arXiv:2305.03849v1 [math-ph] 5 May 2023

由顶点函数的极限得到 Grassmannian Gr(k, n) 的多项式超势

ANDREY SMIRNOV* 和 ALEXANDER VARCHENKO◇

北卡罗来纳大学教堂山分校数学系，美国北卡罗来纳州教堂山，邮编 27599-3250

关键词：超势；顶点函数； J-函数；朗道-金兹堡模型 l.

2020 年数学主题分类：14G33（11D79、32G34、33C05、33E30）

Abstract. 本文讨论格拉斯曼流形余切丛的顶点函数的一种积分表示， $X = T^*\,\mathrm{Gr}(k, n)$。该积分表示可用于计算顶点函数的 $\hbar \to \infty$ 极限，其中 $\hbar$ 表示环面作用于 X 时的等变参数，该作用通过扩张余切纤维实现。我们证明，在此极限下，该积分转化为格拉斯曼流形 Gr(k, n) 的 A-级数的标准镜像积分表示，其对应的劳朗多项式 Landau-Ginzburg 超势由 Eguchi、Hori 和 Xiong 提出。我们还观察到 A-级数系数的一些 Dwork 型同余。

1. Introduction

1.1. 顶点函数最初由[Oko17] 引入，作为计数到中岛簇的有理拟映射的生成函数。从这个意义上说，顶点函数是量子上同调中 Givental 的 J-函数的“拟映射”类比。本文研究格拉斯曼流形 $X = T^*\,\mathrm{Gr}(k, n)$ 余切丛的上同调顶点函数。按定义，该函数是量子参数 z 的幂级数，其系数取自等变上同调：

$$\mathsf{Vertex}(z) \in H^\bullet_T(X)[[z]]$$

其中 T 是一个作用于 X上的环面，参见第 2节。令 $\mathsf{V}(z)$ 表示顶点函数中基本类的系数

$$\mathsf{V}(z) := \Big\langle \mathsf{Vertex}(z), [X] \Big\rangle$$

其中 $\langle -,\ -\rangle$ 表示等变上同调中的标准配对。幂级数 $\mathsf{V}(z)$ 是量子上同调中所谓的 A-级数的类似物。$\mathsf{V}(z)$ 的系数非平凡地依赖于等变参数 $\hbar$，该参数对应于通过扩张余切纤维而作用于 X 的环面。在本文中，我们将阐述以下结果（定理 4.1）：

定理 m 1.1. 在非等变特化下，有如下极限：

$$\lim_{\hbar\to\infty} \mathsf{V}(z/\hbar^n) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint e^{\frac{1}{\epsilon}S(x,z)} \bigwedge_{i,j} \frac{dx_{i,j}}{x_{i,j}} \tag{1.1}$$

*电子邮件：asmirnov@email.unc.edu◇
电子邮件：anv@email.unc.edu

其中 $S(x,z)$ de 记劳朗多项式 k（$n-k$）变量 $x=$（$x_{i,\ j}$）由式（4.1）给出。

(1.1) 右端的积分表示被积函数的常数项，定义见第 4.2 节。上述极限中出现的劳朗多项式 $S(x,z)$ 是格拉斯曼流形 Gr(k,n) 超势的著名形式。它最早见于 Eguchi-Hori-Xiong 的论文[EHX97]，此后众多作者在关于格拉斯曼流形量子上同调的大量文献中对其进行了重新研究和推广。参考文献的部分列表见 [BCKS98, Cas20, GGI16, KoSt10, LaTe17, MaRi20]。因此，方程 (1.1) 右端的表达式对应于格拉斯曼流形 Gr(k,n) 的 A-级数广泛使用的积分表示。该级数系数的封闭组合公式也已为人所知；它最初由 [BCKS98]猜想，随后由 [MaRi20],证明，参见 [MaRi20] 中的推论 4.8（我们的 z 即他们的 q）。

非正式地说，公式 (1.1) 意味着，在极限 $\hbar\to\infty$ 下，X 的余切方向不再对拟映射配分函数作出贡献，而T^* Gr(k,n) 的顶点函数退化为 Gr(k,n) 的 J函数。$\hbar\to\infty$将顶点函数与 J函数联系起来的想法并非新鲜事，参见 [TV22] 或 [KPSZ21]的第 5 节。然而，从 V(z) 的极限推导出[EHX97] 的 Laurent 超势，此前尚未得到充分阐述。本文旨在弥补现有文献中的这一空白。计算该极限所需的主要技术工具，是作者此前在 [SmV23]的定理 3.2 中得到的 V(z) 的积分表示。

1.2. 举例来说，让我们考虑最简单情形下定理 1.1 的陈述。

例。设 $X=T^*\mathbb{P}$（$\mathbb{C}^2$）。存在一个二维环面 $\mathsf{A}=$（$\mathbb{C}^\times$）^{2}，其等变参数为 u_1，u_2 它通过对坐标子空间进行缩放而自然作用于 $\mathbb{C}^2$。此外，还有一个一维环面 $\mathbb{C}^\times_\hbar$ 作用于 X，通过缩放余切纤维发挥作用；我们将相应的特征记为 $\hbar$。最后，还有一个带有等变参数 $\mathbb{C}^\times_\epsilon$的一维环面 ϵ，它作用于拟映射 $\mathbb{P}^1\dashrightarrow X$的源。根据定义，顶点函数是一个系数取自等变上同调的幂级数[Oko17]:

$$\mathsf{Vertex}(z)\in H^\bullet_{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^\times_\hbar\times\mathbb{C}^\times_\epsilon}(X)_{loc}[[z]]$$

其中，下标 loc 表示关于 $\mathbb{C}^\times_\epsilon$进行局部化。在由环面不动点 $[p_1]$、$[p_2]\in X^{\mathsf{A}}$ 的类给出的 $H^\bullet{}_{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^\times_\hbar\times\mathbb{C}^\times_\epsilon}(X)_{loc}$ 基底中（它们对应于 $\mathbb{C}^2$中的坐标直线），我们得到以下用高斯超几何函数表示的闭式公式:

$$\begin{aligned}\Big\langle\mathsf{Vertex}(z),[p_1]\Big\rangle&={}_2F_1\Big(\frac{\hbar}{\epsilon},\frac{u_2-u_1+\hbar}{\epsilon};\frac{u_2-u_1+\epsilon}{\epsilon};z\Big),\\ \Big\langle\mathsf{Vertex}(z),[p_2]\Big\rangle&={}_2F_1\Big(\frac{\hbar}{\epsilon},\frac{u_1-u_2+\hbar}{\epsilon};\frac{u_1-u_2+\epsilon}{\epsilon};z\Big).\end{aligned}\tag{1.2}$$

在非等变极限 $u_1=u_2=0$ 中，也就是“关闭”环面 A 的作用时，上述函数重合，并给出顶点函数在基本类处的系数 $[X]$:

$$\Big\langle\mathsf{Vertex}(z),[X]\Big\rangle={}_2F_1\Big(\frac{\hbar}{\epsilon},\frac{\hbar}{\epsilon};1;z\Big)\tag{1.3}$$

