arXiv:2305.03830v1 [cond-mat.stat-mech] 5 May 2023

活性浴何时表现得像平衡浴?

Shubhendu Shekhar Khali,[1,*] Fernando Peruani,[2,†] 和 Debasish Chaudhuri[1,3,‡]
[1] *Institute of Physics, Sachivalaya Marg, Bhubaneswar 751005, India*
[2] *LPTM, CY Cergy Paris Université, 2 avenue A. Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise cedex, France*
[3] *Max-Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Nöthnitzer Str. 38, 01187 Dresden, Germany*
（日期：2023年5月9日）

活性浴的特征是速度分布呈非高斯分布，且动理学温度和扩散系数与活性速度 v_0 呈二次关系。虽然这些结果适用于过阻尼活性系统，但惯性效应会使速度分布变为正态分布，动理学温度和扩散系数则随 $\sim v_0^\alpha$ 与 $1 < \alpha < 2$增加而增大。值得注意的是，晚期扩散率和迁移率会随质量增加而降低。此外，我们证明，在惯性作用下，平衡爱因斯坦关系会渐近恢复。总之，惯性质量使系统恢复类平衡行为。

平衡流体可以通过其温度、黏滞阻力和扩散率来表征为一个热浴，并遵循爱因斯坦关系 [1]。在某些条件下，活性布朗粒子（ABP）可以构成类似的均匀、各向同性（而非极性）活性流体——即活性标量流体——同时存在局部能量耗散和自驱动 [2–7]。由此自然引出一个问题：这种流体在多大程度上可以表征为活性热浴？自驱粒子的活性由自驱速度 v_0 和前进方向的取向扩散率 D_r决定。这使得单个自驱粒子在维度为 d的空间中作持久随机运动$D_r d^{\frac{v_0^2}{(d-1)}}$，其长时间尺度下的活性扩散率具有相应的标度关系。早期对细菌悬浮液中示踪粒子动力学的实验显示，活性扩散增强了 [8, 9]。在平衡状态下，密度增大会降低扩散率 [10]；而在非平衡细菌浴中，密度增大会提高扩散率 [8]。研究者采用了多种理论方法，考察活性浴对示踪粒子的影响 [11–17]。近期研究根据活性变化，以动理学温度、有效扩散率和黏滞阻力表征自驱粒子系统 [18–25]。尽管扩散率和动理学温度会随活性增强而升高，但理论预测黏滞阻力会呈非单调变化 [22]。在运动诱导相分离（MIPS） [26–28], 中，研究发现稳态系统中的动理学温度可能存在空间差异：高温和低温分别对应稀相和密相 [20]。然而，考虑到时间反演对称性的破缺以及平衡涨落耗散关系的缺失，我们仍不清楚能否将这种描述发展为对活性流体连贯且自洽的图景。

尽管近来对活性物质的研究取得了巨大进展 [2–6], ，但除了[20, 29–34]之外，人们相对较少关注惯性对活性物质的影响。其中一个原因是，胶体粒子从弹道运动到扩散运动的交叉过程所涉及的时间（$\sim$ 100纳秒）和长度尺度（埃）都极短。

然而，对于较大的活性单元——一方面包括鸟类、鱼类和其他动物，另一方面包括人工制造的宏观尺度机器人 [35–37] ——惯性效应可能十分显著。本文考察了由活性布朗粒子（ABP）构成的均匀各向同性流体，并探究其类似活性浴的特性。研究得出了一个引人注目的结论：不仅瞬态行为，甚至渐近性质（包括稳态下的有效扩散率和迁移率）也取决于惯性质量，这与非相互作用的ABP气体形成鲜明对比。此外，速度的强非高斯分布会随着质量增大而逐渐恢复为类似平衡态的高斯分布。最后，随着质量增加，偏离平衡涨落耗散关系的程度会急剧降低。总之，活性虽然会放大非平衡特征，但增加惯性质量会使流体回归平衡。

模型。– 我们考虑 N 活性布朗粒子（ABP），其质量为 m，转动惯量为 I，直径为σ ，在面积为 $L_x \times L_y$ 的二维（2d）矩形盒中运动，边界条件为周期性边界条件（因此，密度为 $\rho = N/L_x L_y$）。粒子沿着方向 $\hat{n}_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$以力 $\mathbf{F}_{A,i} = \gamma_t v_0 \hat{n}_i$自推进。没有相互作用时，这会产生推进速度$v_0$。前进方向（即 θ_i）经历长时间扩散，从而产生有效的持续运动。惯性活性动力学演化为

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}}_i &= -\gamma_t \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{A,i} + \gamma_t\sqrt{2D_t}\,\eta_i(t) \\ I\ddot{\theta}_i &= -\gamma_r\dot{\theta}_i + \gamma_r\sqrt{2D_r}\,\zeta_i(t), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{F}_i = -\nabla_i \sum_j U(r_{ij})$，符号 $\eta_i(t)$ 和 $\zeta_i(t)$ 分别表示高斯白噪声；与平移和旋转相关的黏性阻力分别由 $\gamma_t \mathbf{v}_i$ 和 $\gamma_r\theta_i$描述。粒子间的相互作用源于体积排斥效应，并通过 Weeks-Chandler-Anderson 势建模：当粒子间距$r < r_c = 2^{1/6}\sigma$时，$U(r) = 4\epsilon[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6] + \epsilon$；否则，$U(r) = 0$。长度和能量单位分别由 σ 和 ϵ设定。旋转扩散率 D_r 可以具有非热活性

