arXiv:2305.03878v1 [math.AC] 5 May 2023

理想的集合:
任何 n-吸收理想都是强 n-吸收的

Spencer Secord

摘要

我们证明，任何 n-吸收理想都必定是强 n-吸收理想；这是 Anderson 和 Badawi 关于吸收理想的三个相互关联猜想中的第一个[AB11]。我们通过引入并研究称为极大集合和半极大集合的对象来证明这一点；这些对象是分析交换环的理想乘法结构的工具。我们还大量借鉴了 Anderson–Badawi [AB11], 、Choi–Walker [CW20], 、Laradji [Lar17], 、Donadze [Don18], 等人先前关于吸收理想的研究。本文末尾，我们提出三个猜想，其中每一个都蕴含 Anderson 和 Badawi 提出的最后一个尚未解决的猜想。

§1 引言

对于交换环 A 的理想 α，我们将 α 的一个集合族 C 定义为一个列表 $C = [C_1, ..., C_n]$，其中包含 A 的理想 C_i，满足 $\prod_i C_i \subseteq \alpha$，但对所有 j，$\prod_{i\neq j} C_i \not\subseteq \alpha$。若 $C = [C_1, ..., C_n]$ 是一个大小 $|C|$ 等于 n 的集合族，我们称 C 是一个 n-集合族。

我们将主要关注两种特定类型的集合族：极大集合族和半极大集合族。给定 α 的集合族 C 和 C'，其中 $|C| \leq |C'|$，若 C' 可以重新排序，使得对所有 C_i，$C_i \subseteq C'_i$，则称 C 位于 C' 之下，或称 $C \leq C'$。α 的极大集合族 M 是指在 α 的所有集合族中极大的集合族（忽略重新排序）。等价地，极大集合族 M 是指在重新排序后，只位于与 M 等价的集合族之下的任何集合族。同样，半极大集合族 N 是指在相同大小的集合族中极大的集合族。换句话说，位于它之上的相同大小的集合族，只有它自身的重新排序。

例如，考虑环 $\mathbb{Q}[x, y, z]$ 的理想 $\alpha = \langle x, y, z\rangle^2 \cap \langle x^2, y\rangle$，该理想在 (2.5) 中有所讨论。除重新排序外，α 包含两个极大集合：$[\langle x^2, y\rangle, \langle x, y, z\rangle]$ 和 $[\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle]$。$\alpha$ 中唯一非极大的半极大集合是平凡半极大集合 $[\alpha]$。

给定任意一个由 α 构成的集合 C，列表 $C_{i\neq j} \cup [(\alpha : \prod_{i\neq j} C_i)]$ 总是一个大小相同且高于 C 的集合，其中“$\cup$”表示串接，而 $C_{i\neq j}$ 是 C 的子列表，它缺少第 j^{th} 个元素 C_j。因此，当且仅当对于 N 的每个元素 N_j，$N_j = (\alpha : \prod_{i\neq j} N_i)$ 时，集合 N 是半极大的。

本文将使用关于集合族的结果来研究 n-吸收和强n-吸收理想，这些概念将在下文定义。在 [AB11], 中，Anderson 和 Badawi 证明，诺特环的每个理想对于某个正整数n都是（强）n-吸收的，因此吸收理想理论适用于诺特环的任意理想。

Keywords: 理想的集合、极大集合、半极大集合、n-吸收理想、强 n-吸收理想、Anderson–Badawi 猜想。
2010 Mathematical Subject Classification: 13A15, 13A05； *Secondary:* 13F15, 13A02。*Email:* spencer.e.secord+math@gmail.com

