长基线成像中的参数估计的量子极限

Aqil Sajjad[1], * Michael R Grace[1] 和 Saikat Guha[1,2]

[1] *James C. Wyant College of Optical Sciences, University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA*

[2] *Department of Electrical and Computer Engineering, University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA*

采用分布式孔径的望远镜系统是提升天文成像分辨率的一种成熟方法。然而，关于定量成像精度的理论极限，以及此类阵列所应采用的从根本上最优的模式分选、光束合并和探测方案，目前仍鲜有研究。利用量子和经典 Cr´amer-Rao 界的数学工具，我们开展了分析，揭示分布式成像系统相较于单个整体式望远镜所带来的增强的根本来源，并考察在多孔径成像系统中估计场景非相干辐射所包含的任意目标参数时能够达到的精度。我们展示了如何通过两类光束合并策略实现量子最优测量：(1) *multi-axial*：将来自不同孔径的光引导至一个公共焦平面，例如分段孔径望远镜的焦平面；以及 (2) *co-axial*：将每个孔径收集的光（例如长基线阵列中各望远镜站点收集的光）传送至光学干涉仪。作为示例，我们明确计算了使用两个相同孔径、二者间隔为一定基线距离时，估计两个点发射体角间距的量子 Fisher 信息（QFI）。我们表明，该 QFI 可清晰地分解为来自单个孔径和来自基线的加性贡献。我们量化了望远镜内（例如空间模式）光学处理和望远镜间光束合并的相对优势。我们展示了两种接收器设计均可用于捕获这两类信息，并讨论了如何将类似方法扩展到更一般的成像任务。我们讨论了如何将达到 QFI 的测量转化为明确的接收器设计，以及在无法将各孔径收集的光集中到同一地点并进行合并时，如何利用预共享纠缠实现 QFI。

arXiv:2305.03848v1 [quant-ph] 5 May 2023

I. 引言

近年来，基于量子信息理论的研究开始为亚瑞利成像和参数估计带来新的认识与有趣的见解。这些进展的核心是所谓的经典和量子克拉美–罗界。根据前者，对于给定的测量方式，对某个物理系统的多个副本进行测量时，某个称为经典 Fisher 信息（经典费 Fisher 信息）的量的倒数给出了估计参数的无偏估计量方差的下界。因此，它可作为精度的度量 [1]。而量子克拉美–罗界则引入了一个称为量子费舍尔信息（QFI）的量，它表示在物理系统中估计同一参数 [2], 时可能达到的最大经典费 Fisher 信息 Tsang等人。换言之，QFI 量化了系统中可通过任何光学接收机测量获取的关于某个参数的物理可访问信息量。如果我们能找到一种接收机测量，其经典费 Fisher 信息等于 QFI，那么在估计该参数时，其他任何方法都无法胜过它。

经典和量子克拉美–罗界早已为人所知数十年，而针对次瑞利参数估计的一项重大突破发表于 [3] ，该文研究了如何估计两个等亮度非相干光源之间的间距。若采用理想直接成像，即通过像素阵列测量入射光子在成像屏上的位置，我们就会遇到“瑞利诅咒”。这表现为间距趋近于零时，经典费 Fisher 信息也趋近于零。然而，Tsang等人指出，这只是传统像平面直接探测造成的假象；对于两个均匀明亮、非相干辐射的准单色点光源，其间距的量子 Fisher 信息是一个常数，与间距取值无关，即使在次瑞利极限下也不会降为零。他们还证明，对于高斯点扩散函数（PSF），空间模式解复用（SPADE）测量可达到这一常数 QFI：该测量将入射光子按指向两点构型中心的厄米–高斯（HG）模式分类，并记录各模式中的光子计数；也就是说，其 CFI 等于 QFI。 [4] 和 [5], 将这些结果推广到了任意（非高斯）PSF，并证明了一维硬孔径的两点间距估计中，sinc-Bessel 模式基可提供最优测量。

这一切都引发了人们的浓厚兴趣：如何运用经典和量子 Cram´er-Rao 界来评估各种接收器设计的性能，并提出既能超越传统技术性能、又更易于实现的新方法。这种视角促成了多项重要发现：在估计扩展物体 [6, 7], 的尺寸、估计二维和三维空间中源之间的距离 [8, 9], 以及同时估计多个参-方面，性能均有显著的定量提升。

* aqilsajjad@arizona.edu

亚衍射场景中编码的参数 [10–13], ; 估计任意物体的空间矩 [14–16],; 区分多个候选物体 [17–19], ; 以及在亚瑞利视场内自适应估计多个点发射体的位置和亮度 [20–22]。

鉴于所有这些令人振奋的发展，研究量子信息理论方法如何为长基线干涉测量中的基本极限和最优接收器技术提供新的洞见是十分值得的。在长基线干涉测量中，我们以一种产生巨大望远镜效果的方式，将来自相距遥远的接收器的信号结合起来，其大小等于单个望远镜之间的距离。朝这一方向迈出的一个有趣的第一步见于文献 [23], , 该文考虑了平面内的一些小型集光器，可以将其视为针孔。这些集光器接收到的光随后被馈入线性干涉仪，其输出再由光电探测器进行测量。该装置用于估计某种任意排列的 n 发射体的三维位置。他们推导了此类系统达到量子极限的理论，并将两个亮度相等的点源间距问题作为一个特殊例子加以讨论。其他研究则比较了远距离、针孔状孔径之间的相位敏感干涉测量性能与用于估计两个点光源间距的量子Cr´amer-Rao界：一类是在明亮热发射体 [24] 的背景下进行的，另一类是在与其他标准天文干涉测量技术 [25], 的具体比较中进行的，尽管采用了准单色近似。其他工作（如 [26, 27] ）则采取了严格的量子力学方法，展示了两个相距遥远的点状接收器之间的共享纠缠如何用于估计亚衍射场景的互相干函数。

本文分析了长基线干涉测量在定量成像中的量子估计理论极限，并评估了适用于不同基线距离范围的各种接收器设计。以往的分析仅考虑点状孔径，而我们放宽了这一假设，并在长基线干涉测量的背景下，纳入了每个孔径内多空间模式光场所承载的额外信息。我们在不同范围内量化孔径局域高阶模态信息内容相对于从多个孔径的光之间的优化干涉中可提取信息内容的价值，以期达到多孔径成像系统的量子极限——无论是分段镜，此时来自各孔径的光可以通过衍射汇聚到同一个像平面；还是长基线系统，此时必须通过光纤或“光管”将来自各个望远镜的光汇集起来 [28–30]。

我们给出多望远镜系统中任意一维参数估计问题的一般框架，并以 Tsang 等人关于两个亮度相同的准单色非相干光源间距估计的问题为例，进行详细说明——

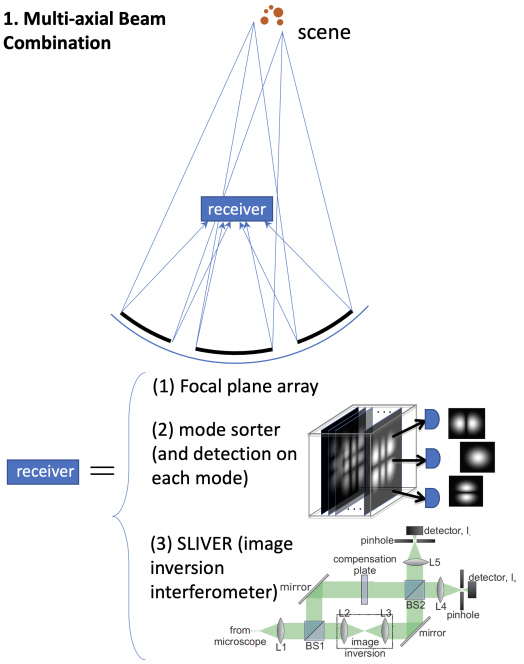


图 1. 基于多轴光束合成的接收器示意图，例如，对分段孔径望远镜子孔径反射光进行合成。

这两个光源之间的间距估计。关于宽带辐射的完整理论处理将在未来的工作中给出。

在为分析各种接收器奠定基础的过程中，我们全面介绍了所有相关的数学工具和概念，使得没有量子估计理论或量子成像与传感背景的读者也能毫无障碍地阅读本文，例如天文成像领域中可能有意采用这些方法的研究人员。

在本文余下部分，我们根据望远镜之间的距离，将提出的长基线干涉方案分为三类：

1. **多轴光束合成**——当不同孔径彼此足够接近时，我们可以将不同孔径收集的全部光聚焦到同一个成像屏上（见图 1）。文献中通常将此称为多轴光束合成（即以不同角度或轴线，将来自多望远镜的所有空间频率汇聚到同一个成像屏上） [31]。一种简单的实现方式是，在每个孔径处设置一块切割出来的镜片，其形状取自一面假想的、覆盖整个基线区域的巨型抛物面镜。这样，我们就可以采用适用于单孔径系统的任何测量方案，例如理想直接成像或 SPADE。构建这种系统的优势

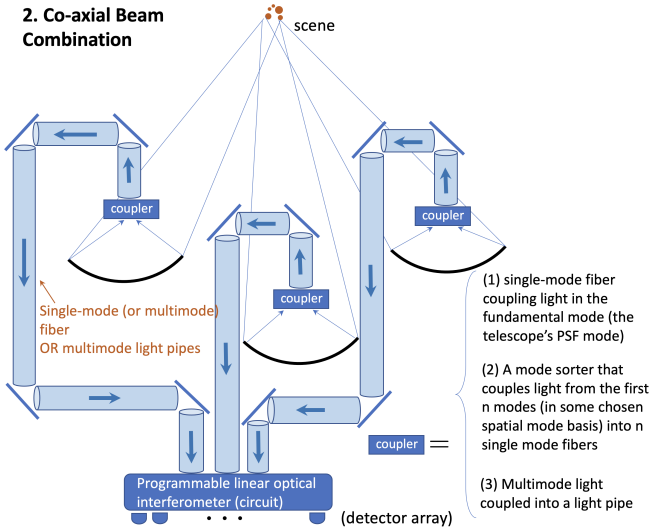


图2. 基于同轴光束合束的接收器示意图，例如长基线望远镜系统中各望远镜站点收集的光束之间的合束。

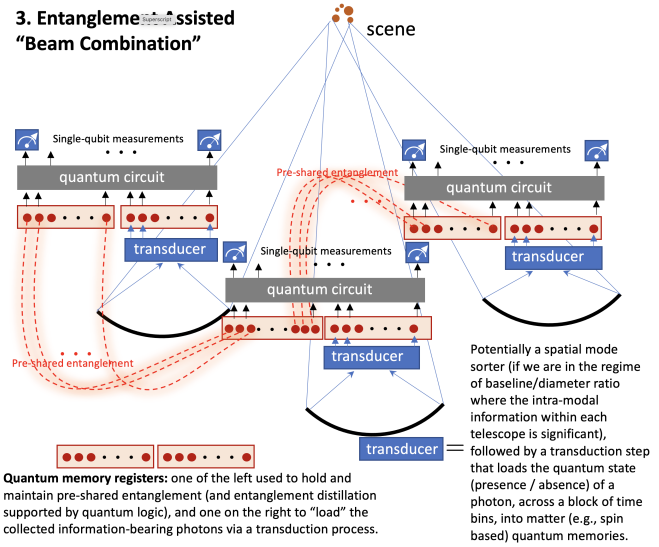


图3。基于预共享纠缠的接收器示意图。原则上，这种方案仍可实现任何定量成像任务的完整“量子极限”精度，而无需对不同望远镜收集的光进行干涉。但是，这种接收器系统需要高保真、高速率的远距离纠缠分发，例如使用量子中继器或卫星；还需要具备量子逻辑功能的存储器，以及一种转换器（例如参考文献 [32] 中类似的方案），以便将各望远镜站点收集的光子高效地“压缩”并加载到量子存储器寄存器中。

在于可以节省建造一面跨越整个基线的完整抛物面镜所需的成本和精力。

2.**同轴光束合束**—当单个望远镜彼此相距太远，无法将光聚焦到同一个成像屏上时，我们可以通过单模光纤（单模光纤）或多模“光管”，将各个孔径收集的光传送到中心位置，再通过由分束器和移相器组成的线性光学电路进行干涉式合束。在天文学文献中，这通常称为同轴光束合束（即将来自单个望远镜的光束汇聚到一起，并通过分束器使其轴线重叠） [31]。随后，我们可以获取干涉仪输出端的光子计数。示意图见图2。关键在于采用能使感兴趣参数达到最优性能的分束器配置。这里所说的“光管”，是指任何能够以低损耗将完整的（多空间模式）光束从一个位置传送到另一个位置的方法；目前大多数光学干涉系统通常使用抽真空管来实现这一点。

3. **基于预分发纠缠的接收器（无直接光学干涉）**——当接收器之间距离遥远，以至于通过单模光纤或光管将所有光传送到中心位置都不切实际时，我们可以采用基于纠缠的方法 [26, 27]。例如，如果希望合并在两个不同位置收集到的光，一种可能的方式是使用量子协议，将其中一台望远镜所收集的量子态的一部分传送到另一台望远镜（通过量子隐形传态，这会消耗预先共享的纠缠），随后便可在量子电路中就地合并二者，模拟实际干涉仪本会测得的结果。由于任何多端口干涉仪都可以分解为50-50双端口分束器和单模相位 [33]，而且我们知道如何利用预先共享的贝尔态来模拟非局域50-50分束器（即作用于位于相距遥远的望远镜站点的一对单模式的分束器）的作用，无需实际将光汇聚到同一位置 [27]，，原则上，只要在每对望远镜之间预先共享足够的纠缠，就能实现任何共轴式或多轴式接收器设计，而无需将来自各个望远镜的光送入干涉仪。图3对此作了示意。

本文的组织结构如下。在第 2 节中，我们描述物理装置以及 Tsang 等人用于描述入射光子量子态的模型，并介绍一般参数估计问题中的经典和量子克拉美–罗界。随后，我们以两个亮度均匀的点光源为特殊示例，概述分离度估计问题的基础。在第 3 节中，我们建立处理多孔径系统的数学基础，并获得一些结果，供后文研究各种接收器设计时使用。在第 4 节中，我们将

描述上述三个距离范围内的各种接收器类型，以及如何计算它们在一般估计问题中的性能。在此过程中，我们通过经典费 Fisher 信息展示结合多望远镜所带来的性能提升源于何处。在第 5 节中，我们讨论同一一般估计问题中量子 Fisher 信息的计算，再次展示结合远距离望远镜所带来的性能提升。在第 6 节中，我们使用各种接收器阐释等亮度双点光源分离度估计这一特殊示例。在第 7 节中，我们给出结论。

II. 单孔径系统的物理模型与预备知识

A. 弱光源模型

我们采用 [3], 中引入的弱光源模型，假设场景发射的光近乎单色，并且每个相干时间间隔内到达的光子平均数 ϵ 远小于 1。因此，需要在许多这样的时间间隔内测量大量光子，才能提取有用信息 [26, 34–37]。我们可以将像平面上光子场在每个时间间隔内的量子密度算符写为

$$\rho = (1-\epsilon)\rho_0 + \epsilon\rho_1 + O(\epsilon^2), \tag{1}$$

其中 $\rho_0 = |\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|$ 是零光子态，即“真空”态； ρ_1 是单光子态； O（ϵ^2）是更高阶项，由于 $\epsilon \ll 1$，可以忽略。

单光子混合态 ρ_1 是各个发射体贡献的总和，我们将这些发射体建模为点光源。若发射体总数为 n_e，则有：

$$\rho_1 = \sum_{s=1}^{n_e} b_s \, |\psi_s, 1ap\rangle\langle\psi_s, 1ap|, \tag{2}$$

这里， b_s 是与每个光源相关的相对亮度，并满足归一化性质$\sum_{s=1}^{n_e} b_s = 1$； $|\psi_s,\ 1ap\rangle$ 是相应的矢量：

$$|\psi_s, 1ap\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{1\text{ap}}(x - x_s)|x\rangle, \tag{3}$$

其中， $\psi_{1\text{ap}}(x)$ 是我们孔径的点扩散函数（PSF）， x_s 是第 s 个光源的位置，而$|x\rangle$ 是位置 x 本征矢——即位于像平面上位置 x 的 δ 函数空间模式中的单光子态。我们特意将 $1ap$ 放在右矢$|\psi_s,\ 1ap\rangle$ 以及此处点扩散函数的下标中，因为后文将讨论多个孔径配置，因此需要区分单孔径和多孔径函数。我们还要指出，本节中的所有方程都适用于任意点扩散函数，除非我们明确说明情况并非如此。因此，我们在此大部分情况下不会指定任何特定的点扩散函数。尽管如此，在后续章节讨论多个孔径配置时，我们将具体关注硬边矩形孔径，并据此指定 $\psi_{1\text{ap(x)}}$。

如果我们对入射光子进行某种可观测量 $\mathcal{Y}$的测量，那么对于接收态 ρ的每个副本，我们都会从概率分布 $P(\mathcal{Y}) = \langle\mathcal{Y}|\rho|\mathcal{Y}\rangle$ 中获得随机样本。如果测量可观测量对应于被动模式变换（随后在变换后的模式基上进行光子计数），那么 $|\mathcal{Y}\rangle$ 是与模式 $\mathcal{Y}$对应的单光子本征矢；探测到光子（其发生概率为 ϵ）便表明接收到的是 ρ_1，而测量结果——在模式 $|\mathcal{Y}\rangle$中出现单光子探测——是从 $\langle\mathcal{Y}|\rho|\mathcal{Y}\rangle$ [36, 38–40]中抽取的随机样本。如果入射光的光学带宽为 W，积分时间为 T，那么在该时频带宽窗口内大约有 $M \approx WT$个相互正交模式。由于我们假设光近乎单色，因此 W 非常小，所有这些 M 正交模式都对应于频率几乎相同的不同时间模式。我们将积分时间内收集到的全部光的量子描述取为 $\rho^{\otimes M}$。积分时间内接收到的平均光子数为 $N = M\epsilon$。如果我们将讨论范围限定在基于 SPADE 的接收器，其中（在一个相干时间间隔内）探测到单个光子便表明接收到 ρ_1，那么可将收集到的光的量子描述取为 $\rho_1^{\otimes N}$，其中 $N = \lfloor M\epsilon \rfloor$。