我们用 V(z) 表示这个系数。具体而言，有

$$\mathsf{V}(z)=\sum_{d=0}^{\infty}\frac{(\hbar)_d^2}{(d!)^2\epsilon^{2d}}\,z^d,\quad \text{where}\quad (\hbar)_d=\hbar(\hbar+\epsilon)(\hbar+2\epsilon)\dots(\hbar+(d-1)\epsilon).$$

由于 $\lim_{\hbar\to\infty}(\hbar)_d/\hbar^d=1$，我们得到：

$$\lim_{\hbar\to\infty}\mathsf{V}(z/\hbar^2)=\sum_{d=0}^{\infty}\frac{z^d}{(d!)^2\epsilon^{2d}}.$$

令 $S(x,z)=x+z/x$，则

$$\oint\frac{dx}{x}\,S(x,z)^d:=[S(x,z)^d]_0=\begin{cases}\dfrac{(d)!}{(d/2)!(d/2)!}z^d, & d \text{ is even}\\ 0, & d \text{ is odd}\end{cases}$$

其中，$[S(x,z)^d]_0$ 表示劳朗多项式 $S(x,z)^d$中关于 x 的常数项。综合以上所有结果，我们可以写出

$$\lim_{\hbar\to\infty}\mathsf{V}(z/\hbar^2)=\sum_{d=0}^{\infty}\frac{1}{d!}\oint\frac{dx}{x}S(x,z)^d=\oint\frac{dx}{x}\,e^{\frac{S(x,z)}{\epsilon}}.$$

这个公式就是本例中定理 1.1 的陈述。计算这一极限的一种更直接的方法是注意到，超几何函数（1.3）具有如下积分表示：

$$\mathsf{V}(z)=\oint_{|x|=\varepsilon}\frac{dx}{x}\left(1-x\right)^{-\frac{\hbar}{\epsilon}}\left(1-\frac{z}{x}\right)^{-\frac{\hbar}{\epsilon}}\tag{1.4}$$

其中，ε 是任意满足 $|z|<\varepsilon<1$的正实数。注意，变量替换 $z\to z/\hbar^2$、$x\to x/\hbar$ 以及积分轮廓 $\varepsilon\to\varepsilon/\hbar$ 的改变，在 $|\hbar|$足够大时不会影响这一条件。因此，当 $|\hbar|$ 足够大时，我们有：

$$\mathsf{V}(z/\hbar^2)=\oint_{|x|=\varepsilon}\frac{dx}{x}\left(1-\frac{x}{\hbar}\right)^{-\frac{\hbar}{\epsilon}}\left(1-\frac{z}{x\hbar}\right)^{-\frac{\hbar}{\epsilon}}$$

这使我们能够利用初等方法计算极限：

$$\lim_{\hbar\to\infty}\left(1-\frac{x}{\hbar}\right)^{-\frac{\hbar}{\epsilon}}\left(1-\frac{z}{x\hbar}\right)^{-\frac{\hbar}{\epsilon}}=e^{\frac{S(x,z)}{\epsilon}}$$

1.3. 内容概述。 第 2 节中，我们回顾一个组合公式，该公式将顶点函数从（1.2）推广到 $X=T^*\operatorname{Gr}(k,n)$ 的情形。第 3 节中，我们介绍这一情形下积分表示（1.4）的类比。第 4 节中，我们利用该积分表示计算 $\hbar\to\infty$ V 的极限 V(z)，方法与上面的例子类似。

在我们之前的论文中 [SmV23], 我们证明了 V(z) 的某些截断在参数特化为 $\mathbb{Q}_p$ 时满足某些 Dwork 型同余关系。在第 5 节中，我们证明类似的结构存在于极限 $\hbar\to\infty$中。

致谢。我们感谢 Thomas Lam 提供的宝贵意见。A. Smirnov 的部分工作得到美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS - 2054527）和俄罗斯科学基金会资助（项目编号 19-11-00062）。A. Varchenko 的部分工作得到美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS - 1954266）。

2. The vertex function of $T^*\operatorname{Gr}(k,n)$

2.1. 对于 $X = T^*\operatorname{Gr}(k,n)$，我们考虑以下显式幂级数：

$$\langle \mathsf{Vertex}(z), [1,\dots,k]\rangle := \sum_{d=0}^{\infty} c_d(u_1,\dots,u_n,\hbar)\, z^d \tag{2.1}$$

系数 $c_d(u_1,\dots,u_n,\hbar) \in \mathbb{Q}(u_1,\dots,u_n,\hbar,\epsilon)$ 如下：

$$c_d(u_1,\dots,u_n,\hbar) = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k:\\ d_1+\dots+d_k=d}} \Big(\prod_{i,j=1}^{k} \frac{(\epsilon - u_i + u_j)_{d_i-d_j}}{(\hbar - u_i + u_j)_{d_i-d_j}}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} \frac{(\hbar + u_j - u_i)_{d_i}}{(\epsilon + u_j - u_i)_{d_i}}\Big), \tag{2.2}$$

其中 $(x)_d$ 表示步长为 ϵ 的波赫哈默符号：

$$(x)_d = \begin{cases} x(x+\epsilon)\dots(x+(d-1)\epsilon), & d>0 \\ 1, & d=0 \\ \dfrac{1}{(x-\epsilon)(x-2\epsilon)\dots(x+d\epsilon)}, & d<0 \end{cases}$$

该级数的次数 d 系数（等变地）计算了 X 中次数 d 有理曲线的数量。更准确地说，它由等变积分给出

$$c_d(u_1,\dots,u_n,\hbar) = \int\limits_{[\mathsf{QM}_d(X,\infty)]^{\mathrm{vir}}} \omega^{vir} \tag{2.3}$$

在模空间上的虚基本类上积分 $\mathsf{QM}_d(X,\infty)$ 中从 $\mathbb{P}^1$ 到 X的拟映射，其中将 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 映射到一个指定的环面不动点 $[1,\dots,k] \in X$，定义见 [Oko17]的第 7.2 节。利用等变化定位，积分（2.3）化为对 $\mathsf{QM}_d(X,\infty)$ 上环面不动点的求和，从而得到求和式（2.2）。有关这一计算的详细过程，请参见[PSZ16] 的第 4.5 节。

参数 u_1、……、u_n、$\hbar$、ϵ 是环面 $T = (\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^\times_\hbar \times \mathbb{C}^\times_\epsilon$ 的等变参数，该环面按以下方式作用于模空间 $\mathsf{QM}_d(X,\infty)$：

- $(\mathbb{C}^\times)^n$ 以自然方式作用于 $\mathbb{C}^n$，并以权重 u_1、……、u_n 缩放坐标。
- 环面的不动点集合 $X^{(\mathbb{C}^\times)^n}$ 对应于 $\mathbb{C}^n$ 中由任意一组 k 条坐标直线张成的 k 维子空间。不动点 $[1,\dots,k] \in X^{(\mathbb{C}^\times)^n}$ 对应于由前 k 条坐标直线张成的 k 维子空间。
- $\mathbb{C}^\times_\hbar$ 通过以权重 $\hbar$ 缩放余切纤维，作用于 X。
- $\mathbb{C}^\times_\epsilon$ 作用于拟映射 $C \cong \mathbb{P}^1$ 的源空间，并固定点 0、$\infty \in \mathbb{P}^1$。参数 ϵ 表示切空间 $T_0 C$ 的相应权重。