吸收理想最初由 Badawi [Bad07] 引入，作为素理想的一种推广： n-吸收理想是指其主集合 $[\langle f_i\rangle]_i$ 的大小至多为n的任意理想。等价地，若对任意满足 $\prod_i f_i \in \alpha$ 的 f_1、……、$f_{n+1} \in A$，都存在某个 j 使得 $\prod_{i\neq j} f_i \in \alpha$，则 α 是 n-吸收的。因此， α 是 1-吸收的，当且仅当 α 是素理想。我们用 $\omega_A(\alpha)$ 表示最小整数 n，使得 α 是 A的一个 n-吸收理想；如果不存在这样的 n，则称 $\omega_A(\alpha) = \infty$。在不会对 A 产生混淆时，我们将写作 $\omega(\alpha)$。

后来，Anderson 和 Badawi [AB11] 对吸收理想进行了更深入的研究，并引入了强 n-吸收理想的概念：如果某个理想 α 的每个 α 集合的大小至多为 n，则称其为强 n-吸收理想。等价地，如果对于满足 $\prod_i \gamma_i \subseteq \alpha$的每个由 $n+1$ 个理想 $[\gamma_i]_{i=1}^{n+1}$组成的列表，都存在某个 j 使得 $\prod_{i\neq j} \gamma_i \subseteq \alpha$，则称 α 为强 n-吸收理想。我们用 $\omega_A^*(\alpha)$ 表示使 α 成为强 n-吸收理想的最小整数 n；如果不存在这样的 n，则令 $\omega_A^*(\alpha) = \infty$。当 $\omega^*(\alpha) < \infty$时，我们称 α 为吸收理想。

本文的主要结果是证明这两个概念等价；每个n-吸收理想都是强 n-吸收理想，因此对于任意理想 α， $\omega(\alpha) = \omega^*(\alpha)$。Anderson 和 Badawi 在他们的三条相互关联的猜想中的第一条里提出了这一猜想 [AB11], ；这些猜想在发表于 [Cah+14 的问题 30]之后引起了更多关注。迄今为止，只有第三条猜想的解答发表了，最早由 Choi 和 Walker 提出 [CW16]，Donadze 也独立地给出了证明[CW20]， [Don18]。我们在下文列出各条猜想，编号沿用 [Bad17]。

(C1). 任意 n-吸收理想都是强 n-吸收。（C2）。如果 α 是 A的 n-吸收理想，那么 $\omega_{A[x]}(\alpha[x]) = \omega(\alpha)$。（C3）。如果 α 是 n-吸收的，那么 $(\sqrt{\alpha})^n \subseteq \alpha$。

用下图可以直观地概括关于这三个猜想的当前进展，尽管这种概括过于粗略：

$$\textbf{(C2)} \xrightarrow[\substack{\text{Donadze}\\ \text{[Don16, Prop. 2.7],}\\ \text{Laradji}\\ \text{[Lar17, Prop. 2.10]}}]{} \left(\begin{array}{c} \textbf{(C1)} \\ \text{Theorem (3.5)} \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{\text{Anderson \&}\\ \text{Badawi}\\ \text{[AB11, Theorem 6.1]}}]{} \left(\begin{array}{c} \textbf{(C3)} \\ \text{Choi \& Walker} \\ \text{[CW16, Theorem 1],} \\ \text{Donadze} \\ \text{[Don18, § 2]} \end{array} \right)$$

关于这三个猜想以往方法和进展的深入综述，包括若干特定情形下 (C1) 的证明参考文献，请读者参阅 [Bad17]。在继续之前，我们附上目录，以便读者查阅。

目录

1 引言 1

1.1 摘要. 3

1.2 吸收理想预备知识. 4

2 理想的集合族 6

2.1 极大集合与半极大集合. 7

2.2 波浪号理想 C_I 12

2.3 阿廷环中的极大集合. 13

3 n-吸收理想是强 n-吸收的 14 3.1 主定理.15

4 一些新猜想
18 4.1 $\alpha[X]$ 的集合.18 4.2 有限多个极大集合？.20 4.3 分次环的吸收理想.22

§1.1 摘要

第 1 节旨在向读者简要介绍集合、吸收理想以及 Anderson 和 Badawi 提出的三个猜想。特别是，第 1.2 小节对文献中出现的关于 n-吸收理想的一些最强且最基本的结果进行了完整而独立的阐述。