B. 经典与量子克拉美–罗界

设我们有 $\rho_1^{\otimes N}$，即有 N 份量子态 ρ_1，它取决于一组参数 $\{\theta_\mu\}$。我们希望通过对每一份 ρ_1测量某个可观测量$\hat{\mathcal{Y}}$ 来估计这些参数。对于一组估计量 $\theta_\mu(\mathcal{Y})$，其误差协方差矩阵为：

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv \int d\mathcal{Y} P(\mathcal{Y}) \left[\tilde{\theta}_\mu(\mathcal{Y}) - \theta_\mu\right] \left[\tilde{\theta}_\nu(\mathcal{Y}) - \theta_\nu\right]. \tag{4}$$

˜如果 $\theta_\mu(\mathcal{Y})$是无偏估计量，那么该协方差矩阵满足克拉美–罗界

$$\Sigma \geq \mathcal{J}^{-1}, \tag{5}$$

其中， $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ 是经典 Fisher 信息矩阵 [1]ˆ（对应测量 $\mathcal{Y}$），对于在 N 份 ρ_1上测量同一可观测量，其表达式为：

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} \equiv N \int d\mathcal{Y} \frac{1}{P(\mathcal{Y})} \frac{\partial P(\mathcal{Y})}{\partial \theta_\mu} \frac{\partial P(\mathcal{Y})}{\partial \theta_\nu}. \tag{6}$$

当 N 较大时，最大似然估计量可达到克拉美–罗界。如果 $\mathcal{Y}$ 是连续的，那么 $P(\mathcal{Y})$ 就成为概率密度，而式 (6) 中对 $\mathcal{Y}$ 的求和则改为积分。

量子克拉美–罗界给出了在给定物理系统和参数下，任何测量方案所能达到的最大 CFI:

$$\Sigma \geq \mathcal{J}^{-1} \geq \mathcal{K}^{-1}, \tag{7}$$

其中，$\mathcal{K}$ 是量子费舍尔信息（QFI）[2]。对于在具有量子密度算符 ρ_1的系统上进行的 N 测量，QFI表示为

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}(\rho_1^{\otimes N}) \equiv N\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\rho_1\{\mathcal{L}_\mu(\rho_1),\,\mathcal{L}_\nu(\rho_1)\}\right), \tag{8}$$

其中，$\mathcal{L}_\mu$（ρ_1）是相对于 θ_μ的 ρ_1 对称对数导数（SLD）。它是一个由以下关系定义的厄米算符

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta_\mu} = \frac{1}{2}\left(\rho_1\mathcal{L}_\mu(\rho_1) + \mathcal{L}_\mu(\rho_1)\rho_1\right) \tag{9}$$

如果 $\rho_1 = \sum_j D_j|e_j\rangle\langle e_j|$ 是将 ρ_1 分解为其特征值 D_j 和特征向量 $|e_j\rangle$的形式，那么SLD表示为

$$\mathcal{L}_\mu(\rho_1) = \sum_{j,k;D_j+D_k\neq 0}\frac{2}{D_j+D_k}\langle e_j|\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta_\mu}|e_k\rangle|e_j\rangle\langle e_k|. \tag{10}$$

请注意，QFI与测量选择无关，它量化了量子态中的光（物理系统）关于某个参数的可用信息。如果给定测量的经典费 Fisher 信息（CFI）等于QFI，那么我们就知道该测量对于估计给定参数是最优的，因为根据量子克拉美–罗界，没有其他测量方案能够取得更好的效果。因此，我们的目标是设计一种测量，在物理实现成本最低的情况下，使其尽可能接近QFI。

值得注意的是，根据上述对量子费舍尔信息的构造，在对称对数导数的本征基中进行投影测量即可达到量子费舍尔信息 [41–43], ，尽管这未必是唯一的最优测量。然而，问题在于，一般情况下，对称对数导数取决于我们试图估计的未知参数本身。对此的一种解决方案是 [42] 提出的两阶段方法

1. 首先，使用总积分时间中的一小部分，平均光子数为 N^α ，并采用任意$0<\alpha<1$，通过使用对估计 θ 具有非零经典费 Fisher 信息的任意测量，获得未知参数 θ 的初始最大似然估计 θ_1 。 2. 根据第一阶段得到的估计 θ_1 ，在 θ_1 处取值的 θ 的对称对数导数本征基中，对剩余的每个光子进行测量。根据测量结果，我们便可获得 θ 的最大似然估计。

需要指出的是，这一过程也曾在 [44, 45]和 [46], 的第 6.4 节中描述，其中采用了 $\alpha = 1/2$这一特定选择。

当 N 趋于无穷大时，这种两阶段方法渐近达到量子费舍尔信息。关于这一点的详细证明可见上述参考文献，下面简要介绍论证过程，我们也曾在 [47]中给出过这一论证。如果 N 很大，N^α （或者对于 $\alpha = 1/2$，$\sqrt{N}$ ）也会很大。因此，估计值 θ_1 的方差ˆ按 $1/(\mathcal{J}_1 N^\alpha)$的尺度变化，其中 $\mathcal{J}_1 > 0$ 是第一阶段测量的经典费 Fisher 信息。有了N^α个光子，当 N较大时，这一方差便会趋近于零。如果基于 θ 的准确值，在对称对数导数的本征基中进行测量，那么第二阶段的费舍尔信息为 $(N-N^\alpha)\mathcal{K}$。但实际上，由于我们会在估计值ˆ$\theta_1 = \theta + \theta_{1\text{处err}}$进行这一测量，因此需要将 $\mathcal{K}$ 替换为在该值处计算的、针对对称对数导数本征基测量的经典费 Fisher 信息，而不是在真实值 θ处计算的值。将这一经典费 Fisher 信息在真实值 θ附近作泰勒展开，可得

$$\mathcal{J}_{\mathrm{SLD}}(\theta+\theta_{1,\mathrm{err}}) = \mathcal{J}_{\mathrm{SLD}}(\theta) + \theta_{1,\mathrm{err}}^2\frac{\partial^2\mathcal{J}_{\mathrm{SLD}}(\theta_1)}{\partial\theta_1^2} + \cdots \tag{11}$$

这里没有一阶导数项，因为在 θ_1 处，经典费 Fisher 信息 $\mathcal{J}_{\mathrm{SLD}}$ 等于量子费舍尔信息，而该处是最大值。因此，一阶导数必定为零。其次，由于这是一个最大值，关于 $\theta_{1,\ \mathrm{err}}$ 的二阶导数将是一个负常数。总而言之，我们可以将第二阶段的经典费 Fisher 信息改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathrm{SLD}}(\theta+\theta_{1,\mathrm{err}}) =& \mathcal{K}\left(1-O\left(\theta_{\mathrm{err}}^2\right)\right)\\ =& \mathcal{K}\left(1-O\left(\frac{1}{N^\alpha\mathcal{J}_1}\right)\right)\end{aligned} \tag{12}$$

其中，在最后一步中，我们利用了这样一个事实：初始质心估计的均方误差近似等于第一阶段经典费 Fisher 信息的倒数。因此，第二阶段累积的经典费 Fisher 信息总量为 $(N-N^\alpha)\mathcal{K}\left(1-O\left(\frac{1}{N^\alpha J_1}\right)\right)$。当 N很大时

$$\frac{1}{(N-N^\alpha)\mathcal{K}\left(1-O\left(\frac{1}{N^\alpha\mathcal{J}_1}\right)\right)} \approx \frac{1}{N\mathcal{K}}, \tag{13}$$

方差将趋近于最优测量的方差。实际上，由于 N 是有限值，我们可以根据第一阶段测量的选择及其经典费 Fisher 信息，在给定固定 N 的情况下，优化 α 的取值，使第二阶段结束时获得的整体经典费 Fisher 信息最大化。文献 [48] 给出了一种多阶段自适应量子估计算法，其中每一阶段的结果都作为下一阶段的输入，这可能会在这种非渐近情形下进一步提升性能。最后，如果对称对数导数依赖于多个未知参数，那么我们就需要在第一阶段对所有这些未知参数进行初始估计。

C. 如何计算经典费 Fisher 信息和量子费舍尔信息

假设我们希望估计某个参数θ_g ，场景中的亮度 b_s 和位置 x_s 取决于该参数

[49]。要计算给定接收器对单个标量参数 θ_g 的 CFI，我们需要写出测量结果关于 θ_g 的概率分布，然后应用（6）。对于理想直接成像，我们通过一组散粒噪声受限的光子计数探测器，测量入射光子在像平面上的位置；这些探测器具有无限小的像素、单位填充因子和无限大的空间范围。任何直接成像仪器都不可能胜过这一理想化模型。对于这种接收器测量，收到的光子位于位置 x的概率为，

$$P(x) = \langle x|\rho_1|x\rangle = \sum_{s=1}^{n_e} b_s |\psi_{1\mathrm{ap}}(x - x_s)|^2. \tag{14}$$

本着同样的思路，考虑在像平面上采用一组归一化模式函数$\phi_j(x)$的空间基进行测量，其中 $j = 0, 1, 2, \ldots$；也就是说，使用空间模式解复用器（SPADE），然后对 $\phi_j(x)$ 个模式分别进行光子探测。对应于入射光子处于第 j 个模式的本征矢为：

$$|j\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_j(x)|x\rangle \tag{15}$$

来自位置为 x_s 的点光源的光子被测量并发现处于模式 $\phi_j(x)$ 的概率振幅由相关函数给出：

$$\Gamma_j(x_s) \equiv \langle j|\psi_s, 1ap\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_j^*(x)\, \psi_{1\mathrm{ap}}(x - x_s). \tag{16}$$

显然，概率等于该振幅的模平方，而场景中光子被发现处于第 j 个模式的总概率为

$$P_j = \langle j|\rho_1|j\rangle = \sum_{s=1}^{n_e} b_s |\Gamma_j(x_s)|^2. \tag{17}$$

通过理想直接成像或该 SPADE 基估计参数 θ_g 的经典费 Fisher 信息由式 (6) 给出：

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathrm{DI}}(\theta_g) &= N \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{P(x)} \left(\frac{\partial P(x)}{\partial \theta_g}\right)^2, \\ \mathcal{J}_{\mathrm{SPADE}}(\theta_g) &= N \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{P_j} \left(\frac{\partial P_j}{\partial \theta_g}\right)^2. \end{aligned} \tag{18}$$

细心的读者或许已经注意到，我们计算的是 N 份单光子密度矩阵 ρ_1 的经典费 Fisher 信息（CFI），而不是完整密度矩阵 ρ的 CFI；在积分时间内，我们有 M 份完整密度矩阵。这是合理的，因为后者实际上可以转化为前者。例如，对于直接成像，在给定一份密度矩阵 ρ （对应一个给定的时间模式）的情况下，在位置 x 探测到光子的概率为 $P_{\mathrm{full}}(x) = \epsilon P(x)$。 M 份副本的总 CFI 关于 ρ 的表达式为

$$\begin{aligned} M \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{P_{\mathrm{full}}(x)} \left(\frac{\partial P_{\mathrm{full}}(x)}{\partial \theta_g}\right)^2 \\ = M\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{P(x)} \left(\frac{\partial P(x)}{\partial \theta_g}\right)^2 \\ = N \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{P(x)} \left(\frac{\partial P(x)}{\partial \theta_g}\right)^2. \end{aligned} \tag{19}$$

对于量子费舍尔信息，也可以采用大致相似的论证。密度矩阵关于 θ_g 的偏导数不包含来自真空项（$1 - \epsilon$）ρ_0 的任何贡献，因此，

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta_g} = \epsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta_g}. \tag{20}$$

因此，对称对数导数 $\mathcal{L}$仅包含密度矩阵中单光子部分的贡献。由于量子费舍尔信息由 $\mathrm{tr}(\rho\mathcal{L}^2)$ 给出，且真空态 $|\mathrm{vac}\rangle$ 与单光子态正交，因此量子费舍尔信息仅从单光子态 ρ_1 获得非零贡献，并与 $N = M\epsilon$乘以 $\mathrm{tr}(\rho_1\mathcal{L}_1^2)$ 成正比，其中 $\mathcal{L}_1$ 是由式（10）计算得到的对称对数导数。

由于 ρ_1 是各个点光源贡献的亮度加权和 $|\psi_s, 1ap\rangle\langle\psi_s, 1ap|$,它作用于由状态 $|\psi_s, 1ap\rangle$张成的 n_e 维向量空间。 ρ_1 的本征态为此提供了自然的基，尤其是因为对称对数导数也是按这些本征态计算的。对称对数导数还涉及密度矩阵关于 θ_g的导数，因此也作用于由 $|\psi_s, 1ap\rangle$ 及其关于 θ_g的导数张成的空间。因此，我们需要的整体空间是 $2n_e$ 维的。如果只有两个点光源，例如 Tsang等人提出的等亮度两点间距估计问题，那么我们可以明确写出由四个正交基矢组成的基 [3]。然而，随着场景中点光源数量增加，这会变得越来越困难和繁琐。因此，一种替代方法是采用数值方法，将状态 $|\psi_s, 1ap\rangle$ 按空间模式矢量 $|j\rangle$展开，并截断到某个足够大的最大值，以达到所需的精度 [6]。空间模式基下的单光子密度矩阵 ρ_1 表示为

$$\rho_1 = \sum_{s=1}^{n_e} b_s \sum_{j,l=0}^{\infty} \Gamma_j(x_s)\, \Gamma_l^*(x_s)\, |j\rangle\langle l|. \tag{21}$$

其关于 θ_g 的偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta_g} = \Bigg(& \sum_{s=1}^{n_e} \left(\frac{\partial b_s}{\partial \theta_g}\right) \sum_{j,l=0}^{\infty} \Gamma_j(x_s)\, \Gamma_l^*(x_s) \\ & + b_s \left(\frac{\partial x_s}{\partial \theta_g}\right) \sum_{j,l=0}^{\infty} \Gamma_j'(x_s)\, \Gamma_l^*(x_s) \\ & + \Gamma_j(x_s)\, \Gamma_l^{*\prime}(x_s) \Bigg) |j\rangle\langle l|. \end{aligned} \tag{22}$$

之后，计算量子费舍尔信息只需将模式截断至某个最大数目，并应用公式 (8) 和 (10)。

D. 等亮双点间距估计问题

对于两个亮度相等的点光源，$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$。我们将遵循 [4] 的惯例，假设两个点光源的位置为

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_c + \theta, \text{and} \\ x_2 &= \theta_c - \theta, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 θ_c 是质心，并且我们将间距设为 2θ。我们将关注估计 θ，而不是间距 2θ，因为这样可以简化一些公式。这与 Tsang等人的原始论文不同；他们假设点光源位于 $\theta_c \pm \theta/2$，并计算了间距 θ [3] 估计的经典费 Fisher 信息和量子费舍尔信息。有鉴于此，我们对 θ 进行估计所得的量子费舍尔信息将是 Tsang等人 对间距估计所得结果的 4 倍。我们在附录A中概述了计算过程，结果为

$$\mathcal{K}_\theta = 4N \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right|^2 . \tag{24}$$

这里我们没有在 $\psi(x)$ 中包含下标 $1ap$，因为这也适用于任意多孔径配置，而且稍后我们会重新使用该下标，因此我们希望特别将其表述为一项一般性结果。

不过，将其表示为 [4], 引入的 PSF 自相关函数会更方便

$$\Gamma_{\mathrm{PSF}}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \psi(x-a)\, dx. \tag{25}$$

利用分部积分，式 ((24)) 中的 QFI 结果可表示为自相关函数的二阶导数:

$$\mathcal{K}_\theta = -4N\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0). \tag{26}$$

这里，双撇号表示二阶导数。作为一个特例，对于 PSF 为 $\psi_{1\mathrm{ap}}(x) = \sqrt{\sigma}_{\sin(\pi x/\sigma)\ \pi x}$ 的矩形孔径，我们得到 QFI [4,5]:

$$\mathcal{K}_{\mathrm{h,1ap},\theta} = \frac{4\pi^2 N}{3\sigma^2},, \tag{27}$$

下标中的 h 表示硬孔径，“1ap”表示单孔径。本文后文将进一步讨论上述点扩散函数及其来源。不过现在需要指出的是，在 $x = 0$ 处计算该点扩散函数、自相关函数及其导数时，会得到 0/0，因此应取 $x \to 0$ 时的极限值。

说到经典费 Fisher 信息（CFI），如果我们使用理想的直接探测方式，在成像屏上的像素阵列上探测入射光子，那么入射光子落在成像屏位置 x 处的概率为

$$P(x) = \langle x|\rho_1|x\rangle = \frac{1}{2}\left[|\psi_{1\mathrm{ap}}(x-x_1)|^2 + |\psi_{1\mathrm{ap}}(x-x_2)|^2\right], \tag{28}$$

其中，因两个点光源亮度相同，因而入射光子来自其中一个点光源的概率相等，因子 $1/2$ 表示这一点（即 $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$）；$|\psi(x-x_s)|^2$ 是来自光源 s （其中 s =1,2）的光子击中位置 x 处成像屏幕的概率密度。接着，将概率密度设为 $P(x)$ 并应用 CFI 的公式 (6)，即可得到 CFI。对于高斯孔径或矩形孔径，积分 x 至少需要通过数值方法计算。