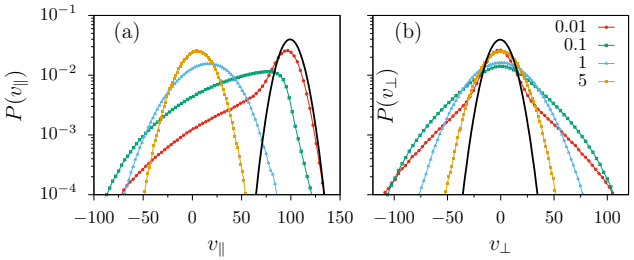


图 1. *Velocity distributions in the particle frame.* 在 $Pe = 100$ 时，速度分量的概率分布：(a) 沿前进方向的平行分量 $P(v_\parallel)$，以及 (b) 垂直分量 $P(v_\perp)$；图中还展示了图例所示的不同 M 值。类似地，在 $P(v_\perp)$中，高惯性下非高斯长尾消失。作为比较，两个图中均以黑色实线给出了 $M = 0.01$ 时非相互作用粒子的分布函数。

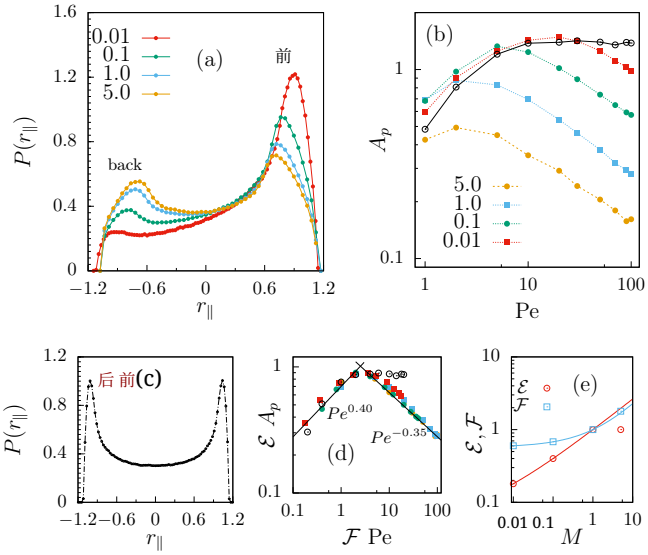


图 2. *Pair distribution in the heading direction:* (a) $P(r_\parallel)$在 $Pe = 100$ 时的分布，以及图例所示的各种 M 值。前后不对称性随 M增大而减小。如 (c) 所示，在平衡状态下，分布完全对称。(b) 展示了不对称参数 A_p 随佩克莱数 Pe 的变化，以及图例所示的各种 M 值。(d) 对惯性系统对 (b) 进行适当重新缩放后，可得到近似的数据塌缩。(e) 尺度因子随 M的变化。在较大的 M下，它们呈现近似的依赖关系 $\mathcal{E} \sim M^{0.4}$ 和 $\mathcal{F} \sim M^{0.6}$。

原点。平动和转动的惯性弛豫分别需要时间尺度 $\tau_I = m/\gamma_t$ 和 $\tau_d = I/\gamma_r$。超过τ_d后，沿前进方向的扩散会导致持续运动，其裸持续时间为 $\tau_p = 1/D_r$，并以此作为时间单位。除非另有说明，我们使用温度为 $D_t = 1.0\,\sigma^2 D_r$的平衡热浴，并设定一个较小且恒定的 $\tau_d = 0.33\tau_p$ [20]。我们尤其关注活性变化对佩克莱数 $\mathrm{Pe} = v_0/(D_r\sigma)$ 的影响，以及使用 $M = \tau_I/\tau_p$考察约化质量的影响。该系统在M足够低、且中等密度 [20]下 Pe 足够高时，会发生运动诱导相分离（MIPS）。为了全面表征均匀活性浴的性质，我们将密度固定在较低值 $\rho = 0.1$，对应的堆积分数为 8%，因此即使在过阻尼极限 [7]下，系统也不会发生相分离。

结果.–随着佩克莱数 Pe 的增加，正如预期的那样，系统逐渐偏离平衡。在图 1 中，我们展示了速度分布的变化，以揭示惯性的影响。为此，我们考虑速度的两个分量：沿前进方向的分量 $v_\parallel = \mathbf{v}\cdot\hat{n}$，以及与其垂直的分量 $v_\perp = (\mathbb{1} - \hat{n}\hat{n})\cdot\mathbf{v}$。在二维情况下，$v_\perp$是一个标量。在较小的 M 下，惯性滞后较小。尽管如此，在 $M = 0.01$ 处，$P(v_\parallel)$ 仍呈现出长尾分布；参见图 1(a) 中的红色曲线。这种长尾在非相互作用活性粒子系统中并不存在，它是由于沿前进方向增强的正面碰撞及其产生的惯性回弹所导致的。在较大的惯性下，次级背向碰撞变得显著，使分布趋于对称，并呈现出类似高斯分布的轮廓，例如在 $M = 5$ [38] 处。我们将在图 2 中利用对分布函数仔细考察碰撞的不对称性。$P(v_\perp)$ 分布同样显示出惯性使系统恢复类似平衡的行为。在较小的 M 下，可以观察到明显的非高斯长尾；随着 M 的增加，这些长尾逐渐消失。将其与无相互作用情况下获得的分布进行比较（图 1(a) 和 (b) 中的黑色曲线），可以看出，非-

