘合方式都与上一段所述相同。 □

在上述示例中， $0\in\mathcal{R}_\zeta$ 处的标准局部坐标是 C上的边界参数化 $\beta_\zeta\circ\eta$。因此，通过将 η 改为 $\beta_\zeta\circ\eta$， $\mathfrak{X}_0$ 变为 $\mathfrak{X}_\zeta$。于是，我们作出如下定义：

定义13.8。我们称 $\mathfrak{X}_\zeta$ 为将 $\mathfrak{X}_0$ 在 $x=x_1$ 处的局部坐标 $\eta=\eta_1$ 改为边界参数化 $\beta_\zeta\circ\eta$ 后得到的带 N个标记点的紧黎曼曲面。

13.8

设 ϕ_ζ 为与 $\mathfrak{X}_\zeta$ 相关的共形块，并且 $\mathbb{W}_\bullet$ 其中 $\mathfrak{X}$ 是在例 13.7 中构造的。与第 13.6 小节中一样，我们来求出 ϕ_ζ 所满足的微分方程。

令 $\mathcal{U}(\beta_\zeta)$ 为与参数化变换相关联的（尚未严格定义的）算子 β_ζ。那么根据第 2 节中的边界参数化变换公式，

$$\phi_\zeta\big(\mathcal{U}(\beta_\zeta)w_1\otimes w_2\otimes\cdots\otimes w_N\big)=\phi_0(w_\bullet).\tag{13.11}$$

让我们求出 $\partial_\zeta\mathcal{U}(\beta_\zeta)$ 的公式。选取邻域 $\mathbb{S}^1\times\Delta$ 在 A_r 中的全纯函数 $h=h(z,\ \zeta)$ 使得

$$\partial_\zeta\beta_\zeta(z)=h\big(\beta_\zeta(z),\zeta\big).\tag{13.12}$$

由于 β 不一定是由向量场生成的流， h 取决于 ζ。可以将 β_ζ 看作由时变向量场 $h\partial_z$生成的路径。

我们首先考虑 $\partial_\zeta\mathcal{U}(\beta_\zeta)$在 $\zeta=0$处。回忆 $\beta_0(z)=z$。与注释 10.4中的解释类似， β_ζ 在 $\zeta=0$ 处的速度是向量场 $\partial_\zeta\beta_\zeta(z)\partial_z\big|_{\zeta=0}$，根据（13.12）可得 $h(z,\ 0)\partial_z$。将 h 写成

$$h(z,\zeta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n(\zeta)z^n\tag{13.13}$$

（其中 $h_n \in \mathscr{O}(\Delta)$）。那么 $h(z,0)\partial_z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n(0) z^n \partial_z$，这对应于 $\sum_n h_n(0) L_{n-1}$。这应该是 $\partial_\zeta \mathcal{U}(\beta_\zeta)$ 在 $\zeta = 0$ 处的公式。

对于任意的 $\zeta \in \Delta$，我们使用相同的方法得到 $\partial_\zeta \mathcal{U}(\beta_\zeta) = \partial_\lambda \mathcal{U}(\beta_{\lambda+\zeta})\big|_{\lambda=0}$ 的公式。令 $\mathcal{U}(\beta_{\lambda+\zeta}) = \mathcal{U}(\beta_{\lambda+\zeta}\circ\beta_\zeta^{-1})\circ\mathcal{U}(\beta_\zeta)$。那么，$\partial_\lambda$ 在 $\beta_{\lambda+\zeta}\circ\beta_\zeta^{-1}$ 处的 $\lambda = 0$ 为 $(\partial_\zeta\beta)\circ\beta_\zeta^{-1}$，由（13.12）可得 $h(z,\zeta)$。因此

$$\partial_\zeta \mathcal{U}(\beta_\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n(\zeta) L_{n-1}\mathcal{U}(\beta_\zeta). \tag{13.14}$$

因此，由于式（13.11）左端的导数为零，我们得出 ϕ_ζ 被 $\partial_\zeta + \sum_n h_n(\zeta)(L_{n-1}\otimes \mathbf{1}_{\mathbb{W}_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_N})^{\mathrm{t}}$ 湮灭。等价地，ϕ_ζ 在联络 ∇ 定义的

$$\nabla_{\partial_\zeta} = \partial_\zeta + \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n(\zeta)\big(L_{n-1}\otimes \mathbf{1}_{\mathbb{W}_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_N}\big)^{\mathrm{t}}. \tag{13.15}$$

13.9

示例的重要性13.7（或者将其推广到每个 x_i 附近都存在一个 β 的情形）在于，任何具有1维底流形的族，在局部上都具有这种形式。下面我们将更详细地解释这一事实。

设 $\mathfrak{X} = (\pi\colon \mathcal{C}\to\mathcal{B};\ \varsigma_\bullet;\ \eta_\bullet)$ 为一族带局部坐标的 N 点标记紧黎曼曲面。回顾一下，按照我们的约定，$\Theta_{\mathcal{C}}$ 和 $\Theta_{\mathcal{B}}$ 分别是 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 的全纯切丛。设 $U\subset\mathcal{C}$ 为开集，且 $\mathfrak{x}\in\Theta_{\mathcal{C}}(U)$。注意，$W = \pi(U)$ 是开集。选取 $\mathfrak{y}\in\Theta_{\mathcal{B}}(W)$。如果对于每个 $x\in\mathcal{C}$，微分映射 $d\pi\colon \Theta_{\mathcal{C}}|_x \to \Theta_{\mathcal{B}}|_{\pi(x)}$ 在切空间之间将 $\mathfrak{x}(x)$ 映射到 $\mathfrak{y}(\pi(x))$，则称 $\mathfrak{x}$ 为 $\mathfrak{y}$ 的**提升**。

如果我们在 U 的每个纤维 $U_b = U\cap\mathcal{C}_b$（其中 $b\in\mathcal{B}$）上都有 $\eta\in\mathscr{O}(U)$ 单叶，那么 $\mathfrak{x}$ 与 $\mathfrak{y}$ 之间的关系就可以用显式的方式表示。

假设 13.9。假设 W 通过映射 $\tau_\bullet = (\tau_1,\dots,\tau_m)\colon W\to\mathbb{C}^m$ 与 $\mathbb{C}^m$ 的一个开子集双全纯。将 W 与 $\tau_\bullet(W)$ 等同起来，使得 $\tau_\bullet$ 与 $\mathbb{C}^m$ 的标准坐标相对应。注意，(η,π) 是 U 与 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{m+1}$ 的一个开子集之间的双全纯映射。我们将 U 与 $(\eta,\pi)(U)$ 等同起来，使得 η 成为 $\mathbb{C}$ 的标准坐标 z，而 π 成为 $\mathbb{C}^m$ 的标准坐标 $\tau_\bullet$。

那么我们可以将 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$ 写成

$$\mathfrak{y} = \sum_{j=1}^m g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j} \qquad \mathfrak{x} = h(z,\tau_\bullet)\partial_z + \sum_{j=1}^m g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j} \tag{13.16a}$$

其中 $g_j\in\mathscr{O}(W)$，$h\in\mathscr{O}(U)$。由这个公式可知，若 $\exp\zeta\mathfrak{y}$ 将 b 映射到 b'，那么只要这些点上流的定义存在，$\exp\zeta\mathfrak{x}$ 就会将 $W_b = W\cap\mathcal{C}_b$ 中的点映射到 $W_{b'}$ 中的点。也就是说，$\exp\zeta\mathfrak{x}$ 保持纤维不变。

回顾 $S_{\mathfrak{X}} = \bigcup_i \varsigma_i(\mathcal{B})$。对于 $\mathcal{C}$ 上的每个向量丛 $\mathscr{E}$ 以及每个 $k\in\mathbb{Z}$，我们令 $\mathscr{E}(kS_{\mathfrak{X}})$ 为这样一个层：其在任意开集 $U\subset\mathcal{C}$ 上的截面都是所有满足以下条件的 $s\in\mathcal{E}(U\backslash S_{\mathfrak{X}})$：对于每个 i，$\eta_i^k\cdot s$

可以延拓为邻域 $\varsigma_i(\mathcal{B})$ 上的 $\mathscr{E}$ 截面。于是 $\mathscr{E}(kS_{\mathfrak{X}})$ 是一个局部自由 $\mathscr{O}_{\mathcal{C}}$-模。我们令

$$\mathscr{E}(\star S_{\mathfrak{X}}) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{E}(kS_{\mathfrak{X}}).$$

因此， $k \geqslant 0, \mathscr{E}(kS_{\mathfrak{X}})$ 是 $\mathscr{E}$的截面层，其在 $S_{\mathfrak{X}}$处的极点阶数至多为 k ； 而$\mathscr{E}(\star S_{\mathfrak{X}})$ 是 $\mathscr{E}$的截面层，其在 $S_{\mathfrak{X}}$处有有限个极点。

命题 13.10. 假设 $\mathcal{B}$ 是 *Stein*流形。那么每个 $\mathfrak{y} \in H^0(\mathcal{B}, \Theta_{\mathcal{B}})$ 都有一个提升 $\mathfrak{x}$ 在 $H^0(\mathcal{C}, \Theta_{\mathcal{C}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$ 中。

我们在笔记中不解释 Stein流形的含义，而是请感兴趣的读者参阅 [GR-a，第 I 节。4] 或 [GR-b，第 III 节。3]以了解详细信息。这里，我们仅给出一些足以满足应用需求的例子。Stein流形是复流形，包括以下例子：

- 每个非紧致连通黎曼曲面。
- Stein流形的有限乘积。
- 复流形中 Stein 开子集的有限交集。
- Stein流形的一个闭复子流形。
- 如果 X 是 Stein，且 $f \in \mathscr{O}(X)$ 那么 $X\backslash\{x \in X : \ f(x) = 0\}$ 是 Stein。

由这些例子可清楚看出，复流形 X 的 Stein 开子集构成了 X的拓扑的一组基。

Stein流形具有这样的性质：与向量丛相关的许多局部问题都有全局解。在命题 13.10中，如果 $\mathcal{B}$ 不一定是 Stein，那么 $\mathfrak{x}$ 的提升总是局部存在的（即，缩小 $\mathcal{B}$之后）。其全局存在性则归功于 Stein 性质。关于命题 [Gui][第 3 节6] 的详细解释，请参阅。命题 13.10。

13.10

现在我们假设 $\mathcal{B}$ 是包含 0 的 $\mathbb{C}^m$ 的连通 Stein 开子集，并令 $\tau_\bullet$为 $\mathbb{C}^m$的标准坐标。选取

$$\mathfrak{y} = \sum_j g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j} \qquad \in H^0(\mathcal{B}, \Theta_{\mathcal{B}}) \tag{13.17}$$

其中 $g_j \in \mathscr{O}(\mathcal{B})$，并令 $\mathfrak{x} \in H^0(\mathcal{C}, \ \Theta_{\mathcal{C}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$ 为一个提升。

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant N$，令 $U_i \subset \mathcal{C}$ 为 $\varsigma_i(\mathcal{B})$ 上的一个邻域，在该邻域上 η_i 有定义，并假设 U_i 仅与 $\varsigma_i(\mathcal{B})$ 中的 $\varsigma_1(\mathcal{B})$相交， $\ldots \varsigma_N(\mathcal{B})$。那么，在按照假设 13.9 （它是 $\{0\} \times \mathcal{B}$ 的一个邻域）将 U_i与其在 $(\eta_i$下的像 $\pi)$ 等同之后，我们可以写成

$$\mathfrak{x}|_{U_i} = h_i(z, \tau_\bullet)\partial_z + \sum_j g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j} \tag{13.18}$$

其中，h_i 在 $U_i\backslash\varsigma_i(\mathcal{B}) = (\eta_i,\ \pi)(U_i)\backslash(\{0\}\times\mathcal{B})$ 上全纯，并且在 $\{0\}\times\mathcal{B}$ 上有有限个极点，即 $z^n h_i(z,\ \tau_\bullet)$ 在某个 $n\in\mathbb{N}$ 上全纯。于是我们得到洛朗级数展开。

$$h_i(z,\tau_\bullet) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{i,n}(\tau_\bullet) z^n \tag{13.19}$$

在 $U_i\backslash\varsigma_i(\mathcal{B})$ 上一致几乎处处收敛，其中 $h_{i,\ n}$ 当 n 充分负时是零函数。

13.11

我们继续上一小节的讨论。我们声称，若将$\mathcal{B}$ 限制到复曲线 $\zeta\mapsto \exp_{\zeta\mathfrak{y}}(0)$ 上，使得 X 的底流形为1维，则 $\mathfrak{X}$ 可由例13.7描述。

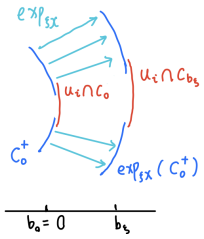
为说明这一点，为简单起见，假设对所有 i 都有 $\eta_i(U_i\cap\mathcal{C}_0)\supset\mathbb{D}_1^{\mathrm{cl}}$，并选取 $0<r<1$。令

$$\mathcal{C}_0^+ = \mathcal{C}_0\backslash\bigcup_i \eta_i^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}}),$$

它与例 $C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}})$ 13.7 中的起相同的作用。考虑由$\exp\zeta\mathfrak{x}$ 在$\mathcal{C}\backslash S_{\mathfrak{X}}$ 上生成的流 $\mathfrak{x}$。我们选取一个邻域 Δ，使得 $0\in\mathbb{C}$ 满足$\exp\zeta\mathfrak{x}$ 在 $\mathcal{C}_0^+$上对所有 $\zeta\in\Delta$都有定义且为单射。令

$$b_\zeta = \exp_{\zeta\mathfrak{y}}(0) \qquad \in\mathbb{C}^m.$$

那么 $\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(\mathcal{C}_0^+)$ 位于 $\mathcal{C}_{b_\zeta}$ 内。因此 $\mathcal{C}_{b_\zeta}$ 有一个开子流形 $\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(\mathcal{C}_0^+)$，它与 $\mathcal{C}_0^+$ 等价。注意 $b_0=0$。



(13.20)

$\mathcal{C}_{b_\zeta}$可以看作是将 $\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(\mathcal{C}_0^+)$ 与 $U_1\cap\mathcal{C}_{b_\zeta}$，……，$U_N\cap\mathcal{C}_{b_\zeta}$ 粘合起来；显然，函数 η_i 在 $U_i\cap\mathcal{C}_{b_\zeta}$ 上会变成 $\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(\mathcal{C}_0^+)$ 中某个环带上的 η_i。等价地，$\mathcal{C}_{b_\zeta}$ 是将 $\mathcal{C}_{b_\zeta}$ 与所有满足以下条件的 $U_i\cap\mathcal{C}_{b_\zeta}$ 粘合起来：$U_i\cap\mathcal{C}_{b_\zeta}$ 上的 η_i 变成 $\mathcal{C}_0^+$ 内某个环带上的函数 $\eta_i\big|_{\mathcal{C}_{b_\zeta}}\circ\exp\zeta\mathfrak{x}$。不难看出，在该环带上，

$$\eta_i\big|_{\mathcal{C}_{b_\zeta}}\circ\exp_{\zeta\mathfrak{x}} = \beta_\zeta^i\circ\eta_i\big|_{\mathcal{C}_0} \tag{13.21}$$

其中 $\beta_\zeta^i(z) = \alpha_\zeta^i(z,\ 0)$ 和 $(\eta_i,\ \pi)\circ\exp_{\zeta\mathfrak{x}}\circ(\eta_i,\ \pi)^{-1}(z,\ \tau_\bullet)$ 等于 $(\alpha_\zeta^i(z,\ \tau_\bullet),\ \exp_{\zeta\mathfrak{y}}(\tau_\bullet))$。也就是说，$\alpha^i$ 由以下事实确定：在通过 $(\eta_i,\ \pi)$ 将 U_i 与 $(\eta_i,\ \pi)(U_i)$ 识别后，

$$\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(z,\tau_\bullet) = (\alpha_\zeta^i(z,\tau_\bullet), \exp_{\zeta\mathfrak{y}}(\tau_\bullet)). \tag{13.22}$$

结论 13.11。 $\mathfrak{X}_{b_\zeta}$是将 $\eta_1\big|_{\mathcal{C}_0},\dots,\eta_N\big|_{\mathcal{C}_0}$ 的局部坐标 $\mathfrak{X}_{b_0}=\mathfrak{X}_0$ 更改为边界参数化 $\beta_\zeta^1\circ\eta_1\big|_{\mathcal{C}_0},\dots,\beta_\zeta^N\circ\eta_N\big|_{\mathcal{C}_0}$。（参见定义 *13.8*。）

13.12

这意味着 $\exp_{\zeta\mathfrak{x}}$ 是由 $\mathfrak{x}$ 生成的流，$\partial_\zeta\big(f\circ\exp_{\zeta\mathfrak{x}}\big)$ 等于 $(\mathfrak{x}f)\circ\exp_{\zeta\mathfrak{x}}$。取 $f=\eta_i$，并将 U 与其在 $(\eta_i$ 下的像相认，$\pi)$ 以简化问题。于是由（13.18），

$$\partial_\zeta\alpha^i_\zeta(z,\tau_\bullet)=h_i\big(\alpha^i_\zeta(z,\tau_\bullet),\exp_{\zeta\mathfrak{y}}(\tau_\bullet)\big),\tag{13.23}$$

因此

$$\partial_\zeta\beta^i_\zeta(z)=h_i\big(\beta^i_\zeta(z),b_\zeta\big).\tag{13.24}$$

令 $\phi_{\tau_\bullet}$ 是与.....相关的共形块 $\mathfrak{X}_{\tau_\bullet}$ 对每个 $\tau_\bullet\in\mathcal{B}$。回顾洛朗级数展开（13.19）。与第 13.8 小节中的推理类似，我们有

$$\partial_\zeta\phi_{b_\zeta}(w_\bullet)+\sum_{i=1}^N\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_{i,n}(b_\zeta)(w_1\otimes\cdots\otimes L_{n-1}w_i\otimes\cdots\otimes w_N)=0.\tag{13.25}$$

由（13.17），我们有 $\partial_\zeta b_\zeta=(g_1(b_\zeta),\ .....,\ g_m(b_\zeta))$。因此

$$\partial_\zeta\phi_{b_\zeta}(w_\bullet)=\sum_{j=1}^m g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j}\phi_{\tau_\bullet}(w_\bullet)\big|_{\tau_\bullet=b_\zeta}=\mathfrak{y}\phi_{\tau_\bullet}(w_\bullet)\big|_{\tau_\bullet=b_\zeta}.$$

我们得出结论，在复路径 $\zeta\in\Delta\mapsto b_\zeta=\exp_{\zeta\mathfrak{y}}(0)$上，

$$\sum_{j=1}^m g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j}\phi_{\tau_\bullet}(w_\bullet)+\sum_{i=1}^N\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_{i,n}(\tau_\bullet)\phi_{\tau_\bullet}(w_1\otimes\cdots\otimes L_{n-1}w_i\otimes\cdots\otimes w_N)=0.\tag{13.26}$$

这一事实可改述如下：在复路径 $\zeta\mapsto b_\zeta$上，$\phi_{\tau_\bullet}$ 在由 $\nabla_{\mathfrak{y}}$ 定义的联络下平行，

$$\nabla_{\mathfrak{y}}=\underbrace{\sum_{j=1}^m g_j\partial_{\tau_j}}_{\mathfrak{y}}+\sum_{i=1}^N\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_{i,n}\cdot\big(\mathbf{1}_{\mathbb{W}_1}\otimes\cdots\otimes L_{n-1}\big|_{\mathbb{W}_i}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_N}\big)^{\mathrm{t}}.\tag{13.27}$$

13.13

我们以给出一些提升的例子来结束本节。

例 13.12。令 $\mathfrak{X}$ 例 13.7中的族为 $h(z,\ \tau)$ 由（13.12）定义，其关于 z（参见（13.13））的洛朗级数展开只有有限个负幂 z。

令 $\mathfrak{y}\in H^0(\Delta,\ \Theta_\Delta)$ 为 ∂_τ 其中 τ 是 $\mathbb{C}$的标准坐标。回顾（参见例 13.7 末尾），$\mathcal{C}$ 是 $\Delta\times(C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}}))$ 与 $\mathcal{A}\cup O$的粘合，其中后者是 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$的一个开子集。我们将提升 $\mathfrak{x}$ 定义为典范提升 ∂_τ，它在$\Delta\times(C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}}))$上平行于 Δ-分量，因此与.....正交

$(C\backslash\eta^{-1}(\mathbb{D}_r^{\mathrm{cl}}))$-分量。于是，在 $\mathcal{A}\cup O$上，使用 $(z,\ \tau)$ 的标准坐标 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$，$\mathfrak{x}$为 $h(z,\ \tau)\partial_z+\partial_\tau$，它在 $z=0$处有有限个极点。这表明 $\mathfrak{x}\in H^0(\mathcal{C},\ \Theta_{\mathcal{C}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$，并且（这并不令人意外）按照小节 $\nabla_{\mathfrak{y}}$ 中的定义的 13.12 与小节13.8中的定义一致。 □

例13.13。 在例 13.4中，设 $(\tau_1,\dots,\tau_N)$ 为底流形 $\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}^\times)$ 从 $\mathbb{C}^N$继承的标准坐标。设 $\mathfrak{y}=\partial_{\tau_k}$ 其中 $1\leqslant k\leqslant N$。那么提升 $\mathfrak{x}$ 可以选为标准提升 ∂_{τ_k}，即与笛卡尔积 $\mathbb{P}^1$ 中的 $\mathcal{C}=\mathbb{P}^1\times\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}^\times)$分量正交的提升。那么 $\mathfrak{x}\in H^0(\mathcal{C},\ \Theta_{\mathcal{C}})$。

使用记　　号和（13.18）中的识别，我们有 $\mathfrak{x}|_{U_i}=\partial_{\tau_k}$ 如果 $i\neq k$，且

$$\mathfrak{x}|_{U_k}=-\partial_z+\partial_{\tau_k}. \tag{13.28}$$

将 $\mathbb{W}_0$，$\mathbb{W}_1$，……，$\mathbb{W}_N$，$\mathbb{W}_\infty$与标记点 0，ς_1，……，ς_N，∞对应于 $\mathfrak{P}^N$。由（13.27），共形块在以下变换下平行

$$\nabla_{\partial_{\tau_k}}=\partial_{\tau_k}-\big(\mathbf{1}_{\mathbb{W}_0}\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_1}\otimes\cdots\otimes L_{-1}\big|_{\mathbb{W}_k}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_N}\otimes\mathbf{1}_{\mathbb{W}_\infty}\big)^{\mathrm{t}}. \tag{13.29}$$

14 余不变量层与共形块及其联系

14.1

我们以严谨的方式研究紧黎曼曲面族的共形块。在本节和下一节中，我们令

$$\mathfrak{X}=(\pi:\mathcal{C}\to\mathcal{B};\varsigma_1,\dots,\varsigma_N)$$

为一个带有 N 个标记点的紧黎曼曲面族。分别将容许的 $\mathbb{V}$-模$\mathbb{W}_1\dots$，$\mathbb{W}_N$与 ς_1、……、ς_N关联起来。取一个与 $\varsigma_j(\mathcal{B})$ 不相交的 $\varsigma_i(\mathcal{B})$ 的邻域 $U_i\subset\mathcal{C}$，其中 $i\neq j$。若我们选取 ς_i 处的局部坐标 η_i，则假设 η_i 在 U_i 上有定义。

14.2

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，定义一个向量丛 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n}$ 于 $\mathcal{C}$，其在每个纤维$\mathcal{C}_b$上的限制是丛 $\mathscr{V}_{\mathcal{C}_b}^{\leqslant n}$，定义见第 11.5 小节。令 $U\subset\mathcal{C}$为开集，并选取 $\eta,\ \mu\in\mathscr{O}(U)$在 U的每个纤维 $U_b=U\cap\mathcal{C}_b$上均为单叶函数。对于每个 $p\in U$，定义 $\varrho(\eta|\mu)_p\in\mathbb{G}$为

$$\varrho(\eta|\mu)_p=\varrho\Big(\eta|_{\mathcal{C}_{\pi(p)}}\Big|\mu|_{\mathcal{C}_{\pi(p)}}\Big). \tag{14.1}$$

也就是说，对于每个 $x\in U_{\pi(p)}$,

$$\eta(x)-\eta(p)=\varrho(\eta|\mu)_p\big(\mu(x)-\mu(p)\big). \tag{14.2}$$

映射 $\varrho(\eta|\mu):\ \ p\in U\to\varrho(\eta|\mu)_p\in\mathbb{G}$ 显然是一个全纯变换族。因此，根据注 10.2，我们得到 $\mathscr{O}_U$-模的一个等价

$$\mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu)):\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes\mathscr{O}_U\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}^{\leqslant n}\otimes\mathscr{O}_U. \tag{14.3}$$

类似于单个紧黎曼曲面的情形，我们将 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n}$ 定义为这样的局部自由 $\mathscr{O}_{\mathcal{C}}$-模：每个满足在每个纤维上 $\eta \in \mathscr{O}(U)$ 为单叶的开集 $U \subset \mathcal{C}$ 都与一个平凡化相关联

$$\mathcal{U}_{\varrho}(\eta) : \mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n}|_U \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V}^{\leqslant n} \otimes \mathscr{O}_U \tag{14.4}$$

使得对于任意开集 $V \subset U$，$\mathcal{U}_{\varrho}(\eta|_V) = \mathcal{U}_{\varrho}(\eta)|_V$均成立；并且对于在 U 的每个纤维上都是单叶的任意 $\mu \in \mathscr{O}(U)$，过渡函数由下式给出

$$\mathcal{U}_{\varrho}(\eta)\mathcal{U}_{\varrho}(\mu)^{-1} = \mathcal{U}(\varrho(\eta|\mu)). \tag{14.5}$$

我们令 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n}$。二者 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}$ 和 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n}$ 均称为与 $\mathfrak{X}$**和** $\mathbb{V}$相关联的**VOA 层**。