现在，考虑使用模式函数 $\phi_j(x)$ 的 SPADE测量，其中 $j = 0$， 1， 2，.....如前一节所述。假设 SPADE 完美地对准质心，使得两个位置为 $\pm\theta$。这需要预先知道质心位置，我们可以使用直接成像 [3, 47, 50] 来获得该信息。入射光子在模式 j 中被探测到的概率为

$$P_j = \frac{1}{2}\left(|\Gamma_j(\theta)|^2 + |\Gamma_j(-\theta)|^2\right). \tag{29}$$

如果孔径具有对称性，且所有模式函数均为取实值并具有确定的宇称，那么相关函数也都是纯实值并具有确定的宇称，因此可写为:

$$P_j = \Gamma_j^2(\theta). \tag{30}$$

不难看出，此时的经典费 Fisher 信息为

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\theta &= N\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{P_j(\theta)} \left(\frac{\partial P_j(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 \\ &= 4N\sum_{j=0}^{\infty} \left(\Gamma'_j(\theta)\right)^2. \end{aligned} \tag{31}$$

Tsang 等人 表明，对于高斯点扩散函数（且 SPADE 对准质心），HG 基能够达到量子费舍尔信息。这一结果在 [4]和 [5], 中推广到了任意点扩散函数，后者证明，对于对称孔径，任何由取实值且具有确定宇称的正交归一函数构成的基都能达到量子费舍尔信息。也就是说，对于任意对称孔径和具有确定宇称的模式基，我们得到:

$$\mathcal{J}_\theta = 4N\sum_j \left(\Gamma'_j(\theta)\right)^2 = \mathcal{K}_{1\mathrm{ap},\theta} = -4N\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0). \tag{32}$$

E. SPADE基底旋转下经典费 Fisher 信息的不变性

注意，公式 (31) 对 j 求和后，具有实值向量空间上的 L_2-范数点积的形式

。因此，它在基的旋转下必定保持不变，其中变换系数为纯实数且与参数 θ 无关。也就是说，假设我们有一个SPADE基底，其基函数 $\phi_j(x)$ 均为实值，且 $j = 0, 1, 2, \ldots j_{\max}$，其中 $j_{\max}$ 可以是有限的，也可以是 ∞。现在，考虑如下形式的基底变换

$$\phi_{\mathrm{mod},j}(x) = \sum_{l=0}^{j_{\max}} U_{jl}\phi_l(x), \tag{33}$$

其中，系数 U_{jl} 为实数，且与参数 θ无关。相关函数 $\Gamma_j(x)$及其导数 $\Gamma'_j(x)$具有相同的基底变换系数:

$$\Gamma'_{\mathrm{mod},j}(\theta) = \sum_{l=0}^{j_{\max}} U_{jl}\Gamma'_l(\theta). \tag{34}$$

因此，经典费 Fisher 信息在这种基底旋转下保持不变

$$\mathcal{J}_\theta = 4N\sum_{j=0}^{j_{\max}} \left[\Gamma'_j(\theta)\right]^2 = 4N\sum_{j=0}^{n} \left[\Gamma'_{\mathrm{mod},j}(\theta)\right]^2. \tag{35}$$

然而，如果基底变换系数 U_{jl} 为复数（即同时具有实部和虚部），或依赖于 θ，则这种不变性不成立。前一种情况下，模式 j 的经典费 Fisher 信息不再具有简洁的形式 $\left[\Gamma'_j(\theta)\right]^2$；后一种情况下，新基底中修正后的相关函数的导数也包含 U_{jl}的导数。

值得注意的是，这一不变性结果不仅在 $j_{\max}$ 为无穷大时成立；如果我们使用一个 SPADE，将入射光子分配到模式 $\phi_j(x)$ $j = 0,\ 1 \ldots j_{\max}$及其正交补中，该结果同样成立。实际上，可以使用一种物理设备实现这样的SPADE：该设备将指定模式（截至 $j = j_{\max}$ ）导入各自独立的光子探测器，同时收集并计数其余模式中的光子，这些模式由一个桶式探测器 [51]探测。在这种情况下，来自 $j = 0 \ldots n$ 模式的经典费 Fisher 信息总量如上所述保持不变；而正交补在 $j = 0 \ldots n$ 模式内部旋转下保持不变，因此其对经典费 Fisher 信息的贡献在此类变换下显然恒定。本文稍后将讨论此类 $n + 1$ SPADE。

最后，我们希望以最一般的形式陈述这一不变性结果，为本节作结；该形式不局限于两点问题，甚至不局限于成像。考虑一个混合量子态 ρ，它是若干纯态 $|\psi_s\rangle$ 的等概率叠加，这些纯态依赖于某个参数 θ，且满足 $s = 1 \ldots n_e$。假设这些纯态具有某种对称性，使得在某个基 $|j\rangle$中对其进行测量时，得到的概率系数$\Gamma_j(\theta)$均为纯实数，至多相差一个负号。那么，通过这种测量估计θ 的经典 Fisher 信息为:

$$\mathcal{J}_\theta = \sum_j 4\left(\Gamma'_j(\theta)\right)^2, \tag{36}$$

且在基 $|j\rangle$ 发生任意变化时，只要变换系数为纯实数，该结果便保持不变。这里我们没有明确给出求和指标 j 的范围，因为 $|j\rangle$ 基的维数可以是任意的，包括 ∞。当然，如果概率振幅 $\Gamma_j(\theta)$为纯虚数，上述结论同样成立，因为我们可以将 i 吸收到态 $|j\rangle$ 的定义中，从而使概率系数成为实数。

请注意，如果孔径对称，使得 PSF 是对称的实值函数，那么我们的两点分离问题就满足这一一般性表述的不变性结果的条件。此时，距原点距离相同的任意点，对于偶数或奇数空间模式函数而言，具有相同的概率。

III. 多望远镜工作的基础

现在，我们已经准备好介绍多望远镜系统中的参数估计框架，在该框架中，我们将对上一节介绍的一些工具进行推广。我们将分几个步骤来完成这一工作。

A. 组合孔径函数和点扩散函数

如果我们有几台彼此分离、希望将其接收到的光合并起来的望远镜，那么我们可以将各个孔径函数相加，作为总孔径函数，并对其进行傅里叶变换，以得到组合点扩散函数；这与对单台望远镜的孔径函数进行傅里叶变换来得到其点扩散函数相同。具体而言，考虑一个宽度为 d的硬孔径。当使用角度表示物体平面和像平面坐标时，按波长 λ缩放孔径尺寸，将其无量纲化会很方便；这样，我们便得到 $\delta = d/\lambda$ 作为孔径在动量空间中的尺寸（即成像系统孔径平面的横向轴） [52]。于是，我们的孔径函数为

$$\tilde{\psi}_{\mathrm{1ap}}(k) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\mathrm{rect}(k/\delta), \tag{37}$$

这里，我们将矩形函数定义为：rect(x) 在区间 $-1/2 < x < 1/2$ 内等于 1，因此对所有 x 积分时结果为 1。对该孔径函数进行逆傅里叶变换即可得到点扩散函数

$$\psi_{\mathrm{1ap}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk \exp(ikx)\tilde{\psi}_{\mathrm{1ap}}(k) = \sqrt{\sigma}\,\frac{\sin(\pi x/\sigma)}{\pi x}, \tag{38}$$

其中

$$\sigma = 2\pi/\delta \tag{39}$$

其中，\(\)为瑞利分离度。为保持归一化，我们约定在傅里叶变换及其逆变换中均采用$1/\sqrt{2\pi}$ 。

如果我们将相同的孔径放置在一个偏移的位置，例如放在动量平面中的 α 位置，而不是原点，那么我们得到的点扩散函数（PSF）相同，但会附带一个相位因子 $\exp(i\alpha x)$。只要我们只有一台望远镜，这种变化就没有任何物理意义。然而，如果我们在不同的位置设置多个孔径，那么它们都会获得不同的相位。因此，如果我们以某种方式对这些孔径干涉式地收集到的光进行组合，就会产生这些相位之间的干涉。正是这种干涉，使得组合远距离位置收集到的光能够带来性能提升，从而产生巨型望远镜的效果，其尺寸几乎等于不同孔径之间的距离。

为了研究这一现象，我们将孔径函数取为所有单个孔径函数之和，并将它们的组合点扩散函数定义为各自傅里叶变换之和。无论采用何种测量方式，这个组合点扩散函数都给出了入射光落在一个假想成像平面上的分布，并可用于计算我们这一物理装置的参数估计量子费舍尔信息，以及不同测量方案的经典费舍尔信息。考虑位于动量空间（即孔径平面坐标）中 α_μ 位置、大小相等且数量为 n 的孔径，其中 $\mu = 1 \dots n$。我们假设这些孔径的平均位置为零，即，

$$\sum_\mu \alpha_\mu = 0 \tag{40}$$

如果我们用单孔径尺寸 δ 和比值 $R_\mu = \alpha_\mu/\delta$来表示 α_μ，那么我们有

$$\alpha_\mu = R_\mu \delta = 2\pi R_\mu/\sigma, \tag{41}$$

其中在第二步中，我们使用了（39）。整个装置的完整孔径函数为

$$\tilde{\psi}_{\text{comp}}(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_\mu \tilde{\psi}_{\text{1ap}}(k - \alpha_\mu). \tag{42}$$

复合点扩散函数由对此进行傅里叶逆变换得到，然后

$$\psi_{\text{comp}}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \psi_{\text{1ap}}(x) \times \sum_\mu \exp(i\alpha_\mu x). \tag{43}$$

或者，如果我们愿意，也可以用单个孔径的瑞利尺度 σ 以及各个孔径的位置与单台望远镜尺寸之比 R_μ 来表示，将指数项写作 $\exp(i\alpha_\mu x) = \exp(2\pi i R_\mu x/\sigma)$。

举一个具体的例子，假设我们有两个硬孔径（$n = 2$），其中心分别位于位置 $\pm b/2$。在孔径平面坐标中，我们得到位置$\alpha_1 = -\beta/2$和 $\alpha_2 = \beta/2$，其中 $\beta = b/\lambda$。因此，孔径函数为

$$\tilde{\psi}_{\text{2ap}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \left[\text{rect}\left(\frac{k - \beta/2}{\delta} \right) + \text{rect}\left(\frac{k + \beta/2}{\delta} \right) \right]. \tag{44}$$

逆傅里叶变换得到组合点扩散函数

$$\psi_{\text{2ap}}(x) = \sqrt{2\sigma} \cos(\pi x r/\sigma) \frac{\sin(\pi x/\sigma)}{\pi x}, \tag{45}$$

其中

$$r \equiv \beta/\delta, \tag{46}$$

因此，

$$\beta = 2\pi r/\sigma. \tag{47}$$

B. 孔径的局域模式

我们分析所需的另一要素，是一组适用于多孔径系统的便利基模式。为此，自然可以考虑在每个孔径上定义的局域模式函数基。

$$\tilde{\phi}_j(k) = \frac{f_j(ik)}{\sqrt{\delta}} \text{rect}(k/\delta), \tag{48}$$

张成孔径上定义的所有函数 $f_j(ik)$ 所构成的函数空间，即区域 $-\delta/2 < k < \delta/2$。（将 $f_j(ik)$ 写成虚数 ik 的函数，而不只是 k 的函数，其原因将在第 IIID 节中变得更加清楚。）对于位于 α_μ 的每个硬孔径，我们都将得到其一组两两正交归一的“局域”模式 $\phi_j(k - \alpha_\mu)$。由于它们的矩形函数在不重叠区域内为零，因此这些模式（显然）与位于不同位置的其他孔径的所有局域模式正交：

$$\int dk \tilde{\phi}_j(k - \alpha_\mu)\, \tilde{\phi}_l(k - \alpha_\nu) = \delta_{\mu\nu}\delta_{jl}. \tag{49}$$

因此，这些局域模式在所有孔径的并集上构成一组完备正交基。这种相互正交性在转换到（联合）像平面后自然也仍然成立，此时这些模式由孔径平面函数的逆傅里叶变换给出：

$$\begin{aligned} \phi_{j\mu}(x) \equiv & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp(ikx) \tilde{\phi}_j(k - \alpha_\mu) \\ = & \exp(i\alpha_\mu x) \phi_j(x), \end{aligned} \tag{50}$$

其中，$\phi_j(x)$ 是位于孔径平面原点处的孔径的第 j 个模式函数，由动量空间函数的逆傅里叶变换给出

$$\phi_j(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp(ikx) \tilde{\phi}_j(k). \tag{51}$$

函数 $\phi_{j\mu}(x)$ 定义在整个成像屏幕上，并构成像平面的完备正交归一基：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*_{j\mu}(x)\, \psi_{\nu l}(x) = \delta_{\mu\nu}\delta_{jl}. \tag{52}$$

现在，假设我们希望计算式 (43) 中给出的组合点扩散函数 $\psi_{\rm comp}(x)$ 与某个任意函数的相关函数，该任意函数可表示为局域模式函数的线性组合：

$$\psi_{\rm arb}(x)=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}a_{j\mu}\phi_{j\mu}(x)=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}a_{j\mu}\exp(i\alpha_\mu x)\,\phi_j(x) \tag{53}$$

其中 $a_{j\mu}$ 是一些常数系数。由于每个 $\exp(i\alpha_\mu x)\phi_j(x)$ 项对应于动量空间中以 α_μ 为中心的矩形函数，因此只有来自同一孔径的各项之积才会对相关函数产生非零贡献。这些贡献将涉及单孔径局部模式 $\phi_{j\mu}(x)$ 的相关函数，以及根据其位置施加相位偏移的单孔径点扩散函数。因此，

$$\begin{aligned}\Gamma_{j\mu}(a)&\equiv\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\phi^*_{j\mu}(x)\,\exp(i\alpha_\mu(x-a))\,\psi_{\rm 1ap}(x-a)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\left[\exp(-i\alpha_\mu x)\phi^*_j(x)\right] \qquad (54)\\&\quad\times\left[\exp(i\alpha_\mu(x-a))\,\psi_{\rm 1ap}(x-a)\right]\\&=\exp(-i\alpha_\mu a)\Gamma_j(a), \qquad (55)\end{aligned}$$

其中

$$\Gamma_j(a)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\phi^*_j(x)\,\psi(x-a) \tag{56}$$

是孔径平面原点处单孔径的第 j 个模式与点扩散函数之间的相关函数，如式 (16) 所定义。

因此，任意函数$\psi_{\rm arb}(x)$与复合孔径点扩散函数（43）的相关函数可表示为未移位相关函数 $\Gamma_j(a)$的形式：

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rm arb}&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi^*_{\rm arb}(x)\,\psi_{\rm comp}(x-a)\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}a^*_{j\mu}\,\Gamma_{j\mu}(a)\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}a^*_{j\mu}\,\exp(-i\alpha_\mu a)\,\Gamma_{\alpha_\mu,j}(a). \qquad (57)\end{aligned}$$

作为同一思路的一种特殊应用，复合孔径点扩散函数的自相关函数将会是

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rm PSF,comp}(a)&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi^*_{\rm comp}(x)\,\psi_{\rm comp}(x-a)\\&=\frac{1}{n}\Gamma_{\rm PSF,1ap}(a)\sum_{\mu}\exp(-i\alpha_\mu a), \qquad (58)\end{aligned}$$

其中 $\Gamma_{\rm PSF,\ 1ap}(a)$ 是我们单个硬孔径点扩散函数的自相关函数（38）

$$\Gamma_{\rm PSF,1ap}(a)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi^*_{\rm 1ap}(x)\,\psi_{\rm 1ap}(x-a)=\frac{\sigma\sin(\pi x/\sigma)}{\pi x}. \tag{59}$$

在结束本节之前，我们想指出，对于未移位的硬孔径（即中心位于 $k=0$ 的硬孔径），各个孔径相关函数 $\Gamma_j(a)$ 与模式函数 $\phi^*_j(a)$ 成正比。这一点可通过将相关函数积分写成动量空间形式得出

$$\begin{aligned}\Gamma_j(a)&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\phi^*_j(x)\,\psi_{\rm 1ap}(x-a)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,dk\,dp\,\exp(ik(x-a)-ipx)\tilde{\psi}_{\rm 1ap}(k)\,\tilde{\phi}^*_j(p)\\&=\int dk\,\exp(-ika)\tilde{\psi}_{\rm 1ap}(k)\,\tilde{\phi}^*_j(k)\\&=\int dk\exp(-ika)\frac{f^*_j(ik)}{\delta}\mathrm{rect}^2(k/\delta)\\&=\sqrt{\sigma}\phi^*_j(a). \qquad (60)\end{aligned}$$

上面的第三个方程是利用 p 和 x 的傅里叶表示对˜δ 函数积分得到的，第四个方程则是根据（37）和（48），将 $\psi_{\rm 1ap}$（k）和ϕ_j（k）用矩形函数表示得到的。在最后一步中，我们注意到矩形函数的平方仍为矩形函数，并将其与（48）进行比较。这里我们还使用（39）将 δ 表示为 σ。最后请注意，对于实值模式函数（例如 sinc-Bessel 基中的模式函数），ϕ^*_j（a）$=\phi_j$（a）。

请注意，对于定义在硬孔径上的模式基，其相关函数与相应的模式函数成正比（如果函数为复数，则与其复共轭成正比）；这一性质同样适用于二维硬孔径。在这种情况下，除了将矩形函数替换为我们的二维阶跃函数（该函数在孔径内取值为 1，在其他所有位置取值为 0）之外，上文所述的步骤完全相同；比例常数则由孔径面积的平方根决定，而非长度。例如，对于圆形孔径，我们将使用 circ 函数，而不是矩形函数。

C. 点扩散函数模式与局部模式的单光子态的狄拉克符号表示

现在，我们用方便的狄拉克符号总结前两节关于多孔径系统的结果。回顾第 II 节，单光子密度矩阵为 $\rho_1=\sum_{s=1}^{n_e}b_s|\psi_s\rangle\langle\psi_s|$，其中 $|\psi_s\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi(x-x_s)|x\rangle$。多孔径情形下这一结论仍然成立，只是此时 PSF 是与我们的多孔径系统相关联的复合孔径函数 (43)。由于这个复合 PSF 是所有孔径各自贡献之和，—

tures，量子态 $|\psi_s\rangle$ 也是一个和：

$$\begin{aligned}|\psi_s\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x-x_s)|x\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\mu=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} dx\exp(i\alpha_\mu(x-x_s))\,\psi_{1\mathrm{ap}}(x-x_s)|x\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\mu=1}^{n}|\psi_{\mu,s}\rangle, \end{aligned} \tag{61}$$