高斯行为强烈依赖于粒子间的碰撞。在高惯性条件下，粒子在邻近粒子之间来回反弹，使分布趋于对称，从而呈现出类似平衡态的形状。

相互作用的影响体现在沿前进方向的对分布函数中，即在方向 $\hat{n}$ 上找到一个邻近粒子的概率 $P(r_\parallel)$；见图 2。由于正面碰撞增强，更多粒子会聚集在前方。近期，研究人员已对过阻尼稀相互作用自驱粒子（ABPs）中前方的此类聚集现象及其相关的耗尽尾迹进行了分析 [39]。由于惯性活性布朗粒子在前向反冲后经历次级背向碰撞，后方会出现一个峰值。随着 M 的增加，反冲增强，从而减少前方的粒子聚集，并增加来自后方的次级碰撞——这些因素会影响对分布的对称化，进而恢复类平衡行为。

对分布中的不对称性通过参数 A_p 进行量化，该参数衡量前峰与后峰之间的高度差（图 2(b)）。对于固定的 M，不对称性最初随佩克莱数（Pe）的增加而增大。对于过阻尼系统（黑色实线表示 $M = 0$），在没有反冲的情况下，这种增长随后趋于饱和。相比之下，在存在惯性的情况下，经过初始增长后，A_p 随佩克莱数（Pe）的增加而减小。图 2(d) 中的数据塌缩表明，在较小的

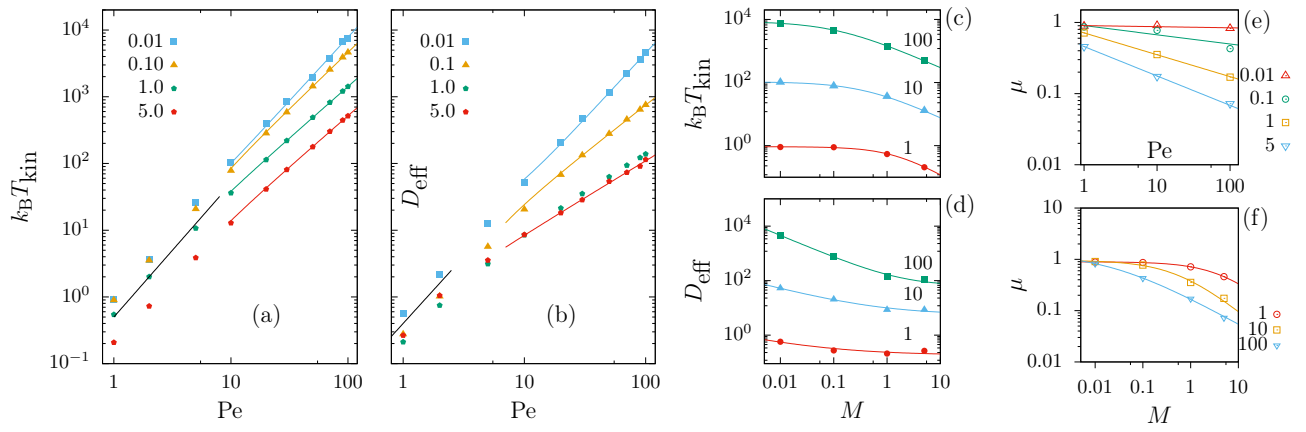


图 3. (a) 展示了不同 M 值下动理学温度 $k_BT_{\rm kin} = m\langle v^2\rangle/2$ 随佩克莱数增加而升高的情况，图例中标出了这些值。在佩克莱数较大时， $k_BT_{\rm kin} \sim {\rm Pe}^{\alpha_k}$ 的关系为 $\alpha_k = 1.90$，在 $M = 0.01$ 分别为 1.69、1.54、1.53，对应的 $M = 0.01$ 值为 0.1、1、5。(b) 展示了图例所列不同 M 值下有效扩散率 $D_{\rm eff}$ 随佩克莱数增加而升高的情况。其渐近增长形式为 $D_{\rm eff} \sim {\rm Pe}^{\alpha_d}$，其中 $\alpha_d = 1.98$ 在 $M = 0.01$ 分别为 1.43、1.13、1.17，对应的 $M = 0.01$ 值为 0.1、1、5。(c) 在较大的 M 下，动理学温度按 $k_BT_{\rm kin} \sim M^{-\gamma_k}$ 递减，其中 $\gamma_k = 1$ 在佩克莱数 $= 1$ 分别为 0.8、0.75，对应的佩克莱数为 10 和 100。(d) $D_{\rm eff}$ 随 M 增大而降低并趋于饱和，其标度形式为 $D_{\rm eff} = \mathcal{B} + \mathcal{D}\, M^{-\gamma_d}$，其中 $\gamma_d = 0.43$ 在佩克莱数 $= 1$ 分别为 0.52、0.81，对应的佩克莱数为 10 和 100。(e) 迁移率 μ 随佩克莱数增加而降低，其关系为 $\mu \sim {\rm Pe}^{-\alpha_\mu}$，其中 $\alpha_\mu = 0.02$ 在 $M = 0.01$ 分别为 0.13、0.31、0.41，对应的 $M = 0.01$ 值为 0.1、1、5。(f) 在较大的 M 下，迁移率随 M 增大而按 $\mu \sim M^{-\gamma_\mu}$ 递减，其中 $\gamma_\mu = 0.82$ 在 $Pe = 1$ 分别为 0.77、0.52，对应的 $Pe = 1$ 值为 10、100。

佩克莱数下，不对称性随佩克莱数增加而增大，如 $A_p \sim {\rm Pe}^{0.4}$，随后随 $A_p \sim {\rm Pe}^{-0.35}$ 减小。这种标度性质是所有惯性活性布朗粒子共有的。其增大是由于活性增强导致正面碰撞增加。其减小则是由惯性反冲造成的，也是平衡态样行为得以恢复的原因。