14.3

$\Theta_{\mathcal{C}}$ 和 $\omega_{\mathcal{C}}$ 的秩为 $\dim \mathcal{B} + 1$。因此，它们在每个纤维 $\mathcal{C}_b$ 上的限制既不是 $\Theta_{\mathcal{C}_b}$，也不是$\omega_{\mathcal{C}_b}$。我们转而考虑由 $\Theta_{\mathcal{C}}$ 中被 $d\pi$ 消去（即与每个纤维相切）的截面构成的线丛 $\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$，称为**相对切层**。其对偶丛记作 $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$，称为**相对对偶化层**。于是我们有自然等价

$$\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}|_{\mathcal{C}_b} \simeq \Theta_{\mathcal{C}_b}, \qquad \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}|_{\mathcal{C}_b} \simeq \omega_{\mathcal{C}_b}. \tag{14.6}$$

$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(U)$的截面具有如下形式：$f d\eta$，其中 $f \in \mathscr{O}(U)$，且 $\eta \in \mathscr{O}(U)$ 在每个纤维上都是单叶的。对于另一个在每个纤维上都是单叶的 $\mu \in \mathscr{O}(U)$，我们有如下变换规则

$$f d\eta = f \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \mu} d\mu \tag{14.7}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \mu}$ 的切向量场 $\mathcal{C}$ 垂直于 $d\pi$，即与纤维相切。与命题12.7类似，我们有一个自然等价

$$\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n} / \mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n-1} \simeq \mathbb{V}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}^{\otimes n}. \tag{14.8}$$

对于每个 $b \in \mathcal{B}$，令

$$S_{\mathfrak{X}_b} = \{\varsigma_\bullet(b)\} = \{\varsigma_1(b), \ldots, \varsigma_N(b)\}. \tag{14.9}$$

那么对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们都有一个显然的向量丛等价。

$$\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n} \otimes \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(kS_{\mathfrak{X}})|\mathcal{C}_b \simeq \mathscr{V}_{\mathfrak{X}_b}^{\leqslant n} \otimes \omega_{\mathcal{C}_b}(kS_{\mathfrak{X}_b}). \tag{14.10}$$

（如果读者知道如何定义不一定是（有限秩）向量丛的层的限制，就可以很容易地验证，去掉上标 $\leqslant n$ 并将 k 替换为 $\star$ 后，上述等式仍然成立。）

14.4

由于 $\eta\in\mathscr{O}(U)$ 在每个纤维上都是单叶的，我们显然得到一个等价

$$(\eta,\pi)_*:\mathscr{O}_U\xrightarrow{\simeq}\mathscr{O}_{(\eta,\pi)(U)} \tag{14.11}$$

定义　通过使用 $(\eta,\pi)^{-1}$ 拉回函数。我们定义 **推前**[7]

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}_\varrho(\eta):\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}|_U\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_{(\eta,\pi)(U)}\\&\mathcal{V}_\varrho(\eta)=(\mathbf{1}_{\mathbb{V}}\otimes(\eta,\pi)_*)\mathcal{U}_\varrho(\eta).\end{aligned} \tag{14.12}$$

其在每个纤维上的限制 $U_b=U\cap\mathcal{C}_b$ 等于推前 $\mathcal{V}_\varrho(\eta|_{\mathcal{C}_b}):\mathscr{V}_{U_b}\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_{\eta(U_b)}$由（12.2）定义。

我们有一个等价 $(\eta,\pi)_*=((\eta,\pi)^{-1})^*:\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}|_U\to\omega_{(\eta,\pi)(U)/\pi(U)}$。注意，$(\eta,\pi)(U)\subset\mathbb{C}\times\mathcal{B}$。$\omega_{(\eta,\pi)(U)/\pi(U)}$ 是与族 $(\eta,\pi)(U)\to\pi(U)$ 相关的相对对偶化层，它继承自投影 $\mathbb{C}\times\mathcal{B}\to\mathcal{B}$。若令 z 为 $\mathbb{C}$ 的标准坐标，则对于每个截面 $fd\eta\in\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}|_U$，其中 $f\in\mathscr{O}_{\mathcal{C}}$，

$$(\eta,\pi)_*fd\eta=\big(f\circ(\eta,\pi)^{-1}\big)dz.$$

我们也用 $\mathcal{V}_\varrho(\eta)$ 表示

$$\mathcal{V}_\varrho(\eta)\equiv\mathcal{V}_\varrho(\eta)\otimes(\eta,\pi)_*:\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}\big|_U\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\omega_{(\eta,\pi)(U)/\pi(U)}. \tag{14.13}$$

14.5

为了定义余不变量层和共形块，我们先考虑如下情形：选取局部坐标 $\eta_1,\dots,\eta_N$，它们定义在 $\varsigma_1,\dots,\varsigma_N$ 处。

对于每个开集 $V\subset\mathcal{B}$，令

$$\mathcal{C}_V=\pi^{-1}(V), \tag{14.14}$$

并且我们有一个 $\mathscr{O}(V)$-线性作用 $H^0(\mathcal{C}_V,\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$ 于 $\mathbb{W}_\bullet\otimes\mathscr{O}(V)$，其在每个纤维上的限制都是由定义 $H^0(\mathcal{C}_b,\mathscr{V}_{\mathfrak{X}_b}\otimes\omega_{\mathcal{C}_b}(\star S_{\mathfrak{X}_b}))$ 在 $\mathbb{W}_\bullet$ 中给出的留数作用，见定义 11.16。因此，此作用与 V在开子集上的限制相容。

下面详细描述此作用。设 $\sigma\in H^0(U_i\cap\mathcal{C}_V,\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$。注意，由 (14.13) 可得（注意 $\pi(U_i)=\mathcal{B}$）

$$\mathcal{V}_\varrho(\eta_i):\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})\big|_{U_i}\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\omega_{(\eta_i,\pi)(U_i)/\mathcal{B}}(\star\{0\}\times\mathcal{B}) \tag{14.15}$$

由于 $\varsigma_i(\mathcal{B})$ 是 $\varsigma_\bullet(\mathcal{B})$ 中唯一与 U_i相交（且位于其中）的对象，并且 $(\eta_i,\ \pi)$ 将 $\varsigma_i(\mathcal{B})$映射到 $\{0\}\times\mathcal{B}$（参见（13.3））。于是，对每个 $w_i\in\mathbb{W}_i\otimes\mathscr{O}(V)$（我们将 $w_i=w_i(b)$ 视为 $\mathbb{W}_i$上取值于 V的全纯函数），我们定义 **留数作用**

$$\sigma\cdot w_i=\mathrm{Res}_{z=0}\,Y\big(\mathcal{V}_\varrho(\eta_i)\sigma,z\big)w_i. \tag{14.16}$$

[7]更好的记法是 $\mathcal{V}_\varrho(\eta,\pi)$。不过，为了简化记法，我们使用 $\mathcal{V}_\varrho(\eta)$。

更确切地说，写出

$$\mathcal{V}_{\varrho}(\eta_i)\sigma = v(z,b)dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n(b) z^n dz \tag{14.17}$$

其中 $v = v(z,\ b)$ 是定义在 $(\eta_i,\ \pi)(U_i \cap \mathcal{C}_V)$ 上的 $\mathbb{V}$ 值全纯函数（$\pi)(U_i \cap \mathcal{C}_V)$ 是 $\{0\}\times V$ 在 $\mathbb{C}\times V$ 中的一个邻域），$v_n = v_n(b)$ 属于 $\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}(V)$，并且当 n 充分负时，$v_n = 0$。（因此，若将 $U_i \cap \mathcal{C}_V$ 与其在 $(\eta_i,\ \pi)$ 下的像等同，并通过 $\mathcal{U}_{\varrho}(\eta_i)$ 将 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}|_{U_i\cap\mathcal{C}_V}}$ 与 $\mathbb{V}\otimes\mathscr{O}_{U_i\cap\mathcal{C}_V}$ 等同，则 σ 等于 vdz。）接下来

$$(\sigma\cdot w_i)(b) = \mathrm{Res}_{z=0}\, Y(v(z,b),z)w_i(b)dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Y\big(v_n(b)\big)_n w_i(b). \tag{14.18}$$

现在，$\mathbb{W}_\bullet\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}(V)$ 中的任意元素都是 $\mathbb{W}_\bullet$ 值全纯函数 $w_\bullet$ 的（$\mathbb{C}$-）线性组合，其中（对每个 $b\in V$）

$$w_\bullet(b) = w_1(b)\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}} w_N(b) \qquad \in \mathbb{W}_\bullet \tag{14.19}$$

并且每个 w_i 都是定义在 V 上的 $\mathbb{W}_i$ 值全纯函数。或者，

$$w_\bullet = w_1\otimes_{\mathscr{O}(V)}\cdots\otimes_{\mathscr{O}(V)} w_N \tag{14.20}$$

属于

$$(\mathbb{W}_1\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}(V))\otimes_{\mathscr{O}(V)}\cdots\otimes_{\mathscr{O}(V)}(\mathbb{W}_N\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}(V)) \simeq \mathbb{W}_\bullet\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}(V).$$

因此，表达式 $w_\bullet = w_1\otimes\cdots\otimes w_N$ 可以被明确地理解。任意 $\sigma\in H^0(\mathcal{C}_V,$ $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$ 在 $w_\bullet$ 上的**留数作用**由下式给出

$$\sigma\cdot w_\bullet = \sum_{i=1}^{N} w_1\otimes\cdots\otimes\sigma\cdot w_i\otimes\cdots\otimes w_N. \tag{14.21}$$

（理解这一作用只需 在 $w_\bullet$ 为常函数，即 $w_\bullet\in\mathbb{W}_\bullet$时即可。 ）

14.6

定义 $\mathcal{B}$上的一个无限秩向量丛：

$$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) = \mathbb{W}_\bullet\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_{\mathcal{B}}. \tag{14.22}$$

定义一个 $\mathscr{O}(V)$-模

$$\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(V) = H^0\big(\mathcal{C}_V, \mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})\big)\cdot H^0\big(V, \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)\big). \tag{14.23}$$

其中我们省略了 Span$_{\mathbb{C}}$。于是得到一个 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模预层，其在任意开集 $V\subset\mathcal{B}$ 上的截面空间为 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(V)$。这是 $\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$的一个子预层。

定义14.1. 该 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) = \frac{\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)}{\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)} \tag{14.24}$$

（通过将预层 $V\mapsto \frac{\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(V)}{\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(V)}$ 层化定义）及其对偶$\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，分别称为与 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{W}_\bullet$ 相关联的 **余不变量层** 和**共形块层**。$\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$ 的截面称为与 $\mathfrak{X}$**和** $\mathbb{W}_\bullet$相关联的**共形块**。

14.7

下面对 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 作出明确描述。以下结论显然：

注记 14.2。 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 在 V 上的截面都是满足以下条件的态射 $\phi\colon \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_V \to \mathscr{O}_V$：与 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_V$的任意截面求值时结果均为零；也就是说，对于所有 $s \in \mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(V_1)$，都有 $\phi(s) = 0$，其中 $V_1 \subset V$为开集。

注记 14.3。 一个态射 $\phi\colon \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_V = \mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_V \to \mathscr{O}_V$等价于一个线性映射$\Phi\colon \mathbb{W}_\bullet \to \mathscr{O}(V)$。事实上，给定 ϕ，我们将 Φ 定义为 $\Phi(w) = \phi(w) \in \mathscr{O}(V)$，其中每个$w \in \mathbb{W}_\bullet$都被视为常截面 $w \otimes 1 \in \mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(V)$。反过来，给定 Φ，我们定义 ϕ，将每个 $w \otimes f \in \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}(V_1)$（其中 $V_1 \subset V$为开集）映射到$f \cdot \Phi(w)|_{V_1}$。

因此，对于每个 $b \in V$，纤维映射 $\phi|_b\colon \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_b \simeq \mathbb{W}_\bullet \to \mathscr{O}_V|_b \simeq \mathbb{C}$ 由 $w \in \mathbb{W}_\bullet \simeq \mathbb{W}_\bullet \otimes 1 \mapsto \phi(w)(b)$ 给出，其中 $\phi(w)(b)$ 是 $\phi(w) \in \mathscr{O}(V)$ 在 b处的值。 □

14.8

现在我们可以将族的共形块与单个复黎曼曲面的共形块联系起来。为简单起见，我们假设 $V = \mathcal{B}$；否则，只需将 $\mathfrak{X}$ 限制到以底流形 V 为底的子族 $\mathfrak{X}_V$。

命题 14.4。 选择一个 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模态射 $\phi\colon \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) \to \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$。如果 $\mathcal{B}$ 是 *Stein*流形，那么 ϕ 在 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$ 上消失，当且仅当其到纤维 $\mathcal{C}_b$ 的限制 $\phi|_b$ 对每个 $b \in \mathcal{B}$都是一个共形块，即 $\phi|_b$ 在上消失。

$$\mathscr{J}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet) = H^0\big(\mathcal{C}_b, \mathscr{V}_{\mathcal{C}_b} \otimes \omega_{\mathcal{C}_b}(\star S_{\mathfrak{X}_b})\big) \cdot \mathbb{W}_\bullet \tag{14.25}$$

证明。 这源于这样一个事实：根据下一个命题，$\mathscr{J}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)$ 中的任意元素都是 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$ 中某个元素的限制。 □

命题 14.5。 设 V 是 $\mathcal{B}$的一个 *Stein* 开子集。那么，$H^0\big(\mathcal{C}_b, \mathscr{V}_{\mathcal{C}_b} \otimes \omega_{\mathcal{C}_b}(\star S_{\mathfrak{X}_b})\big)$ 中的每个元素，都是某个 $\sigma \in H^0\big(\mathcal{C}_V, \mathscr{V}_{\mathfrak{X}} \otimes \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})\big)$ 在纤维 $\mathcal{C}_b$上的限制。

在此命题中，我们不假设 $\mathfrak{X}$ 具有局部坐标 $\eta_\bullet$。要证明此命题，需要使用 Grauert基变换定理 [GR-b，第 III.4 节。2]详见 [Gui，第2节。5] 其中给出了详细说明。一般而言，若 $\mathscr{E}$ 是 $\mathcal{C}$上的一个向量丛，那么对于任意相对紧 Stein 开子集 $V \subset \mathcal{B}$，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得对于所有$k \geqslant k_0$，$\mathscr{E}(kS_{\mathfrak{X}}))$ 中的每个元素，$\sigma \in H^0(\mathcal{C}_V$都是某个 $\mathscr{E}(kS_{\mathfrak{X}})|_V)$在纤维 $\mathcal{C}_b$上的限制。

由命题 14.4立即可得：

定理 14.6. 取一个 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模态射 $\phi\colon \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) \to \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$。那么，$\phi$ 是共形块，当且仅当对于每个 $b \in \mathcal{B}$，$\phi|_b$ 都是共形块。如果 $\mathcal{B}$ 是 *Stein*，那么这两个条件还等价于 ϕ 在 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$上消失。

我们给出定理 14.6 的一个应用。我们指出，定理 14.6 和推论 14.7 成立并不需要假设 $\mathfrak{X}$ 具有局部坐标（在此一般情形下定义共形块层之后，参见小节 14.10），因为命题 14.5 也不需要此假设。

推论 14.7。 假设 $\mathcal{B}$ 是连通的。设 $\phi: \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) \to \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$ 是一个 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模态射。假设 $\mathcal{B}$ 包含一个非空开子集 V，使得其限制 $\phi|_V$ 是与 $\mathfrak{X}_V$ 相关的共形块（即 $\phi|_V \in H^0(V, \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet))$）。那么 ϕ 是与 $\mathfrak{X}$相关的共形块。

证明。首先，假设 $\mathcal{B}$ 是 Stein。于是，ϕ 与$H^0(\mathcal{B}$中的任意元素 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet))$（它是 $\mathscr{O}(\mathcal{B})$中的一个元素）在 V上为零，因此根据复分析，它在$\mathcal{B}$ 上为零。所以，根据推论14.7，ϕ 是一个共形块。

现在考虑一般情形，令 $\mathcal{B}_0$ 为 $\mathcal{B}$ 的子集（显然是开集），由所有满足以下条件的 $b \in \mathcal{B}$ 组成：ϕ 在 b的某个邻域上限制为一个共形块。若 $b \in \mathcal{B}\backslash\mathcal{B}_0$，则每个 b 的连通 Stein 邻域 W 都与 $\mathcal{B}_0$不相交。否则，由于$\phi|_{W\cap\mathcal{B}_0}$ 是一个共形块，根据第一段，$\phi|_{\mathcal{B}_0}$ 也是一个共形块，这意味着 $b \in \mathcal{B}_0$，从而导致矛盾。因此，$\mathcal{B}_0$ 是$\mathcal{B}$的一个非空开闭子集，必定等于 $\mathcal{B}$。 □

14.9

与共形块层相比，使用余不变量层有两个优点。首先，相比于研究层与共形块空间，研究 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 的纤维与余不变量空间之间的关系更容易。其次，尽管我们最终关注的是 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$的局部自由性，但先研究 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$的局部自由性更容易。

对于每个 $b \in \mathcal{B}$，注意到

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b = \frac{\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b}{\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b}.$$

令 $\mathfrak{m}_b = \mathfrak{m}_{\mathcal{B},\,b} = \{g \in \mathscr{O}_{\mathcal{B},\,b}:\ g(b) = 0\}$。于是我们显然有一个等价

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)\big|_b = \frac{\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b}{\mathfrak{m}_b \cdot \mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b} \simeq \frac{\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b}{\mathfrak{m}_b \cdot \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b + \mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b}. \tag{14.26}$$

还要回忆

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet) = \frac{\mathbb{W}_\bullet}{\mathscr{J}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)}. \tag{14.27}$$

命题 14.8。线性映射

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b = \mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathcal{B},b} &\to \mathbb{W}_\bullet \\ w &\mapsto w(b) \end{aligned} \tag{14.28}$$

下降为一个向量空间同构

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)\big|_b \xrightarrow{\simeq} \mathscr{T}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet). \tag{14.29}$$

证明。映射（14.28）将 $\mathfrak{m}_b \cdot \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b = \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathfrak{m}_b$ 映至 0，并将 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b$ 映入$\mathscr{J}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)$（事实上，根据命题 14.5，该映射是满射）。因此，（14.28）诱导出线性映射（14.29），显然该映射是满射。若 $w(b) \in \mathscr{J}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)$，则由命题 14.5，$w(b)$ 等于 $s(b)$，其中$s \in \mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)_b$。因此 $w - s \in \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{B},\,b}$ 在 b处消失。因此显然 $w - s \in \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathfrak{m}_b$。所以（14.29）是单射。 □

14.10

现在我们不再假设 $\mathfrak{X}$ 的局部坐标已选定。我们将定义与 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{W}_\bullet$相关联的余不变量层和共形块。

令 $\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 为一个由以下条件确定的无限秩局部自由 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模。对于任意开子集 $V \subset \mathcal{B}$ 以及限制族的局部坐标 η_1，……， η_N

$$\mathfrak{X}_V = (\pi : \mathcal{C}_V = \pi^{-1}(V) \to V; \varsigma_1|_V, \ldots, \varsigma_N|_V) \tag{14.30}$$

分别定义在 $\varsigma_1(V)$，……， $\varsigma_N(V)$ 附近时，我们有一个平凡化

$$\mathcal{U}(\eta_\bullet) \equiv \mathcal{U}(\eta_1) \otimes \cdots \mathcal{U}(\eta_N) : \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_V \xrightarrow{\simeq} \mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_V \tag{14.31}$$

它与 $\eta_\bullet$ 和 $\mathfrak{X}_V$到 V的开子集上的限制相容，使得若 $\mu_\bullet$ 是另一组局部坐标，则

$$\mathcal{U}(\eta_\bullet)\mathcal{U}(\mu_\bullet)^{-1} : \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_V \xrightarrow{\simeq} \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_V$$

由过渡函数定义

$$\mathcal{U}(\eta_\bullet)\mathcal{U}(\mu_\bullet)^{-1} \equiv \mathcal{U}(\eta_\bullet|\mu_\bullet) = \mathcal{U}((\eta_1|\mu_1)) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}((\eta_N|\mu_N)). \tag{14.32}$$

这里，每个 $(\eta_i|\mu_i) : V \to \mathbb{G}$ 都是一个全纯变换族，使得对于每个$b \in V$， $(\eta_i|\mu_i)_b$ 将 $\mu_i|_{\mathcal{C}_b}$ 变为 $\eta_i|_{\mathcal{C}_b}$，即

$$\eta_i|_{\mathcal{C}_b} = (\eta_i|\mu_i)_b \circ \mu_i|_{\mathcal{C}_b}$$

在 $\mathcal{C}_b$中 $\varsigma_i(b)$ 的某个邻域上成立。因此我们有一个同构

$$\mathcal{U}((\eta_i|\mu_i)) : \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_V \xrightarrow{\simeq} \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_V.$$

将 $\mathcal{U}((\eta_i|\mu_i))$ 限制到 b 处的每个纤维上，显然就是$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)$ 的过渡函数（参见（12.9））。因此，我们有一个显然的等价

$$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)\big|_b \simeq \mathscr{W}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet). \tag{14.33}$$

我们将 $\sigma \in H^0(\mathcal{C}_V,\ \mathscr{V}_{\mathfrak{X}} \otimes \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$ 在 $\mathbf{w} = H^0(V,\ \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet))$ 上的（显然是 $\mathscr{O}(V)$-线性的）**留数作用** 定义为

$$\sigma \cdot \mathbf{w} = \mathcal{U}(\eta_\bullet) \cdot \sigma \cdot \mathcal{U}(\eta_\bullet)^{-1}\mathbf{w} \tag{14.34}$$

其中 σ 对 $\mathcal{U}(\eta_\bullet)^{-1}\mathbf{w}$ 的作用由 (14.16) 定义。限制到每个纤维上时，(14.34) 等价于 $H^0(\mathcal{C}_b,$ $\mathscr{V}_{\mathcal{C}_b} \otimes \omega_{\mathcal{C}_b}(\star S_{\mathfrak{X}_b}))$ 在 $\mathscr{W}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)$ 上的留数作用，其定义见 (12.6)。由于后者与坐标无关（参见命题 12.1），所以 (14.34) 也与坐标无关。

因此，利用留数作用，我们可以定义预层 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$、余不变元层 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$和共形块层 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，其方式与小节14.6中完全相同。

14.11

我们的下一个目标是在 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 和 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$上定义联络。我们从下面的一般定义开始:

定义 14.9. 设 $\mathscr{E}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模，其中 X 是一个具有全纯切线丛 Θ_X 的复流形。 $\mathscr{E}$ 上的一个**联络** ∇ 为每个开集 $U \subset X$ 赋予一个双线性映射

$$\nabla : \Theta_X(U) \times \mathscr{E}(U) \to \mathscr{E}(U), \qquad (\mathfrak{y}, s) \mapsto \nabla_{\mathfrak{y}} s$$

满足以下条件。

(a) 如果 V是 U 的开子集，则 $\nabla_{\mathfrak{y}|_V} s|_V = (\nabla_{\mathfrak{y}} s)|_V$。

(b) 如果 $f \in \mathscr{O}(U)$ 那么

$$\nabla_{f\mathfrak{y}} s = f \nabla_{\mathfrak{y}} s$$
$$\nabla_{\mathfrak{y}}(fs) = \mathfrak{y}(f)s + f\nabla_{\mathfrak{y}} s$$

如果选定了 $\mathscr{E}$上的联络 ∇，那么相应的对偶层$\mathscr{E}^\vee$ 上的**对偶联络** ∇ 定义为

$$\langle \nabla_{\mathfrak{y}} \varphi, s \rangle = \mathfrak{y}\langle \varphi, s \rangle - \langle \varphi, \nabla_{\mathfrak{y}} s \rangle \tag{14.36}$$

f或对于每个 $\varphi \in \mathscr{E}^\vee(U) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{E}_U,\ \mathscr{O}_U)$、每个 $\mathfrak{y} \in \Theta(U)$ 和每个 $s \in \mathscr{E}_U$。

注意 $\mathfrak{x}\langle \varphi,\quad s\rangle$ 是向量场 $\mathfrak{x}$ 对全纯函数 $\langle \varphi,\ s\rangle$ 的作用。 .