其中，第二行使用了复合孔径函数（43）的公式，第三行将每个孔径的贡献定义为以下量子态

$$|\psi_{\mu,s}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp(i\alpha_\mu(x-x_s))\,\psi_{1\mathrm{ap}}(x-x_s)\,|x\rangle. \tag{62}$$

从物理上说，状态 $|\psi_{\mu,\ s}\rangle$ 是一个光子的量子态：该光子源自位置 x_s 处的点光源，并通过我们的多望远镜系统中的 μ^{th} 孔径到达像平面。

至于我们的局域模式，其量子态为

$$|j,\mu\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp(i\alpha_\mu x)\,\phi_j(x)\,|x\rangle. \tag{63}$$

也就是说，这是入射光子在我们系统的第 μ 个孔径的局域模式编号 j 中被发现时所对应的量子态。如上一节所述，这些局域模式相互正交归一，即

$$\langle j,\mu|l,\nu\rangle = \delta_{jl}\,\delta_{\mu\nu}. \tag{64}$$

对于单孔径部分对相关函数的贡献，回顾（55）及其附近的讨论，我们有

$$\langle j,\mu|\psi_{\nu,s}\rangle = \delta_{\mu\nu}\exp(-i\alpha_\mu a)\Gamma_j(a). \tag{65}$$

D. sinc-贝塞尔模式

到目前为止，我们一直笼统地谈论孔径的局域模式，并未指定特定的基。不过值得指出的是，对于矩形孔径，sinc-bessel 模式构成了一个自然的基。在这个基中，零阶模式就是 PSF（与矩形函数相关联），而后续模式可以通过对 PSF 求导，并进行 Gram–Schmidt 正交化来得到，从而减去它们与先前模式的重叠 [4, 5]。例如，模式一仅与 PSF 的导数成正比，因为后者是偶函数，而前者是奇函数，因此它们的内积为零。然而，二阶导数与 PSF 确实存在非零重叠，因此我们需要将其减去，以得到模式二。同样，三阶导数与一阶导数存在重叠（但与 PSF 和 the 二阶导数），因此我们需要减去这一部分，以得到第三个模式。如果我们改为在孔径平面中执行这一过程，那么矩形孔径函数（37）就是基模，而导数则由矩来替代，并在这些矩上进行格拉姆–施密特正交化。由此，我们得到关于虚部 ik 的函数，这也是我们在公式（48）中使用 i来表示函数 f_j（ik）的原因。结果表明，这些函数具有 j次勒让德多项式的形式：当 j [5]为偶数（奇数）时，仅包含偶数（奇数）项。

E. 非硬边孔径

上述讨论的大部分内容同样适用于任意孔径，尤其是点扩散函数中的相位偏移，以及由孔径位置产生的相关函数。不过，当两个孔径彼此靠近、孔径函数发生重叠因而不再正交时，可能会出现棘手的问题。当然，这种情况并不完全符合实际，因为我们通常使用硬孔径。高斯等平滑函数通常被用作硬孔径的近似或替代，因为有时这样可以简化计算。因此，合理的近似也应体现这样一个事实：即使两个（硬）孔径相距很近，它们位于不同位置时也不应彼此重叠（也就是说，中心间距大于半径之和，但只略大于该值）。因此，我们可以针对这一重叠问题进行临时修正，并假设两个孔径及其局域模式彼此正交。完成这一步后，我们便可采用第 III C 节的规则，其中振幅函数 $\Gamma_j(x_s)$ 取为新孔径类型对应的函数，并考虑相应的基函数。在多孔径系统中进行模式分选时，这种做法是合理的。对于这样的测量方案，很容易看出这一点：不同接收器收集的光经由单模光纤或多模“光管”传送到同一位置。不过，即使来自不同孔径的光被聚焦到同一成像屏上，这一点仍然成立；例如，大型分段式望远镜的各个独立反射镜就是如此，此时我们在该成像屏上进行空间模式测量。后一种情况下，关键是用各个单个孔径的局域模式来表示公共成像屏上的空间模式，并舍弃涉及不同孔径所产生项的乘积的重叠贡献。不过，对于聚焦到公共成像屏上的光进行直接成像时，情况会更加复杂。在这种情况下，一开始就用高斯函数或其他平滑函数来近似各个孔径并不合理，除非有充分可靠的理由支持这种做法。

IV. 多孔径接收器设计

现在，我们可以讨论不同类别的多孔径接收器，以及第 IIC 节中的一般参数估计问题。

A. 多轴式光束合成

当不同孔径彼此足够接近时，我们可以使用从大型抛物面镜上切割下来的镜面分段；如果拥有一台大型望远镜，我们也会采用这种抛物面镜。这种情况见于双筒望远镜，例如位于亚利桑那州的 LBT（大型双筒望远镜），以及许多规划中的下一代地基望远镜，例如巨型麦哲伦望远镜（GMT）。这些镜面分段可以将光聚焦到一个共用的成像屏上，在那里可以采用任何用于单孔径望远镜的技术进行适当测量。我们将研究理想直接成像、SPADE，以及所谓的 SLIVER（通过图像反演干涉实现超高精度定位）。SLIVER 会将入射光分为偶部和奇部；它比 SPADE 更易于实验实现，并且在小间距极限下，对于双点问题可达到量子费舍尔信息 [53]。

1. *Ideal direct imaging*

在多轴式组合配置中使用多个孔径时，只要望远镜阵列能够精确地进行相位校准 [31]，直接成像便是一种自然的成像策略；这类配置具有共用的傅里叶共轭像平面。与第 II 节 C 一样，我们将考虑理想化情形：像素化无限小、填充因子为 1，且探测屏的空间范围无限。入射光子在成像屏上位置 x 处被探测到的概率密度，将按照第 II 节 C 的方法计算，只是现在我们使用组合点扩散函数（43）。

$$\begin{aligned}P(x) =&\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n_e} b_s \left|\psi_{\rm comp}(x-x_s)\right|^2\\ =&\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n_e} b_s \left|\sum_{\mu=1}^{n}\exp(i\alpha_\mu(x-x_s))\right|^2 \psi_{\rm 1ap}^2(x-x_s)\\ =&\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n_e} b_s \left(n+\sum_{\mu>\nu,\mu,\nu=1}^{n}\cos\left((\alpha_\mu-\alpha_\nu)(x-x_s)\right)\right)\\ &\times\psi_{\rm 1ap}^2(x-x_s).\end{aligned} \tag{66}$$

这里我们取单孔径点扩散函数的平方，因为单个孔径具有对称性，所以该函数为纯实值函数。对未知参数 θ_g 求偏导后，可得到三项

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x)}{\partial\theta_g} =& \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n_e}\frac{\partial b_s}{\partial\theta_g}\left(n+\sum_{\mu>\nu,\mu,\nu=1}^{n}\cos((\alpha_\mu-\alpha_\nu)(x-x_s))\right)\psi_{\rm 1ap}^2(x-x_s)\\ &+\frac{1}{n}b_s\frac{\partial x_s}{\partial\theta_g}\left(\sum_{\mu>\nu,\mu,\nu=1}^{n}(\alpha_\mu-\alpha_\nu)\,\sin((\alpha_\mu-\alpha_\nu)(x-x_s))\,\psi_{\rm 1ap}^2(x-x_s)\right.\\ &\left.-2\sum_{\mu>\nu,\mu,\nu=1}^{n}(n+\cos((\alpha_\mu-\alpha_\nu)(x-x_s)))\,\psi_{\rm 1ap}'(x-x_s)\right)\psi_{\rm 1ap}(x-x_s).\end{aligned} \tag{67}$$

这里，$\psi_{\rm 1ap}'(x-x_s)$ 是 $\psi_{\rm 1ap}(x-x_s)$ 对 x 的偏导数。

回顾公式（6）及其相关讨论可知，经典费 Fisher 信息由下式给出

$$\mathcal{J}_{\rm DI}(\theta_g) = N\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{P(x)}\left(\frac{\partial P(x)}{\partial\theta_g}\right)^2. \tag{68}$$

注意，$(\partial P(x)/\partial\theta_g)^2$ 中会有一项与两个孔径之间距离的平方 $(\alpha_\mu-\alpha_\nu)^2$ 成正比。正是这一项带来了基线干涉测量的增益，并产生了巨型望远镜的效果，其尺寸近似等于单个望远镜之间的距离。如果我们只有单台望远镜，那么我们只能获得 $\left(\psi_{\rm 1ap}'(x-x_s)\right)^2$，其量级为单个孔径尺寸的平方，即 $1/\sigma^2=\delta^2/(4\pi^2)$。然而，请注意，在公式（67）中，我们只能通过位置 x_s 关于参数 θ_g 的偏导数获得这一 $(\alpha_\mu-\alpha_\nu)^2$ 经典费 Fisher 信息（CFI）贡献。涉及亮度偏导数的项中并不存在这一贡献。这可能意味着，如果只有亮度依赖于参数 θ_g，我们就无法获得这种增强。但这一点并不显而易见，因为这种依赖关系仍可能通过隐式依赖体现出来。本文提出的框架可用于研究广义参数估计的量子极限，适用于.....

一种通用配置的多孔径系统，但此类研究超出了本文的范围。

2. SPADE

我们也可以在公共像平面上进行 SPADE测量，以取代直接探测成像屏。具体做法取决于确切的模式基，因此无法用一般形式来表述；除非照搬第 II C 节中关于 SPADE 的公式，只不过此时的相关函数将是与 SPADE 的模式基相关联的相关函数。回想一下，当点扩散函数具有式（57）的形式时，多孔径装置中任意函数的相关函数。由于在 SPADE测量中，入射光子处于给定模式函数的概率将涉及此类相关函数的平方，因此我们会得到带有$|\exp(i(\alpha_\mu - \alpha_\nu)x_x)|^2$形式因子的项。因此，如果 x_s 取决于参数 θ_g，则概率对 θ_g 的导数将包含$(\alpha_\mu - \alpha_\nu)^2$,形式的因子，从而获得结合远距离孔径的光所带来的性能提升，正如我们在直接成像中发现的那样。

3. SLIVER

SLIVER（在 [53], 中介绍）是一种简单的装置，可将收集到的光分离为偶部和奇部。输入光首先通过一个50-50分束器分成两部分。随后，将其中一个分束器输出相对于装置的中心轴进行空间反转。然后，使用第二个50-50分束器将两束光重新合成。输出光包含这两束光的和与差，其中前者是入射信号的偶部，后者是奇部。接着使用光子计数器对它们进行测量。对于一般参数估计问题，SLIVER 性能的详细分析并无太大启发，因此我们将略过。不过，对于均匀明亮双点问题，SLIVER 在小间距极限下可达到量子费舍尔信息，因此我们将在第 VI 节讨论该问题时计算其性能。

B. 共轴光束合成

当单个孔径之间的距离变得更大时，就不再适合将光聚焦到同一成像屏上。不过，我们可以通过单模光纤将远距离望远镜收集到的光传送到一个中心位置；这些光纤会耦合来自“局域模式”的光。也可以通过多模“光管”传送这些光。

1. Receivers employing mode sorting

（a）通用共轴接收器

回想一下第 III 节，与不同望远镜相关的局域模式 $\phi_j(k-\alpha_\nu)$ 构成了孔径平面中由孔径覆盖的所有区域的一组完备正交归一基。现在，假设我们有一个处于某个任意状态的入射光子

$$\tilde{\psi}_{\rm arb}(k) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j\mu}\,\tilde{\phi}_j(k-\alpha_\mu), \tag{69}$$

那么，系数 $a_{j\mu}$ 就是与在该基中测量入射光子并发现其到达孔径 μ 、且被分选至局域模式 j 相关联的概率振幅。如果我们在每个孔径处都设置一个模式 $\tilde{}$ 分选器，将 ϕ_j （ $k-\alpha_\mu$ ）中的光耦合至单模光纤的高斯模式 T_{00} ，那么就能得到该光纤中的概率振幅 $a_{j\mu}T_{00}$ 。如果将这样的一组光纤汇集到中央位置，并将它们馈入一个由某组系数 $d^*_{\xi\mu j}$ 构成的线性光学干涉仪，其中 ξ 是干涉仪不同输出的索引，那么我们便可获得该干涉仪输出端口中的振幅 $\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{j_{\max}} d^*_{\xi\mu j}a_{j\mu}T_{00}$ ，其中 $j_{\max}$ 是所收集局域模式的最大值 j 。与输出 ξ 相关联的总光子概率为：

$$P_\xi = \left|\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{j_{\max}} d^*_{\xi\mu j}a_{j\mu}\right|^2. \tag{70}$$

这正是一个进入我们多孔径系统的光子处于孔径平面模式的概率。

$$\tilde{\chi}_\xi(k) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{j_{\max}} d_{\xi\mu j}\tilde{\phi}_j(k-\alpha_\mu). \tag{71}$$

因此，测量干涉仪的输出，就能获得以 $\tilde{\chi}_\xi(k)$ 基表示的光子计数（受泊松散粒噪声限制）。由此我们证明，将远距离望远镜处不同的局域模式耦合到单模光纤中（通过局域 SPADE），再将它们送入中心位置的线性干涉仪，并用光子计数器测量输出，等效于对多孔径系统进行以 $\tilde{\chi}_\xi(k)$ 基表示的 SPADE测量。虽然我们一直以孔径平面函数来解释这一过程，但在像平面中同样成立，只需将 $\tilde{\chi}_\xi(k)$ 替换为其傅里叶变换

$$\chi_\xi(x) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=0}^{j_{\max}} d_{\xi\mu j}\exp(i\alpha_\mu x)\phi_j(x). \tag{72}$$

(b) 分组接收器

原则上，我们可以用任意组合方式合并来自不同接收器的各种局域模式；一种更简单的方法是将每个局域模式中的光汇集到一起，并按照相同的线性组合使其发生干涉。例如，这样做或许就不再需要局域 SPADE。具体而言，对于每个局域模式编号 j，我们有 n 个来自不同孔径的信号，并以索引 μ 标记。我们可以将这些信号输入一个分束器电路，其线性变换系数为 $c^*_{\gamma\mu}$，其中 $\gamma = 0,\ 1,\ \ldots n$ 是索引，用于标记每个此类干涉仪的 n 个输出端口。因此，这些系数 $c^*_{\gamma\mu}$ 构成一个酉矩阵，描述了分束器的 n 个输入端口与 μ 索引标记的端口之间，以及 n 个输出端口与 γ索引标记的端口之间的线性变换。随后，可以用光子计数器测量这些分束器输出端口中的光。这种方法相当于在基函数中测量入射光子

$$\phi_{j\gamma}(x) = \left(\sum_{\mu} c_{\gamma\mu}\, \exp(i\alpha_\mu x)\right)\, \phi_j(x). \tag{73}$$

为了计算通过在此基下进行测量来估计一般参数 θ_g 的性能，我们需要这些模式与 n-孔径点扩散函数之间的相关函数，正如前文所述。回顾 IIIB节，来自两个不同孔径的贡献的内积为零，而对于同一孔径，我们得到除相位外的单孔径相关函数。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{j\gamma}(x_s) \equiv& \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*_{j\gamma}(x)\psi_{\rm comp}(x - x_s)\\ =&\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{\mu=1}^{n} c^*_{\gamma\mu}\, \exp(-i\alpha_\mu x_s)\right)\, \Gamma_j(x_s).\end{aligned} \tag{74}$$

入射光子在与基函数 $\phi_{j\gamma}$ 相关联的探测器中被测得的概率因此是

$$P_{j\gamma} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n_e} b_s\, B_\gamma(x_s)\, \Gamma^2_j(x_s), \tag{75}$$

其中，我们假设 $\Gamma_j(x_s)$ 的常规平方为纯实数，因此其模平方等于常规平方，并且

$$\begin{aligned}B_\gamma(x_s) \equiv& \left|\sum_{\mu=1}^{n} c^*_{\gamma\mu}\, \exp(-i\alpha_\mu x_s)\right|^2\\ =& \sum_{\mu,\nu=1}^{n} c^*_{\gamma\mu} c_{\gamma\nu}\, \exp(-i(\alpha_\mu - \alpha_\nu)x_s).\end{aligned} \tag{76}$$

然后，CFI 由通常的公式给出。

$$\mathcal{J}_{gw}(\theta_g) = N\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{P_{j\gamma}}\left(\frac{\partial P_{j\gamma}}{\partial\theta_g}\right)^2. \tag{77}$$

在实际情况下，我们只能收集到一定数量的局域模式，因此 j 将从 0 变化到某个最大值 $j_{\max}$。不过，我们可以在每架望远镜处部署局域 SPADE，收集并将索引从 0 到 $j_{\max}$ 的模式进行光纤耦合（以便传输至中心位置），并用桶式探测器探测其余高阶模式中的光子。随后，我们只需在方程（77）中对 j 从 0 到 $j_{\max}$ 求和，并将模态方案正交补空间的经典费 Fisher 信息贡献加上去，其中的光子计数由局域桶式探测器获得。结果如下：

$$P_r = \sum_{s=1}^{n_e} b_s\left(1 - \sum_{j=0}^{j_{\max}}\Gamma^2_j(x_s)\right). \tag{78}$$

$j_{\max} = 0$ 种情况对应于一种特殊情形：我们只需在每个孔径位置设置一个二元模式分选器，将局部点扩散函数的（零阶）模式耦合到一根单模光纤中，同时允许其余的光进入桶式探测器。将来自 n 个孔径的零阶模式信号在分束器电路中合并后，我们得到 n 个输出，分别对应于来自每个孔径的零阶模式的不同线性组合。各局部位置桶式探测器测得的光子总数，给出了函数空间正交补中的光子数，因此我们在复合孔径上实现了有效的 $n+1$ SPADE。