完整的顶点函数是一个系数取自等变上同调的幂级数：

$$\mathsf{Vertex}(z) \in H^\bullet_T(X)_{loc}[[z]]$$

其中，loc 表示关于环面 $\mathbb{C}^\times_\epsilon$的等变化定位。利用等变化定位，我们可以将 $\mathsf{Vertex}(z)$展开为由以下类给出的 $H^\bullet_{T\times\mathbb{C}^\times_\epsilon}(X)_{loc}$ 的基：

环面不动点。幂级数 (2.1) 给出了系数 顶点(z)，对应于“第一个”环面不动点 $[1,\dots,k]$。其他系数具有相同的结构，可通过对参数 u_i 进行置换，从 (2.1) 得到。

2.2. 在本文中，我们考虑等变参数的特化：

$$u_1 = 0, \dots, u_n = 0 \tag{2.4}$$

这对应于环面 $(\mathbb{C}^\times)^n$ 的作用被“关闭”时的非等变极限。环面不动点处 Vertex(z) 的系数都化为同一个函数（这只是因为没有 $(\mathbb{C}^\times)^n$ 作用时，这些点无法区分），该函数对应于基本类处顶点函数的系数：

$$\mathsf{V}(z) := \Big\langle \mathsf{Vertex}(z), [X] \Big\rangle \Big|_{u_1=0,\dots,u_n=0} \tag{2.5}$$

因此，$\mathsf{V}(z)$ 可以通过将幂级数（2.1）的系数在（2.4）处特化得到。我们注意到，这一特化并非平凡：即使在 $T^*\operatorname{Gr}(2,\ 4)$ 的情形中，和式（2.2）中的各项在 $u_i = u_j$ 处也有极点。然而，总和（2.2）是非奇异的，因为顶点函数是一个积分等变上同调类（我们回顾一下，只需 $\mathbb{C}^\times_\epsilon$ - 局部化即可定义它）。

3. Integral representation of $\mathsf{V}(z)$

3.1. 本节将介绍函数（2.5）的积分表示

$$\mathsf{V}(z) = \int_\gamma \Phi(x,z)\,dx$$

它源自 $3D$-镜像对称，更多详情请参见[SmV23] 第 3 节。

3.2. 假设 $n \geqslant 2k$。令 v_i, $i = 1, \dots, n-1$ 为如下定义的整数：

$$\mathsf{v}_i = \begin{cases} i, & i < k, \\ k, & k \leqslant i \leqslant n-k, \\ n-i, & n-k < i, \end{cases}$$

我们用 $\omega = \hbar/\epsilon$ 表示，并定义超势函数：

$$\begin{aligned} \Phi(x,z) \ &= \ \Big(\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{\mathsf{v}_i} x_{i,j}\Big)^{-1+\omega} \Big(\prod_{m=1}^{\mathsf{v}_m}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant \mathsf{v}_m} (x_{m,j}-x_{m,i})\Big)^{2\omega} \\ &\times \ \Big(\prod_{i=1}^{n-2}\prod_{a=1}^{\mathsf{v}_i}\prod_{b=1}^{\mathsf{v}_{i+1}} (x_{i,a}-x_{i+1,b})\Big)^{-\omega} \Big(\prod_{i=1}^{k}(z_1-x_{k,i})(z_2-x_{n-k,i})\Big)^{-\omega}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

我们注意到，这个函数是三角形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程积分表示理论中的主函数的一个例子。特别地，(3.1)对应于与权重子空间相关的 KZ 方程，其权重为 $[1,\dots,1]$，该子空间位于以下张量积中：取自 k 阶和第 $(n-k)$ 阶基本表示的张量积，参见 $\mathfrak{gl}_n$、[SV91、MV02]。

3.3. 维数向量 v_i 和变量 $x_{i,\ j}$ 有一种方便的组合可视化方式。考虑一个 $k\times(n-k)$ 矩形，将其逆时针旋转 $45°$，见图 1。请注意，在这幅图中，第 i 个竖列中的方格数量恰好是 v_i。这样，我们便可以将变量 $x_{i,\ j}$ 分配给图中的方格。我们按照图 1 中的顺序排列它们。请注意，变量总数 $x_{i,\ j}$ 等于 $\dim \mathrm{Gr}(k,n)\ =k(n-k)$。对于一个

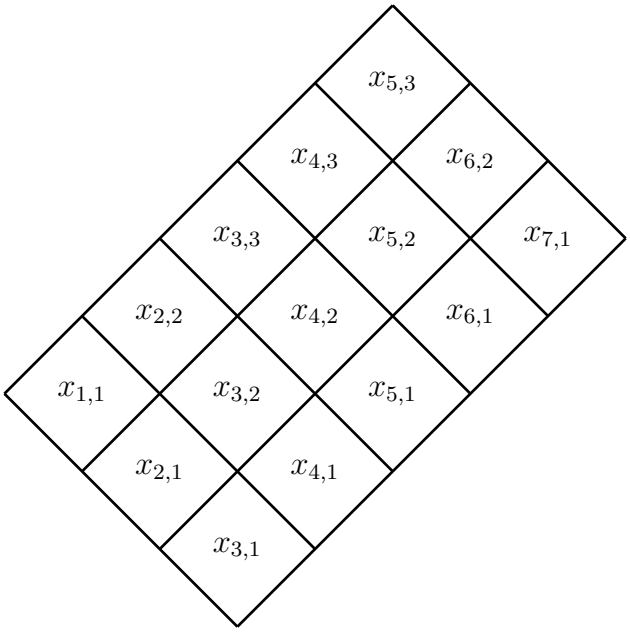


FIGURE 1. 变量集合 $x_{i,\ j}$ 对于 $k=4$ 和 $n=8$。

方格（$i,\ j$）在图 1 中，我们赋予一个权重

$$m_{i,j}=(|i-k|+2j-1)\in\mathbb{N} \tag{3.2}$$

该函数从 $m_{k,\ 1}=1$ 到 $m_{n-k,\ k}=n-1$。$m_{i,\ j}$ 的定义可从图2中清楚看出。对于方格（$i,\ j$），我们有如下偏序：

$$m_{k,1}<m_{k-1,1}=m_{k+1,1}<\cdots<m_{n-k,k} \tag{3.3}$$

对于一个较小的 实数 $0<\varepsilon\ll 1$，我们用以下方程定义环面：

$$\gamma_{k,n}\subset\mathbb{C}^{k(n-k)},\quad |x_{i,j}|=m_{i,j}\varepsilon \tag{3.4}$$

其中，i、j 遍历所有可能的取值。

命题3.1（[SmV23]）。假设 $|z_1|<\varepsilon$ 且（$n-1$）$\varepsilon<|z_2|$，则超势（*3.1*）在环面$\gamma_{k,\ n}$上具有一个单值分支，该分支在证明中被特别确定，并将在本文中使用。

证明。记为

$$L(x_{i,a},x_{j,b})=\begin{cases}(1-x_{i,a}/x_{j,b})^{-\omega}, & m_{i,a}<m_{j,b},\ i\neq j\\ (x_{j,b}/x_{i,a}-1)^{-\omega}, & m_{i,a}>m_{j,b},\ i\neq j.\end{cases} \tag{3.5}$$