14.12

现在我们假设为 $\mathfrak{X}$ 选定了局部坐标 $\eta_\bullet$，并将其认作、】【

$$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) = \mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathcal{B}} \qquad \text{via } \mathcal{U}(\eta_\bullet).$$

我们假设 $\mathcal{B}$ 是一个 Stein流形。选取 $\mathfrak{y} \in \Theta_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$，以及一个提升 $\mathfrak{x} \in H^0(\mathcal{C},\ \Theta_{\mathcal{C}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$。（参见命题 13.10）。我们首先定义作用于**微分算子** $\nabla_{\mathfrak{y}}$ **上的**$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$。

假设采用小节 *13.10*中的设定。 那么，对每个开集 $V \in \mathcal{B}$， $\nabla_{\mathfrak{y}}$ 是作用于 $\mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(V)$ 上的线性算子，使得对每个 $w_i \in \mathbb{W}_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(V)$ 和 $w_\bullet = w_1 \otimes \cdots \otimes w_N$属于 $\mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(V)$（参见（14.19）或（14.20））,

$$\nabla_{\mathfrak{y}} w_\bullet = \sum_{j=1}^{m} g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j} w_\bullet - \sum_{i=1}^{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{i,n}(\tau_\bullet) w_1 \otimes \cdots \otimes L_{n-1} w_i \otimes \cdots \otimes w_N. \tag{14.37}$$

利用这个公式和（14.36），我们可以在 $\nabla_{\mathfrak{y}}$ 的对偶层上定义 $\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，即对每个$\nabla_{\mathfrak{y}}\phi$ -模态射 $\mathscr{O}_V$ $\phi : \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_V \to \mathscr{O}_V$ 定义 $\nabla_{\mathfrak{y}}\phi$。当 13.27 ）中的 w_1，...， w_N 是常截面时，这个定义显然与（

~警告：我们使用 L_0 而不是 L_0 来定义 $\nabla_{\mathfrak{y}}$。

注 14.10。 在第 13.10 小节中，我们假设 $\mathcal{B}$ 位于 $\mathbb{C}^m$内部。换言之，在使用（14.37）定义 $\nabla_{\mathfrak{y}}$ 时，我们固定了抽象复流形$\mathcal{B}$ 到 $\mathbb{C}^m$ 中的一个嵌入，并将其视为一个开子集。不过，很容易验证，这一定义与嵌入无关。因此，为了定义 $\nabla_{\mathfrak{y}}$，我们只假设 $\mathcal{B}$ 是 Stein 的，而不一定要求 $\mathcal{B}$ 能够嵌入到 $\mathbb{C}^m$中。

14.13

(14.37)可以用更紧凑的方式来表示。回想一下邻域 U_i，它是 $\varsigma_i(\mathcal{B})$ 的邻域，在该邻域上 η_i 有定义（参见第14.1小节）。定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}(\mathfrak{x}) &\in H^0\big(U_1 \cup \cdots \cup U_N, \mathscr{V}_{\mathfrak{X}} \otimes \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})\big)\\ \mathcal{V}_{\varrho}(\eta_i)\boldsymbol{\nu}(\mathfrak{x})|_{U_i} &= h_i(z, \tau_\bullet)\mathbf{c}dz.\end{aligned} \tag{14.38}$$

也就是说，在给定的平凡化下， $\boldsymbol{\nu}$ 消去 ∂_{τ_j}，并将 ∂_z 映到$\mathbf{c}dz$。（注意，$\mathbf{c} \in \mathbb{V}(2)$和 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant 2}/\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant 1} \simeq \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}^\circ}^{\otimes 2}$ ）于是很容易验证

$$\nabla_{\mathfrak{y}} w_\bullet = \sum_{j=1}^{m} g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j} w_\bullet - \boldsymbol{\nu}(\mathfrak{x}) \cdot w_\bullet. \tag{14.39}$$

其中， $\boldsymbol{\nu}(\mathfrak{x}) \cdot w_\bullet$ 是留数作用。

14.14

定理14.11。 $\nabla_{\mathfrak{y}}$ 保持 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(V)$ 对每个开集 $V \subset \mathcal{B}$均成立。因此 $\nabla_{\mathfrak{y}}$ 是作用在$\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 上的线性算子，并且（通过公式(14.36)）也是作用在 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}^*(\mathbb{W}_\bullet)$上的线性算子。

更精确地说，对于每个 $\sigma \in H^0(\mathcal{C}_V$、 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}} \otimes \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$ 以及$\mathbf{w} = H^0(V$、 $\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet))$，我们有

$$[\nabla_{\mathfrak{y}}, \sigma]\mathbf{w} = (\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma) \cdot \mathbf{w} \tag{14.40}$$

其中， $\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma \in H^0(\mathcal{C}_V, \mathscr{V}_{\mathfrak{X}} \otimes \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$ 是 σ 在 $\mathfrak{x}$下的李导数。

因此，当 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{C}^m$的 Stein 开子集时，我们可以通过选取 $\partial_{\tau_1}, \ldots, \partial_{\tau_m}$的提升，定义 $\nabla_{\tau_1}, \ldots, \nabla_{\tau_m}$，然后利用 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-线性将$\nabla$ 延拓为一个联络。

关于该定理的证明，请读者参阅 [Gui，第 3 节。6] 这里，我们将解释李导数的含义。

14.15

设 U， $W \subset \mathcal{C}$为开集，并设 $\varphi\colon U \to W$是从 U到 W的双全纯映射。我们假设 φ 保持纤维不变，即 $\varphi(U_{\pi(p)}) = W_{\pi\circ\varphi(p)}$ 对每个 $p \in U$都成立。（回顾一下我们的记号：对每个 $W_b = U \cap \mathcal{C}_b$， $W_b = W \cap \mathcal{C}_b$ ）。例如，如果 $U \subset \mathcal{C}\backslash S_{\mathfrak{X}}$ 是开集且相对紧的，那么对充分小的 ζ，$\exp\zeta_{\mathfrak{X}}$ 从 U 到其像保持纤维不变。（图示参见（13.20）。

推前

$$\mathcal{V}_\varrho(\varphi):\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}|_U\xrightarrow{\simeq}\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}|_W$$

定义为对每个 $\eta\in\mathscr{O}(W)$ 在纤维上单值，注意推前 $\mathcal{V}_\varrho(\eta):\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}|_W\xrightarrow{\simeq}\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_{(\eta,\pi)(W)}$ 由 (14.12) 定义，我们有

$$\mathcal{V}_\varrho(\eta)\mathcal{V}_\varrho(\varphi)=\mathcal{V}_\varrho(\eta\circ\varphi).\tag{14.41}$$

于是对每个 $b\in\mathcal{B}$，$\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$ 到 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}|_{U_b}\xrightarrow{\simeq}\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}|_{V_{\varphi(b)}}$ 的限制等价于推前 $\mathcal{V}_\varrho(\varphi):\mathscr{V}_{U_b}\xrightarrow{\simeq}\mathscr{V}_{V_{\varphi(b)}}$ 在第 12.5小节中定义。

将 $\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$ 与 $\varphi_*=(\varphi^{-1})^*$ 作张量积：$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}|_U\xrightarrow{\simeq}\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}|_W$ 将 $(f\circ\varphi)d(\eta\circ\varphi)$ 送到 $fd\eta$，其中 $f\in\mathscr{O}_W$，得到一个推前，我们也将其记为 $\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$:

$$\mathcal{V}_\varrho(\varphi)\equiv\mathcal{V}_\varrho(\varphi)\otimes\varphi_*:\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}\big|_U\xrightarrow{\simeq}\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}\big|_W.\tag{14.42}$$

我们可以按照定义 **12.8**中的相同方式定义李导数。设 $\mathfrak{x}$ 如第 13.10小节所述。假设 $U\subset\mathcal{C}\backslash S_{\mathfrak{X}}$ 是开且相对紧的，并且 $\sigma\in H^0(U,\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}})$。定义

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma\big|_U=\lim_{\zeta\to0}\frac{\mathcal{V}_\varrho(\exp_{\zeta\mathfrak{x}})^{-1}\big(\sigma\big|_{\exp_{\zeta\mathfrak{x}}(U)}\big)-\sigma\big|_U}{\zeta}\tag{14.43}$$

当然，如果我们能证明对所有相对紧的 U，极限都存在，那么对所有开集 $U\subset\mathcal{C}\backslash S_{\mathfrak{X}}$，$\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma$ 都存在。

下述命题可以用与推论 12.10 相同的方法证明。（详细证明也可参见 [Gui，第2节。6] 公式（14.44）是证明定理 14.11 所必需的。

命题14.12。 设 $\eta\in\mathscr{O}(U)$ 在纤维上单值。取 $u\in H^0(U、\ \mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_{\mathcal{C}})$ 使得

$$u\cdot d\eta=\mathcal{U}_\varrho(\eta)\sigma\qquad\in H^0(U,\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}).$$

取 $h\in\mathscr{O}(U)$ 使得若 U经由 $(\eta、\ \pi)$与 $(\eta、\ \pi)(U)\subset\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m$相识别，则

$$\mathfrak{x}|_U=h\partial_z+\sum_{j=1}^m g_j(\tau_\bullet)\partial_{\tau_j}.$$

那么 $\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma$ 作为 $H^0(U、\ \mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}})$, 的一个元素存在，并且

$$\mathcal{U}_\varrho(\eta)\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma=h\partial_\eta u\cdot d\eta+\sum_{j=1}^m g_j\partial_{\tau_j}u\cdot d\eta-\sum_{k\geqslant1}\frac{1}{k!}\partial_\eta^k h\cdot L_{k-1}u\cdot d\eta+\partial_\eta h\cdot u\cdot d\eta.\tag{14.44}$$

注记14.13. 若令 $U=U_i\backslash S_{\mathfrak{X}}=U_i\backslash\varsigma_i(\mathcal{B})$，选取 $\sigma\in H^0(\mathcal{C}_V,\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$,，并令 η 为局部坐标 η_i，那么命题 14.12 中的 u 在 $S_{\mathfrak{X}}$ 处有有限个极点，即 $u\in H^0(U_i,\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$。命题 14.12 中的 h 应当是第13.10小节中的 h_i，它在 $S_{\mathfrak{X}}$ 处有有限个极点。因此，由 (14.44)，李导数 $\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma$ 作为定义在 $\mathcal{C}_V\backslash S_{\mathfrak{X}}$ 上的 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$ 截面，在 $S_{\mathfrak{X}}$ 处有有限个极点。所以，正如定理 14.11 末尾所述，$\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}\sigma\in H^0(\mathcal{C}_V,\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$,。

14.16

回想一下，我们假设 $\mathcal{B}$ 是 Stein（但不一定是 $\mathbb{C}^m$ 内的开集），并且给定了 $\eta_\bullet$ 局部坐标 $\mathfrak{X}$。正如我们所见， $\nabla_\mathfrak{y}$ 的定义不仅取决于 $\eta_\bullet$，也取决于 $\mathfrak{y} \in \Theta_\mathcal{B}(\mathcal{B})$ 的提升 $\mathfrak{x}$。

命题 14.14。令 $\nabla_\mathfrak{y}$ 和 $\nabla'_\mathfrak{y}$ 由 $\eta_\bullet$ 定义，并令 $\mathfrak{x}$、$\mathfrak{x}' \in H^0(\mathcal{C}, \Theta_\mathcal{C}(\star S_\mathfrak{X}))$ 为 $\mathfrak{y}$的两个提升。则存在仅取决于 $\mathfrak{X}$、局部坐标 $\eta_\bullet$、$\mathfrak{x}$、$\mathfrak{x}'$以及 $\mathbb{V}$的中心荷 c的 $f \in \mathscr{O}(\mathcal{B})$，使得

$$\nabla'_\mathfrak{y} = \nabla_\mathfrak{y} + f\mathbf{1} \qquad on\ \mathscr{T}_\mathfrak{X}(\mathbb{W}_\bullet). \tag{14.45}$$

参见 [Gui] 的第 3.6 节末尾（以及第 4.2 节）中关于 f的公式。

在下一小节中，我们将讨论一种重要情形：命题 f中的射影项 14.14 等于0。

命题 14.15 (射影平坦性)。假设 $\mathfrak{y}_1$、$\mathfrak{y}_2 \in \Theta_\mathcal{B}(\mathcal{B})$、$\nabla_{\mathfrak{y}_1}$ 和 $\nabla_{\mathfrak{y}_2}$ 分别利用一组局部坐标 $\eta_\bullet$ 以及 $\mathfrak{y}_1$、$\mathfrak{y}_2$ 的提升 $\mathfrak{x}_1$、$\mathfrak{x}_2$ 定义。则存在仅取决于 $\mathfrak{X}$、$\eta_\bullet$、$\mathfrak{x}_1$、$\mathfrak{x}_2$和 c的$f \in \mathscr{O}(\mathcal{B})$，使得曲率

$$[\nabla_{\mathfrak{y}_1}, \nabla_{\mathfrak{y}_2}] - \nabla_{[\mathfrak{y}_1,\mathfrak{y}_2]} = f\mathbf{1} \qquad on\ \mathscr{T}_\mathfrak{X}(\mathbb{W}_\bullet).$$

~**命题 14.16.** 假设在每个 $\mathbb{W}_i$, $L_0 - L_0$ 上都是常数（例如，当 $\mathbb{W}_i$不可约时）。再假设 $\nabla_\mathfrak{y}, \nabla'_\mathfrak{y}$ 由提升 $\mathfrak{x}$ 和两组局部坐标$\eta_\bullet, \eta'_\bullet$定义。那么存在仅取决于 $\mathfrak{X}$, $\eta_\bullet$ 以及 $\eta'_\bullet$, $\mathfrak{x}$, c和 $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$的 $f \in \mathscr{O}(\mathcal{B})$，使得

$$\nabla'_\mathfrak{y} = \nabla_\mathfrak{y} + f\mathbf{1} \qquad on\ \mathscr{T}_\mathfrak{X}(\mathbb{W}_\bullet). \tag{14.46}$$

显然，在 $\mathscr{T}^*_\mathfrak{X}(\mathbb{W}_\bullet)$上也有类似的结果。

关于这两个命题的详细内容，请读者参阅 [Gui] 的第 5.1 和 5.2 节。

14.17

定义14.17. 设 C 是一个黎曼曲面，且 $(U_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 是一个图卡，即， $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$是 C 的一个开覆盖，且 $\eta_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$ 是单叶的。若对于每个 $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$，函数 $\eta_\alpha \circ \eta_\beta^{-1}$ 在 $\eta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}$ 上是一个莫比乌斯变换 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$，则称 $(U_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 为一个**射影图卡**。

定义14.18。对于族 $\mathfrak{X}$，令 $(U_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 其中 $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个开覆盖，且每个 $\eta_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$ 都是单叶的。若 $(U_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 在每个纤维 $\mathcal{C}_b$ 上的限制都是射影图卡，则称其为 $\mathfrak{X}$ 的一个**射影图卡**。极大射影图卡称为**射影结构**。

例14.19。$\mathbb{P}^1$ 具有一个显然的射影结构，由所有 M¨obius 变换组成。它是包含标准坐标 ζ 的 $\mathbb{C}$ 的唯一射影结构。事实上，它是 $\mathbb{P}^1$ [FB04，8.2。12] 的唯一射影结构。

定理 14.20。 对于任意 $\mathfrak{X}$ 个 N标记紧黎曼曲面组成的族，如果 $\mathcal{B}$ 是 *Stein*，则 $\mathfrak{X}$具有射影结构。

该定理归功于 [Hub80]。另请参见 [Gui，第 4 节。1]或 [Gui，第 B 节]。根据该定理，对于任意 N标记点族 $\mathfrak{X}$，通过缩小底流形 $\mathcal{B}$，我们可以找到 $\eta_\bullet$ 属于 $\mathfrak{X}$ 的射影结构的局部坐标 $\mathfrak{X}$。

命题 14.21。 假设 $(U_1、\ \eta_1)、\ \ldots、\ (U_N、\ \eta_N)$ 属于 $\mathfrak{X}$的射影结构。那么，由 $\eta_\bullet$ 定义的 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 上的算子 $\nabla_{\mathfrak{y}}$ 与 $\mathfrak{y}$的提升 $\mathfrak{x}$ 无关。

注记 14.22。该命题的粗略理由如下：设 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{x}'$ 是 $\mathfrak{y}$的两个提升。那么， $d\pi$ 将 $\mathfrak{z}=\mathfrak{x}-\mathfrak{x}'$ 映为 0。这意味着 $\mathfrak{z}\in H^0(\mathcal{C}、\ \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$。鉴于 (14.39)，我们需要证明 $\nu(\mathfrak{z})=\nu(\mathfrak{x})-\nu(\mathfrak{x}')$ 的留数作用在 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$上为 0，或者等价地，对每个 $w_\bullet\in\mathbb{W}_\bullet$，都有 $\nu(\mathfrak{z})w_\bullet\in\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$。映射 $\mathfrak{z}\mapsto\nu(\mathfrak{z})$将 $U_1\cup\cdots\cup U_N$上的 $\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})$的一个截面映到 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant 2}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})$的一个截面，其平凡化由 $\mathfrak{c}dz$描述。在局部且采用合适的平凡化时，该映射将 $h(z、\ \tau_\bullet)\partial_z$ 映到 $h(z、\ \tau_\bullet)\mathfrak{c}dz$。由于 $\mathfrak{c}$ 的权为 2， $\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$ 中 ∂_z 的坐标变换公式模去 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant 1}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})$ 的一个截面后，等于 $\mathfrak{c}$ dz 的坐标变换公式（参见第 12.7 小节）。截面的表达式由 $L_2\mathfrak{c}=\frac{c}{2}\mathbf{1}$决定。

关键点来了：由于所有 $(U_i,\ \eta_i)$ 都包含在一个射影结构$(U_\alpha,\ \eta_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$中，并且在 M¨obius 变换的坐标变换公式中只涉及 $L_0,\ L_{\pm1}$ 而不涉及 L_2，因此，$\mathfrak{c}dz$ 的坐标变换公式与∂_z 的坐标变换公式相同。因此，由于 $\mathfrak{z}$ 是 $\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})$, $\nu(\mathfrak{z})$ 的整体截面，因此可以将其扩展为 $\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant 2}\otimes\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\star S_{\mathfrak{X}})$的整体截面。所以 $\nu(\mathfrak{z})w_\bullet\in\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$。 □

由于命题 14.21，若 $\mathcal{B}$ 是 Stein，且 $\eta_\bullet$ 属于 $\mathfrak{X}$的一个射影结构，则我们可以在 ∇ 上定义一个联络 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，从而在 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}^*(\mathbb{W}_\bullet)$ 上定义一个联络，使得对每个 $\mathfrak{y}\in\Theta_{\mathcal{B}}$，$\nabla_{\mathfrak{y}}$ 都是使用 14.39 定义的，所用的提升为 $\mathfrak{x}$，其中 $\mathfrak{y}$。

例 14.23. 对于每个 $\tau\in\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z>0\}$，由 $\mathbb{C}$ 定义的环面 $\mathbb{T}_\tau$，模去秩为 2 的格 $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$，具有标准射影结构：即从 $\mathbb{C}$的标准射影结构继承而来的结构。该射影结构是**模不变的**：令$g\in\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{Z})$ 为$g(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$，其中 $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$ 且 $ad-bc=1$。那么双全纯映射

$$\mathbb{T}_\tau\to\mathbb{T}_{g(\tau)},\qquad z\mapsto\frac{z}{c\tau+d}$$

将 $\mathbb{T}_\tau$的标准射影结构映到 $\mathbb{T}_{g(\tau)}$的标准射影结构 .

因此，对于与一族带有 N 个标记点的环面相关联的共形块层，由该模不变射影结构中的局部坐标所定义的联络即为标准联络。 □

15 余不变量层与共形块层的局部自由性

15.1

与第 14.1 小节中一样，我们将可容许的 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}_1,\ldots,\mathbb{W}_N$赋给标记点 $\varsigma_1,\ldots,\varsigma_N$（属于） $\mathfrak{X}=(\pi:\ \mathcal{C}\to\mathcal{B};\ \varsigma_\bullet)$。我们不假设 $\mathcal{B}$可以嵌入为一个

$\mathbb{C}^m$ 的开子集，或者已经选定了局部坐标。

定义 15.1。 如果 $\mathbb{V}$ 是 C_2**-余有限的**，则称之为 $\mathbb{V}/C_2(\mathbb{V})$ 是有限维的，其中$C_2(\mathbb{V}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{Y(u)_{-2}v\colon\ u,\ v \in \mathbb{V}\}$。

C_2-余有限条件由 Zhu [Zhu96] 在研究亏格 1共形块时引入。

定义 15.2。 如果弱 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}$ 由子集 $\mathfrak{S}$ **生成**，则称之为 $\mathbb{V}$-不变子空间 $\mathbb{W}$ 中包含 $\mathfrak{S}$ 的最小者为 $\mathbb{W}$。如果 $\mathbb{W}$ **有限生成**，则称之为由有限多个向量生成。当 $\mathbb{W}$ 是可容许的，这显然等价于说 $\mathbb{W}$ 由有限多个齐次向量生成。

注 15.3。 注意，在 $\mathfrak{S} \subset \mathbb{V}$ 的情况下， $\mathfrak{S}$ 生成真空模 $\mathbb{V}$ 与 $\mathfrak{S}$ 生成顶点算子代数 $\mathbb{V}$ (参见定义 5.6) 并非一回事。例如，真空向量**1**生成 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{V}$，但不生成顶点算子代数 $\mathbb{V}$。

以下重要结果归功于 [Miy04，引理 2。4]。此结果的一些较弱版本归功于 [GN03、Buhl 02]。

定理 15.4。假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限的。设 $E \subset \mathbb{V}$ 为一个有限子集，使得 $\mathbb{V}$ =张成 $(E) + C_2(\mathbb{V})$。若 $\mathbb{W}$ 是由有限个向量 $\mathfrak{S}$ 生成的弱 $\mathbb{V}$-模，则 $\mathbb{W}$ 由以下形式的向量张成

$$Y(v_k)_{-n_k} \cdots Y(v_1)_{-n_1} w \tag{15.1}$$

其中 $k \in \mathbb{N}$、 $w \in \mathfrak{S}$、 v_1、……、 $v_k \in E$ 以及 n_1、……、 $n_k \in \mathbb{Z}$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$。

练习 15.5。利用定理 15.4 证明：若 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限的，则每个有限生成的可容许 $\mathbb{V}$-模都是有限可容许的。

15.2

假设 15.6。本节中，我们假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限的，且 $\mathbb{W}_1$、……、 $\mathbb{W}_N$ 是有限生成的（有限）可容许模。

在我们的笔记中，我们不直接使用定理 15.4 。相反，我们使用定理 15.4 的以下推论。参见 [Gui20，第 7] 节，或 [Gui，第 3 节。7] 以了解证明。

定理 15.7。 对于每个 *Stein* 开子集 $V \subset \mathcal{B}$， $\mathscr{O}(V)$-模

$$\frac{\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(V)}{\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(V)} \tag{15.2}$$

由有限多个元素生成。

推论 15.8。 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 是一个有限型 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模。

证明。 不失一般性，假设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{C}^m$的 Stein 开子集。则$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) = \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$ 由常截面生成，即 $\mathbb{W}_\bullet \simeq \mathbb{W}_\bullet \otimes 1$的元素。因此 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 由 $\mathbb{W}_\bullet$生成。选取 $w_1, \dots,$ $w_n \in \mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$ 生成 $\mathscr{O}(\mathcal{B})$-模 (15.2)（令 $V = \mathcal{B}$）。因此， $\mathbb{W}_\bullet$ 的每个元素都是商 (中的一个 w_1-线性组合，系数为$w_1, \dots, w_N$ （15.2）。因此 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 由 $w_1, \dots, w_N$生成。 □

根据有限型层的基本性质（参见定理 A.22），每个纤维 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_b$（它与 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet) \simeq \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)$ 等价，见命题 14.8）都是有限维的；以下秩函数$\mathbf{R}: \mathcal{B} \to \mathbb{N}$,

$$\mathbf{R}(b) = \dim \mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_b = \dim \mathscr{T}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet) = \dim \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet) \tag{15.3}$$

是上半连续的；如果$\mathbf{R}$ 也是下半连续的，因而是局部常值的，那么 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 便是局部自由的，其对偶层 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$也如此。于是我们将得到自然等价 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_b \simeq \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)$。也就是说，如果我们能够证明$\mathbf{R}$ 是局部常值的，那么所有纤维的共形块空间 $\mathfrak{X}_b$ 构成 $\mathfrak{X}$ 上的一个向量丛 $\mathcal{B}$。

15.3

定理 15.9。 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，因此 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 是局部自由的 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模。特别地，由**秩函数** 定义的(15.3) 是局部常值的。

如上所述，为了证明定理 15.9，只需证明$\mathbf{R}$ 是局部常值。假设我们可以证明，对于任意一维复子流形 $|_{\mathcal{B}_0}$， $\mathcal{B}_0$ 的 $\mathcal{B}$ 双全纯于一个开圆盘，$\mathbf{R}|_{\mathcal{B}_0}$ 下半连续；那么，由于它也上半连续，$\mathbf{R}$ 便是常值的

因此，我们只需假设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{C}$ 中包含 0 的单连通开子集，且 $\mathfrak{X}$ 有一组局部坐标 $\eta_\bullet$。那么，$\mathcal{B} = \mathbb{C}$ 或 $\mathcal{B}$ 不是闭的。因此，由于任意连通非紧黎曼曲面都是 Stein， $\mathcal{B}$ 是 Stein。将

$$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) = \mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathcal{B}} \qquad \text{via } \mathcal{U}(\eta_\bullet).$$

只需证明：

引理 15.10。 $\mathbf{R}$ 在0处下半连续。

15.4

令 τ 为 $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$的标准坐标。根据第 14节，我们可以在 ∇_{∂_τ} 上定义一个微分算子 $\mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$，它根据定理 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$ 保持。我们将利用这一事实和定理 15.10证明引理 15.7。

我们固定一个元素 $\phi_0 \in \mathscr{W}_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet)$，即一个定义在 $\mathbb{W}_\bullet$ 上且在 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet)$上消失的线性泛函。下面我们通过构造一个共形块 $\phi_\tau \in \mathscr{W}_{\mathfrak{X}_\tau}(\mathbb{W}_\bullet)$ 来证明引理15.10： 对每个 $\tau \in \mathcal{B}$，该共形块都满足映射 $\phi_0 \mapsto \phi_\tau$ 是线性且单射的。

约定 15.11. 令 $\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k}$ 为由满足 $\widetilde{\mathrm{wt}}(w_1) + \cdots + \widetilde{\mathrm{wt}}(w_N) \leqslant k$ 的齐次 $w_1 \otimes \cdots \otimes w_N$ 张成的 $\mathbb{W}_\bullet$ 子空间。注意，由于每个 $\mathbb{W}_i$ 都是有限可容许的， $\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k}$ 是有限维的。

鉴于（14.37），对于每个 $w_\bullet \in \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$，我们可以写出

$$\nabla_{\partial_\tau} w_\bullet = \partial_\tau w_\bullet + A(\tau) w_\bullet \tag{15.4}$$

其中

$$A(\tau) w_\bullet = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{i,k}(\tau) w_1 \cdots \otimes L_{k-1} w_i \otimes \cdots \otimes w_N \tag{15.5}$$

我们取幂级数展开

$$A(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \tau^n$$

其中 $A_n \in \mathsf{End}(\mathbb{W}_\bullet)$由下式给出

$$A_n = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{i,k,n} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{W}_1} \otimes \cdots \otimes L_{k-1}|_{\mathbb{W}_k} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{W}_N}$$