第 2 节向读者介绍一些有关集合的基本技巧，并特别关注极大集合和半极大集合。在第 2.1 小节中，我们讨论关于极大集合和半极大集合的一般结果，同时给出例子和 $\widetilde{}$动机。第 2.2 小节介绍波浪号理想 C_I，它们是推广关于极大集合和半极大集合的结果的一种有用工具。$\backsim C_I$ 构造所提供的新技巧，将在本文最后两节中发挥作用。在第 2.3 小节中，我们将讨论范围限定于阿廷环，并证明零理想存在唯一的极大集合（在重新排序意义下）。这一结果为我们证明本文的主要结果——定理（3.5）——提供了一种“基例”。

第 3 节旨在证明我们的主要结果定理（3.5），该定理指出，任意 n 吸收理想都是强 n 吸收的。这正是 Anderson 和 Badawi 的第一个猜想（C1）。引理（3.3）是我们方法中的关键一步，它使我们能够将关注范围限定为准局部诺特环的强 n 吸收理想 α，其中极大n集合必须包含每个极大理想的一个副本。将讨论范围限定于此背景后，我们通过为 α 构造一个由主理想组成的 n 集合来证明定理（3.5）。

第 4 节讨论了三个新的猜想，它们比 Anderson 和 Badawi 提出的第二个（C2）且唯一尚未解决的猜想更强，或与之等价。第 4.1 小节首先$\widetilde{}$ $\widetilde{}$探讨嵌入 $C_j \subseteq c(C_j)[X]$是否严格，并由此引出猜想（4.3）。该猜想认为，对于诺特环的任意理想 α， $\alpha[x]$ 的极大集合具有 $[M_i[x]]_i$ 的形式，其中 $[M_i]_i$ 是 α 的某个极大集合。接下来的讨论将证明，猜想（4.3）强于（C2）。第 4.2 小节聚焦于猜想（4.4），该猜想指出，诺特环的任意理想都只有有限多个极大集合。本小节稍后将证明，该猜想强于猜想（4.3），因此必然蕴含（C2）。这令人意外，因为提出猜想（4.4）的初衷，是探讨对极大集合和吸收理想进行计算研究是否可行。最后，第 4.3 小节聚焦于我们的最后一个猜想（4.8），该猜想提出：若 α 是分次环 R 的一个 n-吸收理想，那么包含于 α 中的最大齐次理想 α^* 也必定是一个 n-吸收理想。这是以下著名结果的自然推广：若 $\mathfrak{p}$ 是分次环 R 中的一个素理想，那么 $\mathfrak{p}^*$ 也是 R 的一个素理想。本小节其余部分将用于证明猜想（4.8）等价于（C2）。第 4 节的主要结果总结如下图：

$$(4.4) \xrightarrow[\text{Prop. (4.6)}]{} (4.3) \Longrightarrow \textbf{(C2)} \xleftrightarrow[\text{Cor. (4.9.1)}]{} (4.8)$$

§1.2 吸收理想的预备知识

设 α 是环 A 的一个理想。显然，我们总有 $\omega(\alpha) \leq \omega^*(\alpha)$。给定一个子理想$\beta \subseteq \alpha$，有 $\omega(\alpha) = \omega(\alpha/\beta)$ 且 $\omega^*(\alpha) = \omega^*(\alpha/\beta)$。对于 A 的任意乘法封闭子集 S，有 $\omega(S^{-1}\alpha) \leq \omega(\alpha)$ 且 $\omega^*(S^{-1}\alpha) \leq \omega^*(\alpha)$。若 γ_1 和 γ_2 是 A 的理想，则 $\omega(\gamma_1 \cap \gamma_2) \leq \omega(\gamma_1) + \omega(\gamma_2)$ 且 $\omega^*(\gamma_1 \cap \gamma_2) \leq \omega^*(\gamma_1) + \omega^*(\gamma_2)$。因此，对于 A 的任意理想族 $\{\gamma_i\}_i$，有$\omega(\bigcap_i \gamma_i) \leq \sum_i \omega(\gamma_i)$ 且 $\omega^*(\bigcap_i \gamma_i) \leq \sum_i \omega^*(\gamma_i)$。