衡量系统偏离平衡程度的另一种方法，是考察平衡爱因斯坦关系遭到违反的程度 $\mathcal{I} = \mid D_{\rm eff} - \mu\, k_BT_{\rm kin} \mid$，其中 μ 是粒子迁移率，而 $T_{\rm kin}$ 是所谓的动能 [40, 41]。追踪示踪粒子的动力学，是表征浴的性质的有效工具 [11, 12, 14–17]。在存在平移涨落的情况下，低佩克莱数下活性对扩散率的影响会被 D_t 掩盖。虽然可以扣除这些效应，但为简化起见，并为了理解活性的影响，下文中我们设定 $D_t = 0$。根据均方位移（MSD）的长时间行为，我们得到有效扩散率 $D_{\rm eff}$。动理学温度 $k_BT_{\rm kin}$ 可直接由速度涨落得到。通过单独进行数值计算，考察测试粒子在外力 f_x 作用下速度的变化 $\langle v_x\rangle$，我们得到自驱粒子在非平衡稳态附近的迁移率 $\mu = (\partial\langle v_x\rangle/\partial f_x)_{f_x=0}$。测试粒子受到外力时，其他自驱粒子会随之发生局部统计重组。这种重组取决于活性速度和惯性，从而导致迁移率变化。利用这些结果，我们得到违反程度 $\mathcal{I}$。

在图3中，我们展示了动理学温度的变化，扩散率和迁移率作为 Pe 和 M 的函数。在 Pe 和 M 足够大时，它们呈现以下标度形式：(i) $k_BT_{\rm kin} \sim {\rm Pe}^{\alpha_k}$ and $k_BT_{\rm kin} \sim M^{-\gamma_k}$, (ii) $D_{\rm eff} \sim {\rm Pe}^{\alpha_d}$and $D_{\rm eff} \sim M^{-\gamma_d}$, (iii) $\mu \sim {\rm Pe}^{-\alpha_\mu}$ and $\mu \sim M^{-\gamma_\mu}$。请注意，迁移率随 Pe 和 M 增大而降低，而其他量则随 Pe 增大而增加。

动理学温度 $k_BT_{\rm kin} = m\langle v^2\rangle/2$ 随佩克莱数 Pe 增大而升高（图3(a)）。黑色实线描绘了在小 Pe 下所有 M 值共有的 ${\rm Pe}^2$ 标度关系。不同 M 值下的渐近行为 $k_BT_{\rm kin} \sim {\rm Pe}^{\alpha_k}$ 表明，指数 α_k 随 M 减小。

图3(b) 展示了有效扩散率 $D_{\rm eff} \sim {\rm Pe}^{\alpha_d}$ 如何随佩克莱数 Pe 增大。在小 Pe 下，对于所有 M，均有 $D_{\rm eff} \sim {\rm Pe}^2$。在惯性较小的极限 $M = 0.01$ 下，这种行为会延续至所有 Pe，与过阻尼系统中的情况相同。然而，随着惯性增大，增长指数 α_d 减小；最终，在 $M \gtrsim 1$ 时， $D_{\rm eff} \sim {\rm Pe}^{\alpha_d}$ 与 Pe 近似呈线性关系。

图3(c) 和 (d) 展示了动理学温度和有效扩散率对 M 的依赖关系。动理学温度符合函数形式 $k_BT_{\rm kin} = \mathcal{A}/(\mathcal{C} + M^{\gamma_k})$；在 M 较大时，它们呈现标度形式 $k_BT_{\rm kin} \sim M^{-\gamma_k}$，其衰减指数 γ_k 随佩克莱数 Pe 增大而减小。有效扩散率 $D_{\rm eff}$ 随 M 衰减，直至达到饱和，并遵循标度形式 $D_{\rm eff} = \mathcal{B} + \mathcal{D}\, M^{-\gamma_d}$；其衰减指数 γ_d 随佩克莱数 Pe 增大而增大。

最后，我们考察迁移率 μ。在过阻尼极限下， μ 基本不随活性佩克莱数 Pe 变化（$M = 0.01$ 见图3(f)）。这一行为与文献 [23]在低密度下的观察一致。然而，在

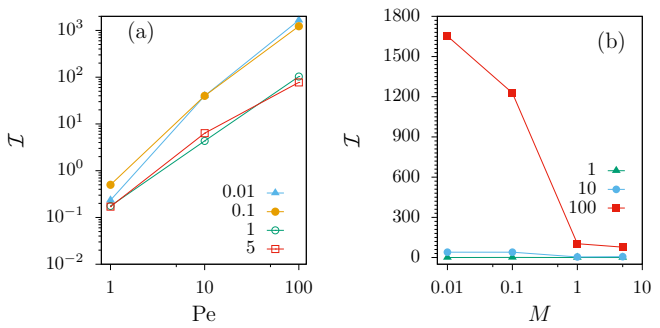


图 4. 平衡涨落耗散的违背程度$\mathcal{I} = | D_{\rm eff} - \mu k_B T_{\rm kin} |$，即系统偏离平衡的程度随 Pe 和 M变化的情况，分别如 (a) 和 (b) 所示。$\mathcal{I}$ 随 Pe 增大而增大，当 Pe$^{\alpha_d}$ 或 Pe$^{(\alpha_k - \alpha_\mu)}$时。对于 M，它会减小并最终趋于饱和值 $\mathcal{B}$。