其中 $h_{i,\ k,\ n} \in \mathbb{C}$由 $h_{i,\ k}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_{i,\ k,\ n}\tau^n$确定，并且对所有 i，n都为零，而 $k \leqslant K$对某个 $K \in \mathbb{Z}$成立。因此 $A(\tau) \in \mathsf{End}(\mathbb{W}_\bullet)[[\tau]]$。

定义 15.12。定义一个线性映射

$$\phi : \mathbb{W}_\bullet \to \mathbb{C}[[\tau]], \qquad w \mapsto \phi_\tau(w)$$

使得对每个 $w \in \mathbb{W}_\bullet$，$\phi_\tau(w)$ 由形式微分方程确定

$$\partial_\tau \phi_\tau(w) = \phi_\tau(A(\tau) w) \tag{15.6}$$

其初始值 $\phi_\tau|_{\tau=0}$ 是在开始时选定的共形块 ϕ_0。

更准确地说，如果我们写作 $\phi_\tau(w) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(w)\tau^n$，其中每个 $\phi_n\colon \mathbb{W}_\bullet \to \mathbb{C}$都是线性的，而 ϕ_0 只是先前选定的共形块，那么

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\phi_n(w)\tau^{n-1} = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \phi_n(A_m w)\tau^{m+n}.$$

因此，对于每个 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$n\phi_n = \sum_{l=0}^{n-1} \phi_l \circ A_{n-l-1}. \tag{15.7}$$

这将归纳地确定所有 ϕ_n。我们的目标是证明 $\phi_\tau(w)$ 是 $\mathcal{B}$ 上某个解析函数的级数展开。

15.5

根据 $\mathbb{C}[[\tau]]$-线性，我们可以将 ϕ 扩展为从 $\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathbb{C}[[\tau]]$ 到 $\mathbb{C}[[\tau]]$的线性映射。（注意，(15.6) 的右端按这种方式理解。）于是，通过取幂级数展开，$\mathbb{W} \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$ 是 $\mathscr{O}(\mathcal{B})$-模 $\mathbb{W}_\bullet \otimes [[\tau]]$ 的一个子模。我们关注其限制

$$\phi : \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B}) \to \mathbb{C}[[\tau]], \qquad w \mapsto \phi_\tau(w).$$

显然，它满足 微分方程 $\partial_\tau \phi_\tau(w) = \phi_\tau(\partial_\tau w + A(\tau)w)$，即（参见（15.4 ））

$$\partial_\tau \phi_\tau(w) = \phi_\tau(\nabla_{\partial_\tau} w). \tag{15.8}$$

引理 15.13。 ϕ_τ 在 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$上消失。

证明。 任取 $w \in \mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$，根据幂级数展开，它是$\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathbb{C}[[\tau]]$的一个元素。由（15.8），$\phi_\tau(w)$ 的级数展开为

$$\phi_\tau(w) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\tau^n}{n!} \partial_\tau^n \phi_\tau(w)\big|_{\tau=0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\tau^n}{n!} \phi_\tau(\nabla_{\partial_\tau}^n w)\big|_{\tau=0}$$

其中 $\phi_\tau(\nabla_{\partial_\tau}^n w)\big|_{\tau=0}$表示级数 $\phi_\tau(\nabla_{\partial_\tau}^n w) \in \mathbb{C}[[\tau]]$的常数项。由定理14.11， $s_n = \nabla_{\partial_\tau}^n w$ 属于 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$。特别地， $s_n(\tau)|_{\tau=0} \in \mathscr{J}_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet)$。显然$\phi_\tau(s_n)|_{\tau=0} = \phi_0(s_n(0))$，其等于 0，因为 ϕ_0 是与.....相关的共形块 $\mathfrak{X}_0$。引理得证。 □

15.6

为了证明 ϕ_τ 是解析的，我们需要用到一个关于微分方程的基本事实：

引理 15.14。 设 W是一个有限维向量空间。假设 $f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \tau^n \in W[[\tau]]$满足一个形式微分方程

$$\partial_\tau f(\tau) = A(\tau) f(\tau) \tag{15.9}$$

对于某个 $A \in \mathrm{End}(W) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(\mathcal{B})$，那么 $f(\tau)$ 是某个 $W \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$ 中元素的幂级数展开，我们也将其记作 $f(\tau)$。

证明。 显然，方程（15.9）的任意形式解 $f(\tau)$（15.9）都由其常数项 $f_0 \in W$唯一确定。（参见方程（15.7）的论证。）根据微分方程的基本理论（例如 [Kna，定理 B。1]），方程（15.9）在 $W \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$ 中必有一个初值为 f_0的解。因此，这个解必定等于 f，因为它们的常数项相等。 □

引理 15.15。 ϕ 是一个从 $\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$ 到 $\mathscr{O}(\mathcal{B})$的 $\mathscr{O}(\mathcal{B})$-模态射。因此，它自动也是一个 $\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{B}} \to \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$的 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模态射。

证明. 由 $\mathscr{O}(\mathcal{B})$-线性性，只需证明 ϕ 将每个常截面 $w \in \mathbb{W}_\bullet$ 发送到$\phi_\tau(w) \in \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$。

根据定理15.7，我们可以找到有限多个元素 $s_1, s_2, \cdots \in \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$ 生成$\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$ 模 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$。我们固定 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $s_1, s_2, \cdots \in \mathbb{W}_\bullet^{\leq k_0} \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$。考虑

对所有 $k \geqslant k_0$，将 ϕ 限制到 $\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k} \to \mathbb{C}[[\tau]]$，记作 $\phi^{\leqslant k}$。回想一下，$\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k}$是有限维的。因此，$\phi^{\leqslant k}$ 是 $(\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k})^* \otimes \mathbb{C}[[\tau]]$的一个元素。

设 $\{e_j\}_{j\in J}$是 $\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k}$的一组基。由 (15.6) 或 (15.8)，$\partial_\tau \phi_\tau(e_j) = \phi_\tau(\nabla_{\partial_\tau} e_j)$ 其中 $\nabla_{\partial_\tau} e_j \in \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$。由于 $\nabla_{\partial_\tau} e_j$ 是 $\mathscr{O}(\mathcal{B})$-线性组合 s_1、s_2、..... 模 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$，我们可以找到 $\Omega_{i,j}(\tau) \in \mathscr{O}(\mathcal{B})$，对所有 i、$j \in J$，使得

$$\nabla_{\partial_\tau} e_i = \sum_{j\in J} \Omega_{i,j}(\tau) e_j \qquad \mathrm{mod}\ \mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B}).$$

因此，由 (15.8) 和引理15.13，可得

$$\partial_\tau \phi_\tau^{\leqslant k}(e_i) = \sum_{j\in J} \Omega_{i,j}(\tau) \phi_\tau^{\leqslant k}(e_j). \tag{15.10}$$

因此，$\phi_\tau^{\leqslant k}$作为 $((\mathbb{W}_\bullet)^{\leqslant k})^* \otimes \mathbb{C}[[\tau]]$ 中的一个元素，满足一个类似于 (15.9) 的线性全纯微分方程。因此，由引理 15.14，该级数是$(\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k})^* \otimes \mathscr{O}(\mathcal{B})$中的一个元素。证明完毕。 □

注 15.16. 微分方程 (15.10) 在共形场论中具有重要作用。令 $\mathbb{V}$ 为一个 WZW 模型 $L_l(\mathfrak{g}, 0)$ 且令 $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_N$不可约，并假设每个 $\mathbb{W}_i$ 的最低 L_0-特征值均为 0。令 $\mathfrak{X}$ 为例 13.12 中的零亏格族。那么，我们可以在引理 15.15 的证明中取 k_0 为 0。将 $\mathfrak{X}$ 的底流形 $\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}^\times)$ 限制在任意一个平行于 z_j- 轴的复直线上，由 (15.10) 可知，$\phi^{\leqslant 0}$ 满足一个线性全纯 ∂_{z_j}微分方程。这就是著名的 Knizhnik–Zamolodchikov（KZ）方程。

15.7

总结目前为止证明的结果，我们有：

定理 15.17. 令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{C}$ 中包含 0的单连通开子集，并选取局部坐标 $\eta_\bullet$ 作为 $\mathfrak{X}$的坐标。定义 ∇_{∂_τ} 为 ∂_τ的一个提升。则对每个 $\phi_0 \in \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet)$，由定义 *15.12* 定义的 ϕ_τ 是 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathcal{B})$ 的一个元素，其在 $\tau = 0$ 处的值为 ϕ_0，并且被 ∇_{∂_τ}湮灭。

证明。 由引理 15.15，我们可以定义 ϕ 为一个 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$-模态射 $\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{B}} \to \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$。根据引理 15.13 和定理 14.6，它是一个共形块。由于（ ∇_{∂_τ} 15.8）和（14.36），它被 所湮灭。 □

引理 *15.10*的证明。 对每个 $\tau_0 \in \mathcal{B}$，映射 $\phi_0 \mapsto \phi_{\tau_0}$ 是线性的。此外，对于充分大的 k，$\phi_\tau^{\leqslant k}$满足一个线性全纯微分方程（15.10），其解由 $\mathcal{B}$中任意固定点处的取值唯一确定，例如 τ_0。因此，函数$\phi_\tau^{\leqslant k}$关于 τ 的取值由 $\phi_{\tau_0}^{\leqslant k}$唯一确定。因此 $\phi_0^{\leqslant k}$由 $\phi_{\tau_0}^{\leqslant k}$对所有充分大的 k确定。因此，线性映射 $\phi_0 \mapsto \phi_{\tau_0}$ 是单射。 □

定理的证明 15.9 完毕。

例 15.18。假设处于例 13.6 的情形。此外，假设 $\Delta \subset \mathbb{C}$ 是一个以 0 为中心的开圆盘，并且在 $\mathbb{S}^1$ 附近定义的全纯函数 h 在 $\mathbb{D}_r^\times$ 上是全纯的，其中某个 $r > 1$ 在 0 处具有有限个极点。因此，对于充分负的 n，有 $h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^{n+1}$，其中$c_n = 0$。利用例 13.12，容易看出，对每个$\phi_0 \in \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet)$，由（13.9）定义为关于 τ 的形式幂级数的 ϕ_τ 满足定义15.12。因此，$\phi_\tau \in \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\Delta)$。特别地，对每个 $w \in \mathbb{W}_\bullet$，$\phi_\tau(w)$ 在 $\tau \in \Delta$上一致几乎处处收敛。

15.8

推论1 **5.19.** 假设满足定理 *15.17* 的条件。那么对于每个 $\tau \in \mathcal{B}$，线性映射 *ap*

$$\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet) \to \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_\tau}(\mathbb{W}_\bullet), \qquad \phi_0 \mapsto \phi_\tau$$

是双射。

证明。 单射性可由引理15.9 的证明推出。由于两个向量空间的维数相同（由定理 15.9），可知该映射为双射。或者，交换 τ 与 0的角色，可得到类似的单射线性映射 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_\tau}(\mathbb{W}_\bullet) \to \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet)$。 □

推论15.20。 假设满足定理 *15.17* 的条件。那么 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，因此 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 是 $\mathcal{B}$上的平凡向量丛。

证明。 $\mathscr{O}_{\mathcal{B}}$模态射

$$\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_0}(\mathbb{W}_\bullet) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathcal{B}} \to \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$$

将每个常截面 ϕ_0 映射到 ϕ_τ（因此将每个 $\phi_0 \otimes f$ 映射到 $f\phi_\tau$ 其中 $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{B}}$）是一个同构，这由推论 15.19可知。 □

推论15.21。 设 $\mathfrak{Y} = (C;\ x_1、\ldots\ldots、x_N)$ 是一个 N 点标记的紧黎曼曲面，其中 C是连通的，亏格为 g，并将 $\mathbb{W}_i$ 与 x_i关联。则共形块空间的维数$\dim \mathscr{T}^*_{\mathfrak{Y}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 仅取决于 g、N以及（有限）可容许的 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}_1、\ldots\ldots、\mathbb{W}_N$。

因此，$\dim \mathscr{T}^*_{\mathfrak{Y}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 不取决于 C的复结构、$x_\bullet$的位置或局部坐标的选择。

证明。 存在一个族 $\mathfrak{T}_{g,\ N}$ 由 N 点标记的紧连通亏格为 g 的黎曼曲面组成，其底流形是 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{g,\ N}$（它是连通的），并且任意一个 $\mathfrak{Y}$ 都与 $\mathfrak{T}_g$ 的某个纤维等价，N。（例如参见 [ACG，第十五章]。）因此，推论由定理 15.9立即得出。 □

16 共形块的缝合、传播与因子分解

16.1

令 $\mathfrak{X} = (\pi:\ \mathcal{C} \to \mathbb{D}^\times_{r\rho};\ x_\bullet;\ \eta_\bullet)$ 为通过缝合一个 N点紧致˜ ˜黎曼曲面及其局部坐标 $\mathfrak{X} = (C;\ x_\bullet,\ x',\ x'';\ \eta_\bullet,\ \xi,\ \varpi)$ 而得到的族，如例 13.5所示。回顾一下，除非另有说明，我们都假设：

~**假设 16.1**。C的每个连通分支都包含 x_1、……、x_N 中的一个。

由此可知，$\mathcal{C}_b$的每个连通分支也包含 x_1、……、x_N中的一个。

约定 16.2。在本节中，“$\mathbb{V}$-模”指有限可容许的 $\mathbb{V}$-模。

设 $\mathbb{W}_1$、……、$\mathbb{W}_N$、$\mathbb{M}$ 为 $\mathbb{V}$-模。我们将 $\mathbb{W}_1$、……、$\mathbb{W}_N$、$\mathbb{M}$、$\mathbb{M}'$与 ~标记点 $x_\bullet$、x'、x''相关联，其中这些点属于 $\mathfrak{X}$；并将 $\mathbb{W}_1$、……、$\mathbb{W}_N$与 x_1、……、x_N相关联，其中这些点属于 $\mathfrak{X}$。回忆一下，$\mathbb{M}'$是 $\mathbb{M}$的反变模。认定

$$\mathscr{W}_{\widetilde{\mathfrak{X}}}(\mathbb{W}_\bullet\otimes\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}')=\mathbb{W}_\bullet\otimes\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}'\qquad \text{via}\,\mathcal{U}(\eta_\bullet,\xi,\varpi),$$
$$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)=\mathbb{W}_\bullet\qquad \text{via}\,\mathcal{U}(\eta_\bullet).$$

16.2

~设 $\phi\colon \mathbb{W}_\bullet\otimes\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}'\to\mathbb{C}$ 是与 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{W}_\bullet$、$\mathbb{M}$、$\mathbb{M}$相关的共形块。令

$$\bowtie_n=\sum_a m(n,a)\otimes\check{m}(n,a)\in\mathbb{M}(n)\otimes\mathbb{M}(n)^* \tag{16.1}$$

定义收缩，其中 $\{m(n、\ a)\colon a\in\mathfrak{A}_n\}$ 是 $\mathbb{M}(n)$ 的一组基，其对偶基为 $\{\check{m}(n、\ a)\colon a\in\mathfrak{A}_n\}$。等价地，将 $\bowtie_n$ 视为 $\mathbf{End}(\mathbb{W}(n))$ 的元素时，它是恒等算子。~回忆一下，$\mathbb{M}(n)$ 和 $\mathbb{M}(n)^*$ 分别是 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{M}'$的 L_0-权子空间。我们定义一个线性映射

$$\widetilde{\mathcal{S}}\phi:\mathbb{W}_\bullet\to\mathbb{C}[[q]]$$
$$\widetilde{\mathcal{S}}\phi(w_\bullet)=\widetilde{\mathcal{S}}_q\phi(w_\bullet)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\phi(w_\bullet\otimes\bowtie_n)q^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}\phi\big(w_\bullet\otimes\mathbb{W}\underbrace{(n)\otimes\mathbb{W}}_{\text{contraction}}(n)^*\big)q^n \tag{16.2}$$

称为（**规范化**）缝合 ϕ。

……的含义　　$\widetilde{\mathcal{S}}\phi(w_\bullet)$ 很容易理解：非正式地说，

$$\widetilde{\mathcal{S}}_q\phi(w_\bullet)=\phi\big(w_\bullet\otimes q^{\widetilde{L}_0}\underbrace{\cdot\otimes\cdot}_{\text{contraction}}\big)=\phi\big(w_\bullet\otimes\underbrace{\cdot\otimes q^{\widetilde{L}_0}\cdot}_{\text{contraction}}\big) \tag{16.3}$$

~由于我们可以将投影 P_n 放在 q^{L_0} 的右侧，并对所有 n求和，注意到 $q^{\widetilde{L}_0}P_n=q^nP_n$。假设 $\widetilde{\mathcal{S}}_q\phi(w_\bullet)$ 关于 q 的级数在 $\mathbb{D}^\times_{r\rho}$上一致几乎处处收敛。注意，对于每个 q，$\mathfrak{X}_q$ 都是通过将 ξ 或 ϖ 缩放 q^{-1} 倍（或者更一般地，将 ξ和 ϖ 分别缩放 q_1^{-1}和 q_2^{-1}倍，使得 $q_1q_2=q$），然后按照第 4.2 节中的方法，沿着 $\sim x'$ 和 x''，使用它们的局部坐标进行缝合得到的。于是，$\mathcal{S}_q\phi(w_\bullet)$ 就是关于该缝合的收缩。

~我们也可以使用 L_0 代替 L_0 进行缩放。为简单起见，我们假设 $\mathbb{M}$ 是不可约的（或者更一般地，假设 L_0-L_0 在 $\mathbb{M}$上为常数），于是我们将 ϕ 的（**标准**）**缝合**定义为

$$\mathcal{S}\phi=q^d\cdot\widetilde{\mathcal{S}}\phi:\mathbb{W}_\bullet\to\mathbb{C}\{q\} \tag{16.4}$$

~其中 $d\cdot \mathbf{1}_{\mathbb{M}} = L_0|_{\mathbb{M}} - L_0|_{\mathbb{M}}$。这里，我们使用了以下记法：对于任意向量空间$W$，

$$W\{q\} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{C}} w_n q^n : w_n \in W \Big\}.$$

由线性性，我们可以将 $\mathcal{S}\phi$ 的定义扩展到 $\mathbb{M}$ 是半单 $\mathbb{V}$- **模**的情形，即它是不可约 $\mathbb{V}$-模的直和。

16.3

以下定理的证明可见 [Gui，第 3 节。3] 或 [Gui20，第 10 节，11]。

定理 16.3。不采用假设*16.1*，而是假设一个较弱的条件：对每个 $q\in\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$，$\mathcal{C}_q$ 的每个连通分支都包含 $x_1,\dots,x_N$中的一个。设 $\phi\in\mathscr{T}^*_{\tilde{\mathfrak{X}}}(\mathbb{W}_\bullet\otimes\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}')$。那么

~ ~$\mathcal{S}\phi$ 是与 $\mathfrak{X}$相关的共形块，前提是 $\mathcal{S}\phi(w_\bullet)$ 在 $q\in\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$上一致几乎处处收敛（等价地，在 $\mathbb{D}_{r\rho}$ 或在 $\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$上绝对收敛），对每个 $w_\bullet\in\mathbb{W}_\bullet$均成立。

~例如，假设 $N>0$，并且 C 是两个连通黎曼~ ~ ~ ~曲面 C_1的不交并，C_2 满足 $x'\in C_1$ 且 $x_1,\dots,x_N,x''\in C_2$。那么本定理中的条件成立，但假设16.1不成立。

~根据定理 14.6，$\mathcal{S}\phi$ 是一个共形块意味着以下等价条件：

对每个 $q\in\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$ 的 • $\mathcal{S}_q\phi\in\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_q}(\mathbb{W}_\bullet)$。

• 通过将 $\mathcal{S}\phi$ 扩展为一个 $\mathscr{O}_{\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}}$-模态射

$$\widetilde{\mathcal{S}}\phi : \mathbb{W}_\bullet\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_{\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}}\to\mathscr{O}_{\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}}, \tag{16.5}$$

~$\mathcal{S}\phi$在 $\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)(\mathbb{D}^{\times}_{r\rho})$上消失。

作为一个 $\mathscr{O}^{\times}_{\mathbb{D}_{r\rho}}$ 模的态射，$\widetilde{\mathcal{S}}\phi$ 是 $H^0(\mathbb{D}^{\times}_{r\rho},\ \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet))$。

16.4

我们给出定理 16.3 的一个应用。仅在本小节和下一小节中假设 $\mathfrak{X}=(C;\ x_\bullet;\ \eta_\bullet)$ 是一个带 N 个标记点的紧黎曼曲面。回顾假设11.2，C的每个连通分支都包含 x_1、.....、x_N 中的一个。将

$$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)=\mathbb{W}_\bullet \qquad \text{via } \mathcal{U}(\eta_\bullet). \tag{16.6}$$

令 $\phi:\ \mathbb{W}_\bullet\to\mathbb{C}$ 为与 $\mathfrak{X}$相关的共形块。我们使用第 11.2 小节中的记号。回顾一下，(11.5) 给出了当 x 接近 x_j 时 $\wr\phi_x$ 的显式公式，并且对于这样的 x，(11.5) 的右端一致几乎处处收敛。显然，(11.5) 的右端是与 $\mathfrak{P}_{\eta_j(x)}\sqcup\mathfrak{X}$ 相关的共形块的缝合。因此，根据定理 16.3，当 x 接近 x_j 时，$\wr\phi_x$ 是与 $\wr\mathfrak{X}_x\simeq\mathfrak{P}_{\eta_j(x)}\#\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{V},\mathbb{W}_\bullet$ 相关的共形块。

我们来更精确地说明。回顾

$$\wr\mathfrak{X}_x = (C; x, x_\bullet) \tag{16.7}$$

其中 $x \neq x_1, \dots, x_N$。根据定义 11.6 和注 11.9，我们有一个 $\mathscr{O}_{C\backslash x_\bullet}$-模态射

$$\wr\phi : \mathscr{V}_{C\backslash x_\bullet} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{W}_\bullet \to \mathscr{O}_{C\backslash x_\bullet}, \qquad v \otimes w_\bullet \mapsto \wr\phi(v, w_\bullet). \tag{16.8}$$

对于每个 $x \in C\backslash x_\bullet$，我们都有一个线性映射

$$\wr\phi|_x : \mathscr{V}_C|x \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{W}_\bullet \to \mathbb{C}. \tag{16.9}$$

对于 x 的每个邻域 U 和一个单叶的 $\mu \in \mathscr{O}(U)$，等价 $\mathcal{U}_\varrho(\mu)$：$\mathscr{V}_C|_U \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_U$ 限制为 $\mathcal{U}_\varrho(\mu)$：$\mathscr{V}_C|x \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V}$。注意，$\mu - \mu(x), \eta_\bullet$ 是 $\wr\mathfrak{X}_x$ 在 $x, x_\bullet$ 处的局部坐标。于是我们得到一个等价

$$\mathscr{W}_{\wr\mathfrak{X}_x}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}_\bullet) \xrightarrow[\simeq]{\mathcal{U}(\mu-\mu(x),\eta_\bullet)} \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}_\bullet \xrightarrow[\simeq]{\mathcal{U}_\varrho(\mu)^{-1}\otimes \mathbf{1}} \mathscr{V}_C|x \otimes \mathbb{W}_\bullet. \tag{16.10}$$

练习 16.4。证明等价 (16.10) 与 μ 的选择无关。

因此，通过利用 ($\mathscr{W}_{\wr\mathfrak{X}_x}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}_\bullet)$ 与 $\mathscr{V}_C|x \otimes \mathbb{W}_\bullet$ 之间的对应关系（16.10），我们看到 $\wr\phi|_x$ 是一个线性泛函

$$\wr\phi|_x : \mathscr{W}_{\wr\mathfrak{X}_x}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}_\bullet) \to \mathbb{C}. \tag{16.11}$$

（事实上，可以验证，这个定义也与 $\mathfrak{X}$ 的局部坐标 $\eta_\bullet$ 无关。）

根据本小节开头的讨论，$\wr\phi|_x$ 是一个共形块，只要x 靠近任意一个标记点 x_i。因此，根据推论 14.7 以及 $C\backslash x_\bullet$ 的每个连通分支都与某个 x_j 的邻域相交这一事实，其中 j，我们得出 $\wr\phi|_x$ 对每个 $x \in C\backslash x_\bullet$都是一个共形块。注意，为了应用推论 14.7，我们应将所有 $\wr\mathfrak{X}_x$ 组织成一个族

$$\wr\mathfrak{X} = (C \times (C\backslash x_\bullet) \to C\backslash x_\bullet; \varsigma, x_1, \dots, x_N) \tag{16.12}$$

其中 ς 将每个 $x \in C\backslash x_\bullet$ 映到 $(x,\ x)$ 而 x_j 将 x 映到 $(x_j,\ x)$。显然，$\wr\mathfrak{X}$ 在每个 $x \in C\backslash x_\bullet$ 处的纤维都是 $\wr\mathfrak{X}_x$。因此，我们可以将 $\wr\phi$ 视为一个 $\mathscr{O}_{C\backslash x_\bullet}$-态射 $\mathscr{W}_{\wr\mathfrak{X}}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}_\bullet) \to \mathscr{O}_{C\backslash x_\bullet}$。它是一个全局共形块，因为它在 x_1，……，x_N 附近是如此。我们得出结论：

定理 16.5。设 $\phi \in \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$。那么，$\mathscr{O}_{C\backslash x_\bullet}$-模态射 $\wr\phi :\ \mathscr{W}_{\wr\mathfrak{X}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}_\bullet) \to \mathscr{O}_{C\backslash x_\bullet}$ 是与 $\wr\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{V}, \mathbb{W}_\bullet$相关的共形块，称为 ϕ的传播。