分组接收器的一个特殊示例是涉及两个孔径的成对测量方案。对于每个模式 j，我们都会从两个位置获得两个信号，并将它们输入一个 50-50分束器。因此，输出将是输入信号的和与差。如果孔径位于孔径平面中的 $\alpha_1 = -\beta/2$ 和 $\alpha_2 = \beta/2$ 位置，如我们在第 III 节A中从公式（44）附近开始讨论的那样，那么使用 j 阶模式信号的对称线性组合来测量输出，就相当于在该模式中进行测量。

$$\begin{aligned}\phi_{j+}(x) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp(-i\beta x/2) + \exp(i\beta x/2)\right)\psi_{{\rm h},j}(x)\\ =& \sqrt{2}\cos(\pi r x/\sigma)\psi_{{\rm h},j}(x),\end{aligned} \tag{79}$$

其中，我们使用了（46）和（39），将论证表示为单孔径瑞利参数 σ。$j = 0$ 情形对应于在复合孔径点扩散函数中进行测量。同样，对于模式 j，测量 50-50分束器的反对称输出对应于在空间模式函数中进行测量。

$$\phi_{j-}(x) = \sqrt{2}\sin(\pi r x/\sigma)\psi_{{\rm h},j}(x). \tag{80}$$

对称和反对称组合的函数 $B_\gamma(x_s)$ 为

$$\begin{aligned}&B_+(x_s) = 2\cos^2(\pi r x_s/\sigma), \text{ and}\\ &B_-(x_s) = 2\sin^2(\pi r x_s/\sigma).\end{aligned} \tag{81}$$

我们将在第 VI 节对双点光源问题的处理过程中采用这一简化。

我们还可以将这种成对方案扩展到两个以上的孔径，这些孔径围绕多孔径系统的中心呈对称排列。假设我们在 $\pm\beta_1/2$、 $\pm\beta_2/2$、 $\pm\beta_3/2$等位置设置孔径。那么，对于每一对距离中心等距且位置相对的孔径，我们都可以使用一个50:50分束器，将每个局域模式对应的信号进行混合，从而得到它们的对称和反对称组合。当然，我们也可以设置奇数个孔径，这样，除了若干对等距孔径之外，中心位置还会有一个孔径。在这种情况下，我们仍然按照上述方式组合所有等距孔径对的信号，而中心位置孔径的第 j个模式则只是另一个独立的模式，我们不会将其与其他位置收集到的任何光进行混合。

2. Receivers without mode sorting: using light pipes

在这种接收器类型中，我们不使用任何模式分选器。相反，我们通过“光管”将各个孔径收集到的全部（完整、多模）光传送到中心位置，同时保持所收集光场的空间结构；随后通过分束器电路以干涉方式组合信号，并用光子探测器计数每个输出端口中的光子总数。

入射光子在我们的分束器电路第 γ 个输出端被探测到的概率，可以通过对所有局域模式求和式 (75) 得到。由于根据归一化性质，$\sum_j \Gamma_j^2(x_s) = 1$，对 j 求和会消除概率对局域模式的依赖，因此我们得到

$$\begin{aligned} P_\gamma &= \sum_j P_{j\gamma} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n_e} b_s\, B_\gamma(x_s), \end{aligned} \tag{82}$$

其中 $B_\gamma(x_s)$ 在式 (76) 中定义。由该概率可计算经典费 Fisher 信息：

$$\mathcal{J}_{lp}(\theta_g) = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{1}{P_\gamma}\left(\frac{\partial P_\gamma}{\partial \theta_g}\right)^2. \tag{83}$$

需要指出的是，在单个孔径尺寸趋于零的极限下，这也是分组接收器的经典费 Fisher 信息。在这种情况下， $\Gamma_0(x_s) \to 1$，所有其他 $\Gamma_j(x_s)$ 函数也都趋于零。 [23]讨论的正是这一极限。

如上文所述的基于分组式模式分选器的设计一样，光导管接收器最简单的示例是在孔径相对于基线中心呈对称配置时，将光成对组合。也就是说，对于每一对位置相对的望远镜，我们只需将两处收集到的光汇聚起来并传输通过光管进入50-50分束器，并在输出端口处放置光子计数器。因此，一个端口的输出是来自两台望远镜的所有输入的对称和，而另一个输出则是反对称组合。其概率可用式（81）中给出的函数 $B_+(x_s)$和 $B_-(x_s)$表示。

3. Obtaining a SLIVER: adding a reflection in a pairwise light pipe receiver

事实证明，只需对上述成对光管接收器稍作调整，就能实现 SLIVER。具体而言，考虑偶数个望远镜，它们等间距地分布在基线中心两侧，并且不经过任何空间模式分选，直接成对合并信号。若对每一对望远镜的分束器输入端口之一加入一次反射，就能实现第 IV A 3 节介绍的 SLIVER。它会将入射光按每对望远镜的电场分为偶部和奇部。

为明确说明这一点，假设我们有两个大小为δ、中心分别位于 $\alpha_1 = -\beta/2$ 和 $\alpha_2 = \beta/2$的孔径，且孔径平面中的光子单位场为 $E(k)$。在这两个孔径中，该场可以用变量 κ参数化：

$$E_\pm(\kappa) = E\left(\frac{-\delta \pm \beta}{2} + \kappa\right), \quad 0 < \kappa < \delta. \tag{84}$$

50-50分束器的输出分别给出这两个量的和与差，再乘以 $1/2$。然而，如果我们在干涉仪的一个输入端、绕其中心加入反射，例如位于 $-\beta/2$的那个输入端，那么其信号变为

$$E\left(\frac{\delta - \beta}{2} - \kappa\right), \quad 0 < \kappa < \delta. \tag{85}$$

于是，分束器的输出包含：

$$\frac{1}{2}\left(E\left(\frac{\beta - \delta}{2} + \kappa\right) \pm E\left(-\frac{\beta - \delta}{2} - \kappa\right)\right), \quad 0 < \kappa < \delta. \tag{86}$$

也就是说， $E(k)$ 在两个孔径所覆盖区域内的偶部和奇部。因此，在 50-50分束器的一个输入端口上增加一次反射，就能将光导管接收器变成等效于所谓的 SLIVER，它会将入射光按奇部和偶部进行分类。将这一方法推广到任意数量、与原点等距的孔径对上，是显而易见的。在这种情况下，我们会用一个五五分束器将每一对等距且位置相对的孔径所接收的信号合并，并在其中一个输入端口上加入反射。随后，所有五五分束器的对称组合输出的光子计数总和，就会给出整个系统入射光的偶部，而反对称

组合输出的总和则会给出奇部。不过，由于我们还能分别获取每个输出端口的光子计数，而不只是对称和反对称计数的总和，因此该接收器还能提供一些额外信息，也就涵盖了 SLIVER 的功能。如果中心位置也有一个孔径，那么我们不会将它接收的光与其他孔径的信号合并，而只在该处实现一个局部 SLIVER，从而为多孔径系统的复合孔径构成完整的 SLIVER。当然，如果孔径配置相对于 k-空间中的原点中心不对称，那么这种与 SLIVER 的联系就不成立。

C. 基于纠缠的接收器

当各个孔径之间的距离远到无法通过单模光纤或多模光管将其收集到的光传输至中心位置时，我们仍然能够达到量子费舍尔信息（QFI），即多孔径基线分辨能力的理论极限，但这需要在各个望远镜站点之间使用预共享纠缠，采用一种将入射光的量子态耦合到一组量子存储器中的方法，并在每个望远镜站点执行局域量子操作。其基本思路与文献 [26] 和 [27], 类似，但需要进行以下两项改进：(1) 在每个望远镜站点增加局域模式分选器；(2) 将与量子最优干涉仪相对应的酉变换（如上文接收器设计中所述，当时可以将局域模式传输至中心位置）“编译”为一种适当的基于纠缠的方案，该方案在所谓的单进制编码（即多个模式中的单光子）量子位（qudit）基上使用隐形传态逻辑。针对具体成像问题对这一构想进行全面阐述，将留待未来研究完成。

V. 一般参数估计问题的量子费舍尔信息

在本节中，我们展示如何计算多孔径基线的一般参数估计问题的量子费舍尔信息。我们还通过尺度分析说明，多孔径系统的量子费舍尔信息相比单个组成孔径有何提升。

回想一下第 II 节 C，n_e 个发射体的密度矩阵维度为 $n_e \times n_e$，而当我们纳入密度矩阵的导数时，便有一个 $2n_e$ 维希尔伯特空间。当点的数量增加到 2 或 3 个以上时，计算密度矩阵及其导数就会变得越来越复杂。此时，解析计算将无法进行。一种计算量子费舍尔信息的方法是像式 (21) 那样将密度矩阵按模式基展开，在足够大的模式编号处截断，然后进行数值计算。我们可以用同样的方法计算多孔径系统的量子费舍尔信息，但现在必须使用适用于多孔径系统的基。一个显而易见的选择是第 III 节 B 中定义的单个孔径的局域模式。回想一下，与第 μ 个孔径的局域模式 j 中的光子相关联的状态为 $|j,\ \mu\rangle$ 如式 (63) 所定义。还要回想式 (55) 的结果：位于 α_μ 处的移位孔径的点扩散函数与其局域模式的相关函数，可由位置 0 处对应的相关函数乘以一个相位因子得到。于是，在所有单个孔径的局域模式基下，密度矩阵可写为

$$\begin{aligned}\rho_1 = &\sum_{s=1}^{n_e} b_s \sum_{j,l=0}^{\infty} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \exp(-i(\alpha_\mu - \alpha_\nu)x_s) \\ &\times \Gamma_j(x_s)\,\Gamma_l^*(x_s)\,|j,\mu\rangle\langle l,\nu|.\end{aligned} \tag{87}$$

随后可使用公式 (8) 和对称对数导数方程 (10) 由此计算量子费舍尔信息。当然，为了进行数值计算，我们会将模式 j、l 截断在某个最大值 $j_{\max}$。回想一下，根据 (10)，对称对数导数涉及密度矩阵的导数，因此我们可以看出，对相位求导产生的项仍会在对称对数导数中产生与 $(\alpha_\mu - \alpha_\nu)$ 成正比的贡献。由于量子费舍尔信息涉及对称对数导数的平方，因此我们将由此获得如今已熟悉的、来自基线干涉测量的 $(\alpha_\mu - \alpha_\nu)$ 增强。

需要指出的是，当所有光源都位于深度亚瑞利区域（即 $x_s \ll \sigma\, \forall\, s \in [1, n_e]$）内时，上述密度矩阵会大幅简化。在此极限下，对于 $j \neq 0$，$\Gamma_0(x_s) \to 1$，且 $\Gamma_j(x_s) \to 0$。因此，密度矩阵仅包含每个局部孔径的第 0 阶空间模式的贡献，并变为

$$\begin{aligned}\rho_1^{(\mathrm{dsr})} = &\sum_{s=1}^{n_e} b_s \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \exp(-i(\alpha_\mu - \alpha_\nu)x_s) \\ &\times |0,\mu\rangle\langle 0,\nu|.\end{aligned} \tag{88}$$

此处，上标（dsr）表示深度亚瑞利区域。这是 [23] 中所考虑的极限，也是衍射极限成像所关注的区域，同时还使量子费舍尔信息的计算相对更加简单。在这种情况下，对于孔径数量较少的情形（例如，两个孔径），即使是更复杂的成像问题，我们也可以进行一些解析计算（如果需要的话）。

回顾第 II 节 B 部分，测量密度算符关于未知参数的对称对数导数的本征基，即可达到量子费舍尔信息。但由于对称对数导数通常也依赖于未知参数 θ，我们无法直接在对称对数导数基上进行测量。我们介绍了一种两阶段方法：首先，选用其他某个基测量少量入射光子，以获得参数的初始估计 θ_1；然后，在令 θ^等于 θ_1 后得到的对称对数导数基上进行测量。当 N 较大时，这种两阶段方法的性能渐近地趋近于量子费舍尔信息。我们也可以将这种方法用于我们的多孔径排列。这需要构建一个自适应版本的

上一节所述的接收器设计之一：在第一阶段使用某个预先确定的基进行测量，然后在第二阶段切换到根据参数初始估计计算出的对称对数导数基进行测量。要在第二阶段使用对称对数导数基进行测量，多轴式接收器需要配备自适应空间模式分解。对于同轴接收器，我们则需要设计分束器电路，使线性组合可以灵活调整，并尽可能匹配对称对数导数基测量。

VI. 等亮度双点光源间距问题

现在我们通过等亮度两点分离问题来阐释前几节提出的一些观点。这里提醒读者回顾第 IID 节，其中我们曾指出，假设 SPADE 精确指向质心，因此可以将两个点光源的角位置视为 $\pm\theta$】【。

A. 量子费舍尔信息

为简单起见，我们仅考虑关于原点对称的孔径排列。回顾式（26），量子费舍尔信息为 $-4N$ 乘以在 $\theta=0$ 处求得的点扩散函数自相关函数的二阶导数。根据第 III B 节，具体而言，根据式（58），我们复合孔径的零阶模式的自相关函数为

$$\Gamma_{\mathrm{PSF,comp}}(\theta)=\frac{1}{n}\Gamma_{\mathrm{PSF,1ap}}(\theta)\sum_{\mu}\exp(-i\alpha_\mu\theta). \tag{89}$$

计算该组合孔径相关函数的二阶导数，并在 $\theta=0$ 处进行求值，我们得到量子费舍尔信息：

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\mathrm{full},\theta}=&-4N\Gamma''_{\mathrm{PSF,comp}}(0)\\ =&-4N\Gamma''_{\mathrm{PSF,1ap}}(0)-\frac{4iN}{n}\Gamma'_{\mathrm{PSF,1ap}}(0)\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu\\ &+\frac{4N}{n}\Gamma_{\mathrm{PSF,1ap}}(0)\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu^2\\ =&\mathcal{K}_{\mathrm{1ap},\theta}+\mathcal{K}_{\mathrm{lb},\theta}.\end{aligned} \tag{90}$$

这里第一项是我们在第 II D 节中得到的单孔径量子费 Fisher 信息（回顾公式 (32)）

$$\mathcal{K}_{\mathrm{1ap},\theta}=-4N\Gamma''_{\mathrm{PSF,1ap}}(0). \tag{91}$$

与 $\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu$ 成正比的项为零，因为我们将孔径的平均位置设为零（回顾一下式（40））。包含 α_μ 的平方和的部分，是由基线干涉测量产生的贡献

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\mathrm{lb},\theta}&=\frac{4N}{n}\Gamma_{\mathrm{PSF,1ap}}(0)\sum_{\mu}\alpha_\mu^2\\ &=\frac{4N}{n}\sum_{\mu}\alpha_\mu^2,\end{aligned} \tag{92}$$

其中我们利用了单孔径点扩散函数的归一化性质，得出 $\Gamma_{\mathrm{PSF,1ap}}(0)=1$。

注意，如果孔径函数是狄拉克δ函数，即 $\psi(k)=\delta(k)$，那么量子费舍尔信息中的单孔径项将为零。可以将狄拉克δ孔径模型改写为无限小的硬孔径 $\tilde{\psi}(k)=\delta(k)\equiv 1\mathrm{im}_{\delta\to0}(1/\sqrt{\delta})\mathrm{rect}(k/\delta)$ (37)，并取极限 $\delta\to\bar{0}$，根据（39）中的定义，这等价于 $\sigma\to\infty$，从而计算（27）中的量子费舍尔信息。由此可知，若像参考文献 [23–25]，那样将成像系统建模为点状孔径，量子费舍尔信息将只取决于各个孔径的位置。然而，这样会忽略量子费舍尔信息中取决于各个孔径尺寸和特征的贡献，而这些因素已纳入我们的分析。

对于仅在位置 $\alpha_1=-\beta/2$ 和 $\alpha_2=\beta/2$ 处设有两个硬孔径这一特殊示例，我们得到量子费舍尔信息

$$\mathcal{K}_{\mathrm{full,2ap},\theta}=\frac{4\pi^2N}{3\sigma^2}\left(3r^2+1\right). \tag{93}$$

其中，单孔径量子 Fisher 信息的贡献 是：

$$\mathcal{K}_{\mathrm{1ap},\theta}=\frac{4\pi^2N}{3\sigma^2}, \tag{94}$$

（回忆式（27）），长基线干涉测量的贡献为：

$$\mathcal{K}_{\mathrm{lb,2ap},\theta}=\frac{4\pi^2N}{3\sigma^2}\left(3r^2\right), \tag{95}$$

对于固定的孔径直径，其随基线距离的平方增长（回顾式（46））。我们在图 4 中绘制了量子费舍尔信息（QFI）以及两个组成项各自的贡献随 r 的变化关系。随着基线与孔径直径之比增大，与长基线孔径配置所获得的信息相比，单个孔径结构中所包含的相对信息量逐渐减少。

如果我们在对称排列中拥有两个以上的孔径，那么就会有许多这样的孔径对，它们的贡献也会以相同的方式很好地相加。如果 n 为奇数，且除了若干等间距的对称孔径对之外，我们还在 $k=0$ 处设置了一个孔径，那么中间的孔径对基线项的贡献为零。由此可见，双点源问题是一个特殊情形，其中量子费舍尔信息（QFI）的各种贡献可以非常清晰地分离，并以加法形式表示为两部分：一部分完全与单个孔径相关，另一部分则来自位置相反、间距相等的孔径对之间的成对贡献。