当且仅当对于有限生成理想，α 是强 n-吸收的，即 α 是 n-吸收的；也就是说，$\omega^*(\alpha) \leq n$ 当且仅当 α 不存在一个大小大于 n 的集合族，其中的元素都是有限生成理想。事实上，如果 C 是 n的一个 α-集合族，那么对于所有 j，我们都有 $\prod_{i\neq j} C_i \not\subseteq \alpha$，因此对于每个 $i \neq j$，必定存在 $f_{ij} \in C_i$ 使得 $\prod_{i\neq j} f_{ij} \notin \alpha$。因此，$\prod_i \langle \{f_{ij}\}_{j=1,\ j\neq i}^{n} \rangle \subseteq \alpha$ 但$\prod_{i\neq j} \langle \{f_{ij}\}_{j=1,\ j\neq i}^{n} \rangle \not\subseteq \alpha$ 对于所有 j均成立。由此可得，$[\langle \{f_{ij}\}_{j\neq i} \rangle]_i$是一个 n的 α -集合族，其中包含有限生成理想。

如果 B 是 A 的子环，那么 $\omega_B(\alpha \cap B) \leq \omega(\alpha)$，且 $\omega^*_B(\alpha \cap B) \leq \omega^*(\alpha)$。令 B' 为由上一段中定义的有限集 $\{f_{ij}\}_{ij} = \bigcup_j \{f_{ij}\}_{i\neq j}$ 生成的 A 的子环。显然，$[\langle \{f_{ij}\}_{j\neq i} \rangle_{B'}]_i$ 是 $\alpha \cap B'$ 的 n-集合，因此 $n \leq \omega^*_{B'}(\alpha \cap B')$。由此可逻辑地推出：当且仅当对于 A 的每个有限生成子环 B，α 是 B 的强 n-吸收理想时，α 才是强 n-吸收的。类似地，当且仅当对于 A 的每个有限生成子环 B，α 是 B 的 n-吸收理想时，α 才是 n-吸收的。

在本文后面的部分，我们将经常通过考察环 A 的适当大的有限生成子环 B 中的理想 $\alpha \cap B$，来研究环 A 的理想 α。使用有限生成子环的主要优点是，它们同构于 $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$的一个商，因此是诺特环。诺特条件在研究极大集合时尤其有用，这在很大程度上是因为极大集合与伴随素理想之间存在联系。

下面的引理颇为有用，它说明研究吸收理想将有助于我们更好地理解诺特环的理想。

(1.1) 引理。[AB11，推论 6.8]。对于诺特环 A 的理想 α，

$$\omega(\alpha) \leq \omega^*(\alpha) < \infty$$

证明。由于 $\omega(\alpha) \leq \omega^*(\alpha)$ 恒成立，只需证明 $\omega^*(\alpha) < \infty$。我们将仿照 Anderson 和 Badawi 在 [AB11，推论 6.8] 中的证明来证明这一点。由于 A 是诺特环，α 必有一个初等分解 $\alpha = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$。我们知道 $\omega^*(\bigcap_{i=1}^{r} Q_i) \leq \sum_{i=1}^{r} \omega^*(Q_i)$，因此只需证明对于 A 的任意 $\mathfrak{p}$-初理想 Q，$\omega^*(Q) < \infty$。由于 Q 是 $\mathfrak{p}$-初理想，必有 $\omega^*(Q) = \omega^*_{A_\mathfrak{p}}(Q_\mathfrak{p})$。取商环后得到 $\omega^*_{A_\mathfrak{p}}(Q_\mathfrak{p}) = \omega^*_{A_\mathfrak{p}/Q_\mathfrak{p}}(0)$。注意，$A_\mathfrak{p}/Q_\mathfrak{p} := A_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}Q$ 是零维诺特环，因而是局部 Artin 环。因此存在某个有限的 k，使得 $(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}/Q_\mathfrak{p})^k = 0$，于是 $\omega^*_{A_\mathfrak{p}/Q_\mathfrak{p}}(0) \leq k$。这意味着 $\omega^*(Q) < \infty$，证毕。■