我们可以考虑共形块的多重传播。也就是说，我们让 $y_1, \dots, y_n$ 个不同点（而非单个点 x）在 $C\backslash x_\bullet$ 上变化，从而得到一个族 $\wr^n\mathfrak{X}$，其底流形为 $\mathrm{Conf}^n(C\backslash x_\bullet)$，纤维为 $(C; y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_N)$。于是可以通过递归定义 n-传播 $\wr^n\phi$，它是与 $\wr^n\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{V}, \dots, \mathbb{V}$，$\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_N$ 相关的共形块。例如，$(N+2)$-点函数 $\langle w', Y(v_1, z_1) \cdots Y(v_N, z_N) w\rangle$ 是与 $(\mathbb{P}^1; 0, 8;\ \zeta, 1/\zeta)$ 相关的共形块 $w \otimes w' \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}' \mapsto \langle w, w'\rangle$ 的 n-传播。详情见 [Gui, 第 3.4] 节，或 [Gui21]。

16.5

如上一小节所述，令 $\mathfrak{X}=(C;\ x_\bullet;\ \eta_\bullet)$ 为 N-标记的，并假设存在识别 (16.6)。我们给出共形块传播的两个应用。第一个应用仅利用 $\wr\phi(\cdot,w_\bullet)$ 是一个 $\mathscr{O}_{C\backslash x_\bullet}$-模这一事实，但并不真正需要定理 16.5。回顾定义 𝕍15.2 中关于 $\mathbb{V}$-模的生成子集的含义。

命题 16.6. 假设 C 连通且 $N\geqslant 2$。对于每个 $j=2,\dots,N$，选取一个生成 $\mathbb{W}_j$ 的子集 $E_j\subset\mathbb{W}_j$。设 $\phi:\ \mathbb{W}_\bullet\to\mathbb{C}$ 是与 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathbb{W}_\bullet$ 相关的共形块。那么，如果对于所有 $w_1\in\mathbb{W}_1$ 和 $w_2\in E_2,\dots,w_N\in E_N$，$\phi(w_1\otimes w_2\otimes\cdots\otimes w_N)=0$，则 $\phi=0$。

这个命题的证明与 Goddard 唯一性（命题 8.10）的证明类似。

证明。取 $w_\bullet\in\mathbb{W}_\bullet$，使得对于所有 $j\geqslant 2$，$w_j\in E_j$。显然，$\phi(Y(u,z)w_1\otimes w_2\cdots\otimes\otimes w_N)$（当 $z\neq 0$ 足够小时一致几乎处处收敛）为 0。因此，作为 $C\backslash x_\bullet$ 上 $(\mathscr{V}_C^{\leqslant k})^\vee$ 的截面，$\wr\phi(\cdot,w_\bullet)$ 在所有 k 的 x_1 附近都为零。于是它在 $C\backslash x_\bullet$ 上恒为零，特别是在 x_2 附近为零。这表明，当 z 足够小时，$\phi(w_1\otimes Y(u,z)w_2\otimes\cdots\otimes w_N)$ 为零。在 $z=0$ 处取留数，可得对于所有 $u\in\mathbb{V}$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，$\phi(w_1\otimes Y(u)_n w_2\otimes\cdots\otimes w_N)=0$。重复这一论证可知，对于所有 $u_1,\dots,u_k\in\mathbb{V}$ 和 $n_1,\dots,n_k\in\mathbb{Z}$，$\phi(w_1\otimes Y(u_1)_{n_1}\cdots Y(u_k)_{n_k}w_2\otimes\cdots\otimes w_N)=0$。因此，由于 E_2 生成 $\mathbb{W}_2$，我们得出，对于所有 $w_1\in\mathbb{W}_1,w_2\in\mathbb{W}_2$ 和 $w_j\in E_j$（其中 $3\leqslant j\leqslant N$），$\phi(w_\bullet)=0$。重复此过程可得 $\phi=0$。 □

第二个应用如下。回忆 $\wr\mathfrak{X}_x=(C;\ x,\ x_\bullet)$ 如果 $x\in C\backslash x_\bullet$。回忆 $\mathbf{1}\in H^0(C,\ \mathscr{V}_C)$ 是一个真空截面，在任意平凡化下，它在局部等于常值真空向量。

定理 16.7。 任取 $x\in C\backslash x_\bullet$ 并作如下识别

$$\mathscr{W}_{\wr\mathfrak{X}_x}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}_\bullet)=\mathscr{V}_C|x\otimes\mathbb{W}_\bullet\qquad \textit{via (16.10)}.$$

那么我们得到一个向量空间同构

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{T}^*_{\wr\mathfrak{X}_x}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}_\bullet)&\xrightarrow{\simeq}&\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)\\ \boxed{v\otimes w_\bullet\in\mathscr{V}_C|x\otimes\mathbb{W}_\bullet\mapsto\psi(v\otimes w_\bullet)}&\mapsto&\boxed{w_\bullet\in\mathbb{W}_\bullet\mapsto\psi(\mathbf{1}\otimes w_\bullet)}\end{array}\tag{16.13}$$

首先注意以下显而易见的事实：

引理 16.8。 对于每个 $\phi\in\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，以下结论在 $\mathscr{O}(C\backslash x_\bullet)$中成立。

$$\wr\phi(\mathbf{1},w_\bullet)=\phi(w_\bullet)\tag{16.14}$$

证明。 (16.14) 在 $x_1,\dots,x_N$附近显然由（11.5）成立。因此，由复分析，式（16.14）在 $C\backslash x_\bullet$ 上成立。 □

定理的证明 *16.7*。 留给读者验证，对于每个与 ψ相关联的共形块，$\wr\mathfrak{X}_x$，由右端定义的线性泛函 $\phi:\ \mathbb{W}_\bullet\to\mathbb{C}$ (16.13) 满足共形块的定义（定义 11.6）。根据命题 16.13，线性映射 (16.6 是单射；又因为 $\mathbf{1}$ 生成真空模 $\mathbb{V}$，故该映射是满射。引理 16.8指出 $\wr\phi$ 是 $\phi\in\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 在映射 (16.13) 下的原像。 □

16.6

我们给出传播的一些应用。

例16.9。 设（有限可容许的） $\mathbb{W}_1$， $\mathbb{W}_2'$ 与标记点0，∞ 相关联，属于$\mathfrak{P}=(\mathbb{P}^1;\ 0,\ \infty;\ \zeta,\ 1/\zeta)$ 其中 ζ 是 $\mathbb{C}$的标准坐标。那么不难验证（参见例17.2），存在一个同构

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1,\mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathscr{T}^*_{\mathfrak{P}}(\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_2') \\ T & \mapsto & \boxed{w_1\otimes w_2'\mapsto\langle Tw_1,w_2'\rangle} \end{array} \tag{16.15}$$

（注意，每个 $Y(u)_n$ 都以显然的方式作用于 $\mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}}$。）因此，根据定理16.7，对于任意一个 N点标记的（$N\geqslant 2$）球面，只要 $\mathbb{W}_1$， $\mathbb{W}_2'$ 与两个标记点相关联，而 $\mathbb{V}$ 与剩下的一个标记点相关联，相应的共形块空间同构于$\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1,\ \mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}})$。

注16.10。 在许多重要情况下，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1,\mathbb{W}_2)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1,\mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}}). \tag{16.16}$$

例如，当 L_0 在 $\mathbb{W}_1$， $\mathbb{W}_2$上可对角化，且 $\mathbb{W}_2$ 的每个 L_0-权空间都是有限维时，情况确实如此。（例如，当 $\mathbb{W}_1$， $\mathbb{W}_2$ 为半单时。）

要证明这一点，任选一个具有 $L_0w_1=\lambda w_1$ 的 L_0-特征向量 $w_1\in\mathbb{W}_1$。选择线性映射 $T:\mathbb{W}_1\to\mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}}$，使其交织 $\mathbb{V}$ 的作用。于是，当 $L_0T=TL_0$ 时，我们看到 $Tw_1\in\mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}}$ 是一个具有特征值 λ 的 $\sim L_0$-特征向量。回顾一下，$[L_0,L_0]=0$ （参见注 9.7）。因此，L_0 保持 $\mathbb{W}_2$ 的每个（L_0-）权空间 $\mathbb{W}_2(n)$。但是，$L_0|_{\mathbb{W}_2(n)}$ 只有有限多个不同的 n 具有特征值 λ，否则 $\mathbb{W}_2$ 上 L_0 的 λ-特征空间将是无限维的。这就证明了 $Tw_1\in\mathbb{W}_2$。 □

例16.11. 在例 16.9中，我们令 $\mathbb{W}_1=\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{W}=\mathbb{W}_2$。于是有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V},\mathbb{W}^{\mathrm{cl}})\simeq\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;0,\infty;\zeta,1/\zeta)}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}')\simeq\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;\infty;1/\zeta)}(\mathbb{W}') \tag{16.17}$$

其中，$T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V},\mathbb{W}^{\mathrm{cl}})$ 中对应的元素$\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;\infty;1/\zeta)}(\mathbb{W}')$ 作为 $\mathbb{W}'$上的 $T\mathbf{1}\in\mathbb{W}^{\mathrm{cl}}$ 线性泛函。特别地，取 $\mathbb{W}=\mathbb{V}'$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V},\mathbb{V}')=\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V},(\mathbb{V}')^{\mathrm{cl}})\simeq\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;\infty;1/\zeta)}(\mathbb{V}). \tag{16.18}$$

因此，如果 $\mathbb{V}$ 不是自对偶的，那么 $\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;\infty;1/\zeta)}(\mathbb{V})$ 就是平凡的。

16.7

我们回到第 16.1 小节的情形。

定理16.12。 假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限的， $\mathbb{W}_1$、……、$\mathbb{W}_N$、$\mathbb{M}$ 均为有限生成的，并且$\sim L_0|_{\mathbb{M}}-L_0|_{\mathbb{M}}$ 是常数（例如，当 $\mathbb{M}$ 不可约时）。令 $\phi\in\mathscr{T}^*_{\tilde{\mathfrak{X}}}(\mathbb{W}_\bullet\otimes\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}')$。则

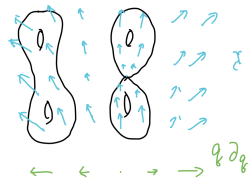
$\sim\mathcal{S}\phi$ 和 $\mathcal{S}\phi$ 在 $q\in\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$上一致几乎处处收敛。此外，如果我们使用 $\eta_\bullet$ 和 ∂_q的一个提升，在 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$上定义联络 ∇，那么

$$\nabla_{\partial_q}\mathcal{S}_q\phi = f\cdot\mathcal{S}_q\phi \tag{16.19}$$

~对于某个仅依赖于 $\mathfrak{X}$（包括局部坐标 $\eta_\bullet$、ξ、ϖ）、r、ρ、∂_q 的提升以及中心荷 c 的 $f\in\mathscr{O}(\mathbb{D}^{\times}_{r\rho})$。此外，$f=0$ 如果 $\eta_\bullet$、ξ、ϖ 属于 $\sim\mathfrak{X}$ 的射影结构。

定理的证明16.12 与第15 节中的证明有些相似，后者 ϕ_τ是解析的，并且余不变量/共形块层是局部自由的。读者可参阅 [Gui，第 4 节。3] 或 [Gui20，第 11]节，了解证明的详情。下面我们解释一些关键思路。

假设我们将结点曲线 $\mathcal{C}_0=\lim_{q\to0}\mathcal{C}_q$ 加入族 $\mathfrak{X}$ 中（见第 13.4 小节末尾）。也可以为 $\mathfrak{X}$定义余不变量层和共形块。由于 $d\pi$：当 $p\in\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}_0$的结点时，$\Theta_{\mathcal{C}}|_p\to\Theta_{\mathbb{D}_{r\rho}}|_{\pi(p)}$ 不是满射，因此我们无法将 ∂_q 提升为 $\Theta_{\mathcal{C}}$ 在 p附近的截面，更不用说提升为 $H^0(\mathcal{C},\ \Theta_{\mathcal{C}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$了。（在结点 p附近，π 等价于(ξ在 $\xi=\varpi=0$附近的 $\varpi)\in\mathbb{C}^2\mapsto\xi\varpi$。）但我们可以将 $q\partial_q$提升为一个元素 $\mathfrak{x}\in H^0(\mathcal{C},\ \Theta_{\mathcal{C}}(\star S_{\mathfrak{X}}))$，并且可以验证 $\mathfrak{x}$实际上属于 $H^0(\mathcal{C},\ \Theta_{\mathcal{C}}(-\log\ \mathcal{C}_0+\star S_{\mathfrak{X}}))$，这意味着 $\mathfrak{x}$在 $S_{\mathfrak{X}}$ 处有有限个极点，并且 $\mathfrak{x}|_{\mathcal{C}_0}$ 与 $\mathcal{C}_0$ 相切且在结点处消失。（参见 [Gui，第 3.6] 节，或 [Gui20，第 11]节。）



(16.20)

利用提升 $\mathfrak{x}$，可以在 $\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 和 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 上定义微分算子 $\nabla_{q\partial_q}$（或者更一般地，定义 $\nabla_{g\partial_q}$，其中 $g\in\Theta_{\mathbb{D}_{r\rho}}$ 在 0 处消失）。我们称联络 ∇ 在 0 处有**对数奇点**（或者称其为具有奇点的**对数联络**）。于是可以证明

$$\nabla_{q\partial_q}\mathcal{S}_q\phi = f\cdot\mathcal{S}_q\phi \tag{16.21}$$

其中 $f\in\mathscr{O}(\mathbb{D}_{r\rho})$ 对给定数据的依赖关系如定理 16.12 中所述。（注意，与定理 16.12 不同，这里 f 在 0 处也全纯。）定理 15.7 在当前情形下同样成立。因此，类似于引理 15.15 的证明，可以证明当k 足够大时，

$$q\partial_q\widetilde{\mathcal{S}}_q\phi^{\leqslant k}(e_i)=\sum_{j\in J}\Omega_{i,j}(q)\widetilde{\mathcal{S}}_q\phi^{\leqslant k}(e_j). \tag{16.22}$$

其中 $\Omega_{i,\ j}\in\mathscr{O}(\mathbb{D}_{r\rho})$。也就是说，作为一个 $\mathrm{End}(\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k})$-值形式幂级数，$q$，$\widetilde{\mathcal{S}}_q\phi^{\leqslant k}$满足一个在 $q=0$**处有单极点的线性全纯微分方程**。众所周知，引理 15.14 可以推广到这种情形，即满足带单极点的线性全纯微分方程的形式幂级数必定

~在 $\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$ 上一致几乎处处收敛（例如参见 [Gui，第 1 节。7]）。$\mathcal{S}\phi$ 和 $\mathcal{S}\phi$的一致几乎处处收敛由此得出。

最后，我们指出，定理 16.12可以推广到沿若干对点同时缝合~，即沿 $(y_1'$、$y_1'')$、……、$(y_M'$、$y_M'')$缝合 C；甚至可以推广得更一般，即~ ~是一个底流形为 $\mathfrak{X}$ 的族 $\mathcal{B}$。在这个最一般的情形下， $\mathfrak{X}$ 是一个定义在$\mathcal{B} \times \mathbb{D}^{\times}_{r_1\rho_1} \times \cdots \times \mathbb{D}^{\times}_{r_M\rho_M}$上的族，并且缝合在此定义域上一致几乎处处收敛。参见上文提及的参考文献。

16.8

设 $\mathcal{E}$ 是一组有限个两两不等价的不可约 $\mathbb{V}$-模。那么对于每个 $q \in \mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$，在选定辐角 $\arg q$ 后，我们有一个线性映射

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_q : \bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{E}} \mathscr{T}^*_{\tilde{\mathfrak{X}}}(\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}') &\to \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_q}(\mathbb{W}_\bullet) \\ \bigoplus_{\mathbb{M}} \phi_{\mathbb{M}} &\mapsto \sum_{\mathbb{M}} \mathcal{S}_q \phi_{\mathbb{M}} \end{aligned} \tag{16.23}$$

注意， $\sum_{\mathbb{M}} \mathcal{S}\phi_{\mathbb{M}}(w_\bullet)$ 是 $\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$ 上的一个多值全纯函数（即，是 $\log q$ 在 $\mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$ 的通用覆盖上的单值全纯函数）

定理 16.13. 假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限的，且 $\mathbb{W}_1$、……、$\mathbb{W}_N$ 都是有限生成的。那么对于每个带有选定 辐角 q 的 $q \in \mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$，线性映射 $\mathfrak{S}_q$ 是单射。

参见 [Gui，第 4 节。4] 或 [Gui20，第 12]节，那里给出了证明。借助共形块传播，该证明的最后一部分可以简化。下面我们给出这个简化后的证明。

证明。 假设 $\psi_q = \sum_{\mathbb{M}} \mathcal{S}_q \phi_{\mathbb{M}}$ 在 0 处对某个 q为零。那么它对所有 $q \in \mathbb{D}^{\times}_{r\rho}$ （以及 辐角 q的所有取值）都为零，因为 ψ 在 $\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k}$上的限制满足一个线性全纯微分方程（16.22），其解由任意固定 q和辐角 q处的（初始）值确定。令 $\psi_q(w_\bullet) = \sum_{n\in\mathbb{C}} \psi_n(w_\bullet) q^n$，则 $\psi_n(w_\bullet) = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{C}$均成立。[8]

令 $\mathcal{F}$ 为所有满足 $\phi_{\mathbb{M}} \neq 0$的 $\mathbb{M} \in \mathcal{E}$ 构成的集合。我们来证明 $\mathcal{F} = \varnothing$。注意，

$$\psi_q(w_\bullet) = \sum_{n\in\mathbb{C}} \sum_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}} q^n \cdot \phi_{\mathbb{M}}(w_\bullet \otimes \chi_{\mathbb{M},n})$$

其中 $\chi_{\mathbb{M},n} \in \mathbb{M}_{(n)} \otimes \mathbb{M}^*_{(n)}$ （其中 $\mathbb{M}_{(n)}$ 是 L_0-权 n 子空间，属于 $\mathbb{M}$）是用于收缩的向量，即 $\chi_{\mathbb{M},n} = \mathbf{1}_{\mathbb{M}_{(n)}} \in \mathrm{End}(\mathbb{M}_{(n)})$。令 $\mathbb{X} = \bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}} \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}'$ 为一个（半单） $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$- 模。那么对于每个 $n \in \mathbb{C}$， $\psi_n(w_\bullet) = 0$ 表示

$$\Big\langle \bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}} \phi_{\mathbb{M}},\ w_\bullet \otimes \Big(\bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}} \chi_{\mathbb{M},n} \Big) \Big\rangle = 0.$$

[8]假设 $f(q) = \sum_{n\in\mathbb{C}} a_n q^n \in \mathbb{C}\{q\}$ 0 $q \neq 0$ $f(q) \in \mathbb{C}[[q^{\pm 1}]]$ $a_n = 0$ n 绝对收敛，并且当较小时等于。如果，那么通过取围道积分，可以得出对所有都成立。在一般情形下，需要更加谨慎。参见 [Gui，第 4 节。4]。

其中 $\bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}}\phi_{\mathbb{M}}\colon\ \mathbb{W}_\bullet\otimes\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ 是一个线性映射，它将每个 $w_\bullet\otimes m\otimes m'$（其中 $m\in\mathbb{M}$, $m'\in\mathbb{M}'$）映射到 $\phi_{\mathbb{M}}(w_\bullet\otimes m\otimes m')$。

Let

$$\mathbb{A}=\Big\{\nu\in\mathbb{X}:\Big\langle\bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}}\phi_{\mathbb{M}},w_\bullet\otimes\nu\Big\rangle=0\text{ for all }w_\bullet\in\mathbb{W}_\bullet\Big\}.$$

我们断言， $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{X}$的 $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$-不变子空间。因此，若 $\mathcal{F}\neq\varnothing$，则$\mathbb{A}$ （包含所有$\chi_{\mathbb{M},\ n}$）必定是半单模 $\mathbb{X}$的非平凡 $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$-子模。由于 $\mathbb{X}$ 的不可约直和项 $\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}'$ 两两不同构， $\mathbb{A}$ 必定包含某个 $\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}'$，使得 $\mathbb{M}\in\mathcal{F}$。于是 $\phi_{\mathbb{M}}=0$，这与 $\mathcal{F}$的定义矛盾。

证明 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$-不变的，可以采用与命题16.6相同的方法。任取$\nu\in\mathbb{A}$。那么当 $z\neq0$ 较小时，对每个 $u\in\mathbb{V}$,

$$\Big\langle\bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}}\phi_{\mathbb{M}},Y(u,z)w_1\otimes w_2\otimes\cdots\otimes w_N\otimes\nu\Big\rangle \tag{16.24}$$

一致几乎处处收敛且等于0。这表明 $\bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}}\wr\phi_{\mathbb{M}}(\cdot,\ w_\bullet\otimes\nu)$ 在 x_1附近消失，因此也在 x'附近消失。因此，对所有 $u\in\mathbb{V}$,

$$\Big\langle\bigoplus_{\mathbb{M}\in\mathcal{F}}\phi_{\mathbb{M}},w_\bullet\otimes(Y(u,z)\otimes\mathbf{1})\nu\Big\rangle$$

等于0。因此，对所有 $u\in\mathbb{V}$， $n\in\mathbb{Z}$，都有 $(Y(u)_n\otimes\mathbf{1})v\in\mathbb{A}$，这证明 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{V}\otimes\mathbf{1}$-不变的。同样， $\mathbb{A}$ 是 $\mathbf{1}\otimes\mathbb{V}$-不变的。 □

~

~注 16.14. 如果我们使用归一化缝合 $\mathcal{S}_q$ 来定义 $\mathfrak{S}_q$，那么利用对每个 $\mathbb{M}$，都有 $\mathcal{S}_q\phi_{\mathbb{M}}=q^d\widetilde{\mathcal{S}}_q\phi_{\mathbb{M}}$，其中某个 $d\in\mathbb{C}$，很容易证明 $\widetilde{\mathfrak{S}}_q$ 也是单射。

16.9

推论 16.15. 假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限的。那么不可约 $\mathbb{V}$-模只有有限多个等价类。

证明. 对于上一小节中的每个有限集合 $\mathcal{E}$，我们给出其基数 $|\mathcal{E}|$的一个上界。对于每个 $\mathbb{M}\in\mathcal{E}$, 顶点算子 $Y_{\mathbb{M}}$ 定义了一个共形块 $\omega_{\mathbb{M}}:\mathbb{M}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{M}'\to\mathbb{C}$，对应于 $\mathfrak{P}=(\mathbb{P}^1;0,1,8;\zeta,\zeta-1,1/\zeta)$，如例 11.12 所示。沿 $0,8^{\sim}$ 缝合 $\mathfrak{P}$，并取固定参数 $q\in\mathbb{D}_1^\times$，得到一个单标记环面 $\mathfrak{T}$。由定理 16.13， $\{\mathcal{S}_q\omega_{\mathbb{M}}:\ \mathbb{M}\in\mathcal{E}\}$ 是 $\mathscr{T}_{\mathfrak{T}}^*(\mathbb{V})$ 的一个线性无关子集。因此 $|\mathcal{E}|\leqslant\dim\mathscr{T}_{\mathfrak{T}}^*(\mathbb{V})$。 □

回忆一下，如果每个可容许的 $\mathbb{V}$-模都是不可约 $\mathbb{V}$-模的直和，则称 $\mathbb{V}$ 为有理。

定理 16.16 (因子分解)。 假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-有限且有理的。假设 $\mathcal{E}$ 是一个互不等价不可约 $\mathbb{V}$-模的极大集合。（“极大”意味着每个不可约 $\mathbb{V}$-模都同构于 $\mathcal{E}$中的某个元素。）则由 $\mathfrak{S}_q$ 定义的线性映射(16.23)是一个同构。

因子分解等价于对极大 $\mathcal{E}$的因子分解,

$$\dim \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_q}(\mathbb{W}_\bullet) = \sum_{\mathbb{M}\in\mathcal{E}} \dim \mathscr{T}^*_{\widetilde{\mathfrak{X}}}(\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}'). \tag{16.25}$$

该公式给出了一种算法，可以根据低亏格或较少标记点的共形块空间，计算高亏格或较多标记点的共形块空间的维数。这种形式的因子分解最早由 [DGT19] 利用朱代数证明。在[Gui，第 4.6 节，4。7], 中，利用双重传播（的一个轻微推广）给出了另一种更具解析性和几何性的证明。因子分解的证明有着悠久的历史。特别是，WZW 共形块的因子分解最早在具有里程碑意义的论文 [TUY89]中得到证明。关于这段历史的讨论，参见 [DGT19] 的导论。

推论 16.17。 假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限且有理的。那么，不可约 $\mathbb{V}$-模的等价类数量等于与任意1点标记的环面 $\mathfrak{T}$ 以及真空模 $\mathbb{V}$相关的共形块空间的维数。

证明。 这可由因子分解和推论的证明立即得出。 16.15。 □

17 亏格 0 共形块与顶点算子代数模的张量范畴

17.1

本节仍遵循约定16.2： $\mathbb{V}$-模指有限可容许$\mathbb{V}$-模。对于每个 $z_\bullet \in \mathrm{Conf}^N(\mathbb{C})$，令

$$\mathfrak{X}_{z_\bullet} = (\mathbb{P}^1; z_1, \dots, z_N, \infty; \zeta - z_1, \dots, \zeta - z_N, 1/\zeta)$$

其中 ζ是 $\mathbb{C}$的标准坐标。选取与 z_1，……， z_N， 8相对应的 $\mathbb{V}$-模 $\mathbb{W}_1$，……， $\mathbb{W}_N$， $\mathbb{W}'_{N+1}$。记

$$\mathbb{W}_\bullet = \mathbb{W}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_N,$$

也就是说， $N+1$ 不包含在 $\bullet$中。注意， $\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathbb{W}'_{N+1}$ 上的线性泛函等价于一个线性映射 $\mathbb{W}_\bullet \to \mathbb{W}^{\mathrm{cl}}_{N+1}$。

17.2

我们给出一个判据，用来判断 $\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathbb{W}'_{N+1}$上的线性泛函是否为共形块。