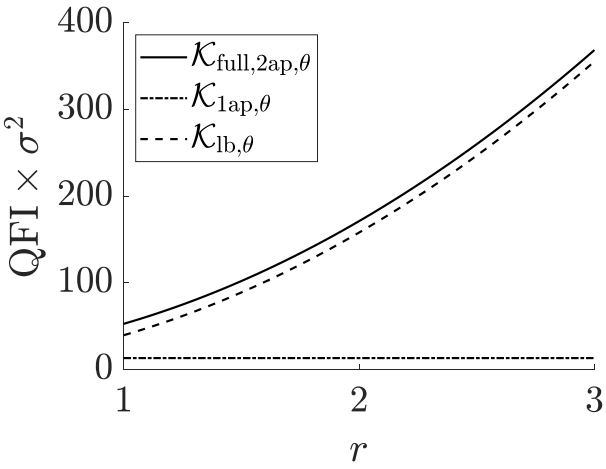


图 4. 使用具有基线与直径比 r 的两台望远镜估计两个点光源之间的间距 θ 时的量子费舍尔信息及其单孔径项和长基线项的组成贡献。

B. 多轴接收器

在此类别中，我们将考虑三种测量方式：

1. 复合孔径像平面中的理想直接成像。2. 一种SPADE测量。我们将考虑由Kerviche等人和Rehacek等人 [4]独立提出的用于获得基的格拉姆-施密特方法。根据后者的研究，该方法对于均匀明亮的两点间距问题达到了量子费舍尔信息。我们还将讨论与格拉姆-施密特基相关的两种二元空间模式测量，它们在小间距极限下达到量子费舍尔信息。3. SLIVER，它将入射光分为偶部和奇部，并且已被证明能够克服我们两点问题中的瑞利诅咒 [53]。

1. *Direct imaging*

对于理想直接成像的性能，我们需要知道入射光子在成像屏上的位置 x 被探测到的概率函数。该函数为

$$P(x) = \frac{1}{2}\left[|\psi_{\mathrm{comp}}(x-\theta)|^2 + |\psi(x+\theta)|^2\right], \tag{96}$$

其中， $\psi_{\mathrm{comp}}(x)$ 是与我们的多个孔径相关联的复合孔径点扩散函数。经典费 Fisher 信息则为

$$\mathcal{J}_{\mathrm{DI}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{P(x)}\left(\frac{\partial P(x)}{\partial \theta}\right)^2. \tag{97}$$

对于孔径平面上位置为 $\alpha_1 = -\beta/2$ 和 $\alpha_2 = \beta/2$ 的两个孔径这一特殊情况，我们使用复合孔径点扩散函数 (45)，并绘制了三个不同 r 取值下两个孔径这一特殊情况的经典费 Fisher 信息。我们还展示了仅在两个孔径处分别进行直接成像测量、而不使用任何干涉测量时所能达到的性能。

2. *The Gram-Schmidt basis and associated binary SPADEs*

现在，我们采用 Kerviche 等人 和 Rehacek 等人 [4, 5]分别提出的基。

对于关于基线区域中心对称的孔径配置，点扩散函数将是纯实值且对称的。因此，我们将推导实值且对称的点扩散函数 $\psi(x)$ 的公式。我们取格拉姆-施密特基的零阶模式函数为点扩散函数

$$A_0(x) = \psi(x). \tag{98}$$

此外，由于我们只考虑关于孔径平面原点对称的孔径排列，模式 1 将与导数成正比。应用归一化条件后，很容易看出模式 1 为

$$a_1(x) = \frac{1}{\sqrt{-\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0)}}\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}, \tag{99}$$

其中， $\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0)$ 是式（25）中定义的点扩散函数自相关函数的二阶导数。式（99）的推导见附录 B。对于更高阶的模式，我们将得到与先前相同宇称模式的非零重叠函数，因此必须按照格拉姆-施密特正交化过程，减去其中的非正交部分。

Rehacek 等人证明，对于我们的双点分离问题，任何具有确定奇偶性的函数完备基（包括这种格拉姆-施密特基）在任意对称孔径函数下都能达到 QFI。因此，格拉姆-施密特基对于任意对称复合孔径装置也都是最优的。然而，由于这种完整的 SPADE 测量难以实现，Kerviche 等人提出，在小间距极限下，我们也可以采用二元空间模式测量，只将入射光子筛分到格拉姆-施密特基的零阶或一阶模式及其正交补空间中。他们分别将这两种二元空间模式测量称为 0-BinSPADE 和 1-BinSPADE，并指出，它们的经典 Fisher 信息在零分离极限下趋于一个非零常数，因此能够绕过瑞利诅咒。正如我们在附录 C 中所示，这个常数恰好等于 QFI。

在此，我们推导出这两种二元空间模式测量的经典费 Fisher 信息表达式。Kerviche 等人曾进行过这项工作，但由于我们只考虑关于.....对称的孔径排列，因此得到的表达式略为简洁。

原点。发现入射光子处于模式 0 的概率将为

$$P_0 = \Gamma^2_{\rm PSF}(\theta). \tag{100}$$

正交补的概率为

$$P_{0r} = 1 - P_0. \tag{101}$$

0-BinSPADE 的费舍尔信息（当 $\psi(x)$为实数时）经简化后为

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{0-\rm Bin}(\theta) &= N\frac{1}{P_0}\left(\frac{\partial P_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{P_{0r}}\left(\frac{\partial P_{0r}}{\partial\theta}\right)^2 \\ &= \frac{N}{P_0(1-P_0)}\left(\frac{\partial P_0}{\partial\theta}\right)^2 \\ &= 4N\frac{[\Gamma'_{\rm PSF}(\theta)]^2}{1-\Gamma^2_{\rm PSF}(\theta)},\end{aligned} \tag{102}$$

其中，按照前文的定义， $\Gamma'_{\rm PSF}(\theta)$是$\Gamma_{\rm PSF}(\theta)$的导数，而 $\Gamma^2_{\rm PSF}(\theta) = [\Gamma_{\rm PSF}(\theta)]^2$。

对于 1-BinSPADE，入射光子处于模式 A_1 中的概率为

$$P_1 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx A_0(x-\theta)\, A_1(x)\right]^2 = -\frac{[\Gamma'_{\rm PSF}(\theta)]^2}{\Gamma''_{\rm PSF}(0)}, \tag{103}$$

入射光子处于正交补中的概率为

$$P_{1r} = 1 - P_1. \tag{104}$$

因此，1-BinSPADE 的费舍尔信息为（同样，此处 $\psi(x)$为实数）

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{1-\rm Bin}(\theta) &= N\frac{1}{P_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{P_{1r}}\left(\frac{\partial P_{1r}}{\partial\theta}\right)^2 \\ &= \frac{N}{P_1(1-P_1)}\left(\frac{\partial P_1}{\partial\theta}\right)^2 \\ &= -\frac{4N\left[\Gamma''_{\rm PSF}(\theta)\right]^2}{\Gamma''_{\rm PSF}(0) + \left[\Gamma'_{\rm PSF}(\theta)\right]^2}.\end{aligned} \tag{105}$$

证明当 $\theta \to 0$ 时，(102) 和 (105) 趋近于 QFI 的过程见附录 C。

这些是适用于任意对称孔径的一般表达式。对于我们的多孔径配置，我们会用 (58) 中复合孔径的自相关函数$\Gamma_{\rm PSF,\ comp}(\theta)$ 代替 $\Gamma_{\rm PSF}(\theta)$。对于位于 $\alpha_1 = -\beta/2$ 和 $\alpha_2 = \beta/2$处的两个硬孔径，我们既可以根据复合孔径点扩散函数 (45) 直接计算自相关函数，也可以利用 (58) 和 (59) 计算。我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rm PSF,comp}(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*_{\rm 2ap}(x)\, \psi_{\rm 2ap}(x-\theta) \\ &= \sigma\frac{\cos(\pi r\theta/\sigma)\sin(\pi\theta/\sigma)}{\pi\theta}.\end{aligned} \tag{106}$$

应用（102）和（105），我们得到两种二元空间模式测量的经典费 Fisher 信息。其表达式相当繁琐，且说明性不强，因此不再明确写出。不过，我们在图 5 中绘出了这些表达式。

3. The SLIVER

如第 IVA3 节所述，SLIVER 会将入射光分成偶部和奇部 [53]。

利用 SLIVER 计算我们两点源间距问题的经典费 Fisher 信息是一项简单的练习。虽然 [53] 中已针对二维情形进行了计算，但我们将采用自己的约定和相关函数的表述方式，重新推导一维问题的相同表达式。

两个点光源对应的（像平面）振幅为 $\psi(x \pm \theta)$。如果将其分成两部分，并对其中一部分进行空间反演，就相当于取$x \to -x$，由此可得

$$\psi_{\rm comp}(x \pm \theta) \to \psi_{\rm comp}(-x \pm \theta) = \psi_{\rm comp}(x \mp \theta), \tag{107}$$

其中在最后一步中，由于我们将讨论范围限定在对称孔径构型，因此假设 $\psi_{\rm comp}(x) = \psi_{\rm comp}(-x)$。现在，当我们通过第二个50-50分束器重新合并这些光束时，归一化输出将为

$$\begin{aligned}\psi_{\rm E,comp}(x,\pm\theta) &= \frac{1}{2}\left[\psi_{\rm comp}(x\pm\theta) + \psi_{\rm comp}(x\mp\theta)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\psi_{\rm comp}(x+\theta) + \psi_{\rm comp}(x-\theta)\right], \text{ and} \\ \psi_{\rm O,comp}(x,\pm\theta) &= \frac{1}{2}\left[\psi_{\rm comp}(x\pm\theta) - \psi_{\rm comp}(x\mp\theta)\right] \\ &= \pm\frac{1}{2}\left[\psi_{\rm comp}(x+\theta) - \psi_{\rm comp}(x-\theta)\right],\end{aligned} \tag{108}$$

对于来自两个点光源的光。

找到入射光子处于这些偶模或奇模中的概率，将是来自两个点的贡献的（按亮度加权）总和

$$\begin{aligned}P_{\rm E} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^2_{\rm E,comp}(x,\theta) + \psi^2_{\rm E,comp}(x,-\theta) \\ &= \frac{1+\Gamma_{\rm PSF,comp}(2\theta)}{2}\end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}P_{\rm O} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^2_{\rm O,comp}(x,\theta) + \psi^2_{\rm O,comp}(x,-\theta) \\ &= \frac{1-\Gamma_{\rm PSF,comp}(2\theta)}{2}\end{aligned} \tag{110}$$

其中，我们只是将 $\psi_{\rm E,comp}(x,\pm\theta)$ 和$\psi_{\rm O,comp}(x,\pm\theta)$ 均按 $\psi_{\rm comp}(x\pm\theta)$ 展开，并将积分写成式 (58) 中定义的 $\psi_{\rm comp}(x)$ 的自相关函数形式。单位项来自函数与其自身的内积。

因此，经典费 Fisher 信息为

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\rm Sliv}(\theta) &= \frac{1}{P_{\rm E}}\left(\frac{\partial P_{\rm E}}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{P_{\rm O}}\left(\frac{\partial P_{\rm O}}{\partial\theta}\right)^2 \\ &= \frac{4N\left[\Gamma'_{\rm PSF,comp}(2\theta)\right]^2}{1-\Gamma^2_{\rm PSF,comp}(2\theta)}\end{aligned} \tag{111}$$

这与 [53], 中的结果等价。由洛必达法则可直接看出，在 $\theta \to 0$极限下，它趋近于式（26）给出的量子费舍尔信息。回顾式（106），即可明确计算出上述 SLIVER 的经典费 Fisher 信息。

在图 5 中，我们绘制了三种不同 r取值下多轴式接收器的相对 CFIs，这三个取值分别对应三种不同的基线，用于点源间距估计。我们重点关注亚瑞利分离度 $\theta < \sigma$，这一范围对应于单孔径情况下经典瑞利判据不再成立的区域。我们发现，尽管直接成像在极限 $\theta \to 0$ 下的信息量趋于零，但我们分析的其他三种接收器在这一极限下均收敛于 QFI，这表明它们适用于利用多个孔径进行亚衍射成像。在这三种多轴式接收器中，0-BinSPADE 对高度亚瑞利光源的性能最佳，不过，所有接收器的 CFI 均表现出振荡行为，因此对于 $\theta < \sigma$ 的所有取值，不存在始终占优的接收器。

C. 共轴式接收器

1. *Receiver employing mode sorting*

对于双点光源问题，正如下文所示，分组接收器（在这一特殊情况下称为“成对接收器”）能够达到量子费舍尔信息。因此，在本小节中，我们只考虑成对接收器。

对于对称孔径排列的情况，我们可以通过多种方式达到量子费舍尔信息，其中最简单的方法是构建第 IV B 1 节中描述的成对接收器。假设我们总共有 $n = 2n_{\text{pairs}}$ 个孔径，位置分别为 $\alpha_{2i-1} = -\beta_i/2$ 和 $\alpha_{2i} = \beta_i/2$，且具有 $i = 1 \dots n_{\text{pairs}}$。在每个孔径处，我们收集模式 j，将其耦合到单模光纤中，以便将信号传输到中心位置，并通过一个 50-50分束器将它们合并，从而得到来自每对等距孔径的第 j个模式的对称组合和反对称组合，并对其进行光子计数。我们将位置为 $\pm\beta_i$ 的孔径对中第 j 个模式的光子概率记为 $P_{ji\pm}$。与第 IID 节一样，我们假设 SPADE 完美地对准质心，因此两个位置分别为 $x_1 = \theta$ 和 $x_2 = -\theta$，且两者的亮度均为 $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$。回顾第 IV B 1 节关于分组接收器和成对接收器的讨论，我们得到光子概率

$$\begin{aligned} P_{ji+} &= \frac{1}{n_{\text{pairs}}} \cos^2(\beta_i\theta/2)\,\Gamma_j^2(\theta) \\ P_{ji-} &= \frac{1}{n_{\text{pairs}}} \sin^2(\beta_i\theta/2)\,\Gamma_j^2(\theta) \end{aligned} \tag{112}$$

这里我们使用了针对双点问题定制的方程（75）和（81）。所有孔径的总经典费 Fisher 信息

组合 $i\pm$ 对于局域模式 j 是

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{j,\theta} &= N \sum_{i=1}^{n_{\text{pairs}}} \frac{1}{P_{ji+}} \left(\frac{\partial P_{ji+}}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{P_{ji-}} \left(\frac{\partial P_{ji-}}{\partial\theta}\right)^2 \\ &= 4N \left(\Gamma_j'(\theta)\right)^2 + \frac{N}{n_{\text{pairs}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{pairs}}} \beta_i^2\,\Gamma_j^2(\theta) \end{aligned} \tag{113}$$

对第二项中的指标进行变换后，这就转化为

$$\mathcal{J}_{j,\theta} = 4N \left(\Gamma_j'(\theta)\right)^2 + \frac{4N}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^2\,\Gamma_j^2(\theta) \tag{114}$$

我们已针对偶数个孔径推导出了这一结果。事实证明，如果我们在孔径平面的原点再增加一个孔径，使得我们有 $n = 2n_{\text{pairs}} + 1$ 个孔径位于 0，$\pm\beta_1/2$，$\dots \pm \beta_{n_{\text{pairs}}}/2$，该方程同样有效。在这种情况下，我们只需测量来自中心望远镜的每个局域模式 j，而无需将其与其他孔径的信号进行干涉。光子概率随后是

$$\begin{aligned} P_{ji+} &= \frac{1}{2n_{\text{pairs}}+1} 2\cos^2(\beta_i\theta/2)\,\Gamma_j^2(\theta) \\ P_{ji-} &= \frac{1}{2n_{\text{pairs}}+1} 2\sin^2(\beta_i\theta/2)\,\Gamma_j^2(\theta) \\ P_{j0} &= \Gamma_j^2(\theta) \end{aligned} \tag{115}$$

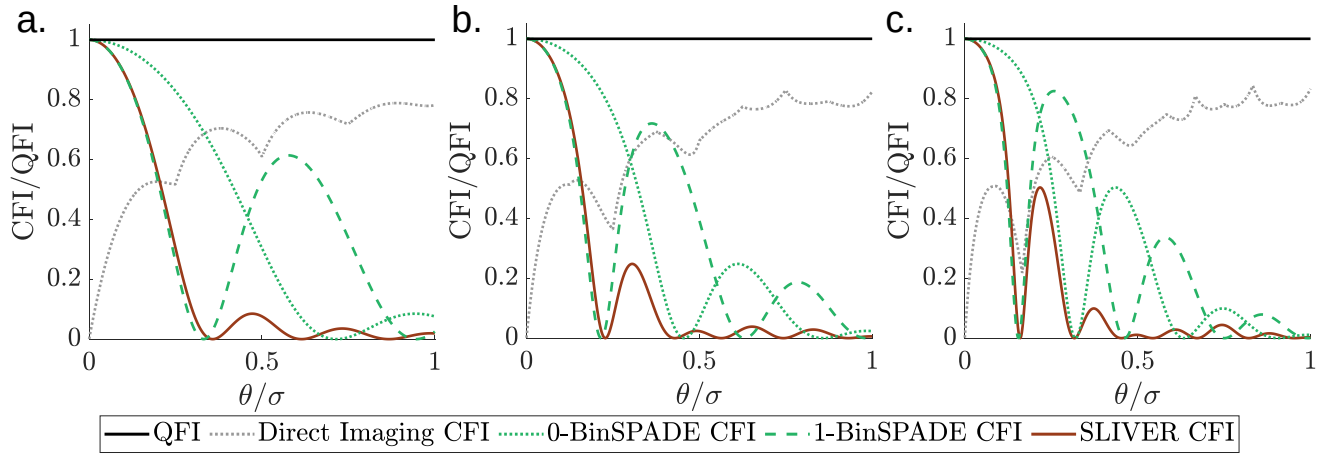
将这些经典费 Fisher 信息贡献项相加，并验证其总和等于式（114），是一项直接的计算工作。