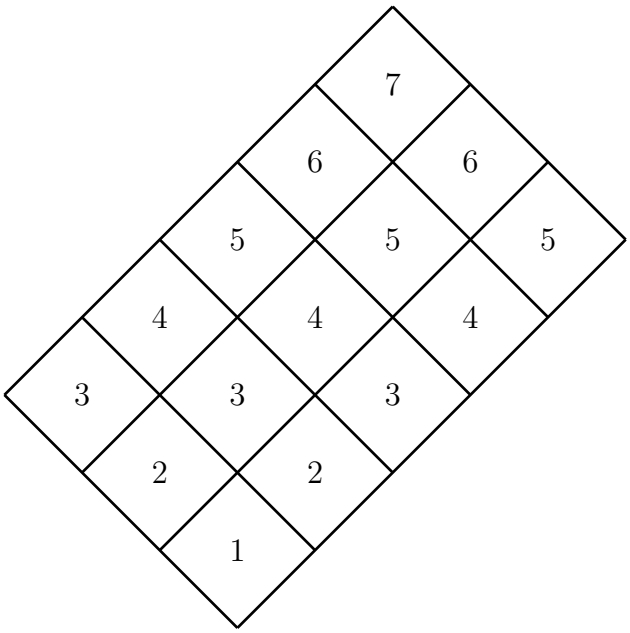


FIGURE 2. 权函数 $m_{i,\ j}$

这些比值 $x_{i,a}/x_{j,b}$, $x_{j,b}/x_{i,a}$ 在 $\gamma_{k,n}$ 上的绝对值均小于 1。我们将 $\gamma_{k,n}$ 上的 $(1-x_{i,a}/x_{j,b})^{-\omega}$ 替换为 $\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\omega}{m}(-x_{i,a}/x_{j,b})^m$，并替换 $(x_{j,b}/x_{i,\ a}-1)^{-\omega}$ with $e^{-\pi\sqrt{-1}\omega}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\omega}{m}(-x_{j,\ b}/x_{i,a})^m$.

接下来，我们将 $L(z_1,x_{k,a})=(1-z_1/x_{k,a})^{-\omega}$ 以及 $L(z_2,x_{k,a})=(1-x_{n-k,a}/z_2)^{-\omega}$。在 $\gamma_{k,n}$ 上，我们有 $|x_{k,i}|\geqslant\epsilon$，且 $|x_{n-k,i}|\leqslant|x_{n-k,k}|=n\epsilon$，因此 $|z_1/x_{k,i}|<1$ 以及 $|x_{n-k,i}/z_2|<1$。我们将 $\gamma_{k,n}$ 上的因子 $(1-z_1/x_{k,a})^{-\omega}$ 替换为 $\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\omega}{m}(-z_1/x_{k,a})^m$，并将因子 $(1-x_{n-k,a}/z_2)^{-\omega}$ 替换为 $\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\omega}{m}(-x_{n-k,a}/z_2)^m$。

最后，我们将 $\Delta(x_{m,i},x_{m,j})=(1-x_{m,i}/x_{m,j})^{2\omega}$ 记作 $1\leqslant i<j\leqslant \mathsf{v}_m$。在 $\gamma_{k,n}$ 上，我们有 $|x_{m,i}/x_{m,\ j}|<1$。我们将 $\gamma_{k,n}$ 上的因子 $\Delta(x_{m,i},x_{m,j})$ 替换为 $\sum_{m=0}^{\infty}\binom{2\omega}{m}(-x_{m,i}/x_{m,j})^m$。用这些记号，我们有：

(3.6)
$$\Phi(x,z)=\frac{\Big(\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{a<b}\Delta(x_{i,a},x_{i,b})\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n-2}\prod_{a=1}^{\mathsf{v}_i}\prod_{b=1}^{\mathsf{v}_{i+1}}L(x_{i,a},x_{i+1,b})\Big)\Big(\prod_{i=1}^{k}L(z_1,x_{k,i})L(z_2,x_{n-k,i})\Big)}{\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{\mathsf{v}_i}x_{i,j}},$$

并为每个因子选取一个单值分支，方法是将该因子替换为相应的幂级数。这些幂级数的乘积确定了 $\gamma_{k,n}$ 上 $\Phi(x,z)$ 的一个单值分支。□

例。对于 $X = T^*\,\mathrm{Gr}(2,4)$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi(x,z) &= (x_{11}x_{21}x_{22}x_{31})^{-1}\\ &\times (1-x_{21}/x_{22})^{2\omega}\big((x_{21}/x_{11}-1)(1-x_{21}/x_{31})(z_1/x_{21}-1)(1-x_{21}/z_2)\big)^{-\omega}\\ &\times \big((1-x_{11}/x_{22})(x_{31}/x_{22}-1)(z_1/x_{22}-1)(1-x_{22}/z_2)\big)^{-\omega}.\end{aligned}$$

根据前一个命题，$\Phi(x,z)$ 在 $\gamma_{k,\ n}$ 上的积分是$z = z_1/z_2$ 在圆盘 $|z| < \epsilon$内的解析函数。

定理 3.2 ([SmV23])。 函数 (2.5) 有如下积分表示

$$\mathsf{V}(z) = \frac{\alpha}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint\limits_{\gamma_{k,n}} \Phi(x,z) \bigwedge_{i,j} dx_{i,j} \tag{3.7}$$

其中，$\Phi(x,z)$ 是超势函数 (3.1) 在环面 $\gamma_{k,\ n}$ 上的一个分支，该分支由命题 3.1 选定；$\alpha = e^{\pi\sqrt{-1}N\omega}$ 是一个归一化常数，其中 N 是 (3.6) 中形如 $(x_{j,\ b}/x_{i,\ a}-1)^{-\omega}$ 的因子的数量。

定义 3.3。令 $\gamma'_{k,\ m}$ 为另一个由 $|x_{i,\ j}| = R_{i,\ j}$ 定义的积分轮廓，其中 $R_{i,\ j} \in \mathbb{R}$ 满足 $|z_1| < R_{1,\ 1}$、$R_{n-k,\ k} < |z_2|$ 以及以下条件

$$m_{i,j} < m_{a,b} \Longrightarrow R_{i,j} < R_{a,b} \tag{3.8}$$

对所有指标对 (i,j) 和 (a,b) 都成立。于是，我们称 $\gamma'_{k,\ m}$ 与$\gamma_{k,\ m}$ 同调，并记作 $\gamma'_{k,\ m} \sim \gamma_{k,\ m}$。

注意，若将 $\gamma_{k,\ m}$ 替换为一个与之同调的 $\gamma'_{k,\ m}$，则（3.7）保持不变。这是因为对 $\gamma'_{k,\ n}$ 的积分求值，归根结底仍是计算 $x_{i,\ j} = 0$处的留数，而这些留数的计算顺序与计算 $\gamma_{k,\ n}$ 时相同。这意味着结果保持不变。

3.4. 与 $3D$-镜像对称的关系。 下面解释超势函数（3.1）的由来。（3.1）中的各因子对应于描述 $3D$-镜像簇 $X^!$的箭图的边。对于 $X = T^*\,\mathrm{Gr}(k,n)$，其箭图见 $X^!$ SmV 第 3.2–3.3 节；文中也解释了（3.1）中的各因子与该箭图的边之间的对应关系。