存在惯性的情况下，迁移率会随 Pe 和M增大而降低。在较高活性下，沿外力方向的正面碰撞频率增加，使有效阻力增大，从而导致活性流体有效增稠。这种增稠在定性上与文献 [25], 一致，不同于文献 [22], 预测的非单调变化，也与文献 [42]预测的活性变稀相反。迁移率随 Pe 增大而降低，其关系为 $\mu \sim$ Pe$^{-\alpha_\mu}$，其中指数 α_μ 自身随 M 增大（图3(f)）。惯性活性布朗粒子中的碰撞和反冲会进一步增大较高惯性质量下的阻力系数。μ 随 M 的降低呈现出与 $k_B T_{\rm kin}$ 随M的变化相似的形式（图3(c)），因此在 M $\mu \sim M^{-\gamma_\mu}$较大时如此。注意，γ_μ 也会随 Pe降低。

借助这些结果，我们发现，违背程度$\mathcal{I}$随 Pe 增大而增大，但随 M减小。具体而言，我们的发现表明，$\mathcal{I} \sim |$ Pe$^{\alpha_d}$ –Pe$^{-\alpha_\mu + \alpha_k}$ |，也就是说，根据 $\alpha_d > (\alpha_k - \alpha_\mu)$ 是否成立，它可以随 Pe$^{\alpha_d}$ 或 Pe$^{\alpha_k - \alpha_\mu}$ 增长（图 4(a)）。另一方面，$\mathcal{I} \sim | \mathcal{B} + \mathcal{D} M^{-\gamma_d} - M^{-(\gamma_\mu + \gamma_k)} |$ 随 M减小，并最终趋于一个依赖于 Pe 的值 $\mathcal{B}$（图 4(b)）。Pe 越高，这种下降越显著。Pe 较小时，对于所有 M 值，系统都保持接近平衡。

总结.– 我们展示了在远离运动诱导相分离（MIPS）起始点的密度下，由自驱粒子（ABPs）组成的活性流体，其非平衡性质如何随活性和惯性质量变化。随着佩克莱数（Pe）即活性的增大，系统偏离平衡的程度愈发显著；但我们发现，惯性质量会恢复类平衡性质。具体而言，我们表明，在活性过阻尼系统中观察到的非高斯速度分布、（运动方向）成对分布中的前后不对称性，以及扩散率、迁移率与动能温度之间缺少爱因斯坦涨落耗散关系等现象，都会随着惯性质量增加而逐渐转变为其平衡对应物。简言之，我们发现惯性反冲能够有效地使活性流体热化。值得注意的是，浴的晚期扩散率和迁移率取决于惯性质量，这与自由活性布朗粒子不同。有效扩散率和温度随活性速度增大，随惯性质量增大而减小。相反，有效迁移率随质量和活性增大而减小。综合来看，这些发现表明，随着惯性的增加，平衡涨落耗散关系的违背程度会降低。总之，惯性使活性流体恢复类平衡行为。

数值计算得到了布巴内斯瓦尔物理研究所的高性能计算设施 SAMKHYA 的支持。D.C. 感谢 Arghya Majee 对稿件的认真审阅，感谢 C.Y. Cergy Paris Universit´e 提供访问教授职位，使本研究得以启动，感谢印度的 SERB 通过资助项目编号 MTR/2019/000750 提供经费支持，并感谢班加罗尔的国际理论科学中心（ICTS-TIFR）提供准会员职位。F.P. 感谢 C.Y. 卓越倡议（资助项目“未来投资”ANR-16-IDEX-0008）、INEX 2021 雄心项目 CollInt 和 Labex MME-DII（项目编号 2021-258 和 2021-297）提供的经费支持。

* shubhendu@iopb.res.in † fernando.peruani@cyu.fr ‡ 通讯作者：debc@iopb.res.in

[1] P. M. Chaikin 和 T. C. Lubensky, *Principles of Con-densed Matter Physics*（剑桥大学出版社，剑桥，2012）。[2] C. Bechinger、R. Di Leonardo、H. L¨owen、C. Reichhardt、G. Volpe 和 G. Volpe，《复杂拥挤环境中的活性粒子》，《现代物理学评论》**88**，045006（2016），1602.00081。[3] M. C. Marchetti、J. F. Joanny、S. Ramaswamy、T. B. Liverpool、J. Prost、M. Rao 和 R. A. Simha，软活性物质的流体动力学，《现代物理学评论》**85**，1143（2013）。[4] P. Romanczuk、M. B¨ar、W. Ebeling、B. Lindner 和 L. Schimansky-Geier，活性布朗粒子，《欧洲物理学杂志专题》**202**，1（2012）。[5] S. Ramaswamy，活性流体，《自然评论：物理学》**1**，640（2019）。[6] G. Gompper、R. G. Winkler、T. Speck、A. Solon、C. Nar- dini、F. Peruani、H. L¨owen、R. Golestanian、U. B. Kaupp、L. Alvarez、T. Kiorboe、E. Lauga、W. C. K. Poon、A. DeSimone、S. Mui˜nos-Landin、A. Fischer、N. A. S¨oker、F. Cichos、R. Kapral、P. Gaspard、M. Ripoll、F. Sagues、A. Doostmohammadi、J. M. Yeomans、I. S. Aranson、C. Bechinger、H. Stark、C. K. Hemelrijk、F. J. Ned- elec、T. Sarkar、T. Aryaksama、M. Lacroix、G. Duclos、V. Yashunsky、P. Silberzan、M. Arroyo 和 S. Kale，2020年运动活性物质路线图，《凝聚态物理学杂志》**32**，193001（2020）。[7] D. Richard、H. L¨owen 和 T. Speck，活性布朗粒子相分离的成核路径与动力学，《软物质》**12**，5257（2016），1602.07580。