(114) 中的第一项等于单孔径的第 j 个模式对经典费 Fisher 信息的贡献，第二项则与基线干涉测量有关。这意味着，我们的分组接收器的经典费 Fisher 信息总量等于 (90) 中给出的量子费舍尔信息，正如我们即将论证的那样:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{full},\theta} &= \sum_j \mathcal{J}_{\text{j},\theta} \\ &= \mathcal{K}_{\text{1ap},\theta} + \mathcal{K}_{\text{lb},\theta} \\ &= \mathcal{K}_{\text{full},\theta} \end{aligned} \tag{116}$$

其中，我们回顾式（32），将第一项识别为单孔径量子 Fisher 信息；对于第二项，则利用归一化性质取 $\sum_{j=0}^{\infty} \Gamma_j^2(\theta) = 1$。具体而言，$\Gamma_j^2(\theta)$ 是光子进入单孔径后处于第 j 个模式的概率，对 j 求和后结果为 1。因此，与量子费舍尔信息类似，经典费 Fisher 信息也分为两部分：一部分等于单孔径经典费 Fisher 信息，另一部分与长基线干涉测量相关，且独立于各个孔径的形状和特征（只要所有孔径的尺寸和形状相同）。

值得一提的是，成对组合并非实现量子费舍尔信息（QFI）的唯一方式。根据第 IIE 节中的不变性结论，任何由成对模式构成、且系数均为纯实数的其他线性组合，都会得到相同的经典费 Fisher 信息（CFI），因而同样能够实现量子费舍尔信息。



F图 5. 多轴接收器的经典费 Fisher 信息（CFI）相对于量子费舍尔信息（QFI）的归一化值：a. $r = 1$，b. $r = 2$，以及 c. $r = 3$。

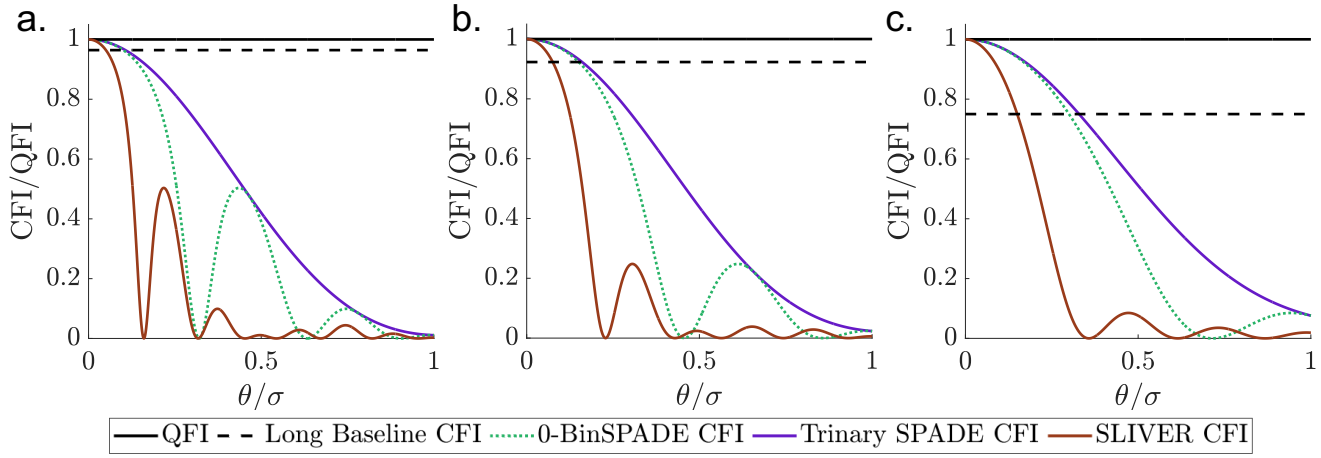


图 6. 共轴式接收器的经典费 Fisher 信息与量子费舍尔信息之比，针对 a. $r = 1$、b. $r = 2$ 和 c. $r = 3$。

如前所述，在实际应用中，我们无法逐一测量所有无限多个模式。假设我们只将不同孔径中编号不超过 $j_{\max}$ 的模式收集到单模光纤中，通过分束器电路进行组合并随后测量。我们仍然可以通过在每个位置放置一个桶式探测器，统计正交补（即各单个孔径中局域模式为 $j_{\max}+1$ 或更高的模式）中的光子总数。这些桶式探测器的光子计数之和，就是正交补中的光子总数。显然，入射光子出现在全局正交补中（即出现在各孔径位置的任意一个桶式探测器中）的概率为

$$
\begin{aligned}
P_{r,j_{\max}} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} \left|\exp(\pm i\alpha_\mu\theta)\,\Gamma_j(\theta)\right|^2 \\
&= \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} \Gamma_j^2(\theta)
\end{aligned}
\tag{117}
$$

我们可以根据通常的公式 $\mathcal{J}_{r,\,j_{\max},\,\theta} = P_r^{\,N}{}_{j_{\max}} \left(\frac{\partial P_{r,j_{\max}}}{\partial\theta}\right)^2$ 计算这一正交补空间的 CFI 贡献。对于这种截断群组接收器，其总 CFI 将是

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{j_{\max},\theta} =& \mathcal{J}_{r,j_{\max},\theta} + \sum_{j=0}^{j_{\max}} \mathcal{J}_{j,\theta} \\
=& N \sum_{j=0}^{j_{\max}} 4\left(\Gamma_j'(\theta)\right)^2 \\
&+ \frac{4N}{1-\sum_{j=0}^{j_{\max}} \Gamma_j^2(\theta)} \left(\sum_{j=0}^{j_{\max}} \Gamma_j(\theta)\Gamma_j'(\theta)\right)^2 \\
&+ \mathcal{K}_{\mathrm{lb},\theta} \sum_{j=0}^{j_{\max}} \Gamma_j^2(\theta)
\end{aligned}
\tag{118}
$$

这里，前两项等于仅使用单孔径的截断 SPADE 的经典费 Fisher 信息，最后一项则涉及基线干涉的贡献。

当 $j_{\max}$ 增大时，$\sum \Gamma_j^2(\theta)$ 会逐渐趋近于 1，长基线项也会逐渐趋近于与基线干涉测量相关的量子费舍尔信息项。同样，随着 $j_{\max}$ 增大，第一部分（即单孔径截断 SPADE）也会逐渐趋近于单孔径量子 Fisher 信息。

$j_{\max} = 0$ 情形对应这样一种接收器：我们只需在每台望远镜上采用一个二元模式分选器 cite，将零阶模式耦合到单模光纤中，以便在中心位置进行组合，其余部分则进入桶式探测器。对于我们所举的特殊示例，两个孔径位于位置 $\pm\beta/2$，并采用成对方案；若将局域模式取为 sinc-bessel 函数，这意味着使用三元 SPADE，将入射光子分选到以下三种模式或子空间中：

1. 来自两个孔径的零阶模式的对称组合，对应于复合孔径点扩散函数模式 $\sqrt{2}\cos(\pi r x/\sigma)\psi_0(x)$。对于硬孔径，该模式在（45）中给出。2. 来自两个孔径的零阶模式的反对称组合，对应于状态$\sqrt{2}\sin(\pi r x/\sigma)\psi_0(x)$。对于硬孔径，该模式在（45）中给出。也就是说，它与点扩散函数模式相同，只是将 $\cos(\pi r x/\sigma)$ 替换为正弦。3. 上述两个函数的正交补。

因此，这种三元 SPADE 优于第 VI B 2 节讨论的 0-BinSPADE，因为它还包含基模的反对称组合。综合 (59) 与 $\Gamma_0(a) \equiv \Gamma_{\mathrm{PSF},\ 1\mathrm{ap}}(a)$ 以及 (118) 等各项结果，我们得到这种三元 SPADE 的经典费 Fisher 信息

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathrm{tri},\theta} =& 4N\frac{(\Gamma_0'(\theta))^2}{1-\Gamma_0^2(\theta)} + \frac{4\pi^2 N r^2}{\sigma^2}\Gamma_0^2(\theta) \\ =& 4N\frac{\left(\frac{\cos(\pi\theta/\sigma)}{\theta} - \frac{\sigma\sin(\pi\theta/\sigma)}{\pi\theta^2}\right)^2}{1-\sigma^2\frac{\sin^2(\pi\theta/\sigma)}{\pi^2\theta^2}} \\ &+ \frac{4\pi^2 N r^2}{\sigma^2}\sigma^2\frac{\sin^2(\pi\theta/\sigma)}{\pi^2\theta^2} \end{aligned} \tag{119}$$

在图 6 中，我们绘出了这种三元 SPADE 在亚瑞利区域内进行点源间距估计时的经典费 Fisher 信息，并观察到当 $\theta \to 0$ 时，它趋近于量子费舍尔信息。将三元 SPADE 与多轴式 0-BinSPADE 进行比较，可以看出，收集两个孔径之间的反对称组合所带来的优势：振荡的 0-BinSPADE 经典费 Fisher 信息曲线被三元 SPADE 的曲线包络，后者获得的经典费 Fisher 信息始终不低于前者。

2. Receiver without mode sorting: using light pipes

根据第 IVB 2 节，如果我们不使用传输各自局域空间模式的单模光纤，而是将每个孔径接收到的全部光通过多模光管传送到中心位置，并让它们通过一个体式 50:50 分束器两两干涉，那么我们就能简单地获得点源间距问题中量子费舍尔信息的长基线部分 $\mathcal{K}_{\mathrm{lb},\ \theta}$ 如式 (92) 所示，即：

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\mathrm{lb,2ap},\theta} &= \frac{4\pi^2 N}{3\sigma^2}(3r^2) &(120)\\ &= 4\pi^2 r^2 N/\sigma^2. &(121)\end{aligned}$$

在这种情形下，包含在单个孔径结构中的信息 $\mathcal{K}_{1\mathrm{ap},\ \theta}$ 会丢失。

D. SLIVER：带反射的光管接收器

回想一下，在第 IV B 3 节中，我们指出，如果在光导管接收器的五五分束器的一个输入端口加入反射，就会得到所谓的 SLIVER。对于双点问题，SLIVER 的性能由式（111）给出；我们在讨论多轴式光束合成时，于第 VI B 3 节推导出了该式。回想一下，在 $\theta \to 0$ 极限下，该性能趋近于完整的量子费舍尔信息，而不仅仅是没有反射的光管接收器所达到的长基线贡献。

在图 6 中，我们展示了这种同轴实现的 SLIVER 接收器在 $\theta \to 0$ 时的最优性，尽管在较大的角间距下，其性能不如 trinarySPADE。

E. 讨论

本研究中的接收器设计可以被视为一种尝试，其目的不仅是捕获远距离孔径存在所产生的量子信息，还包括捕获单个孔径空间结构中所包含的信息。在图 7a 中，我们绘制了根据量子 Cramér-Rao 界均方误差 $\geq (N\mathcal{K})^{-1}$，通过捕获这些额外信息，在估计双点源间距的均方误差方面所能实现的百分比降低幅度。该图与图 4 直接相关，表明当 $r = 1$ 时（即孔径彼此接触时），关于 θ 的信息最多有 25% 包含在式（93）的单孔径项中，并且随着基线距离的增加，这一相对贡献呈二次方下降。作为参考，LBT 的镜面直径为 $d = 8.408$ 米，中心间基线距离为 $b = 14.4$ 米 [54], ，因此得到 $r \equiv b/d = 1.71$。这相当于量子极限均方误差相对降低 10.23%，前提是单个孔径内部所包含的信息能够与基线干涉测量信息一同得到完整捕获。我们得出的结论是，通过更加精心地设计成像接收器，以同时捕获式（90）所表示的量子 Fisher 信息的两个组成部分，可以带来适度但值得注意的改进。

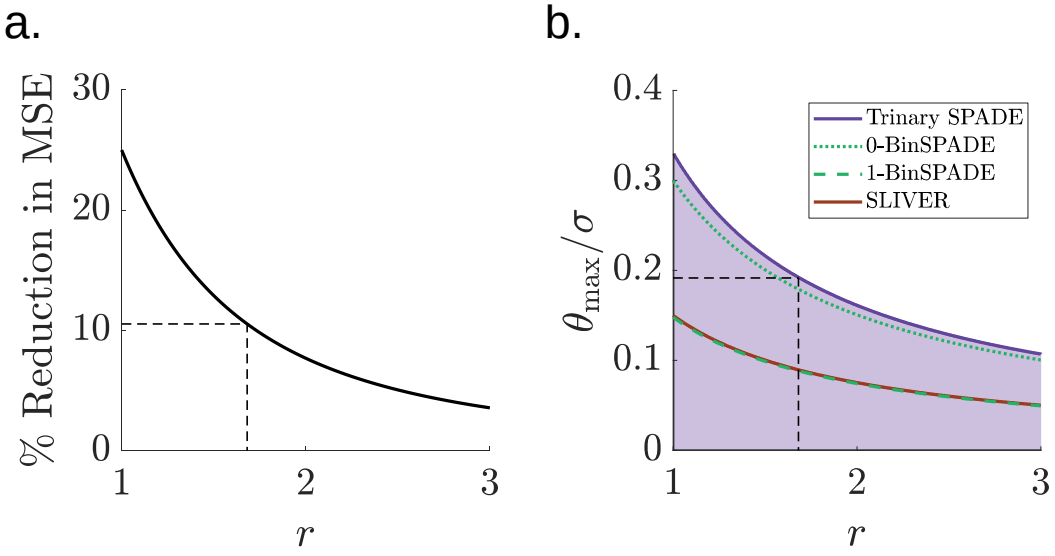


图 7. a. 通过使完整 QFI $\mathcal{K}_{\mathrm{full,2ap},\theta}$ 的 QCRB 达到饱和而获得的均方误差（MSE）降幅百分比，与长基线 QFI $\mathcal{K}_{\mathrm{lb},\theta}$ 相比（计算方式为 $100\% \times (\mathcal{K}^{-1}_{\mathrm{lb}\,\theta} - \mathcal{K}^{-1}_{\mathrm{full,2ap}\,\theta}) / (\mathcal{K}^{-1}_{\mathrm{lb}\,\theta})$）。b. 对于给定的基线与直径之比 r，各接收器的经典费 Fisher 信息（CFI）超过 $\mathcal{K}_{\mathrm{lb},\theta}$ 时 θ 的最大值（例如，在紫色阴影区域内的任意参数组合下，三元 SPADE 的表现均优于长基线 QFI）。在 a. 和 b. 中，虚线均对应于 $r = 1.71$ 的 LBT。

使现实世界中用于系外天文观测的双孔径望远镜系统，在亚衍射成像方面提升至终极极限。LBT 已在菲索干涉仪配置中采用多轴光束合成作为主要工作模式；与当前方法（这些方法并未针对估计两颗亮度相同的恒星之间距离的量子极限进行优化）相比，实际提升幅度可能远远超过 10%。

在图 7b 中，我们提出下一个自然的问题：我们能否设计接收器，成功获取这些额外的单个孔径信息，并突破标准长基线干涉测量的量子极限？我们绘出了所分析的每种接收器设计优于简单长基线接收器时的最大点光源间距；这种简单长基线接收器仅保留远距离类点状孔径之间的相位延迟，而不保留其他空间信息。该最大值 θ 对应于图 6 中与水平虚线的交点。等价地，图 7b 可理解为长基线干涉测量改进效果的参数化区域：对于给定接收器，曲线左下方的任意点（例如三元 SPADE 对应的紫色阴影区域）都表示一对 θ 和 r的取值，在此条件下，该接收器的 CFI 大于长基线干涉测量的 QFI。我们看到，当基线相对于单个孔径的直径处于中等水平时，单个孔径结构中的信息将在最大范围的目标几何形状中产生最大的影响。例如，对于 LBT，在波长为 $\lambda = 1.65\ \mu$m 时，标准天文衍射极限为 $\lambda/d = 40.5$ 毫角秒，因此 $\sigma = 2\pi\lambda/d = 254.3$毫角秒。我们发现，角分离小于 $\theta_{\max} < 0.195\sigma = 49.6$ 毫角秒的两个点光源之间的距离（包括所有无法分辨的双点光源目标），通过利用孔径空间结构的三元 SPADE测量进行估计时，其精度将高于不考虑孔径空间结构的基线干涉测量。

最后，如果我们处于距离较大的情形，无法使用光管或单模光纤，必须采用基于纠缠的方法，那么我们会按模式合并远距离位置的信号，这就需要使用上文讨论的截断群组接收器。

VII. 结论

量子信息理论近期及持续不断的发展，为基线干涉测量领域带来了令人期待的可能性。本文介绍了几种接收器设计方法，以针对定义明确的定量成像任务实现量子最优精度，并适用于不同的距离范围。我们以两个均匀明亮的非相干源的双点源间距估计为例，作为一个简化问题来阐释这些思路。在此过程中，我们还建立了一个数学框架，通过组合孔径函数或其傅里叶变换来分析多孔径系统；如果存在一块（可能仅是假想的）覆盖整个基线的巨大成像屏，这种傅里叶变换可视为组合

孔径的点扩散函数。

该框架使本文所述分析得以扩展到对更复杂场景的成像，并达到各自的量子极限精度。这些场景由扩展物体或点发射体星群构成。例如，若要在狭窄的亚瑞利角视场内定位多颗恒星，可将参考文献 [22] 中的算法应用于多孔径系统的复合孔径点扩散函数，并将自适应探测前模式排序的数学描述转化为共轴式、多轴式（甚至是纠缠辅助型）接收器：利用参考文献 [33] 中的工具，将应用于所有孔径所收集的多空间模式光的空间模式解复用器（SPADE）“编译”为一组两两配对的双模式马赫-曾德尔干涉仪（MZI）。