对于一般的中岛箭图簇，只要已知 $3D$-镜像簇 $X^!$ 对应的箭图，就可以用同样的步骤构造超势函数（3.1）。对于 A 型的中岛箭图簇——其中包括作为特例的部分旗簇上的余切丛——物理学家给出了 $3D$-镜像的猜想性描述。例如，[GK13] 中对此作了解释。我们预计，本文以及 [SmV23] 的结果可以直接推广到这些情形。

该 $3D$-镜像对称猜想是在 K 理论而非上同调层面上表述的。回顾一下，量子差分方程 [OS22] 是量子上同调中量子微分方程的 K 理论推广。该 $3D$-镜像对称猜想声称，关于 X 和 $X^!$ 的量子差分方程是等价的。 X 和 $X^!$ 的 K 理论顶点函数为这一共同 q- 差分方程组提供了两组不同的解基。对于格拉斯曼流形上的余切丛

该猜想由 Dinkins 在 [Din20] 以及完全旗簇的情形在 [Din22]中证明。对于超环面簇，该结果见 [SZ22]。

一种替代定义 3D-镜像对称性提出，椭圆稳定包络 [AO21] 的 X 与 $X^!$相等。这个想法最早由 [Oko18] 提出，之后在 X 的各种情形中得到研究，见[RSVZ19、RSVZ21、RW20、SZ22]。文献[KoSm22、Ko] 证明了， X 的椭圆稳定包络决定了 X 相应的量子差分方程，反之亦然。这确立了 3D-镜像对称性的两种定义之间的等价性。

定理1.1 指出， J-函数对 Gr(k, n) 的镜像描述，可由 3D-镜像对称性的双重极限得到。第一个极限考虑 $T^*\mathrm{Gr}(k,\ n)$ 的 K 理论顶点函数的上同调极限。在此极限下，这些函数的 3D-镜像对称性描述 [Din20]退化为积分表示（3.7）。在第二个极限中， $\hbar \to \infty$ 我们得到定理1.1。

4. The limit $\hbar \to \infty$

4.1. 多项式超势。设 Γ 是一个有向图，其顶点由 $k \times (n-k)$ 杨图中的方格以及分别对应于 z_1 和 z_2 的两个额外顶点组成，见图 3。图的边定义如下：每两个相邻的方格之间由一条边连接。每条边均沿权函数 $m_{i,j}$ 减小的方向定向，该权函数由 (3.2) 定义。另有两条边分别从 $x_{k,1}$ 指向 z_1 ，以及从 z_2 指向 $x_{n-k,k}$，见图 3。给定 Γ 的一条边 e，我们用 $h(e)$ 和 $t(e)$ 表示相应的首端和尾端。我们定义如下劳朗多项式：

$$S(x,z) = \sum_{e \in \mathrm{edges}(\Gamma)} \frac{x_{h(e)}}{x_{t(e)}}\,. \tag{4.1}$$

例子。对于 $k=1$ ，我们得到：

$$S(x,z) = \frac{z_1}{x_{1,1}} + \frac{x_{1,1}}{x_{2,1}} + \frac{x_{2,1}}{x_{3,1}} + \cdots + \frac{x_{n-2,1}}{x_{n-1,1}} + \frac{x_{n-1,1}}{z_2}\,. \tag{4.2}$$

代入 $z_1 = q$、 $z_2 = 1$，并引入新的变量，通过

$$x_{1,1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1},\quad x_{2,1} = a_1 a_2 \dots a_{n-2},\quad \dots,\quad x_{n-1,1} = a_1\,.$$

我们得到了射影空间的标准 Givental 超势。

$$S(x) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \frac{q}{a_1 \cdots a_{n-1}}\,.$$

例子。对于 $X = T^*\mathrm{Gr}(2,4)$，我们得到

$$S(x,z) = \frac{z_1}{x_{2,1}} + \frac{x_{2,1}}{x_{1,1}} + \frac{x_{2,1}}{x_{3,1}} + \frac{x_{3,1}}{x_{2,2}} + \frac{x_{1,1}}{x_{2,2}} + \frac{x_{2,2}}{z_2}\,. \tag{4.3}$$

4.2. 指数积分。 对于 $S(x,\ z)$ 由（4.1）定义，我们考虑以下幂级数：

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint e^{\frac{1}{\epsilon}S(x,z)} \bigwedge_{i,j} \frac{dx_{i,j}}{x_{i,j}} \;:=\; \sum_{d=0}^{\infty} \frac{\left[S(x,z)^d\right]_0}{d!\epsilon^d} \tag{4.4}$$

其中， $\left[S(x,z)^d\right]_0$ 表示劳朗多项式 $S(x,z)^d$ 关于变量 $x = (x_{i,j})$ 的常数项。我们假设 $\left[S(x,z)^0\right]_0 = 1$。根据超势的结构

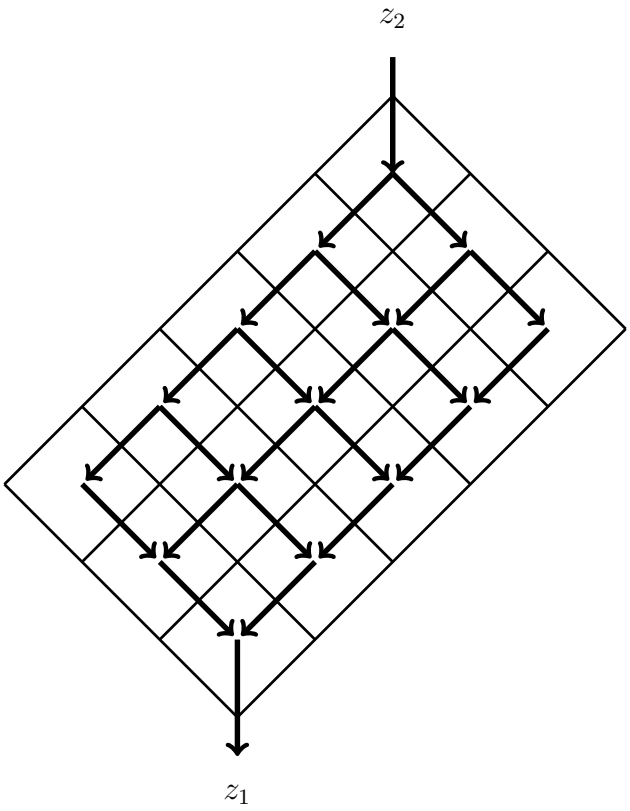


FIGURE 3. 与 $X = T^*\,\mathrm{Gr}(k,n)$ 相关的图 Γ。

<escape>(4.1) 很容易看出，$\left[S(x,\ z)^d\right]_0$ 是 $z = z_1/z_2$ 中的一个单项式，因此（4.4）是关于 z的一个幂级数。</escape>

例子。 对于 $X = T^*\mathbb{P}^{n-1}$，超势由（4.2）给出。在这种情况下，初等计算表明，只有当 $\left[S（x，\ z）^d\right]_0$ 不为零时，次数 d 具有如下形式$d = nm$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$成立。在这种情况下，我们有

$$[S(x,z)^{mn}]_0 = \frac{(z_1/z_2)^m (nm)!}{(m!)^n}\,.$$

因此我们得出结论:

$$\oint e^{\frac{1}{\epsilon}S(x,z)} \bigwedge_{i,j} \frac{dx_{i,j}}{x_{i,j}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(m!)^n \epsilon^{mn}}\,.$$