现在我们将介绍 Choi 和 Walker 对 (C3) 的解法的简化版本——为求简洁，对论证进行修改、合并和精简。建议读者参阅[CW16] 或 [CW20]，以了解这一证明是如何得出的。

(1.2) 引理。[CW20，定理 1]。如果 $\omega(\alpha) < \infty$ 那么

$$(\sqrt{\alpha})^{\omega(\alpha)} \subseteq \alpha$$

证明。令 $n = \omega(\alpha)$。注意，$(\sqrt{\alpha})^n \subseteq \alpha$ 当且仅当对于由 n 个元素 a_1、...、$a_n \in \sqrt{\alpha}$ 生成的每个子理想$J \subseteq \sqrt{\alpha}$，都有 $J^n \subseteq \alpha$。对于任意 $a_i \in \sqrt{\alpha}$，我们知道 $a_i^n \in \alpha$，因此 $J^{n^2} = \langle \{a_i\}_i \rangle^{n^2} \subseteq \langle \{a_i^n\}_i \rangle \subseteq \alpha$。令 $\mathcal{N}$ 为满足$n \leq \sum_i v_i \leq n^2$的向量 $v \in \mathbb{N}^n$ 的集合。注意，当且仅当对于 $\mathcal{N}$ 中的每个 v，都有 $\prod_i a_i^{v_i} \in \alpha$，才有 $J^n \subseteq \alpha$。有限集 $\mathcal{N}$ 按字典序排列，因此我们可以使用逆向归纳法证明，对于所有 $v \in \mathcal{N}$，都有 $\prod_i a_i^{v_i} \in \alpha$。基例 $(n^2, 0, ..., 0)$ 显然成立，因为 $a_1^{n^2} \in J^{n^2} \subseteq \alpha$。固定 $r \in \mathcal{N}$，并假设对于字典序大于 r 的每个 $v \in \mathcal{N}$，都有 $\prod_i a_i^{v_i} \in \alpha$。

令 $g = \prod_i a_i^{r_i}$，我们将证明 $g \in \alpha$。令 $g_j := a_j^{r_j - 1} \prod_{i \neq j} a_i^{r_i}$，对每个满足 $r_j \neq 0$ 的 j 均成立。若 $\sum_i r_i = n^2$，则 $g \in J^{n^2} \subseteq \alpha$，证毕；否则假设不成立。由归纳假设，对于所有 a_i，我们有 $ga_i \in \alpha$，因此对于每个 $y \in J = \langle \{a_i\}_i \rangle$，都有 $gy \in \alpha$。然而，$g = \prod_i a_i^{r_i}$ 且 $\omega(\alpha) = n \leq \sum_i r_i$，所以 $gy \in \alpha$ 蕴含着：对于某个 $r_j \neq 0$，要么 $g \in \alpha$，要么 $g_j y \in \alpha$。若 $g \in \alpha$，则证毕；因此假设对于每个 $y \in J$，都存在满足 $g_j y \in \alpha$ 的 $r_j \neq 0$。