命题 17.1. 线性映射 $\mathcal{Y}\colon \mathbb{W}_\bullet \to \mathbb{W}^{\mathrm{cl}}_{N+1}$ 属于 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}_{z_\bullet}}(\mathbb{W}_\bullet \otimes \mathbb{W}'_{N+1})$ 当且仅当满足以下条件：对于每个 $w_\bullet \in \mathbb{W}_\bullet$、 $w'_{N+1} \in \mathbb{W}'_{N+1}$ 和 $u \in \mathbb{V}$，以下形式洛朗级数

$$\left\langle w'_{N+1}, \mathcal{Y}(w_1 \otimes \cdots \otimes Y(u, z - z_i)w_i \otimes \cdots \otimes w_N) \right\rangle \qquad \in \mathbb{C}((z - z_i))$$

（对于所有 $i=1$、……、N）以及级数

$$\left\langle Y(u,z)^{\mathrm{t}}w'_{N+1},\mathcal{Y}(w_\bullet)\right\rangle \qquad \in\mathbb{C}((z^{-1}))$$

是展开 在 z_1、……、z_{N+1}、∞ 处的同一个函数 $f\in H^0(\mathbb{P}^1,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\star z_\bullet+\star\infty))$ 的展开。

根据我们的记号（11.24）， $f\in H^0(\mathbb{P}^1,\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\star z_\bullet+\star\infty))$ 仅表示 f 是定义在 $\mathbb{P}^1$ 上的亚纯函数（即有理函数），其可能的（有限个）极点仅位于$z_\bullet$、∞。

证明。“若”：将命题中的函数 f 记为 $f_{u,\ w_\bullet\otimes w'_{N+1}}$。于是我们可以定义一个 $\mathscr{O}_{\mathbb{C}\setminus x_\bullet}$-模态射

$$\begin{aligned}\wr\mathcal{Y}(\cdot,w_\bullet\otimes w'_{N+1}):\mathscr{V}_{\mathbb{C}\setminus x_\bullet}&\to\mathscr{O}_{\mathbb{C}\setminus x_\bullet}\\ \mathcal{U}_\varrho(\zeta)^{-1}(u\otimes g)&\mapsto g\cdot f_{u,w_\bullet\otimes w'_{N+1}}\end{aligned}$$

其中 $u\otimes g\in\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_{\mathbb{C}\setminus x_\bullet}$。使用与例 11.12相同的论证，可以验证$\wr\mathcal{Y}$ 满足共形块的复解析定义中的条件。

“仅若”：设 $v\in H^0(\mathbb{P}^1,\ \mathscr{V}_{\mathbb{P}^1}(\star\infty))$ 为 $v=\mathcal{U}_\varrho(\zeta)^{-1}u_\circ$ 将 $f=\wr\mathcal{Y}(v,\ w_\bullet\otimes w'_{N+1})$ 视为 $\mathcal{Y}$ 上的线性泛函。可以验证 $\mathbb{W}_\bullet\otimes\mathbb{W}'_{N+1}$。 f 满足命题 17.1中的结论。 □

17.3

例 17.2. 考虑 $N=1$ 和 $z_1=0$的情形。此时 $\mathcal{Y}:\ \mathbb{W}_1\to\mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}}$是一个共形块，当且仅当 $f_1(z)=\langle w_2,\mathcal{Y}Y(u,z)w_1\rangle$（属于 $\mathbb{C}((z))$）以及 $f_2=\langle Y(u,z)^{\mathrm{t}}w_2,\mathcal{Y}w_1\rangle$（属于 $\mathbb{C}((z^{-1}))$）是在 0,8 处对某个 $f\in H^0(\mathbb{P}^1,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\star0+\star\infty))=\mathbb{C}[z^{\pm1}]$的展开。这等价于 $\mathrm{Res}_{z=0}f_1(z)z^kdz+\mathrm{Res}_{z=\infty}f_2(z)z^kdz=0$，进而等价于 $\langle w_\bullet,[Y(u)_k,\mathcal{Y}]w_1\rangle=0$，即 $\mathcal{Y}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1,\mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}})$。由此得出

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1,\mathbb{W}_2^{\mathrm{cl}})\simeq\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;0,\infty;\zeta,1/\zeta)}(\mathbb{W}_1,\mathbb{W}'_2).\tag{17.1}$$

□

例 17.3. 考虑 $N=0$ 和 $\mathbb{W}_1=\mathbb{V}$的情形，它们与唯一的标记点 8 相关联。此时， $\xi:=\mathcal{Y}$ 属于 $\mathbb{V}^{\mathrm{cl}}$。根据命题 17.1， $\mathcal{Y}$ 是一个共形块，当且仅当对于每个 $w'\in\mathbb{W}'$， $u\in\mathbb{V}$， $\langle w',\ Y(u,\ z)\xi\rangle$都属于 $H^0(\mathbb{P}^1,\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\star\infty))=\mathbb{C}[z]$。等价地，当 $u\in\mathbb{V}$时， $Y(u)_n\xi=0$ $n\in\mathbb{N}$。特别地， $L_0\xi=Y(\mathsf{c})_1\xi=0$。由此得出

$$\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;\infty;1/\zeta)}(\mathbb{V}')=\{v\in\mathbb{V}(0):Y(u)_nv=0\text{ for all }u\in\mathbb{V},n\in\mathbb{N}\}.\tag{17.2}$$

另请注意，根据第5.7小节， $Y(u)_nv=0$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 当且仅当 $[Y(u,\ z_1),\ Y(v,\ z_2)]=0$ 属于$\mathbb{C}[[z_1^{\pm1},\ z_2^{\pm1}]]$。

由此可知，若 $\mathbb{V}\simeq\mathbb{V}'$（自对偶）且 $\mathbb{V}(0)=\mathbb{C}\mathbf{1}$（CFT型），则

$$\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;\infty;1/\zeta)}(\mathbb{V})\simeq\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;\infty;1/\zeta)}(\mathbb{V}')=\mathbb{C}\mathbf{1}.\tag{17.3}$$

因此，由例 16.11，$\mathrm{End}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V}) = \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathbb{V}}$。这意味着，如果 $\mathbb{V}$ 是完全可约的，即是不可约 $\mathbb{V}$-模的和，那么 $\mathbb{V}$ 必定是单的（即不可约$\mathbb{V}$-模）。我们指出，即使不假设完全可约性，也可以由自对偶性和 CFT 型推出 $\mathbb{V}$ 是单的。例如，参见 [CKLW18，命题 4。6]。

□

现在考虑 $N = 2$ 和 $z_2 = 0$的情形。令 $\xi = z_1$，其不为零。在此情形下，我们将一个共形块 $\mathcal{Y}(w_1 \otimes w_2)$ 写成 $\mathcal{Y}(w_1, \xi)w_2$。

命题 17.4。 线性映射 $\mathcal{Y}(\cdot, \xi) : \mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{W}_2 \to \mathbb{W}_3^{\mathrm{cl}}$ 是 $\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;\ 0,\ \xi,\ \infty;\ \zeta,\ \zeta-\xi,\ 1/\zeta)}(\mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{W}_2 \otimes \mathbb{W}_3')$ 中的一个元素，当且仅当对于每个 $w_1 \in \mathbb{W}_1$ 和 $u \in \mathbb{V}$

$$\begin{aligned}&\sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{m}{l} \xi^{m-l} \cdot \mathcal{Y}(Y(u)_{n+l}w_1, \xi) \\ =&\sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{n}{l} (-\xi)^l \cdot Y(u)_{m+n-l}\mathcal{Y}(w_1, \xi) - \sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{n}{l} (-\xi)^{n-l} \cdot \mathcal{Y}(w_1, \xi)Y(u)_{m+l}\end{aligned} \tag{17.4}$$

证明。 借助命题 17.1，我们可以按照命题 4.8中取留数的方法证明充分性的一部分，并利用强留数定理 11.14证明必要性的一部分。 □

17.4

假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限的，并且 $\mathbb{W}_1$、……、$\mathbb{W}_2$ 是有限生成的。我们将 $\mathfrak{X}_{z_\bullet}$组装成一个族

$$\mathfrak{X} = (\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}) \to \mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}); \varsigma_1, \ldots, \varsigma_N, \infty; \eta_1, \ldots, \eta_N, 1/\zeta) \tag{17.5}$$

如例13.4所示。具体而言，ς_i 将 $z_\bullet \in \mathrm{Conf}^N(\mathbb{C})$ 映射到 $(z_i,\ z_\bullet)$，∞ 将 $z_\bullet$ 映射到 $(\infty,\ z_\bullet)$，η_i将 $(z,\ z_\bullet)$ 映射到 $z - z_i$，而 $1/\zeta$ 将 $(z,\ z_\bullet)$ 映射到 $1/z$。令

$$\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet) = \mathbb{W}_\bullet \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C})} \qquad \text{via } \mathcal{U}(\eta_\bullet, 1/\zeta).$$

根据例13.13，在向量丛 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$ 上有一个（显然平坦的）联络 ∇定义如下：

$$\nabla_{\partial_{\tau_k}} = \partial_{\tau_k} - \left(\mathbf{1}_{\mathbb{W}_1} \otimes \cdots \otimes L_{-1}\big|_{\mathbb{W}_k} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{W}_N} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{W}_\infty}\right)^{\mathrm{t}} \tag{17.6}$$

对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$。

因此，如果我们固定 $\gamma_\bullet \in \mathrm{Conf}^N(\mathbb{C})$，那么每个元素 $\mathcal{Y}(\cdot,\ \gamma_\bullet) \in \mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)|_{\gamma_\bullet}$都会延拓为一个平行截面 $\mathcal{Y}(\cdot,\ z_\bullet) :\ w_\bullet \in \mathbb{W}_\bullet \mapsto \mathcal{Y}(w_\bullet,\ z_\bullet) \in \mathbb{C}$，定义在 $\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C})$ 中任意包含 $\gamma_\bullet$的单连通开子集上，并且进一步延拓为定义在 $\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C})$ 上的多值平行截面 $\mathcal{Y}(\cdot,\ z_\bullet)$（即在 $\mathrm{Conf}^N(\mathbb{C})$的万有覆盖空间上是单值的）。

17.5

作为上述族的一个变体，我们可以考虑如下族

$$\mathfrak{P}^N = (\pi : \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}^\times) \to \mathrm{Conf}^N(\mathbb{C}^\times); 0, \varsigma_1, \dots, \varsigma_N, \infty; \zeta, \eta_1, \dots, \eta_N, 1/\zeta)$$

例 13.4。那么，与 $\mathfrak{P}^N$ 相关的共形块也具有类似性质。

定义 17.5。$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(w_1,\ \xi)w_2$ 是 $\mathscr{T}^*_{\mathfrak{P}^1}(\mathbb{W}_2 \otimes \mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{W}_3')$ 在 $\xi \in \mathbb{C}^\times$ 上的一个平行截面，它是多值的（因此在 $\log \xi \in \mathbb{C}^\times$的万有覆盖上是单值的），称为**类型** $\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}$ **交织算子**。这些交织算子构成的空间记作$\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}$。其维数称为 $\mathbb{W}_1$、$\mathbb{W}_2$与 $\mathbb{W}_3$之间的**融合规则**。

注意，$\mathbb{W}_2$、$\mathbb{W}_1$、$\mathbb{W}_\infty$ 分别与截面 0、$\varsigma = \varsigma_1$、8 相关。此外，$\mathcal{Y}$是平行的，意味着 $\mathcal{Y}$ 满足**平移性质**

$$\partial_\xi \mathcal{Y}(w_1, \xi) = \mathcal{Y}(L_{-1}w_1, \xi). \tag{17.7}$$

17.6

现在我们来讨论此前忽略的一个问题：向量空间 $\mathbb{W}'$ 是否独立于使 $\mathbb{W}$ 有限可容许的算子 L_0？

我们来证明，当 L_0 可对角化且每个 L_0特征空间都是有限维时（例如，当 $\mathbb{W}$ 半单时），结论成立。令 $\mathbb{W} = \bigoplus_{n\in\mathbb{C}} \mathbb{W}_{(n)}$ 为 $\mathbb{W}$的 L_0分次。我们可以利用 L_0分次定义分次对偶 $\mathbb{W}^\vee = \bigoplus_{n\in\mathbb{C}} \mathbb{W}^*_{(n)}$。那么，$\mathbb{W}'$ 对 L_0 的~独立性由下式得出：

命题 17.6. 设 $\mathbb{W}$ 具有 L_0分次 $\mathbb{W} = \bigoplus_{n\in\mathbb{C}} \mathbb{W}_{(n)}$，其中每个 $\mathbb{W}_{(n)}$ 都是有限维的。再设 $\mathbb{W}$ 具有一个 L_0分次 $\mathbb{W} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}(n)$，使得 $\mathbb{W}$ 有限可容许。那么 $\mathbb{W}' = \mathbb{W}^\vee$。

证明。考虑定义在 $\mathbb{W}^*$上的线性算子 $\widetilde{L}_0^{\mathrm{t}}, L_0^{\mathrm{t}}$，即：

$$\langle \widetilde{L}_0^{\mathrm{t}} w', w\rangle = \langle w', \widetilde{L}_0 w\rangle, \qquad \langle L_0^{\mathrm{t}} w', w\rangle = \langle w', L_0 w\rangle$$

对所有 $w \in \mathbb{W}, w' \in \mathbb{W}^*$。注意以下事实，这些事实针对 $L_0, W^\vee$ 给出；类似地，它们对 L_0, W' 也成立：

- 由 $\mathbb{W}^* = \prod_{n\in\mathbb{C}} \mathbb{W}^*_{(n)}$可知，向量 $w' \in \mathbb{W}^*$ 属于 $\mathbb{W}^\vee$ 当且仅当 w' 是 $L_{\mathrm{t}0}$的有限个特征向量之和。

- $w' \in \mathbb{W}^*$ 的任意广义特征向量 $L_{\mathrm{t}0}$ 都是 $L_{\mathrm{t}0}$的特征向量。也就是说，若 $(L_{\mathrm{t}0} - \lambda)^k w' = 0$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$成立，则 $(L_{\mathrm{t}_0} - \lambda)w' = 0$。特别地，$L_{\mathrm{t}0}$ 在 $\mathbb{W}^*$的每个有限维 $L_{\mathrm{t}0}$-不变子空间上都是可对角化的。

根据备注 9.7，L_0 和 $\widetilde{L}_0$ 在 $\mathbb{W}$上对易。因此 L_0^{t} 和 $\widetilde{L}_0^{\mathrm{t}}$ 在 $\mathbb{W}^*$上对易。因此，由于 $\mathbb{W}(n)^*$ 是 n 在 $\widetilde{L}_0^{\mathrm{t}}$ 上的 $\mathbb{W}^*$-特征空间，我们看到 $\mathbb{W}(n)^*$ 是 L_0^{t}-不变的，因此 $L_0^{\mathrm{t}}|_{\mathbb{W}(n)^*}$ 可对角化。这证明任意 $\widetilde{L}_0^{\mathrm{t}}$-特征向量都是有限个$L_0^{\mathrm{t}}$-特征向量之和。因此 $\mathbb{W}' \subset \mathbb{W}^\vee$。类似的论证表明 $\mathbb{W}^\vee \subset \mathbb{W}'$。

□

17.7

为简单起见，我们现在假设 $\mathbb{W}_1$、$\mathbb{W}_2$、$\mathbb{W}_3$ 均为半单的，并证明我们对交织算子的定义与文献中通常采用的定义一致（例如[FHL93]）。

在（17.4）中，令 $n=0$，$u=\mathbf{c}$ $m=1$，可得

$$\begin{aligned}&[L_0,\mathcal{Y}(w_1,\xi)]=\xi\mathcal{Y}(L_{-1}w_1,\xi)+\mathcal{Y}(L_0w_1,\xi)\\=&\xi\partial_\xi\mathcal{Y}(w_1,\xi)+\mathcal{Y}(L_0w_1,\xi).\end{aligned}$$

由此可得**尺度协变性**（假设 $z\neq 0$）

$$z^{L_0}\mathcal{Y}(w_1,\xi)z^{-L_0}=\mathcal{Y}(z^{L_0}w_1,z\xi). \tag{17.8}$$

此处以及本节余下部分，我们遵循以下约定，这是必要的，因为 z^{L_0} 和 $\mathcal{Y}(\cdot,\ \xi)$ 取决于变量 z，ξ的取值。

约定 17.7。我们假设 $\arg(z\xi)=\arg\ z+\arg\ \xi$ 和 $\arg\ z^{-1}=-\arg\ z$。若 $a\in\mathbb{R}$，我们假设 $\arg\ z^a=a\arg\ z$。对于正变量 $r>0$，除非另有说明，我们假设 $\arg r=0$。我们假设 $\arg\ 1=0$、$\arg\ e^{\mathbf{i}\theta}=\theta$（其中 $\theta\in\mathbb{R}$）。

令 $\xi=1$。那么（17.8）表明

$$\langle\mathcal{Y}(w_1,z)w_2,w_3'\rangle=\langle\mathcal{Y}(z^{-L_0}w_1,1)z^{-L_0}w_2,z^{L_0}w_3\rangle \tag{17.9}$$

由于当 w_1，w_2，w_3' 是 L_0-齐次时它也是如此，因此它必定是 z 的（有限个）线性组合，各项为（不一定是积分次幂的）幂。于是我们可以写成

$$\mathcal{Y}(w_1,z)=\sum_{n\in\mathbb{C}}\mathcal{Y}(w_1)_nz^{-n-1}$$

其中每个 $\mathcal{Y}(w_1)_n:\ \mathbb{W}_2\to\mathbb{W}_3^{\mathrm{cl}}$都满足

$$[L_0,\mathcal{Y}(w_1)_n]=\mathcal{Y}(L_0w_1)_n-(n+1)\mathcal{Y}(w_1)_n. \tag{17.10}$$

这表明，如果 w_1 是 L_0-齐次的，权为 $\mathrm{wt}w_1$，那么 $\mathcal{Y}(w_1)_n$ 会使 L_0-权增加 $\mathrm{wt}\ w_1-n-1$。特别地，$\mathcal{Y}(w_1)_n$ 是一个线性映射

$$\mathcal{Y}(w_1)_n:\mathbb{W}_2\to\mathbb{W}_3.$$

因此，通过检查每个幂次的系数 ξ 在（17.4）中，我们得到：

命题 17.8. 设 $\mathbb{V}$ 为 C_2-余有限，且 $\mathbb{W}_1$、$\mathbb{W}_2$、$\mathbb{W}_3$ 为半单。那么，类型为 $\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}$ 的交织算子等价于一个线性映射

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}:\mathbb{W}_1&\to\mathrm{Hom}(\mathbb{W}_2,\mathbb{W}_3)\{z\}\\w_1&\mapsto\mathcal{Y}(w_1,z)=\sum_{n\in\mathbb{C}}\mathcal{Y}(w_1)_nz^{-n-1}\end{aligned}$$

满足以下条件

- 雅可比恒等式：对于每个 $u\in\mathbb{V}$、$w_1\in\mathbb{W}_1$、m、$n\in\mathbb{Z}$ 和 $k\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{m}{l}\mathcal{Y}\big(Y(u)_{n+l}w_1\big)_{m+k-l}\\&=\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\binom{n}{l}Y(u)_{m+n-l}\mathcal{Y}(w_1)_{k+l}-\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^{n+l}\binom{n}{l}\mathcal{Y}(w_1)_{n+k-l}Y(u)_{m+l}.\end{aligned}\tag{17.11}$$

- 平移性质：对于每个 $w_1\in\mathbb{W}_1$，我们有 $[L_{-1},\mathcal{Y}(w_1,z)]=\mathcal{Y}(L_{-1}w_1,z)$。

另请注意，通过在 $n=0$，$u=\mathbf{c}$ $m=0$ （17.4）中取值，我们得到

$$[L_{-1},\mathcal{Y}(w_1,z)]=\mathcal{Y}(L_{-1}w_1,z).\tag{17.12}$$

17.8

假设 17.9。本节剩余部分中，我们假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限且有理的。

我们将构造由 Huang 和 Lepowsky 提出的辫子张量范畴$\mathrm{Rep}(\mathbb{V})$ 的半单 $\mathbb{V}$-模。关于辫子张量范畴的定义，参见 [BK、EGNO] 。

$\mathrm{Rep}(\mathbb{V})$ 的对象是半单的 $\mathbb{V}$-模，两个对象 $\mathbb{W}_1$，$\mathbb{W}_2$ 之间的态射空间为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1,\ \mathbb{W}_2)$。因此，$\mathrm{Rep}(\mathbb{V})$ 是一个半单阿贝尔范畴。

固定 $\mathcal{E}$ 为一组两两不同构的不可约 $\mathbb{V}$-模的极大集合，如因子分解定理16.16所述。回忆一下，根据推论 $\mathcal{E}$，它是有限的16.15。对于每个半单 $\mathbb{W}_1$，$\mathbb{W}_2$，定义张量积（更准确地说，**融合积**）

$$\mathbb{W}_1\boxtimes\mathbb{W}_2=\bigoplus_{\mathbb{W}_s\in\mathcal{E}}\mathbb{W}_s\otimes\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}^*\tag{17.13}$$

其中 $\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}^*$ 是空间 $\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}$ 的（有限维）对偶空间。如果 $F\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1,\ \mathbb{W}_3)$ 且 $G\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_2,\ \mathbb{W}_4)$，那么该线性映射的转置

$$\begin{aligned}(F\otimes G)^{\mathrm{t}}:\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_3\mathbb{W}_4}&\to\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}\\\mathcal{Y}(\cdot,z)&\mapsto\mathcal{Y}(F\cdot,z)G\end{aligned}\tag{17.14}$$

给出一个线性映射 $\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}^*\to\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_3\mathbb{W}_4}^*$，它与 $\mathbf{1}_{\mathbb{W}_s}$ 的张量积对所有 $\mathbb{W}_s\in\mathcal{E}$求和后，便给出了态射融合积的定义

$$F\boxtimes G:\mathbb{W}_1\boxtimes\mathbb{W}_2\to\mathbb{W}_3\boxtimes\mathbb{W}_4.\tag{17.15}$$

17.9

我们有一个显然的等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1\boxtimes\mathbb{W}_2,\mathbb{W}_3)\simeq\bigoplus_{\mathbb{W}_s\in\mathcal{E}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_s,\mathbb{W}_3)\otimes\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}.$$

通过同构

$$\bigoplus_{\mathbb{W}_s\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_s,\mathbb{W}_3)\otimes\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2} \tag{17.16}$$
$$T\otimes\mathcal{Y}(\cdot,z)\mapsto T\circ\mathcal{Y}(\cdot,z)$$

我们得到一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1\boxtimes\mathbb{W}_2,\mathbb{W}_3)\simeq\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2} \tag{17.17}$$

它具有函子性，即如果 $F:\ \mathbb{M}_1\to\mathbb{W}_1$, $G:\ \mathbb{M}_2\to\mathbb{W}_2$, $H:\ \mathbb{W}_3\to\mathbb{M}_3$是态射，且如果 $\mathcal{Y}\in\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}$ 对应于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W}_1\boxtimes\mathbb{W}_2,\mathbb{W}_3)$中的 $T\in$，那么 $H\circ\mathcal{Y}(F\cdot,z)G$对应于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{M}_1\boxtimes\mathbb{M}_2,\mathbb{M}_3)$中的 $HT(F\boxtimes G)$。

作为一个特殊情形，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V}\boxtimes\mathbb{W},\mathbb{W})\simeq\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}}{\mathbb{V}\ \mathbb{W}}. \tag{17.18}$$

根据定理 16.7 （共形块传播）和小节 16.6，我们有一个同构

$$\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}}{\mathbb{V}\ \mathbb{W}}\xrightarrow{\simeq}\mathrm{End}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W})\qquad \mathcal{Y}\mapsto\mathcal{Y}(\mathbf{1},z)$$

这表明 $\mathbb{W}$的 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V}\boxtimes\mathbb{W},\mathbb{W})=1$的维数为 $\mathbf{1}$。因此，我们有一个标准同态（左单位约束）

$$\mu_L:\mathbb{V}\boxtimes\mathbb{W}\xrightarrow{\simeq}\mathbb{W} \tag{17.19}$$

它对应于 $\mathrm{End}_{\mathbb{V}}(\mathbb{W})$中的 $\mathbf{1}_{\mathbb{W}}$。显然， μ_L 对应于 $\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}}{\mathbb{V}\ \mathbb{W}}$中的顶点算子 $Y_{\mathbb{W}}$。

μ_L 确实是一个同构。当 $\mathbb{W}\in\mathcal{E}$ 时，这一点很容易看出。一般情形可通过取直和并应用同构的函子性（17.17）得到。

右单位约束 $\mu_R:\ \mathbb{W}\boxtimes\mathbb{V}\xrightarrow{\simeq}\mathbb{W}$ 是利用顶点算子ß$Y_{\mathbb{W}}\in\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}}{\mathbb{W}\mathbb{V}}$ 的编织 $Y_{\mathbb{W}}$定义的，其中 ß 在第 17.12节中定义。

17.10

为了定义结合律同构

$$\mathcal{A}:(\mathbb{W}_1\boxtimes\mathbb{W}_2)\boxtimes\mathbb{W}_3\xrightarrow{\simeq}\mathbb{W}_1\boxtimes(\mathbb{W}_2\boxtimes\mathbb{W}_3),$$

我们写道

$$\mathbb{W}_1\boxtimes(\mathbb{W}_2\boxtimes\mathbb{W}_3)=\bigoplus_{\mathbb{W}_t\in\mathcal{E}}\mathbb{W}_t\otimes\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_1,\mathbb{W}_2\boxtimes\mathbb{W}_3}^*$$

$$= \bigoplus_{\mathbb{W}_t \in \mathcal{E}} \mathbb{W}_t \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_1, \bigoplus_{\mathbb{W}_p \in \mathcal{E}} \mathbb{W}_p \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_p}{\mathbb{W}_2 \mathbb{W}_3}^*}^*.$$

请注意，一般而言，对于任意有限维向量空间 J，我们都有一个等价关系

$$\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_p} \otimes J^* \xrightarrow{\simeq} \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_p \otimes J}$$
$$\mathcal{Y} \otimes \omega \mapsto \Psi_{\mathcal{Y} \otimes \omega}$$