示例。 对于 $X = T^*\,\mathrm{Gr}(2,\ 4)$，超势由（4.3）给出。在此情况下 $\left[S（x，\ z）^d\right]_0$仅当 $d = 4m$ 时才非零，此时

$$\left[S(x,z)^{4m}\right]_0 = \frac{(2m)!(4m)!}{(m!)^6} \frac{z^m}{\epsilon^{4m}}\,.$$

因此，我们得到：

$$\oint e^{\frac{1}{\epsilon}S(x,z)} \bigwedge_{i,j} \frac{dx_{i,j}}{x_{i,j}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{(m!)^6 \epsilon^{4m}} z^m.$$

4.3. $\hbar \to \infty$ 极限下的顶点函数。

定理 4.1。 设 $\mathsf{V}(z)$ 为函数（2.5），则：

$$\lim_{\hbar\to\infty} \mathsf{V}(z/\hbar^n) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint e^{\frac{1}{\epsilon}S(x,z)} \bigwedge_{i,j} \frac{dx_{i,j}}{x_{i,j}}$$

其中积分由（4.4）定义，且 S（x， z）为多项式超势（4.1）。

证明。根据定理 3.2可得：

$$\mathsf{V}(z) = \frac{\alpha}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint_{\gamma_{k,n}} \Phi(x,z) \bigwedge_{i,j} dx_{i,j}$$

其中积分轮廓 $\gamma_{k,\ n}$ 由（3.4）定义，而 Φ（x， z）是由命题 3.1所确定的超势（3.6）分支。定义如下会比较方便：

$$\tilde{L}(x_{i,a}, x_{j,b}) = \begin{cases} (1 - x_{i,a}/x_{j,b})^{-\omega}, & m_{i,a} < m_{j,b}, \\ (1 - x_{j,b}/x_{i,a})^{-\omega}, & m_{i,a} > m_{j,b} \end{cases} \tag{4.5}$$

它们与（3.5）相差一个因子

$$\tilde{L}(x_{i,a}, x_{j,b}) = \begin{cases} L(x_{i,a}, x_{j,b}), & m_{i,a} < m_{j,b}, \\ e^{-\pi\sqrt{-1}\hbar/\epsilon} L(x_{i,a}, x_{j,b}), & m_{i,a} > m_{j,b}. \end{cases}$$

回忆一下， $\alpha = e^{\pi\sqrt{-1}N\hbar/\epsilon}$ 其中 N 是 $\Phi(x,z)$中满足$\tilde{L}(x_{i,\ a}, x_{j,\ b})/L(x_{i,\ a}, x_{j,\ b})$ $= e^{-\pi\sqrt{-1}\hbar/\epsilon}$的因子总数。因此，用这些记号可得

$$\mathsf{V}(z) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint_{\gamma_{k,n}} \tilde{\Phi}(x,z) \bigwedge_{i,j} \frac{dx_{i,j}}{x_{i,j}} \tag{4.6}$$

其中

$$\tilde{\Phi}(x,z) = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{a<b} \Delta(x_{i,a}, x_{i,b})\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n-2} \prod_{a=1}^{\mathsf{v}_i} \prod_{b=1}^{\mathsf{v}_{i+1}} \tilde{L}(x_{i,a}, x_{i+1,b})\Big)\Big(\prod_{i=1}^{k} \tilde{L}(z_1, x_{k,i}) L(z_2, x_{n-k,i})\Big).$$

在这个积分中，我们按如下方式对变量进行缩放： $z_1 \to z_1$， $z_2 \to z_2\hbar^n$。由于在我们的记号中 $z = z_1/z_2$，这等价于在（4.6）左侧代入 $z \to z/\hbar^n$ 。令$\gamma'_{k,\ n}(\hbar)$为由以下条件定义的积分轮廓

$$|x_{i,j}| = m_{i,j}\varepsilon|\hbar|^{m_{i,j}}.$$

假设 $|\hbar| > 1$，则有

$$m_{i,j} < m_{a,b} \quad \Longrightarrow \quad m_{i,j}\varepsilon|\hbar|^{m_{i,j}} < m_{a,b}\varepsilon|\hbar|^{m_{a,b}}$$

对于所有的成对对象（i， j）和（a， b）。根据命题 3.1 的假设，我们有$|z_1| < |x_{1,\ 1}|$ 且$|x_{n-k,\ k}| < |z_2\hbar^n|$ 在 $\gamma'_{k,\ n}(\hbar)$ 上成立。因此 $\gamma'_{k,\ n}(\hbar) \sim \gamma_{k,\ n}$ 按照定义 3.3 的意义成立。因此

$$\mathsf{V}(z/\hbar^n) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint\limits_{\gamma'_{k,n}(\hbar)} \tilde{\Phi}(x,z) \bigwedge_{i,j} \frac{dx_{i,j}}{x_{i,j}} \tag{4.7}$$

现在，在这个积分中，我们通过 $x_{i,\ j} = y_{i,\ j}\hbar^{m_{i,\ j}}$. 改变积分变量。积分轮廓$\gamma'_{k,\ n}$（$\hbar$）在变量 $y_{i,\ j}$ 中由$|y_{i,\ j}| = m_{i,\ j}\varepsilon$给出，即在坐标 $y_{i,\ j}$ 中，我们沿原积分轮廓 $\gamma_{k,\ n}$进行积分。综上可得:

$$\mathsf{V}(z/\hbar^n) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint\limits_{\gamma_{k,n}} \tilde{\Phi}(y,z) \bigwedge_{i,j} \frac{dy_{i,j}}{y_{i,j}} \tag{4.8}$$

其中

$$\tilde{\Phi}(y,z) = \Big(\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{a<b}\Delta(y_{i,a}\hbar^{m_{i,a}}, y_{i,b}\hbar^{m_{i,b}})\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n-2}\prod_{a=1}^{\mathsf{v}_i}\prod_{b=1}^{\mathsf{v}_{i+1}}\tilde{L}(y_{i,a}\hbar^{m_{i,a}}, y_{i+1,b}\hbar^{m_{i+1,b}})\Big) \times$$

$$\times\Big(\prod_{i=1}^{k}\tilde{L}(z_1, y_{k,i}\hbar^{m_{k,i}})\tilde{L}(z_2\hbar^n, y_{n-k,i}\hbar^{m_{n-k,i}})\Big). \tag{4.9}$$

我们有:

$$\tilde{L}(y_{i,a}\hbar^{m_{i,a}}, y_{i+1,b}\hbar^{m_{i+1,b}}) = \begin{cases} \Big(1-(y_{i,a}/y_{i+1,b})/(\hbar^{m_{i+1,b}-m_{i,a}})\Big)^{-\hbar/\epsilon}, & m_{i,a} < m_{i+1,b}, \\ \Big(1-(y_{i+1,b}/y_{i,a})/(\hbar^{m_{i,a}-m_{i+1,b}})\Big)^{-\hbar/\epsilon}, & m_{i,a} > m_{i+1,b}. \end{cases}$$