[8] X. L. Wu 和 A. Libchaber，准二维细菌浴中的粒子扩散，Physical Review Letters 84，3017（2000）。[9] G. Gr´egoire、H. Chat´e 和 Y. Tu，关于“准二维细菌浴中的粒子扩散”的评论，Physical Review Letters 86，556（2001）。[10] J. Lahtinen、T. Hjelt、T. Ala-Nissila 和 Z. Chvoj，表面上的硬圆盘和棒状分子的扩散，Physical Review E 64，021204（2001）。[11] S. Ye、P. Liu、F. Ye、K. Chen 和 M. Yang，受困于活性浴中的被动粒子所经历的活性噪声，《软物质》16，4655（2020）。[12] C. Maes，活性环境中的涨落运动，Physical Review Letters 125，208001（2020），2005.13462。[13] C. Maes，响应理论：基于轨迹的方法，Front. Phys. 8，229（2020），2005.10503。[14] O. Granek、Y. Kafri 和 J. Tailleur，活性浴中示踪粒子的反常输运，Physical Review Letters 129，38001（2021），2108.11970。[15] P. Rizkallah、A. Sarracino、O. B´enichou 和 P. Illien，拥挤环境中活性粒子扩散的微观理论，Physical Review Letters 128，038001（2022），2112.07312。[16] V. D´emery、O. B´enichou 和 H. Jacquin，稠密软胶体中受驱示踪粒子的广义朗之万方程：构建与应用，New Journal of Physics 16，10 1088 1367 2630 16 5 053032 2014 . / - / / / ( )。[17] V. D´emery 和 D. S. Dean，涨落场中活性与被动示踪粒子扩散的微扰路径积分研究，Physical Review E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 84，011148（2011）。[18] D. Loi、S. Mossa 和 L. F. Cugliandolo，活性复杂物质的有效温度，《软物质》7，3726（2011），1012.2745。[19] L. F. Cugliandolo、G. Gonnella 和 I. Petrelli，活性布朗粒子中的有效温度，Fluct. Noise Lett. 18，1940008（2019）。[20] S. Mandal、B. Liebchen 和 H. L¨owen，共存相中的运动性诱导温差，Physical Review Letters 123，228001（2019），1902.06116。[21] J. Reichert 和 T. Voigtmann，拥挤的活性粒子悬浮液中的示踪粒子动力学，《软物质》17，10492（2021），2010.13769。[22] E. W. Burkholder 和 J. F. Brady，活性布朗悬浮液的非线性微流变学，《软物质》16，1034（2020）。[23] I. Petrelli、L. F. Cugliandolo、G. Gonnella 和 A. Suma，非均匀被动与活性二维布朗粒子系统中的有效温度，Physical Review E 102，012609（2020），2005.02303。[24] L. Caprini 和 U. Marini Bettolo Marconi，高密度下的活性物质：速度分布与动力学温度，The Journal of Chemical Physics 153，184901（2020），2009.07234。[25] C. Reichhardt 和 C. J. Reichhardt，活性物质系统中的活性微流变学：迁移率、间歇性与雪崩，Physical Review E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 91，032313（2015），1409.1586。[26] Y. Fily 和 M. Marchetti，无定向排列的自推进粒子的非热相分离，Physical Review Letters 108，235702（2012）。[27]G. S. Redner、M. F. Hagan 和 A. Baskaran，《相分离活性胶体流体的结构与动力学》，Physical Review Letters 110，055701（2013）。[28] C. B. Caporusso、P. Digregorio、D. Levis、L. F. Cuglian- dolo 和 G. Gonnella，《二维活性布朗粒子系统中的运动性诱导的微相与宏观相分离》，Physical Review Letters 125，178004（2020）。[29] C. Scholz、S. Jahanshahi、A. Ldov 和 H. L¨owen，《自推进粒子的惯性延迟》，Nature Communications 9，5156（2018），1807.04357。[30] H. L¨owen，《自推进粒子的惯性效应：从活性布朗运动到活性朗之万运动》，The Journal of Chemical Physics 152，040901（2020），1910.13953。[31] J. Su、H. Jiang 和 Z. Hou，《惯性诱导的类成核运动性诱导相分离》，New Journal of Physics 23，013005 2021( )。[32] L. Caprini 和 U. Marini Bettolo Marconi，《惯性自推进粒子》，The Journal of Chemical Physics 154，024902（2021），2009.14032。[33] L. Hecht、S. Mandal、H. L¨owen 和 B. Liebchen，《由惯性驱动的活性制冷器》，Physical Review Letters 129，178001 2022( )。[34] A. Solon 和 J. M. Horowitz，《关于活性浴中迁移率与扩散系数之间的爱因斯坦关系》，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 55，10.1088/1751-8121/ac5d82（2022），2203.05459。[35] O. Dauchot 和 V. D´emery，《谐振陷阱中自推进粒子的动力学》，Physical Review Letters 122，068002 2019( )。[36] C. Scholz、M. Engel 和 T. P¨oschel，《旋转机器人集体运动并实现自组织》，Nature Communications 9，931（2018）。[37] A. Deblais、T. Barois、T. Guerin、P.-H. Delville、R. Vau- daine、J. S. Lintuvuori、J.-F. Boudet、J.-C. Baret 和 H. Kellay，《边界控制惯性自推进机器人的集体动力学》，Physical Review Letters 120，188002 2018( )。[38]在在线提供的补充信息中，我们进一步讨论了 M 如何使系统热化，分析对分布函数，展示迁移率和扩散率的计算，以及描述动理学温度、有效扩散率和迁移率的标度指数的行为。[39] A. Poncet、O. B´enichou、V. D´emery 和 D. Nishiguchi，《稀释活性布朗粒子的对关联：从低活性偶极修正到高活性代数衰减翼》，Physical Review E 103，012605（2021），arXiv:2006.08202。[40] V. Blickle、T. Speck、C. Lutz、U. Seifert 和 C. Bechinger，《推广至非平衡态的爱因斯坦关系》，Physical Review Letters 98，210601（2007）。[41] D. Chaudhuri 和 A. Chaudhuri，《非平衡稳态下修正的涨落耗散关系和爱因斯坦关系》，Physical Review E 85，021102（2012），1201.4525。[42] A. Jayaram 和 T. Speck，《在活性硬圆盘流体中运动的受限探针的有效动力学与涨落》，（2023），arXiv:2302.08422。[43] L. Caprini、R. K. Gupta 和 H. L¨owen，《旋转惯性在活性物质集体现象中的作用》，Physical Chemistry Chemical Physics 24，24910（2022）。