其中 $\Psi_{\mathcal{Y}\otimes\omega}(w_1, z)(w_p \otimes \xi)$（其中 $w_p \in \mathbb{W}_p$ 和 $\xi \in J$）等于 $\mathcal{Y}(w_1, z)w_p \cdot \langle \omega, \xi \rangle$。因此，我们得到一个规范等价。

$$\mathbb{W}_1 \boxtimes (\mathbb{W}_2 \boxtimes \mathbb{W}_3) \simeq \bigoplus_{\mathbb{W}_t \in \mathcal{E}} \bigoplus_{\mathbb{W}_p \in \mathcal{E}} \mathbb{W}_t \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_1 \mathbb{W}_p}^* \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_p}{\mathbb{W}_2 \mathbb{W}_3}^* \tag{17.20}$$

类似地，我们有一个规范等价。

$$(\mathbb{W}_1 \boxtimes \mathbb{W}_2) \boxtimes \mathbb{W}_3 \simeq \bigoplus_{\mathbb{W}_t \in \mathcal{E}} \bigoplus_{\mathbb{W}_s \in \mathcal{E}} \mathbb{W}_t \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_s \mathbb{W}_3}^* \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1 \mathbb{W}_2}^*. \tag{17.21}$$

因此，结合映射可以定义为：在每个分量上，它都是 $\mathbf{1}_{\mathbb{W}_t}$ 张量一个同构的转置。

$$\mathcal{F} : \bigoplus_{\mathbb{W}_p \in \mathcal{E}} \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_1 \mathbb{W}_p} \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_p}{\mathbb{W}_2 \mathbb{W}_3} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{\mathbb{W}_s \in \mathcal{E}} \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_s \mathbb{W}_3} \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1 \mathbb{W}_2}. \tag{17.22}$$

我们定义 $\mathcal{F}$。

17.11

任取 $0 < r < \rho$。回忆一下，根据约定 17.7，$\arg r = \arg \rho = 0$。回忆一下，根据例 13.4中的记号，$\mathfrak{P}^2_{r,\ \rho} = (\mathbb{P}^1;\ \mathbf{0},\ r,\ \rho,\ \infty;\ \zeta,\ \zeta - r,\ \zeta - \rho,\ 1/\zeta)$。根据定理 16.16，我们有一个同构

$$\mathcal{F}_{1,23} : \bigoplus_{\mathbb{W}_p \in \mathcal{E}} \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_1 \mathbb{W}_p} \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_p}{\mathbb{W}_2 \mathbb{W}_3} \xrightarrow{\simeq} \mathscr{T}^*_{\mathfrak{P}^2_{r,R}}(\mathbb{W}_3 \otimes \mathbb{W}_2 \otimes \mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{W}'_t)$$

将每个 $\mathcal{Y}_\alpha \otimes \mathcal{Y}_\beta$ 发送到由 $\mathbb{W}_3 \otimes \mathbb{W}_2 \otimes \mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{W}'_t$ 定义的线性泛函】【。

$$\left\langle w'_t, \mathcal{Y}_\alpha(w_1, \rho)\mathcal{Y}_\beta(w_2, r)w_3 \right\rangle := \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\langle w'_t, \mathcal{Y}_\alpha(w_1, \rho)P_n\mathcal{Y}_\beta(w_2, r)w_3 \right\rangle. \tag{17.23}$$

(17.23) 对应于第 4.5 小节中的缝合。因此，借助定理 17.23，($0 < r < \rho$ 在区域上绝对收敛。现在不失一般性地假设所有向量都是 L_0-齐次的。于是由尺度协变性

~(17.8) 且 $L_0 - L_0$ 在不可约 $\mathbb{W}_p$上是一个标量，式 (17.23) 的右端可写为 $\rho^a r^b$ (其中 $a, b \in \mathbb{C}$) 乘以

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle w_t', \mathcal{Y}_\alpha(w_1,1)P_n\mathcal{Y}_\beta(w_2,1)w_3\rangle \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

（参见第7.4小节中的论证。）这说明（17.23）的绝对收敛蕴含在 $0<r<\rho$上的几乎一致收敛。

同样，当 $0<\rho-r<r$ 时，我们有一个同构

$$\mathcal{F}_{12,3} : \bigoplus_{\mathbb{W}_s\in\mathcal{E}} \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_t}{\mathbb{W}_s\mathbb{W}_3} \otimes \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2} \xrightarrow{\simeq} \mathscr{T}^*_{\mathfrak{P}^2_{r,R}}(\mathbb{W}_3\otimes\mathbb{W}_2\otimes\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_t')$$

它将每个 $\mathcal{Y}_\gamma\otimes\mathcal{Y}_\delta$ 映射到由下式定义的线性泛函

$$\langle w_t', \mathcal{Y}_\gamma\big(\mathcal{Y}_\delta(w_1,\rho-r)w_2,r\big)w_3\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle w_t', \mathcal{Y}_\gamma\big(P_n\mathcal{Y}_\delta(w_1,\rho-r)w_2,r\big)w_3\rangle \tag{17.24}$$

它在 $0<\rho-r<r$ 上几乎一致收敛，并对应于第 4.7 小节中的缝合。我们将（17.22）定义为

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{12,3}^{-1}\circ\mathcal{F}_{1,23} \tag{17.25}$$

对任意 r，ρ 满足 $0<\rho-r<r<\rho$。利用定理 16.12，容易验证（17.23）和（17.24）都是平行截面。因此，$\mathcal{F}$与 r，ρ 的具体选择无关。

17.12

接下来要定义编织同构。我们定义一个同构

$$\mathfrak{ß} : \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_2\mathbb{W}_1} \tag{17.26}$$

如下。对于每个 $\mathcal{Y}\in\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}$，注意 $\mathcal{Y}(\cdot,1)\in\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;0,1,8;\zeta,\zeta-1,1/\zeta)}(\mathbb{W}_2\otimes\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_3')$。令 $\gamma:[0,1]\to\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})$ 为一条路径，它是从$(0,1)$到 $(1,0)$绕 0.5 逆时针旋转 π所得，即 $\gamma(t)=(0.5-0.5e^{\mathbf{i}\pi t}, 0.5+0.5e^{\mathbf{i}\pi t})$。沿着这条路径，我们将 $\mathcal{Y}(\cdot,1)$ 平行输运到 $\mathscr{T}^*_{(\mathbb{P}^1;1,0,8;\zeta,\zeta-1,1/\zeta)}(\mathbb{W}_2\otimes\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_3')$中的一个元素。然后我们定义 $\mathfrak{ß}\mathcal{Y}$，使得 $\langle w_3', \mathfrak{ß}\mathcal{Y}(w_2,1)w_1\rangle$就是这个元素。

现在我们可以定义编织

$$\begin{gathered}\sigma : \mathbb{W}_1\boxtimes\mathbb{W}_2 = \bigoplus_{\mathbb{W}_s\in\mathcal{E}} \mathbb{W}_s\otimes\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}^* \xrightarrow{\simeq} \mathbb{W}_2\boxtimes\mathbb{W}_1 = \bigoplus_{\mathbb{W}_s\in\mathcal{E}} \mathbb{W}_s\otimes\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_2\mathbb{W}_1}^* \\ \sigma = \bigoplus_{\mathbb{W}_s\in\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\mathbb{W}_s}\otimes\mathfrak{ß}^{\mathrm{t}}\end{gathered} \tag{17.27}$$

其中 $\mathfrak{ß}^{\mathrm{t}}$ 是 $\mathfrak{ß}:\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_2\mathbb{W}_1}\xrightarrow{\simeq}\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_s}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}$的转置。

可以验证，利用上述定义的单位同构、结合子和编织算子，$\mathrm{Rep}(\mathbb{V})$ 是一个辫子张量范畴。此外，Huang 在 [Hua08b] 中证明了

定理 17.10。假设 $\mathbb{V}$ 是 C_2-余有限、有理、共形场论型（即 $\mathbb{V}(1)=\mathbb{C}\mathbf{1}$），且自对偶（即 $\mathbb{V}\simeq\mathbb{V}'$）。那么$\mathrm{Rep}(\mathbb{V})$ 是一个刚性模张量范畴。

Huang 的证明依赖于亏格-1 缝合与因子分解 [Zhu96,Hua05] 以及（广义）Verlinde 公式 [Hua08a]。

17.13

我们给出 ß$\mathcal{Y}$ 对任意 $\mathcal{Y}\in\mathcal{I}\binom{\mathbb{W}_3}{\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2}$ 的显式公式。首先假设 z 为正且 $z>1$；特别地，$\arg z=0$。回顾小节 17.12 中的路径 γ。注意，$\mathcal{Y}(\cdot,1)$ 沿着 $\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})$ 中从 $(0,1)$ 到 $(0,z)$ 的向右路径 $\alpha_1(t)=(0,1-t+zt)$ 平行移动至 $\mathcal{Y}(\cdot,z)$，而 ß$\mathcal{Y}$ 也类似地沿着从 $(1,0)$ 到 $(z,0)$ 的向右路径 $\alpha_2(t)=(1-t+zt,0)$ 平行移动。因此，$\mathcal{Y}(\cdot,z)$ 沿着从 $(0,z)$ 到 $(z,0)$ 的路径$\alpha_1^{-1}*\gamma*\alpha_2$ 平行移动至 ß$\mathcal{Y}(\cdot,z)$；该路径与 $\gamma_1*\gamma_2$ 同伦，其中

- $\gamma_1(t)=(0,\ e^{\mathbf{i}\pi t}z)$ 是从 $(0,\ z)$ 到 $(0,\ -z)$，其中第一个分量固定，第二个分量是以 0 为中心，从 1 逆时针旋转 π 到 -1的结果。
- $\gamma_2(t)=(tz,\ tz-z)$ 是从 $(0,\ -z)$ 到 $(z,\ 0)$的向右平移。

因此，沿着 $\gamma_1,\mathcal{Y}(\cdot,\ z)$ 平行移动至 $\mathcal{Y}(\cdot,\ e^{\mathbf{i}\pi}z)$。设 ϕ_0：$\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_2\otimes\mathbb{W}_3'\to\mathbb{C}$ 为与 ($\mathbb{P}^1$ 相关联的共形块 $\langle w_3',\ \mathcal{Y}(w_1,\ e^{\mathbf{i}\pi}z)w_2\rangle$；$-1$，0，8；$\zeta+1$，$\zeta$，$1/\zeta$) 以及$\mathbb{W}_1$，$\mathbb{W}_2$，$\mathbb{W}_3'$。沿着 γ_2 对 ϕ_0 进行平行移动，得到 $\phi=\phi_t(w_1\otimes w_2\otimes w_3')$：$\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_2\otimes\mathbb{W}_3'\to\mathscr{O}(\mathbb{C})$，视为关于 τ 的 $\mathrm{Hom}(\mathbb{W}_1\otimes\mathbb{W}_2\otimes\mathbb{W}_3',\ \mathbb{C})$-值幂级数。根据 ∇的定义，我们有

$$\partial_t\phi_t(w_1\otimes w_2\otimes w_3')=z\phi_t(L_{-1}w_1\otimes w_2\otimes w_3')+z\phi_t(w_1\otimes L_{-1}w_2\otimes w_3').$$

令 $\psi_t(w_1\otimes w_2\otimes w_3)=\langle e^{tzL_1}w_3',\ \mathcal{Y}(w_1,\ e^{\mathbf{i}\pi}z)w_2\rangle$。则 $\psi_0=\phi_0$，并由 (17.12)，

$$\begin{aligned}\partial_t\psi_t(w_1\otimes w_2\otimes w_3')&=z\langle L_1e^{tzL_1}w_3',\mathcal{Y}(w_1,e^{\mathbf{i}\pi}z)w_2\rangle\\&=z\psi_t(L_{-1}w_1\otimes w_2\otimes w_3')+z\psi_t(w_1\otimes L_{-1}w_2\otimes w_3').\end{aligned}$$

因此由引理 3.7，必有 $\phi_t=\psi_t$。由于 ϕ_1 由 ß$\mathcal{Y}(\cdot$给出，$z)$，我们得到

$$\langle w_3',ß\mathcal{Y}(w_2,z)w_1\rangle=\langle e^{zL_1}w_3',\mathcal{Y}(w_1,e^{\mathbf{i}\pi}z)w_2\rangle \tag{17.28}$$

当 $z>1$时成立，因此由解析延拓的唯一性，对所有 $z\in\mathbb{C}^\times$ 和 $\arg z$ 均成立。我们将 (17.28简记为

$$ß\mathcal{Y}(w_2,z)w_1=e^{zL_{-1}}\mathcal{Y}(w_1,e^{\mathbf{i}\pi}z)w_2. \tag{17.29}$$

注 17.11。考虑顶点算子 $Y=Y_{\mathbb{V}}$，其中 $\mathbb{V}$。利用 (17.28)，容易验证对所有 $v'\in\mathbb{V}'$，$\langle v',\ Y(\mathbf{1},\ z)\mathbf{1}\rangle=\langle v',\ ßY(\mathbf{1},\ z)\mathbf{1}\rangle$。因此，由命题 16.6，我们可知对所有 $u,\ v\in\mathbb{V}$，

$$\langle v',Y(u,z)v\rangle=\langle v',e^{zL_{-1}}Y(v,-z)u\rangle. \tag{17.30}$$

具体而言，

$$Y_{\mathbb{V}}=ßY_{\mathbb{V}}. \tag{17.31}$$

这一事实称为**斜对称性**。

A 附录：层论基础

在共形块理论中，模层这一语言不可或缺，原因如下。共形块空间预期构成一个向量丛（等价地说，是局部自由层）。这一结果极具非平凡性。此外，我们需要精确地表述“构成一个向量丛”这一概念。为此，我们需要将向量丛的概念扩展到模层。

本附录部分旨在熟悉层论的基本语言。关键要点如下：全纯向量丛与局部自由层之间的等价、用 $\mathscr{O}_X$-模态射描述对偶向量丛，以及 $\mathscr{O}_X$-模的纤维及其与向量丛纤维的关系。

A.1 （预）层与茎

根据定义，与拓扑空间 X 相关联的（复）向量空间预层 **presheaf** $\mathscr{F}$ 由以下数据构成：对每个开集 $U \subset X$，都有一个向量空间$\mathscr{F}(U)$；对每个开集 $V \subset U$，都有一个线性映射 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V), s \mapsto s|_V$，称为**限制映射**，满足 $s|_U = s$，并且对于所有满足 $W \subset V$为开集的 $s \in \mathscr{F}(U)$，都有 $(s|_V)|_W = s|_W$。$\mathscr{F}(U)$ 中的元素称为**截面**。

预层 $\mathscr{F}$ 称为**层**，如果它满足：

- （局部性）如果 $U \subset X$是开子集 $U = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha$的并，且 $s \in \mathscr{F}(U)$满足：对每个 $\alpha \in \mathfrak{A}$，都有 $s|_{U_\alpha} = 0$ $s = 0$。
- （粘合）如果 $U \subset X$ 是开子集 $U = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha$ 的并，且对每个 α，都存在一个元素 $s_\alpha \in \mathscr{F}(U_\alpha)$，使得对所有 α，$s_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$，$\beta \in \mathfrak{A}$，那么就存在 $s \in \mathscr{F}(U)$，其在每个 U_α上的限制都是 s_α。

我们还记

$$H^0(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X), \tag{A.1}$$

将 $\mathscr{F}$ 的整体截面空间视为 $\mathscr{F}$的第 0 个上同调群。

如果 Y是 X的一个开子集，那么所有 $\mathscr{F}(U)$（其中 $U \subset Y$）自然构成一个预层，我们将其记为 $\mathscr{F}_Y$或 $\mathscr{F}|_Y$。

设 $\mathscr{F}$ 是一个预层。对于每个 $x \in X$，我们令 $\mathscr{F}_x$ 为所有定义在 x 的某个邻域上的截面 $s \in \mathscr{F}$ 所构成的集合，并将满足以下等价关系的元素视为相等：两个元素 s, t 属于 $\mathscr{F}_x$，当且仅当 s 和 t 在 x 所在开集内某个可能更小的邻域上相等，而 s, t 定义在这些开集上。$\mathscr{F}_x$ 称为 $\mathscr{F}$ 在 x处的**茎**，$\mathscr{F}_x$ 中的元素称为**芽**。对于每个在 x附近定义的 $s \in \mathscr{F}$，其在 x 处对应的芽记为 s_x。

注 A.1. 容易看出，预层 $\mathscr{F}$ 满足局部性，当且仅当以下条件成立：对于每个开集 $U \subset X$ 和截面 $s \in \mathscr{F}(U)$，$s = 0$当且仅当 $s_x = 0$对所有 $x \in U$成立。

A.2 层化

我们对不是层的预层不感兴趣。每个预层 $\mathscr{F}_0$ 都可以通过以下称为**层化**的过程变成一个层 $\mathscr{F}$：

对于每个开集 $U \subset X$，令 $\mathscr{F}_1(U)$ 为所有 $s := (s_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 的集合，其中 $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 是 U 的开覆盖，并且对于所有 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathfrak{A}$和 $x \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$，$s_{\alpha_1,\ x} = s_{\alpha_2,\ x}$。$\mathscr{F}(U)$ 是模以下关系的 $\mathscr{F}_1(U)$：令 $(V_\beta)_{\beta\in\mathfrak{B}}$ 为另一个开覆盖。那么，当且仅当对于所有 $\alpha \in \mathfrak{A}$、$\beta \in \mathfrak{B}$和 $x \in U_\alpha \cap V_\beta$，$s := (s_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 与 $t := (t_\beta)_{\beta\in\mathfrak{B}}$ 被视为相等，即 $s_{\alpha,\ x} = t_{\beta,\ x}$。通过将 $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 和 $(V_\beta)_{\beta\in\mathfrak{B}}$ 替换为一个共同的更细开覆盖（例如 $(U_\alpha \cap V_\beta)_{\alpha\in\mathfrak{A},\ \beta\in\mathfrak{B}}$），即可轻松定义 s 和 t 的线性组合。

注意，茎 $(\mathscr{F}_0)_x$ 可以自然地识别为层化 $\mathscr{F}_x$的茎。

A.3 模与态射的（预）层

现在令 X 为一个复流形。那么，所有的 $\mathscr{O}(U)$（其中 $U \subset X$ 为开集）构成 $\mathscr{O}_X$ 上的全纯函数层，记作 **结构层** X。

例 A.2. 令 $U \subset \mathbb{C}^m$ 为开集。那么，茎 $\mathscr{O}_{U,0} = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^m,0}$ 可识别为 $\mathbb{C}$的子代数，其中包含在以 0 为中心的开球上绝对收敛的元素 $\mathbb{C}[[z_1,\dots,z_m]]$。

一个**（预）层 $\mathscr{O}_X$-模** $\mathscr{F}$是满足以下条件的（预）层：每个 $\mathscr{F}(U)$都是一个 $\mathscr{O}(U)$-模，并且对每个开集 $V \subset U$，限制映射 $s \in \mathscr{F}(U) \mapsto s|_V \in \mathscr{F}(V)$与 $\mathscr{O}(U)$的作用相容，即对所有 $f \in \mathscr{O}(U)$都有 $(fs)|_V = f|_V \cdot s|_V$。一个$\mathscr{O}_X$-模层简称为一个**-模**。

一个**（分别为预层的）$\mathscr{O}_X$-模** φ 的态射：$\mathscr{E} \to \mathscr{F}$ 为每个开集$U \subset X$给出一个 $\mathscr{O}(U)$-模态射 φ_U：$\mathscr{E}(U) \to \mathscr{F}(U)$，并且它与对开子集的限制相容：若 $V \subset U$是开集且 $s \in \mathscr{E}(U)$，则 $\varphi_U(s)|_V = \varphi_V(s|_V)$。

约定 A.3。我们将每个 $\varphi_U(s)$ 简记为 $\varphi(s)$。因此 $\varphi(s|_V) = \varphi(s)|_V$。

注 A.4。注意，$\mathscr{O}_X$ 在 x 处的茎$\mathscr{O}_{X,\ x}$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数。一个态射 φ：$\mathscr{E} \to \mathscr{F}$自然地给出一个$\mathscr{O}_{X,\ x}$-模态射 φ_x：$\mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x$。

此外，存在一个自然的 $\mathscr{O}_X$-模态射 $\mathscr{E}^s \to \mathscr{F}^s$，其中 $\mathscr{E}^s$和 $\mathscr{F}^s$分别是 $\mathscr{E}$和 $\mathscr{F}$的层化。相应的茎态射 φ_x：$\mathscr{E}^s_x \to \mathscr{F}^s_x$与 φ_x：$\mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x$一致。

例 A.5。任意（全纯）向量丛 $\mathscr{F}$ [9] 在 X 上都是一个 $\mathscr{O}_X$-模。

例 A.6。若 W 是一个有限维向量空间，令 $W \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_X$ 为预层，其在每个开集 $U \subset X$ 上的截面空间为 $W \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(U)$。那么 $W \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_X$ 自然是一个层，因此也是一个 $\mathscr{O}_X$-模。它被视为纤维为 W的平凡向量丛。我们通常省略 $W \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_X$中的下标 $\mathbb{C}$。

当 W 是无限维时，上述定义的预层不是层，因为对于具有无限多个连通分支的开子集 $U \subset X$，粘合性质不成立。我们用 $W \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_X$ 表示这个预层的层化。

[9]除非另有说明，所有向量丛均为全纯且秩有限。

当U连通时，$(W\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_X)(U)$等于$W\otimes\mathscr{O}(U)$；更一般地，当且仅当$U$具有有限多个连通分支时，两者相等。因此，我们有一个$\mathscr{O}_X$，x-模之间的自然同构

$$(W\otimes\mathscr{O}_X)_x\simeq W\otimes\mathscr{O}_{X,x}.$$

注意，当 U 连通时，$W\otimes\mathscr{O}(U)$ 的元素可以视为从 U 到 W 的某个有限维子空间的全纯函数。我们将这样的截面称为 W**值全纯函数**。

□

约定 A.7. $\mathscr{O}_X$-模态射 $\varphi:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ 构成一个向量空间，显然也是一个 $\mathscr{O}(X)$-模，使得 $f\in\mathscr{O}(X)$ 乘以 φ 等于 $f\varphi$，并将每个 $s\in\mathscr{E}(U)$（其中 $U\subset X$ 为开集）映到 $f|_U\cdot\varphi(s)$。我们将这个 $\mathscr{O}(X)$-模记作 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E},\ \mathscr{F})$。

例 A.8. 设 V，W 是有限维向量空间。一个态射

$$\varphi:V\otimes\mathscr{O}_X\to W\otimes\mathscr{O}_X$$

等价地是一个定义在 X 上的 $\mathrm{Hom}(V,\ W)$ 值全纯函数 Φ。事实上，取 V 的一组基 $\{e_i\}$ 和 W^* 的一组基 $\{f_j\}$。将 W 的每个向量视为 $W\otimes\mathscr{O}(X)$ 的一个常截面。于是 $\varphi(e_i)\in W\otimes\mathscr{O}(X)$，而 Φ 是一个矩阵值全纯函数，其 $(j,\ i)$ 分量是函数 $x\mapsto\langle f_j,\ \varphi(e_i)(x)\rangle$。

总之，我们有一个 $\mathscr{O}(X)$-模的典范同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(V\otimes\mathscr{O}_X,W\otimes\mathscr{O}_X)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)\otimes\mathscr{O}(X).$$

□

A.4 单射性、满射性与同构

称 $\mathscr{O}_X$-模态射 $\varphi:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ 是**单射**（分别是**满射**），如果对每个$x\in X$，相应的茎态射 $\varphi_x:\mathscr{E}_x\to\mathscr{F}_x$ 都是单射（分别是满射）。

练习 A.9. 证明：φ是单射，当且仅当对所有开集 $U\subset X$，$\varphi:\mathscr{E}(U)\to\mathscr{F}(U)$都是单射。证明：$\varphi$ 是满射，当且仅当对每个 $x\in X$ 以及其某个邻域 U上的每个截面 $t\in\mathscr{F}$，将 U缩小为更小的邻域 $V\ni x$后，都能找到 $s\in\mathscr{E}(V)$，使得$\varphi(s)=t$ 限制到 V时成立。

（警告：满射并不意味着每个 x 都包含在某个邻域 U中，使得 $\varphi:\mathscr{E}(U)\to\mathscr{F}(U)$ 是满射。因此，层的满射性既是局部定义的，也是逐截面定义的！）

注记 A.10. 设 $\mathscr{E},\mathscr{F}$是 $\mathscr{O}_X$-模的预层。假设每个 $\mathscr{E}(U)$都是 $\mathscr{F}(U)$的一个$\mathscr{O}(U)$-子模，并且包含映射 $\mathscr{E}(U)\hookrightarrow\mathscr{F}(U)$与层的限制映射相容。那么存在一个自然态射 $\iota:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$，使得 ι_U是包含映射 $\mathscr{E}(U)\hookrightarrow\mathscr{F}(U)$。我们称 $\mathscr{E}$为 $\mathscr{F}$的**子预层$\mathscr{O}_X$-模**。如果 $\mathscr{E},\mathscr{F}$都是层，我们称 $\mathscr{E}$为 $\mathscr{F}$的一个 $\mathscr{O}_X$**-子模**。

现在假设 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模，且 $\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{F}$ 的 $\mathscr{O}_X$-模的一个子预层。那么，$\mathscr{E}$ 的层化可以视为 $\mathscr{F}$ 的一个 $\mathscr{O}_X$-子模。其截面空间由所有满足以下条件的 $s\in\mathscr{F}(U)$ 构成：对于每个 $x\in U$，都有 $s_x\in\mathscr{E}_x$。 □

我们称 $\mathscr{O}_X$-模态射 $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$是一个**同构-模**，如果它是双射（即单射+满射）。

练习 A.11. 证明：φ 是同构，当且仅当对每个开子集 $U \subset X$，$\varphi_U\colon \mathscr{E}(U) \to \mathscr{F}(U)$ 都是 $\mathscr{O}(U)$-模的同构。（事实上，唯一非平凡的部分是证明：φ 是同构蕴含 φ_U满射。令人惊讶的是，要证明这一部分，我们需要用到单射性！）