我们的第一个距离区间是不同望远镜的孔径彼此足够接近，能够将光反射到同一成像屏上。这样，我们无需建造一面跨越整个基线、成本高得令人望而却步的大型抛物面镜，只需在各个孔径所在位置雕刻出这面镜子的相应镜段。将光反射到同一成像屏上后，我们便可以进行理想直接成像，或实施某种 SPADE基底测量。对于两点间距估计这一具体问题，Kerviche等人和 Rehacek等人分别提出的格拉姆-施密特（GS）基能够达到量子费舍尔信息。在小间距极限下，将零阶（复合点扩散函数）模式或第一格拉姆-施密特模式与模式张成空间的其余部分分离的二元空间模式测量也能达到接近量子费舍尔信息的效果。此外，另一种能够在小间距极限下实现量子费舍尔信息的简单接收器是 Nair等人提出的所谓 SLIVER（图像反转干涉测量）。

我们的中间方案是：通过单模光纤或光管，将在不同位置收集的光传送到一个中心位置，再将其输入线性干涉仪，并用光子计数器测量输出。在这种情况下，与所有单个孔径相关联的正交模式构成的完备基，可以作为涉及整个多孔径系统的函数集合的完整基。随后，只需选择适当的组合系数，将来自各个孔径的不同模式信号混合起来，便可用这些局域模式实现任意 SPADE测量。

对于我们的等亮度双点分离问题，我们已经证明，一种成对组合方案——在该方案中，我们仅通过50-50分束器混合同模态的、来自位置相反且等距的点对的信号，并获取输出端口中的光子计数——能够达到量子费舍尔信息。我们还证明，对于物理对称孔径配置，双点问题的量子费舍尔信息可以表示为单孔径的量子费舍尔信息与第二项之和，后者与组合来自不同位置的光所涉及的长基线效应相关。

接收器。此外，后一项与所有单个孔径位置的平方和成正比。

如果不使用单模光纤，而是通过多模光管将光传送到中心位置，并且不使用任何局域模式分选器，那么成对方案（或者其他同样最优的方案）都能达到第二个量子费舍尔信息项，即与长基线效应相关的那一项。只需稍作调整，引入反射，基于光管的接收器也可以有效地改造成适用于多孔径系统的 SLIVER。

最后，我们讨论了大距离范围。在这一距离区间，通过单模光纤或光管将光传送到同一位置，在实际操作中几乎不可能，或者成本高得令人望而却步。在这种情况下，我们可以使用基于量子纠缠的协议，将一个位置接收到的信号传输到另一个位置。这样一来，需要在干涉仪中合并的信号便可被传送到同一位置。因此，原则上，我们可以使用基于纠缠的协议替代单模光纤来进行 SPADE 测量。我们的成对方案似乎正适用于这种方法。

VIII. 致谢

我们衷心感谢 Amit Ashok、Kwan Kit Lee、Michael Hart、Mark Neifeld 和 Ryan Luder 提供的宝贵意见和建议。本研究由 DARPA IAMBIC计划通过合同编号 HR00112090128 资助。文中所表达的观点、意见和／或研究结果仅代表作者，不应被视为美国国防部或美国政府的官方观点或政策。

附录A：两点间距估计的量子费舍尔信息

这项计算最初由 Tsang等人在 [3] 中完成。这里我们总结他们的方法，并紧密遵循其处理方式和符号表示，不过不同之处在于，我们计算的是针对两倍间距而非间距的量子费舍尔信息。具体来说，我们取两点的位置为 $x_1 = \theta$ 和 $x_2 = -\theta$，并计算对 θ 进行估计的量子费舍尔信息。因此，我们得到的量子费舍尔信息结果将是等人所求间距估计量子费舍尔信息的 4 倍，因为他们取两点的位置为 $x_1 = \theta_1 + \theta_2/2$ 和 $x_2 = \theta_1 - \theta_2/2$。

根据式（2），等亮度两点问题的密度矩阵中的单光子部分为

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\right) \tag{A1}$$

这里我们将各项贡献写成 $|\psi_s\rangle\langle\psi_s|$，而不是 $|\psi_s, 1ap\rangle\langle\psi_s, 1ap|$ 因为这里我们正在计算

不依赖孔径数量的一般表达式。我们考虑的唯一约束是孔径具有对称性，从而得到一个取实值且为偶函数的 PSF 函数 $\psi(x)$，进而得到 ket $|\psi_s\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x - x_s)|x\rangle$。

对于量子费舍尔信息，我们需要这个密度矩阵及其对称对数导数（SLD）。为此，我们首先需要找到一个正交归一本征基，它张成由 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 及其关于 θ的偏导数所张成的整个空间。首先注意到，$|\psi_1\rangle$和 $|\psi_2\rangle$ 并非彼此正交，并且

$$\begin{aligned}\delta &\equiv \langle\psi_1|\psi_2\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x - x_1)\psi(x - x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x - \theta)\psi(x + \theta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x - 2\theta)\psi(x) \\ &= \langle\psi_2|\psi_1\rangle \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{A2}$$

对于实值的 ψ（x）。

为了在正交归一基中将 ρ_1 表示为对角形式，我们首先写出一个由内积 $\langle\psi_i|\rho_1|\psi_j\rangle$组成的 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \tag{A3}$$

该矩阵的归一化本征向量构成一组正交函数，而本征值的平方根则给出归一化因子。我们发现本征值为 $1 \pm \delta$，对应的本征向量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1)$。因此，张成 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的态的正交归一基为

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1-\delta)}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle) \tag{A4}$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta)}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \tag{A5}$$

不难看出，这些也是我们的密度算符 ρ_1 的本征态，而 D_i 的本征值 ρ_1 是内积矩阵 (A3) 的相应本征值除以 2：

$$D_1 = \frac{1-\delta}{2} \tag{A6}$$

$$D_2 = \frac{1+\delta}{2} \tag{A7}$$

这里除以 2 只是$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$前面的 1/2 因子。因此，我们的密度矩阵为

$$\rho_1 = D_1|e_1\rangle\langle e_1| + D_2|e_2\rangle\langle e_2|, \tag{A8}$$

根据上述定义。

然而，$\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta}$ 也包含 $|\psi_1\rangle$ 和$|\psi_2\rangle$的导数。因此，我们需要扩展本征基，使其也张成这些态。于是，我们纳入$|\psi_i\rangle$ 的导数并进行 Gram–Schmidt 正交化。这给出了以下附加态

$$|e_3\rangle = \frac{1}{c_3}\left[\frac{\Delta k}{\sqrt{2}}(|\psi_{11}\rangle + |\psi_{22}\rangle) - \frac{\gamma}{\sqrt{1-\delta}}|e_1\rangle\right], \tag{A9}$$

$$|e_4\rangle = \frac{1}{c_4}\left[\frac{\Delta k}{\sqrt{2}}(|\psi_{11}\rangle - |\psi_{22}\rangle) + \frac{\gamma}{\sqrt{1+\delta}}|e_2\rangle\right], \tag{A10}$$

其中

$$\Delta k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right]^2 \tag{A11}$$

and

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\psi(x - \theta_2) \tag{A12}$$

这里定义的其他量为

$$|\psi_{11}\rangle \equiv \frac{1}{\Delta k}\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\partial\psi(x - x_1)}{\partial x_1}|x\rangle, \tag{A13}$$

$$|\psi_{22}\rangle \equiv \frac{1}{\Delta k}\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\partial\psi(x - x_2)}{\partial x_2}|x\rangle, \tag{A14}$$

$$c_3 \equiv \left(\Delta k^2 + b^2 - \frac{\gamma^2}{1-\delta}\right)^{1/2}, \tag{A15}$$

$$c_4 \equiv \left(\Delta k^2 - b^2 - \frac{\gamma^2}{1+\delta}\right)^{1/2}, \tag{A16}$$

$$b^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\partial\psi(x - x_1)}{\partial x_1}\frac{\partial\psi(x - x_2)}{\partial x_2}, \tag{A17}$$

而 δ 已在 (A2) 中定义。

现在，我们得到了一个完整的四维本征基，它张成由密度算符 ρ_1 及其导数构成的向量空间。接下来，只需用公式 (10) 计算对称对数导数，再求出量子费舍尔信息即可。

经过一些代数运算，我们发现，在 $|e_i\rangle(i = 1 \ldots 4)$ 基下，关于参数 θ 的对称对数导数的非零元素为

$$\mathcal{L}_{2,11} = -\frac{2\gamma}{1-\delta} \tag{A18}$$

$$\mathcal{L}_{2,13} = -\frac{2c_3}{\sqrt{1-\delta}} \tag{A19}$$

$$\mathcal{L}_{2,22} = \frac{2\gamma}{1+\delta} \tag{A20}$$

$$\mathcal{L}_{2,24} = -\frac{2c_4}{\sqrt{1+\delta}} \tag{A21}$$

由此，利用（8）计算量子费舍尔信息是直接可行的。我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\theta &= 4N\Delta k^2 \\ &= 4N\int_{-\infty}^{\infty} dx \left|\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|^2\end{aligned}$$

附录 B：格拉姆-施密特基的模式 1 的归一化系数

模式1的归一化系数是.....的平方根倒数。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi'(x)\right)^2 dx \tag{B1}$$

如果我们进行分部积分，并利用 $\psi(x)$ 在 $\pm\infty$ 处趋于零这一事实，那么这就等于

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\psi''(x)\,dx = -\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0), \tag{B2}$$

其中， $\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0)$ 是 $\Gamma_{\mathrm{PSF}}(0)$ 的二阶导数。因此，归一化的第一模式为

$$a_1(x) = \frac{1}{\sqrt{-\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0)}}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} \tag{B3}$$

附录 C：证明 0-BinSPADE 和 1-BinSPADE 达到量子费舍尔信息

我们将取 (102) 中的 $\theta \to 0$ 极限。对于分子，注意 $\Gamma'_{\mathrm{PSF}}(\theta) \to 0$ ，因为 $\Gamma_{\mathrm{PSF}}(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处取得最大值。但分母也趋于零，因为 $\Gamma_{\mathrm{PSF}}(0) = 1$。因此，我们应用洛必达法则。对于分子，我们得到

$$\lim_{\theta\to 0} 8N\Gamma'_{\mathrm{PSF}}(\theta)\,\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(\theta) \tag{C1}$$

对于分母，我们得到

$$\lim_{\theta\to 0} -2\Gamma_{\mathrm{PSF}}(\theta)\,\Gamma'_{\mathrm{PSF}}(\theta) = \lim_{\theta\to 0} -2\Gamma'_{\mathrm{PSF}}(\theta), \tag{C2}$$

其中我们使用了归一化性质$\Gamma_{\mathrm{PSF}}(0) = 1$。将分子项除以分母项，并进行化简，可得

$$\lim_{\theta\to 0} I_{\text{0-BinSPADE}}(\theta) = -4N\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0) \tag{C3}$$

，根据式 (26)，这等于量子费舍尔信息。

对于 1-BinSPADE，由式 (105) 可得。对分子取 $\theta \to 0$ 极限，得到 $[\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0)]^2$。由于 $\Gamma'_{\mathrm{PSF}}(\theta)$ 在 $\theta \to 0$ 时趋于 0，分母趋于 $\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0)$。化简后得到

$$\lim_{\theta\to 0} I_{\text{1-BinSPADE}}(\theta) = -4N\Gamma''_{\mathrm{PSF}}(0) \tag{C4}$$

这就是量子费舍尔信息。

[1] H. L. Van Trees、K. L. Bell 和 Z. Tian, *Detection Esti- ,, mation Part I 2 and Modulation Theory,,* 第 nd 版（Wiley，2013）。[2] C. W. Helstrom, *Theory Quantum Detection and Estimation* 1976（Academic Press，纽约，）。[3] M. Tsang、R. Nair 和 X.-M. Lu, 《物理评论 X》**6**，031033 2016( )。[4] R. Kerviche、S. Guha 和 A. Ashok，见 *2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*（IEEE，2017），第 441–445 页。[5] J. Rehacek、M. Pa ´ur、B. Stoklasa、Z. Hradil 和 L. L. S ´anchez-Soto, 《光学快报》**42**，231（2017）。[6] Z. Dutton、R. Kerviche、A. Ashok 和 S. Guha, 《物理评论 A》**99**，033847（2019）。[7] S. Prasad, 《物理评论 A》**102**，063719（2020）。[8] S. Z. Ang、R. Nair 和 M. Tsang, 《物理评论 A》**95**，063847 2017( )。[9] Z. Yu 和 S. Prasad, 《物理评论快报》**121**，180504 (2018). [10] S. Prasad 和 Z. Yu, 《物理评论 A》**99**，022116 (2019). [11] J. ˇReha ˇcek, Z. Hradil, B. Stoklasa, M. Pa ´ur, J. Grover, A. Krzic 和 L. L. S ´anchez-Soto, 《物理评论 A》**96**, 062107 2017( ). [12] J. ˇReh ´a ˇcek, Z. Hradil, D. Koutn ´y, J. Grover, A. Krzic 和 L. L. S ´anchez-Soto, 《物理评论 A》**98**, 012103 (2018). [13] S. Prasad, 《物理学文稿》**95**, 054004 (2020). [14] M. Tsang, 《物理评论A》**99**，012305 (2019). [15] M. Tsang, 《当代物理学》**60**, 279 (2019). [16] S. Zhou 和 L. Jiang, 《物理评论A》**99**, 013808 (2019). [17] X. M. Lu, H. Krovi, R. Nair, S. Guha 和 J. H. Shapiro，npj量子信息**64** (2018). [18] Z. Huang 和 C. Lupo, Physical Review Letters**127**, 130502 2021( ). [19] M. R. Grace 和 S. Guha，Physical Review Letters**129**, 180502 2022( ).

[20] F. Bao, H. Choi, V. Aggarwal 和 Z. Jacob, 《光学快报》**46**, 3045 (2021). [21] E. F. Matlin 和 L. J. Zipp, 《科学报告》**12** (2022), 10.1038/s41598-022-06644-3. [22] K. K. Lee, C. N. Gagatsos, S. Guha 和 A. Ashok, 《IEEE 信号处理精选主题期刊》, 1 (2022). [23] C. Lupo, Z. Huang 和 P. Kok, 《物理评论快报》**124**, 080503 2020( ). [24] Y. Wang, Y. Zhang 和 V. O. Lorenz, 《物理评论A》**104**, 1 (2021). [25] M. Bojer, Z. Huang, S. Karl, S. Richter, P. Kok 和 J. von Zanthier, 《新物理学杂志》**24**, 043026 (2022). [26] D. Gottesman, T. Jennewein 和 S. Croke, 《物理评论快报》**109**, 070503 (2012). [27] E. T. Khabiboulline, J. Borregaard, K. De Greve 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》**123**, 070504 (2019). [28] S. B. Shaklan 和 F. Roddier, 《应用光学》**26**, 2159 (1987). [29] O. Guyon, 《天文学与天体物理学》**387**, 366 (2002). [30] N. Jovanovic, C. Schwab, O. Guyon, J. Lozi, N. Cveto- jevic, F. Martinache, S. Leon-Saval, B. Norris, S. Gross, D. Doughty, *et al.*, 《天文学与天体物理学》**604**, A122 (2017). [31] A. Glindemann, *Principles of Stellar Interferometry* (Springer Berlin Heidelberg, 2011). [32] Y. Zheng, H. Sharma 和 J. Borregaard, 《PRX Quantum》**3**, 040319 (2022). [33] W. R. Clements, P. C. Humphreys, B. J. Metcalf, W. Steven Kolthammer 和 I. A. Walmsley, 《Optica》, OPTICA**3**, 1460 (2016). [34] J. W. Goodman, *Statistical Optics* (John Wiley & Sons, 1985). [35] L. Mandel 和 E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* 1995 (剑桥大学出版社，剑桥，). [36] A. Labeyrie, S. G. Lipson 和 P. Nisenson, *An introduc-tion to optical stellar interferometry* (剑桥大学出版社，2006). [37] M. Tsang, 《物理评论快报》**107**, 270402 (2011). [38] S. Ram, E. S. Ward 和 R. J. Ober, 《美国国家科学院院刊》美国《科学》**103**, 4457 (2006). [39] J. Pawley, *Handbook of biological confocal microscopy*, 第 236 卷（Springer Science & Business Media，2006）。[40] J. Zmuidzinas, 《美国光学学会会刊 A》, 光学、成像科学与视觉**20 2**, 218 (2003). [41] S. L. Braunstein 和 C. M. Caves, 《物理评论快报》**72**, 3439 1994( ). [42] O. E. Barndorff-Nielsen 和 R. D. Gill, 《物理学杂志 A：数学与一般物理》**33**, 4481 (2000). [43] M. G. A. Paris, 《国际量子信息杂志》**7** (2008), 10.1142/S0219749909004839. [44] M. Hayashi 和 K. Matsumoto, "具有测量自由度的统计模型与量子物理", 载于 *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference: Selected Papers. Edited by HAYASHI MASAHITO. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.* , *2005. ISBN #9789812563071 pp. 162-169* ,, M. Hayashi 编（World Scientific Publishing Co，2005），第 162–169 页。[45] R. D. Gill 和 S. Massar, 《物理评论 A》**61**, 042312 (2000). [46] M. Hayashi, *Quantum Information: An Introduction*, 第 **1** 版（Springer-Verlag，柏林海德堡，2006）。[47] A. Sajjad、M. R. Grace、Q. Zhuang 和 S. Guha, 《物理评论 A》**104**, 022410 (2021). [48] A. Fujiwara, 《物理学杂志 A：数学与一般物理》**39**, 12489 (2006).[49] 本文不考虑多参数估计问题，例如 *localization* 对未知数量的点发射体进行估计：$\boldsymbol{\theta} = (\{x_s, b_s\}, n_e)$，在这一问题中，已知动态自适应模式测量技术优于直接成像 [22]。[50] M. R. Grace、Z. Dutton、A. Ashok 和 S. Guha, 《美国光学学会会刊 A》**37**, 1288 (2020). [51] P. Boucher、C. Fabre、G. Labroille 和 N. Treps, 《Optica》**7** (2020). [52] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 第 3 版（Roberts and Company，2005）。[53] R. Nair 和 M. Tsang, 《光学快报》**24**, 3684 (2016). [54] "大型双筒望远镜天文台"，。