注意，幂 在这些因子中出现的 $\hbar$ 是正整数。因此，我们计算 e

$$\lim_{\hbar\to\infty} L(y_{i,a}\hbar^{m_{i,a}}, y_{i+1,b}\hbar^{m_{i+1,b}}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\epsilon}\frac{y_{i,a}}{y_{i+1,b}}}, & m_{i,a} = m_{i+1,b} - 1, \\ e^{\frac{1}{\epsilon}\frac{y_{i+1,b}}{y_{i,a}}}, & m_{i,a} = m_{i+1,b} + 1, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们还有

$$\tilde{L}(z_1, y_{k,i}\hbar^{m_{k,i}}) = \Big(1-(z_1/y_{k,i})/\hbar^{m_{k,i}}\Big)^{-\hbar/\epsilon},$$

$$\tilde{L}(z_2\hbar^n, y_{n-k,i}\hbar^{m_{n-k,i}}) = \Big(1-y_{n-k,i}\hbar^{m_{n-k,i}-n}/z_2\Big)^{-\hbar/\epsilon}.$$

其中 $m_{k,\ i} = 2i-1$ 以及 $m_{n-k,\ i} = n-2k+2i-1$，因此

$$\lim_{\hbar\to\infty} \tilde{L}(z_1, y_{k,i}\hbar^{m_{k,i}}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\epsilon}\frac{z_1}{y_{k,1}}}, & i=1, \\ 1 & i\neq 1 \end{cases}$$

and

$$\lim_{\hbar\to\infty} \tilde{L}(z_2\hbar^n, y_{n-k,i}\hbar^{m_{n-k,i}}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\epsilon}\frac{y_{n-k,k}}{z_2}}, & i=k, \\ 1 & i\neq k \end{cases}$$

最后

$$\Delta(y_{i,a}\hbar^{m_{i,a}}, y_{i,b}\hbar^{m_{i,b}}) = (1 - y_{i,a}/y_{i,b}/(\hbar^{m_{i,b}-m_{i,a}}))^{2\hbar/\epsilon}$$

并且由于 $m_{i,\ b} - m_{i,\ a} \geqslant 2$ 对于 $b > a$，我们有

$$\lim_{\hbar\to\infty} \Delta(y_{i,a}\hbar^{m_{i,a}}, y_{i,b}\hbar^{m_{i,b}}) = 1.$$

总之，因子（4.9）的极限 $\hbar \to \infty$ 仅当其对应于图 Γ的一条边时才是非平凡的，并且：

$$\lim_{\hbar\to\infty} \tilde{\Phi}(y,z) = \prod_{e\in \mathrm{edges}(\Gamma)} e^{\frac{1}{\epsilon}\frac{y_{h(e)}}{y_{t(e)}}} = e^{\frac{S(y,z)}{\epsilon}} \tag{4.10}$$

最后，在紧集 $\gamma_{k,\ n}$ 上的逐点极限（4.10）是一致的，极限与积分可交换，由（4.8）可得

$$\begin{aligned}\lim_{\hbar\to\infty} \mathsf{V}(z/\hbar^n) &= \lim_{\hbar\to\infty} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint_{\gamma_{k,n}} \tilde{\Phi}(y,z) \bigwedge_{i,j} \frac{dy_{i,j}}{y_{i,j}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{k(n-k)}} \oint_{\gamma_{k,n}} e^{\frac{S(y,z)}{\epsilon}} \bigwedge_{i,j} \frac{dy_{i,j}}{y_{i,j}},\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

5. Dwork congruences

设 p 为一个素数。考虑幂级数

$$\mathsf{F}(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \left[S(x,z)^d\right]_0 \in \mathbb{Z}[[z]]\,. \tag{5.1}$$

注意，该级数的系数与 A-级数（4.4）中的系数相差一个因子 $d!\epsilon^d$，也就是说，这两个级数通过博雷尔积分变换相联系。

考虑函数 $\mathsf{F}(z)$ 的一组多项式截断：

$$\mathsf{F}_s(z) = \sum_{d=0}^{p^s-1} \left[S(x,z)^d\right]_0 \in \mathbb{Z}[z], \qquad s = 0,1,2,\dots\,.$$

其中，与前面一样，我们假设 $[S(x,z)^0]_0 = 1$。

定理 5.1。我们有以下同余关系：

$$\frac{\mathsf{F}(z)}{\mathsf{F}(z^p)} \equiv \frac{\mathsf{F}_s(z)}{\mathsf{F}_{s-1}(z^p)} \mod p^s\,, \qquad s = 1,2,\dots\,.$$

特别地，多项式 $\mathsf{F}_s(z)$ 满足 Dwork 型同余 s:

$$\frac{\mathsf{F}_{s+1}(z)}{\mathsf{F}_s(z^p)} \equiv \frac{\mathsf{F}_s(z)}{\mathsf{F}_{s-1}(z^p)} \mod p^s, \qquad s = 1,2,\dots\,.$$

证明。该　　这些同余的基础是牛顿多面体的性质　　e

$$\Delta(k,n)=\mathsf{N}(S(x,z))\subset\mathbb{R}^{k(n-k)}$$

劳朗多项式 (4.1) 关于变量 $x=(x_{i,j})$ 的展开。令 $f_{i,j}$（其中 $i=1$），...， k， $j=1$，...，$n-k$ 表示 $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ 中的标准基。向量 $f_{i,j}$ 对应图 3 中 $k\times(n-k)$ 图示里的方格。由 (4.1) 可知， $\Delta(k,n)$ 是以下向量的凸包：

$$f_{1,1},\quad f_{i,j+1}-f_{i-1,j+1},\quad i=2,\dots,k,\quad j=0,\dots,n-k-1,$$
$$-f_{k,n-k},\quad f_{i,j+1}-f_{i,j},\ i=1,\dots,k,\quad j=1,\dots,n-k-1.$$

这个多面体已在许多文献中被研究，特别是已知它是反射多面体，参见 [BCKS98]中的定理 3.1.3。我们回顾一下，原点 $(0,\dots,0)$ 是反射多面体中唯一的整点，例如参见 [Nill05] 中的综述。

现在，定理 5.1 可由 [MeVl16], 中的定理 1.1 经简单修改后得到。令 $S(x,1)$ 表示超势 (4.1)，其中 $z_1=z_2=1$。显然，这个劳朗多项式具有相同的牛顿多面体 $\mathsf{N}(S(z,1))=\mathsf{N}(S(x,z))=\Delta(k,n)$。

考虑

$$\mathsf{M}(\xi)=\sum_{d=0}^{\infty}[S(x,1)^d]_0\,\xi^d,\qquad \mathsf{M}_s(\xi)=\sum_{d=0}^{p^s-1}[S(x,1)^d]_0\,\xi^d.$$

由于 $(0,\dots,0)$ 是 $\mathsf{N}(S(z,1))$ 的唯一内点，因此我们可以在 [MeVl16]中应用定理 1.1，并得出这些函数满足以下同余：

$$(5.2)\quad \frac{\mathsf{M}(\xi)}{\mathsf{M}(\xi^p)}\equiv\frac{\mathsf{M}_s(\xi)}{\mathsf{M}_{s-1}(\xi^p)},\qquad \frac{\mathsf{M}_{s+1}(\xi)}{\mathsf{M}_s(\xi^p)}\equiv\frac{\mathsf{M}_s(\xi)}{\mathsf{M}_{s-1}(\xi^p)}\mod p^s,\qquad s=1,2,\dots.$$