补充信息：活性浴何时表现得如同平衡浴?

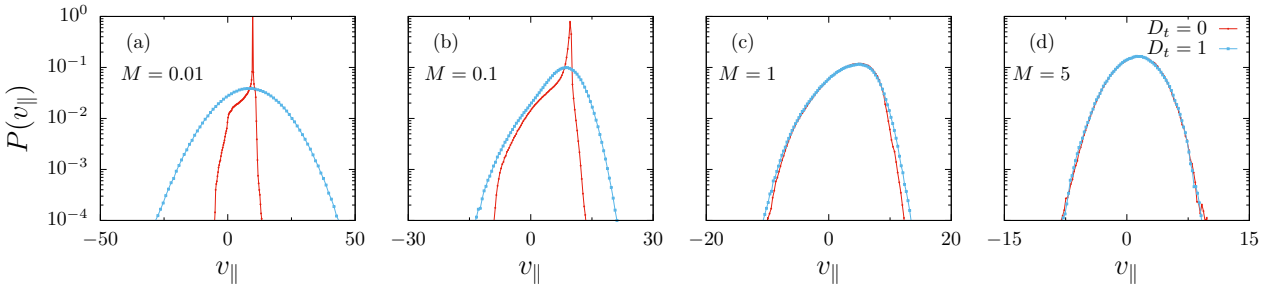


图5. 惯性带来了类平衡特征。在不同质量下，前进方向上的速率分布分别为：(a) $M = 0.01$，(b) $M = 0.1$，(c) $M = 1$ 和 (d) $M = 5$，对应 $Pe = 10$。在每张图中，蓝色和红色曲线分别表示 $D_t = 1.0$ 和 0.0 的结果。

惯性热化

正如正文中所指出的，随着 M增加，速度分布由于碰撞和反冲而逐渐热化。这里我们通过一种独立的测量来补充这一发现：比较存在（$D_t = 1$）和不存在（$D_t = 0$）热浴时，沿前进方向的速度分布（图5）。对于较小的 M，这两个分布彼此存在显著差异。随着 M增加，在不存在热浴的情况下，分布开始热化；其原因在于，在缓慢的惯性弛豫过程中，前进方向的取向弛豫相对较快，并且在前向反冲之后会发生来自前方的碰撞以及来自后方的二次碰撞。因此，二者开始逐渐接近，并在 $M \gtrsim 1$处合并。

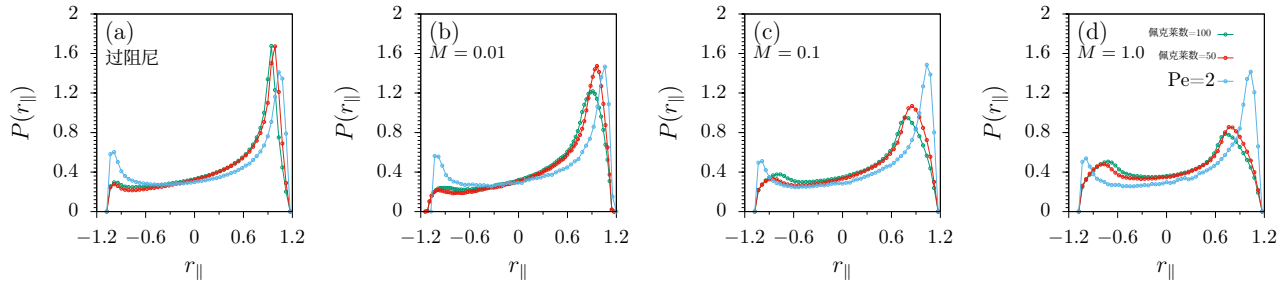


图6. 在系统密度 $\rho = 0.1$ 下，相互作用邻居沿前进方向 $P(r_\parallel)$ 投影的粒子间距概率分布，其中 $Pe = 2, 50$ 和 100。(a) 中的结果对应过阻尼系统；(b)、(c) 和 (d) 对应欠阻尼系统，其 M值分别为 $= 0.01$、0.1 和 1.0。表示不同 Pe值的通用图例置于图 (d) 内。

对分布

在图6中，我们展示了佩克莱数为 Pe=1、10 和 100，以及惯性为 $M = 0$，0。01、0。1，1 时，测试粒子前进方向周围粒子的分布。这些分布用于计算正文中给出的不对称参数 A_p。