A.5 核、余核、像

设 $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模态射。**核** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是一个预层，其在任意开子集 U上的截面空间是 $\varphi\colon \mathscr{E}(U) \to \mathscr{F}$的核。显然，$\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是一个层，也是一个 $\mathscr{O}_X$-模。显然，$\mathrm{Ker}(\varphi)_x$ 是茎映射$\varphi : \mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x$的核。

像 $\varphi(\mathscr{E}) = \mathrm{Im}(\varphi)$ 是这样一个预层的层化：它在每个 U 上的截面空间为 $\varphi(\mathscr{E}(U))$。

余核余核(φ) 是预层的层化，该预层在每个 U 上的截面空间为 $\mathscr{F}(U)/\varphi(\mathscr{E}(U))$。等价地，余核$(\varphi)$是预层的层化，该预层在每个 U 上的截面空间为 $\mathscr{F}(U)/\varphi(\mathscr{E})(U)$。因此，我们也称余核$(\varphi)$为层 $\mathscr{F}$ 和 $\varphi(\mathscr{E})$ 的**商**，并写作

$$\mathscr{F}/\varphi(\mathscr{E}) = \mathrm{coker}(\varphi). \tag{A.2}$$

练习 A.12. 证明我们有自然等价

$$\varphi(\mathscr{E})_x \simeq \varphi(\mathscr{E}_x), \tag{A.3}$$
$$\mathrm{Coker}(\varphi)_x \simeq \mathscr{F}_x/\varphi(\mathscr{E}_x). \tag{A.4}$$

A.6 局部自由层

设 I 为指标集。设 $\mathbb{C}^I$ 为由 I 中的元素索引的 $\mathbb{C}$ 的 $|I|$ 个副本的直和。那么 $\mathbb{C}^I$ 的基为 $\{e_i\}_{i\in I}$，其中 e_i 是唯一非零分量为第 i 个分量且其值为 1 的向量。

设 $\mathscr{E}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模。若截面族 $(s_i)_{i\in I} \subset \mathscr{E}(X)$ 使得自然的 $\mathscr{O}_X$-模 $\psi\colon \mathbb{C}^I \otimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{E}$ 将每个 e_i（视为常截面 $e_i \otimes 1$）映到 s_i，且此映射是满射（分别为双射），则称该截面族 **生成**（分别称为自由生成</style） $\mathscr{E}$。

等价地，若对于每个 $x \in X$，每个 $t \in \mathscr{E}_x$ 都能写成芽$(s_{i,x}$ 的（分别为唯一的）线性组合 $\mathscr{O}_{X,x})_{i\in I}$，则 $(s_i)_{i\in I}$ 生成（分别为自由生成） $\mathscr{E}$。

如果 $U \subset X$ 是开集，我们称 $(s_i)_{i\in I}$ 生成（或自由生成） $\mathscr{E}_U$，如果 $(s_i|_U)_{i\in I}$ 如此。

我们称 $\mathscr{E}$ 是**局部自由**的，如果每个 $x \in X$ 都包含在某个邻域 U 中，使得以下等价条件成立：

- $\mathscr{E}_U$ 由有限个截面 s_1、……、 $s_n \in \mathscr{E}(U)$自由生成。（$s_\bullet$起向量空间的基的作用。）
- $\mathscr{E}_U$ 与某个 $n \in \mathbb{N}$ 同构于 $\mathbb{C}^n \otimes \mathscr{O}_U$。

注 A.13. 局部自由的 $\mathscr{O}_X$-模与全纯向量丛相同，这是一个重要事实。事实上，向量丛的截面显然构成一个局部自由模。反过来，假设 $\mathscr{E}$ 是局部自由的，那么我们可以得到一个向量丛，其过渡函数为 $\psi\circ\varphi^{-1}:\ W\otimes\mathscr{O}_U\xrightarrow{\simeq}W\otimes\mathscr{O}_U$（视为取值于 End$W$ 的全纯函数），其中 $\varphi,\psi:\ \mathscr{E}\xrightarrow{\simeq}W\otimes\mathscr{O}_U$ 是平凡化。等价地，若 $s_1,\dots,s_n$ 和 $t_1,\dots,t_n$ 都自由生成 $\mathscr{E}_U$，那么存在唯一的可逆 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 值全纯函数 A，使得 $t_i(x)=\sum_j A_{i,\ j}(x)s_j(x)$。于是 A 给出一个过渡函数。

A.7 态射层、对偶模

如果 $\mathscr{E}$，$\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{O}_X$-模，则有一个预层 $\mathscr{G}$，其在每个开集$U\subset X$上的截面空间是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{E}_U,\mathscr{F}_U)$。如果 $V\subset U$ 是开集，则存在一个从 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{E}_U,\ \mathscr{F}_U)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{E}_V,\ \mathscr{F}_V)$ 的显然限制映射。$\mathscr{G}$显然是一个 $\mathscr{O}_X$-模预层。直接验证可知，$\mathscr{G}$ 是一个层。我们将这个 $\mathscr{O}_X$-模层记为

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E},\mathscr{F}).$$

练习 A.14。 求一个自然等价 $\mathscr{F}\xrightarrow{\simeq}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X,\ \mathscr{F})$。

例 A.15。 在例 A.8的设定下，我们有一个自然的 $\mathscr{O}_X$-模同构

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(V\otimes\mathscr{O}_X,W\otimes\mathscr{O}_X)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)\otimes\mathscr{O}_X. \tag{A.5}$$

我们定义

$$\mathscr{E}^\vee:=\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E},\mathscr{O}_X),$$

称为 **对偶 $\mathscr{O}_X$-模** $\mathscr{E}$。由（A.5）可知，如果 $\mathscr{E}$是局部自由的（即向量丛），那么 $\mathscr{E}^\vee$也是局部自由的，并且它们具有相同的秩。我们将 $\mathscr{E}$视为 $\mathscr{E}$的对偶向量丛。

练习 A.16. 设 $\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个 $\mathscr{O}_X$-子模。证明，$(\mathscr{F}/\mathscr{E})^\vee$ 是这样一个层：其在任意开集 $U\subset X$ 上的截面是 $\mathscr{O}_U$- 模态射 $\mathscr{F}_U\to\mathscr{O}_U$，并且这些态射在 $\mathscr{E}_U$ 的茎上消失。

约定 **A.17.** 若 $U,V\subset X$ 是开集，$\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{E}_V,\mathscr{O}_V)$ 且 $s\in\mathscr{E}(U)$，则定义

$$\langle\varphi,s\rangle=\varphi(s|_{U\cap V})\qquad(\in\mathscr{O}(U\cap V)).$$

注 A.18. 若 $\mathscr{E}$ 是向量丛，则 $\mathscr{E}^\vee$ 的过渡函数是 $\mathscr{E}$ 的过渡函数的逆。为此，取 $s_1,\dots,s_n\in\mathscr{E}(U)$，使其自由生成 $\mathscr{E}_U$。由 $\mathscr{E}_U\simeq\mathbb{C}^n\otimes\mathscr{O}_U$，容易找到 $\check{s}_1,\dots,\check{s}_n\in\mathscr{E}^\vee(U)$，使其自由生成 $\mathscr{E}_U^\vee$，且 $\langle s_j,s_i\rangle$ 是常截面 $\delta_{i,j}$。将 $\check{s}_1,\dots,\check{s}_n$ 视为 $s_1,\dots,s_n$ 的对偶基。

现在，如果 $t_1,\ \dots,\ t_n\in\mathscr{E}(U)$ 也自由生成 $\mathscr{E}_U$，那么根据注 A.13，矩阵值全纯函数 $A\in M_{n\times n}\otimes\mathscr{O}(U)$ 满足 $t_i=\sum_j A_{i,\ j}s_j$ 是 $\mathscr{E}$ 的过渡函数。令 $A^{-1}\in M_{n\times n}\otimes\mathscr{O}(U)$ 为将 $x\in U$映射到 $A(x)^{-1}$的函数。于是$\check{t}_i=\sum_j(A^{-1})_{i,\ j}\check{s}_j$。 □

A.8 纤维

可以通过以下方式从局部自由层中恢复纤维。考虑一般的 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{E}$。对于每个 $x \in X$，令 $\mathfrak{m}_{X,x}$（或简写为 $\mathfrak{m}_x$）为 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的理想，它由所有在 x 处取值为零的 $s \in \mathscr{O}_{X,x}$ 组成。那么 $\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x$ 是 $\mathscr{O}_{X,x}$-子模 $\mathscr{E}_x$，因此它也是**纤维**

$$\mathscr{E}|x \equiv \mathscr{E}|_x = \frac{\mathscr{E}_x}{\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x}. \tag{A.6}$$

其中，记号 $\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x$ 中省略了 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}$。$s \in \mathscr{E}_x$ 在 $\mathscr{E}|x$ 中的等价类记为 $s(x)$，称为 s 在纤维 $\mathscr{E}|x$ 上的取值。

如果 $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模态射，并且 $x \in X$，那么 $\varphi\colon \mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x$ 诱导出一个线性映射。

$$\varphi : \mathscr{E}|x \to \mathscr{F}|x \tag{A.7}$$

自从 $\varphi(\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x) = \mathfrak{m}_x\varphi(\mathscr{E}_x) \subset \mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$。

例 A.19。设 $U \ni 0$ 是 $\mathbb{C}^m$ 的开子集。那么 $\mathfrak{m}_{U,0}$ 是所有在 0 附近绝对收敛的级数 $\sum_{n_1,\dots,n_m\in\mathbb{N}} a_{n_1,\dots,n_m} z_1^{n_1}\cdots z_m^{n_m}$ 的集合，其中 $a_{0,\dots,0} = 0$。等价地，

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^m,0} = z_1\mathscr{O}_{\mathbb{C}^m,0} + \cdots + z_m\mathscr{O}_{\mathbb{C}^m,0}.$$

习题 A.20. 设 W 是一个向量空间，且 $\mathscr{E} = W \otimes \mathscr{O}_U$，其中 $U \subset \mathbb{C}^m$。设 $x \in U$。证明求值映射

$$(W \otimes \mathscr{O}_U)_x \to W, \qquad w \otimes f \mapsto f(x)w. \tag{A.8}$$

下降为向量空间同构 $(W \otimes \mathscr{O}_X)\big|x \simeq W$。

A.9 局部自由性判据

本小节仅在第 15 节中需要。

设 X 是一个复流形，$\mathscr{E}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模。若每个 $x \in X$ 都包含在某个邻域 $U \subset X$ 中，且存在有限个截面 $s_1, \dots\dots, s_n \in \mathscr{E}(U)$ 生成 $\mathscr{E}_U$，则称 $\mathscr{E}$ 为**有限型**（也称**有限生成**）。等价地，每个 x 都包含在某个邻域 U 中，且存在一个满射的 $\mathscr{O}_U$-模态射 $\mathbb{C}^n \otimes \mathscr{O}_U \to \mathscr{E}_U$。

警告：已知 $\mathscr{E}(U)$ 是一个有限生成的 $\mathscr{O}(U)$-模，并不足以证明 $\mathscr{E}_U$ 是由 $\mathscr{E}(U)$ 的有限多个元素生成的。

若 $x \in U$ 和 $s_1, \dots\dots, s_n \in \mathscr{E}(U)$ 生成 $\mathscr{E}_U$，那么它们显然也生成 $\mathscr{E}_x$，因此 $s_1(x), \dots\dots, s_n(x)$ 张成纤维 $\mathscr{E}|x$。特别地，$\mathscr{E}|x$ 是有限维的。反之，我们有：

命题 A.21 (中山引理). 假设 $\mathscr{E}$ 是有限型的。取 $x \in X$ 和一个邻域 $U \ni x$。令 $s_1, \dots, s_n \in \mathscr{E}(U)$ 满足 $s_1(x), \dots, s_N(x)$ 张成纤维 $\mathscr{E}|x$。那么存在 x 的一个邻域 $V \subset U$，使得 $s_1|_V, \dots, s_n|_V$ 生成 $\mathscr{E}|_V$。

证明。通过缩小 U，我们可以将列表 $s_1,\dots,s_n$扩充为 $s_1,\dots,s_N\in\mathscr{E}(U)$（其中 $N\geqslant n$），使得它们生成 $\mathscr{E}_U$。如果 $N=n$，则无需证明。

假设 $N>n$。由于 $s_1(x)$、.....、 $s_n(x)$张成 $\mathscr{E}_x$中的每个元素，特别是 s_N，都可以写成

$$s_N=a_1s_1+\cdots+a_ns_n+\sigma\qquad\in\mathscr{E}_x$$

其中 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$和 $\sigma\in\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x$。由于 $s_1,\dots,s_N$生成$\mathscr{O}_{X,x}$-模 $\mathscr{E}_x$，因此 $\sigma=f_1s_1+\cdots+f_Ns_N$属于 $\mathscr{E}_x$，其中 $f_1,\dots,f_N\in\mathfrak{m}_x$。所以

$$s_N=g_1s_1+\cdots+g_Ns_N$$

在 $\mathscr{E}_x$其中 $g_1,\dots,g_N\in\mathscr{O}_{X,x}$和 $g_{n+1}(x)=\cdots=g_N(x)=0$。由于 $g_N(x)=0,1-g_N$在$\mathscr{O}_{X,x}$中可逆。因此

$$s_N=(1-g_N)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}g_is_i$$

在 $\mathscr{E}_x$中。因此，将 U缩小为 x 的一个更小邻域，使得 $g_1,\dots,g_N,(1-g_N)^{-1}$都是全纯的之后，上述等式在 $\mathscr{E}(U)$中成立。这说明 s_N 是 $\mathscr{O}(U)$的线性组合，由 $s_1,\dots,s_{N-1}$表示。因此，$s_1,\dots,s_{N-1}$ 生成 $\mathscr{E}_U$。重复这一论证可知，对于一个更小的 U， $s_1,\dots,s_n$ 生成了 $\mathscr{E}_U$。□

定理 A.22。假设 $\mathscr{E}$是有限型的。那么秩函数

$$r:X\to\mathbb{N},\qquad x\mapsto r(x)=\dim\mathscr{E}|x\tag{A.9}$$

是上半连续的。（因此，对所有 y，在 x的某个邻域内都有 $r(x)\geqslant r(y)$。）此外，如果秩函数是局部常值的，那么 $\mathscr{E}$是局部自由的。

证明。设 $n=r(x)$。选取 $s_1,\dots,s_n\in\mathscr{E}(U)$（其中 $U\ni x$），使得 $s_1(x),\dots,s_n(x)$构成 $\mathscr{E}|x$的一组基。于是根据中山引理，缩小 U后， $s_1,\dots,s_n$生成$\mathscr{E}|_U$，因此对所有 $y\in U$，它们张成 $\mathscr{E}|y$。这证明了上半连续性。

现在假设 r在 U上恒为 n。于是，当 $s_1(y)$，.....， $s_n(y)$张成 $\mathscr{E}|y$时，由于 dim $\mathscr{E}|y=n$， $s_1(y)$，.....， $s_n(y)$线性无关。让我们证明 s_1，.....， s_n通过证明它们 $\mathscr{O}_U$-线性无关而自由生成 $\mathscr{E}_U$。任取一个开集 $V\subset U$和 f_1，.....， $f_n\in\mathscr{O}(V)$，使得 $f_1s_1+\cdots+f_ns_n=0$。那么对于每个 $y\in V$， $\sum_{i=1}^n f(y)s_n(y)$在 $\mathscr{E}|y$中等于 0。因此，根据 $s_1(y)$，.....， $s_n(y)$的线性无关性， $f_1(y)=\cdots=f_n(y)=0$。所以 $f_1=\cdots=f_n=0$。□

索引

C_2-余有限顶点算子代数，146；N-标记紧黎曼曲面，107；W-值全纯函数，172；$\mathfrak{x}$ 的提升 $\mathfrak{y}\in H^0(\mathcal{B},\ \Theta_{\mathcal{B}})$，130；绝对且局部一致（一致几乎处处）收敛，69；Dong 引理，86；N-标记紧黎曼曲面的族，124；有限生成弱 $\mathbb{V}$-模，146；形式收敛，71；顶点算子代数 $\mathbb{V}$的生成子集，50；齐次场生成集，56；$\mathbb{W}$的生成子集，146；Goddard 唯一性，87；变换的全纯族，100；不可约顶点算子代数模，89；雅可比恒等式，代数形式，47、88；雅可比恒等式，复解析形式，79；射影图卡/结构，144；有理顶点算子代数，90；自对偶顶点算子代数，98；半单顶点算子代数模，153；Stein流形，131；$H^0\big(C$在 $\mathbb{W}_\bullet$上的作用，$\mathscr{V}_C\otimes\omega_C(\star x_\bullet)\big)$，116；单叶函数，108；弱 $\mathbb{V}$-模和（有限）可容许$\mathbb{V}$-模，88；1，真空截面，110；1，真空向量，10A_r、R 和标准薄环带A_1，1、9；$(A_kB)(z)$，77；$\mathcal{C}_b=\pi^{-1}(b)$，$\mathcal{C}$ 在 b处的纤维，124；C、Σ，C 和 Σ的复共轭，10；$\mathcal{C}_V=\pi^{-1}(V)$，136；$\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$，16；$\mathscr{E}(\star x_\bullet)$，114 $\mathscr{E}(kS_{\mathfrak{X}}),\mathscr{E}(\star S_{\mathfrak{X}})$，130$\mathscr{E}|x=\mathscr{E}|_x,s(x)$，175 $\mathscr{F}_x,s_x$，茎和芽。170f^*,η^*，.....以及f,η，.....，其中 $f^*(x)=f(x)$和 $f(x)=f(x)$。10$\mathbb{G},\mathbb{G}_+$，99$\mathscr{G},\overline{\mathscr{G}_+}$，98$H^0(X,\mathscr{F})\equiv\mathscr{F}(X)$，170 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\overline{\mathscr{E}},\mathscr{F})$，172$\mathscr{J}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet),\mathscr{J}_{\mathfrak{X}_b}(\mathbb{W}_\bullet)$，137，138，140$\mathcal{L}_{\mathfrak{x}}$，李导数，122，143$\sim L_0$，88$\mathfrak{m}_{X,x}\equiv\mathfrak{m}_x$，175$P_n$，31，92$\mathcal{S}\phi$，标准缝合，152$\sim\mathcal{S}\phi$，归一化缝合，152 $S_{\mathfrak{X}}=\bigcup_{j=1}^N\varsigma_j(\mathcal{B})$，124$S_{\mathfrak{X}_b}=\{\varsigma_1(b),\ .....,\ \varsigma_N(b)\}$，135$T_\Sigma,T_{\mathfrak{X}}$：相互作用映射/关联函数，8，26$\mathscr{T}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet),\mathscr{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，116，119，137，140$\mathcal{U}(\alpha),\mathcal{U}(\eta),\mathcal{U}(\eta_\bullet)$，100，117，118，140$\mathcal{U}_\varrho(\eta)$，110，135$U_b=\mathcal{C}_b\cap U$，130$\mathcal{V}_\varrho(\eta_i),\mathcal{V}_\varrho(\varphi)$，117，119，136，143 $\mathscr{V}_C^{\leqslant n},\mathscr{V}_C$，110，111$\mathbb{V}',\mathbb{W}'$，分次对偶空间，31，92$\mathbb{V}^{\mathrm{cl}},\mathbb{W}^{\mathrm{cl}}$，代数完备化，31 92，$\underset{\sim}{\mathrm{wt}}v$，$\mathrm{wt}w$，28，88$\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}^{\leqslant n},\mathscr{V}_{\mathfrak{X}}$，135$\mathbb{W}'$，$\mathbb{V}$ 的共轭 $\mathbb{W}$-模，94$\mathbb{W}^{\leqslant n}$，100$\mathbb{W}_\bullet^{\leqslant k}$，147 $\mathscr{W}(\mathbb{W}_i),\mathscr{W}_{\mathfrak{X}}(\mathbb{W}_\bullet)$，117，118，137，140

— —

$w_\bullet = w_1 \otimes \cdots \otimes w_N$ 作为一个元素 $\mathbb{W}_\bullet \otimes_{\mathbb{C}}$
$\mathscr{O}(V)$，137$W\{z\}$，153$\mathfrak{X}_b$，124$\mathfrak{X}_V$，140
$\mathcal{V}(\mathcal{U})$，128Θ，CPT算符，11Θ_C，120
$\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$，135
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ： $\mathcal{H}^{\otimes 2} \to \mathbb{C}$，关联函数$T_{A_1}$，1

对于A_1，1，16$\bowtie$，152ω_C，114$^{\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}}$，135
$\varrho(\alpha|\mathbf{1})$, $\varrho(\eta|\mu)$，103，109，134ϑ_z，93$\wr\phi$，
共形块传播，154

参考文献

[ACG] Arbarello, E., Cornalba, M. 和 Griffiths, P.A., 2011。《代数曲线几何：第二卷》，并由 Joseph Daniel Harris 撰写部分内容。Springer Berlin Heidelberg。[BK] Bakalov, B. 和 Kirillov, A.A., 2001。《张量范畴与模函子的讲义》（第 21 卷）。美国数学会。[Buhl02] Buhl, G., 2002。顶点算子代数模的一个生成集。《代数杂志》，254(1)，第125-151页。[CKLW18] Carpi, S., Kawahigashi, Y., Longo, R. 和 Weiner, M., 2018。从顶点算子代数到共形网再返回（第254卷，第1213号）。《美国数学会回忆录》[DGT19] Damiolini, C., Gibney, A. 和 Tarasca, N., 2019。关于顶点代数的共形块的因子分解与向量丛。arXiv 预印本 arXiv:1909.04683。[DL14] Dong, C. 和 Lin, X., 2014。酉顶点算子代数。《代数杂志》，397，第252-277页。[EGNO] Etingof, P., Gelaki, S., Nikshych, D. 和 Ostrik, V., 2016。《张量范畴》（第205卷）。美国数学会。[FB04] Frenkel, E. 和 Ben-Zvi, D., 2004。《顶点代数与代数曲线》（第88号）。美国数学会。第二版。[FHL93] Frenkel, I., Huang, Y.Z. 和 Lepowsky, J., 1993。关于顶点算子代数及其模的公理化方法（第494卷）。美国数学会。[FMS] Francesco, P., Mathieu, P. 和 S´en´echal, D., 2012。《共形场论》。Springer Science & Business Media。[FZ92] Frenkel, I.B. 和 Zhu, Y., 1992。与仿射代数和 Virasoro 代数表示相关的顶点算子代数。《杜克数学杂志》，66(1)，第123-168页。[GN03] Gaberdiel, M.R. 和 Neitzke, A., 2003。有理性、拟有理性与有限W代数。《数学物理通讯》，238(1)，第305-331页。[GR-a] Grauert, H. 和 Remmert, R., 2013。《Stein空间理论》（第236卷）。Springer Science & Business Media。[GR-b] Grauert, H. 和 Remmert, R., 1994。《多复变数 VII：复分析中的层论方法》（第74卷）。柏林：Springer-Verlag。[Gui] Gui, B.，《共形块：向量丛结构、缝合与因子分解》。[Gui19] Gui, B., 2019。类型为 B、C 和 G_2 的酉仿射顶点算子代数交织算子的能量有界条件。《美国数学会汇刊》，372(10)，第7371-7424页。[Gui20] Gui, B.，《共形块缝合的收敛性》，arXiv:2011.07450[Gui21] 共形块的缝合与传播。arXiv:2110.04774[Hua97] Huang, Y.Z., 1997。《二维共形几何与顶点算子代数》（第148卷）。Springer Science & Business Media。[Hua05] Huang, Y.Z., 2005。微分方程、对偶性与模不变性。《当代数学通讯》，7(05)，第649-706页。[Hua08a] Huang, Y.Z., 2008。顶点算子代数与Verlinde猜想。《当代数学通讯》，10(01)，第103-154页。[Hua08b] Huang, Y.Z., 2008。顶点张量范畴的刚性与模性。《当代数学通讯》，10(supp01)，第871-911页。[Hub80] Hubbard, J.H., 1980。射影结构的单值化。载于《黎曼曲面及相关主题：1978年石溪会议论文集》（纽约州立大学石溪分校，纽约州石溪，1978年）（第97卷，第257-275页）。[Jac] Jacobson, N., 1979。《李代数》（第10号）。Courier Corporation。[Kac] Kac, V.G., 1998。《初学者的顶点代数》（第10号）。美国数学会。[Kna] Knapp, A.W., 2016。半单群表示论。载于《半单群表示论》。普林斯顿大学出版社。[LL] Lepowsky, J. 和 Li, H., 2004。《顶点算子代数及其表示导论

（第227卷）。Springer Science & Business Media。[Miy04] Miyamoto, M., 2004。满足C_2-余有限性的顶点算子代数的模不变性。《杜克数学杂志》，122(1)，第51-91页。[Muk10] Mukhopadhyay, S., 2010。共形块的分解（博士论文，硕士论文，北卡罗来纳大学教堂山分校）。[Seg88] Segal, G.B., 1988。共形场论的定义。载于《理论物理中的微分几何方法》（第165-171页）。Springer，Dordrecht。[TUY89] Tsuchiya, A., Ueno, K. 和 Yamada, Y., 1989。具有规范对称性的稳定曲线普适族上的共形场论。载于《可积系统与量子场论》（第459-566页）。Academic Press。[Wang93] Wang, W., 1993。Virasoro顶点算子代数的有理性。《国际数学研究通知》，1993(7)，第197-211页。[Was10] Wassermann, A., 2010。Kac-Moody代数与Virasoro代数。arXiv 预印本 arXiv:1004.1287。[Zhu96] Zhu, Y., 1996。顶点算子代数特征标的模不变性。《美国数学会杂志》，9(1)，第237-302页。

中国北京清华大学丘成桐数学科学中心。电子邮件：binguimath@gmail.com
bingui@tsinghua.edu.cn