令 j_0 为满足 $r_{j_0} \neq 0$ 的极大元，并递归地定义序列 $\{j_i\}_{i=0}^{\infty}$：令 j_k 为满足 $r_{j_k} \neq 0$ 且 $g_{j_k} \sum_{i<k} a_{j_i} \in \alpha$ 的最大元。若对于某个 k 有 $j_k < j_{k+1}$，则由归纳假设可得 $g_{j_{k+1}} a_{j_k} \in \alpha$。因此

$$g_{j_{k+1}} \sum_{i<k} a_{j_i} = g_{j_{k+1}} \sum_{i<k+1} a_{j_i} - g_{j_{k+1}} a_{j_k} \in \alpha$$

因此 $g_{j_{k+1}} \sum_{i<k} a_{j_i} \in \alpha$，这与 j_k 最大的选择相矛盾。因此，对所有 i，都有 $j_{i+1} \leq j_i$。于是 $\{j_i\}_i$既是无限的，又关于 $j_i \in \{1, ..., k\}$非递增，因此对于某个 k，有 $j_{k+1} = j_k$。由于 $g_{j_k} \sum_{i<k} a_{j_i} \in \alpha$且 $g = g_{j_k} a_{j_k}$，我们知道 $g + \alpha = g_{j_k} a_{j_k} + g_{j_k} \sum_{i<k} a_{j_i} + \alpha$。这意味着：

$$g + \alpha = g_{j_k} a_{j_k} + g_{j_k} \sum_{i<k} a_{j_i} + \alpha = g_{j_k} \sum_{i<k+1} a_{j_i} + \alpha = g_{j_{k+1}} \sum_{i<k+1} a_{j_i} + \alpha = \alpha$$

这表明 $g \in \alpha$。因此 $J^n \subseteq \alpha$，从而 $(\sqrt{\alpha})^n \subseteq \alpha$。 ■

在给出一个证明（C2）蕴含（C1）的新证明之前，我们需要一些定义和一个引理。多项式 $f(x) = \sum_i a_i x^i \in A[x]$ 的内容 $c(f)$，是环 A 中由 f的系数生成的理想 $c(f) = \langle \{a_i\}_i \rangle$。给定 $A[x]$的一个理想 β，β 的内容 $c(\beta)$是由 $c(\beta) = \sum_{f \in \beta} c(f)$给出的理想，它是满足 $\beta \subseteq c(\beta)[x]$的 A 中的最小理想。特别地，当且仅当 $c(\beta) \subseteq \alpha$时，$\beta \subseteq \alpha[x]$。

根据这些定义，我们得到以下显然的引理，其证明留作读者练习。

(1.3) 引理。对于任意两个多项式 g、$h \in A[x]$，若 $\deg(g) < \ell$，则：

$$c(g) \cdot c(h) = c(g(x) \cdot h(x^\ell)) \quad and \quad c(g) + c(h) = c(g(x) + x^\ell h(x))$$

Donadze [Don16, 命题 2.7] 首先发表了（C2）蕴含（C1）的证明，不过 Laradji 也独立证明了同一结果 [Lar17]。值得注意的是，Laradji 提交初稿的时间恰好比 Donadze 早一天——但他们的证明大不相同。Laradji 的方法采用了以下更强的结果，我们将用另一种技巧证明它。

(1.4) 命题. [Lar17, 命题 2.10]. 我们总有 $\omega^*(\alpha) \leq \omega(\alpha[x])$.

证明. 假设 $\omega(\alpha[x]) = n$，并回顾一下：当且仅当 α 是有限生成理想的强 n-吸收理想时， $\omega^*(\alpha) = n$ 。设 $[\gamma_i]_{i=1}^{n+1}$ 是一个有限生成理想列表$\gamma_i = \langle\{a_{ij}\}_{j=0}^{n_i}\rangle$，其中 $\prod_i \gamma_i \subseteq \alpha$。我们将证明存在 t 使得 $\prod_{i\neq t} \gamma_i \subseteq \alpha$。