从超势 $S(x,z)$ 的结构可以清楚地看出

$$[S(x,z)^d]_0=[S(x,1)^d]_0 z^{\frac{d}{n}}.$$

特别　地，该系数除非 n 整除 d，否则为零。由此我们得到　　at

$$\mathsf{F}(z)=\sum_{d=0}^{\infty}\left[S(x,1)^d\right]_0 z^{\frac{d}{n}}=\mathsf{M}(z^{\frac{1}{n}})$$

同样 $\mathsf{F}_s(z)=\mathsf{M}_s(z^{\frac{1}{n}})$。现在，定理 5.1 由 (5.2) 经过代换$\xi\to z^{\frac{1}{n}}$即可得出。 □

关于顶点函数的 Dwork 型同余以及 KZ 方程的解，进一步讨论可参阅 [SmV23、Var22、SV19、VZ21]。

注。定理 5.1推出一个无穷因式分解：

$$\mathsf{F}(z)=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{\mathsf{F}_s(z^{p^i})}{\mathsf{F}_{s-1}(z^{p^{i+1}})}\mod p^s,$$

参见 [SmV23]。

References

[AO21] Mina Aganagic 和 Andrei Okounkov，椭圆稳定包络，《美国数学会杂志》34 (2021年)，第1期，79–133[BCKS98] V. Batyrev、I. Ciocan-Fontanine、B. Kim 和 D. van Straten，格拉斯曼流形中 Calabi–Yau完全交的合页转变与镜像对称，Nu-clear Physics B 514 (1998)，640–666[Cas20] Marco Castronovo，格拉斯曼流形的 Fukaya 范畴：矩形，《数学进展》372， https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107287。[Dan22] Ivan Danilenko，仿射格拉斯曼流形切片的量子微分方程，arXiv:2210.17061，1–57[Din20] Hunter Dinkins， T^* Gr(k, n)的辛对偶，《数学研究快报》29，3，(2022年)，https://dx.doi.org/10.4310/MRL.2022.v29.n3.a3[Din22] 3全旗簇余切丛的三维镜像对称，《数学物理通讯》112，100，(2022年)[Dwo69] B. Dwork， p-进循环，《Publ. Math. de lH ´ES》37 (1969)，27–115[EHX97] Tohru Eguchi、Kentaro Hori、Chuan-Sheng Xiong，量子引力上同调，《Int.J.Mod.Phys.》A12，(1997)，1743-1782[GK13] Davide Gaiotto、Peter Koroteev，关于三维箭图规范理论与可积性，《高能物理学杂志》126 (2013)。[Giv96] A. Givental，等变格罗莫夫-威滕不变量，《国际数学研究通知》(1996)，第13期，613–663[GGI16] Sergey Galkin、Vasily Golyshev、Hiroshi Iritani，Fano流形的伽马类与量子上同调：伽马猜想，《杜克数学杂志》165(11)，2005-2077，(2016年)。[KoSm22]Yakov Kononov、Andrey Smirnov，探讨量子差分方程 II：三维镜像对称，IMRN，(2022年)，https://doi.org/10.1093/imrn/rnac196[Ko] Iakov Kononov，椭圆稳定包络与三维镜像对称，博士论文，哥伦比亚大学。⌢[KoSt10] Christian Korff、Catharina Stroppel，$sl(n)_k$-WZNW融合环：组合构造及其作为量子上同调商的实现。《数学进展》225，1，200–268，(2010年)。[KPSZ21] Peter Koroteev、Petr Pushkar、Andrey Smirnov、Anton Zeitlin，箭图簇的量子K理论与多体系统，《Sel. Math. New Ser.》27，87 (2021年)[LaTe17] Thomas Lam、Nicolas Templier，极小旗簇的镜像猜想，arXiv:1705.00758，(2017年)。[MaRi20] R. J. Marsh 和 K. Rietsch，格拉斯曼流形的 B-模型联系与镜像对称，《数学进展》366:107027，131，2020[MO19] D. Maulik、A. Okounkov，量子群与量子上同调，Ast´erisque，卷408，法国数学会，2019，1–277；https://doi.org/10.24033/ast.1074[MV02] Y. Markov 和 A. Varchenko，三角 KZ 方程的超几何解满足动力差分方程，《数学进展》166(1):100–147，2002[MeVl16] A. Mellit、M. Vlasenko，劳朗多项式幂的常数项的 Dwork 同余，《国际数论杂志》12 (2016)，第2期，313–321

[Nill05] B. Nill《反射多胞体——组合学与凸几何》，
https://personales.unican.es/santosf/anogia05/slides/Nill-anogia05.pdf[Oko17] Andrei Okounkov，《计数几何中的K理论计算讲义》，IAS/帕克城数学系列第24卷，第251–380页。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2017年。[Oko18] Andrei Okounkov，《计数辛对偶》，MSRI研讨会“计数几何中的结构”（演讲可从MSRI网站观看）[OS22] Andrei Okounkov、Andrey Smirnov，《Nakajima簇的量子差分方程》，《数学发明》229，1203–1299（2022年）。[PSZ16] Petr Pushkar、Andrey S mirnov 和 Anton Zeitlin，《量子K理论中的 Baxter Q 算子》，《数学进展》360，12 2016年。[RSVZ19] R. Rimanyi、A. Smirnov、A. Varchenko、Z. Zhou，《全旗簇余切丛的三维镜像自对称性》，SIGMA，15：093，22（2019年）[RSVZ21] R. Rimanyi、A. Smirnov、A. Varchenko、Z. Zhou，《三维镜像对称与椭圆稳定包络》，IMRN，（2021年），https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa389[RW20]Rich´ard Rim´anyi、Andrzej Weber，《通过 Bott–Samelson消解构造舒伯特簇的椭圆类》，《拓扑学杂志》，（2020年），https://doi.org/10.1112/topo.12152[SmV23] Andrey Smirnov、Alexander Varchenko，《通过三维镜像对称对顶点函数进行p进近似》，arXiv:2302.03092[SV91] V. Schechtman、A. Varchenko，《超平面配置与李代数同调》，《数学发明》106（1991年），139–194[SV19] V. Schechtman、A. Varchenko，《模 p 的KZ微分方程的解》，《拉马努金杂志》48（2019年），第3期，655–683；https://doi.org/10.1007/s11139-018-0068-x,arXiv:1707.02615[SZ22] Andrey Smirnov、Zijun Zhou，《三维镜像对称与超环面簇的量子K理论》，《数学进展》395，（2022年）https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.108081[TV22] V. Tarasov、A. Varchenko，《部分旗簇的朗道–金兹堡镜像、量子微分方程与qKZ差分方程》，《几何与物理学杂志》第184卷，2022年11月23日在线发表，104711，1–58，https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104711[Var22] A. Varchenko，《Dwork型同余与p进KZ联络》，arXiv:2205.01479，1–26[Vl18] M. Vlasenko，《高阶Hasse–Witt矩阵》，《数学研究》29（2018年）1411–1424[VZ21] A. Varchenko 和 W. Zudilin，《超几何周期的 p^s近似中的幽灵与同余》，arXiv:2107.08548，1–29