迁移率

为测量迁移率，我们对标记粒子施加附加力 F_x，并计算其沿同一方向的平均速度 $\langle v_x \rangle$，同时改变 F_x 的取值。平均速度 $\langle \delta v_x \rangle = \langle v_x \rangle|_{F_x} - \langle v_x \rangle|_{F_x=0}$ 关于 F_x 的函数关系

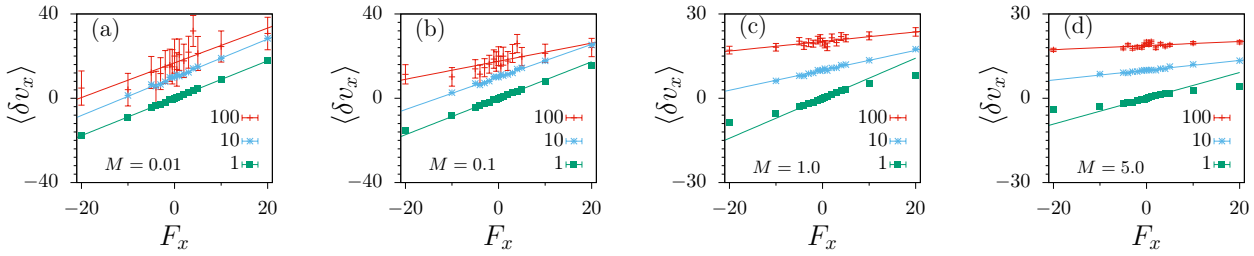


图 7. 标记粒子对外力 F_x 的响应平均速度如图所示：在 (a) 中，$Pe = 1$、10 和 100 对应 $M = 0.01$；在 (b) 中对应 $M = 0.1$；在 (c) 中对应 $M = 1.0$；在 (d) 中对应 $M = 5$。在 $F_x = 0$ 处，相应线性拟合的斜率给出迁移率 $\mu = \lim_{F_x \to 0} \langle \delta v_x \rangle / F_x$。根据定义，$\langle \delta v_x \rangle = 0$ 在 $F_x = 0$处。为便于清晰观察，Pe = 10 和 100 对应的每条曲线均向上平移。

如图 7 所示。$\langle \delta v_x \rangle$ 与 F_x 曲线在 $F_x = 0$ 附近的线性拟合斜率即为迁移率。在过阻尼区域 $M = 0.01$，迁移率不随佩克莱数变化；当佩克莱数 =为 1、10 和 100 时，其数值相同 $\mu \sim 0.9$，见图 7(a)。在欠阻尼极限（$M \geq 0.1$）下，迁移率随佩克莱数增大而降低，见图 7(b)、(c)、(d)。

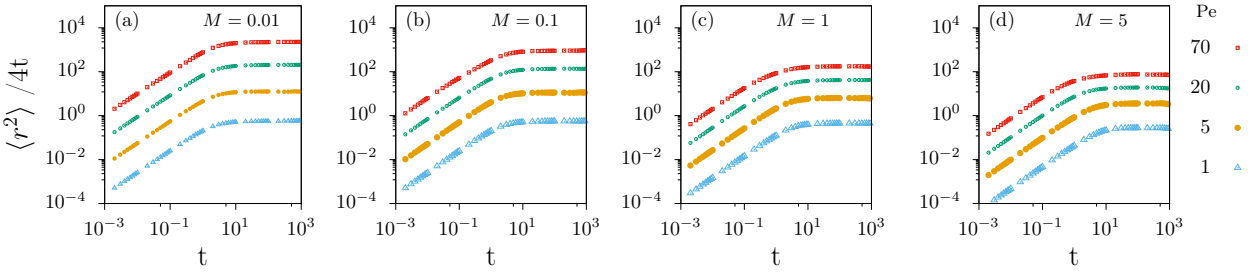


图 8. Pe = 1、5、20 和 70 对应的均方位移如图所示：在 (a) 中为 $M = 0.01$；在 (b) 中为 $M = 0.1$；在 (c) 中为 $M = 1.0$；在 (d) 中为 $M = 5$。表示不同 Pe 值的通用图例置于最右侧。这些计算是在 $D_t = 0$下进行的。

均方位移

在图 8 中，我们绘制了均方位移 $\langle r^2 \rangle$ 按时间 t 缩放后的曲线，涵盖了不同的 M 和佩克莱数值。所有曲线均在一个由前进方向的取向持续性决定的时间尺度上表现出弹道到扩散的交叉转变；本文中这一量保持不变。渐近扩散率 $D_{\text{eff}} = \lim_{t \to \infty} \langle \mathbf{r}^2 \rangle / 4t$ 由这些图得出，并用于正文中。

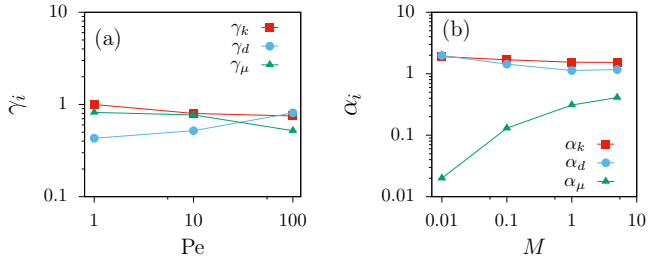


图 9. 图 4 中使用的标度指数 γ_i 和 α_i 分别表示为佩克莱数 Pe (a) 和 M (b) 的函数。$i = k$，d，μ 分别表示动能、扩散和迁移率的标度指数。

标度指数

决定运动学温度、有效扩散率和迁移率对佩克莱数 Pe 和 M 依赖性的标度指数变化如图9所示。