令 k 大于每个有限集 $\{a_{ij}\}_j$ 的大小，即 $k > \max_i(n_i+1)$。对于每个 i，令 $f_i = \sum_j a_{ij}x^{k^i\cdot j} \in A[x^{k^i}]$，并注意到 $\prod_i \gamma_i \subseteq \alpha$ $\prod_i f_i \in \alpha[x]$ $c\prod_i f_i \subseteq \alpha$ $\prod_i f_i \in \alpha[x]$ (f_i)。因此 $(\prod_i f_i) \subseteq \prod_i c(f_i)$。

我们知道当且仅当（），并且因此。由于 $\alpha[x]$ 是 n-吸收的，必定存在某个 t 使得 $\prod_{i\neq t} f_i \in \alpha[x]$。

根据 k 的选取，对于每个 i，我们知道 k 大于 $\{a_{ij}\}_j$ 的大小，因此 $\deg(f_i) < k\cdot k^i = k^{i+1}$。然而，对每个 $j > i$，都有 $f_j \in A[x^{k^{i+1}}]$，所以反复应用引理 (1.3) 可得 $c(\prod_{i\neq t} f_i) = \prod_{i\neq t} c(f_i)$。由于对所有 i， $c(f_i) = \gamma_i$，因此我们有 $\prod_{i\neq t} \gamma_i = c(\prod_{i\neq t} f_i) \subseteq \alpha$。■

在继续之前，我们先讨论一个非诺特环的例子，其中所有理想都是 2-吸收的。这个例子表明，非诺特环也可以满足引理（1.1）的陈述。

（1.5）例。本节给出的技术方法受到 [AB11，第 3.4]例以及 [Bad07，定理 3.4]中方法的启发。对于一个 R-模 M， M 的理想化是环 $R(+)M$，其定义为带有乘法运算的 R-模 $R\oplus M$： $(r,m)(s,n) = (rs, rn+sm)$。这一构造的起源尚不明确，不过最早的系统性研究似乎出现在 Nagata 的著作 [Nag62] 中。该书创造了“理想化原理”这一术语，指的是通过考察 $R(+)M$的理想来研究模 M 的方法。

设 F为一个域，设 V为 F上的一个向量空间，并考虑环 $A = F(+)V$。对于任意满足 $u \neq 0$的 $(u,m) \in A$，有 $(u,m)(u^{-1}, -u^{-2}m) = (1,0)$，因此 A 的非单位具有 $(0,m)$ 的形式；特别地， V 的子空间 W 与 A的理想 $0(+)W$ 之间存在自然的一一对应。这意味着，当且仅当 V是有限维时， A 才是诺特的；在这种情况下， A 也是阿廷的。取 V为无限维即可保证其非诺特性。

我们将证明， α 的每个理想都是 2-吸收的。假设 $\prod_i(r_i,m_i) \in \alpha$。若对某个 $i \neq j$ 有 $r_i = r_j = 0$，则 $(r_i,m_i)(r_j,m_j) = (0,m_i)(0,m_j) = (0,0) \in \alpha$，于是结论成立。现假设并非如此。由于非单位的形式为 $(0,m)$，且 $\prod_i(r_i,m_i) = (\prod_i r_i, \sum_j(\prod_{i\neq j} r_i)m_j) \in \alpha$，我们知道 $\prod_i r_i = 0$。因此，恰有一个元素满足 $r_k = 0$，这意味着对任意 $i \neq k$，(r_i,m_i) 都是单位。于是 $(r_k,m_k) \in \alpha$，所以 $\omega(\alpha) \leq 2$。因此， A 的每个理想都是 2-吸收的。由于域是其所有理想均为素理想的唯一环，这是我们能给出的最强的此类例子。

§2 理想的集合

在继续之前，我们先明确并回顾一些记号。对于环 A 的两个理想 α 和 β，冒号理想 $(\alpha:\beta)$ 是由 $(\alpha:\beta) = \{f \in A \mid f\beta \subseteq \alpha\}$ 定义的理想。换言之，$(\alpha:\beta)$ 是 A 中满足 $(\alpha:\beta)\cdot\beta \subseteq \alpha$ 的最大理想。我们总有 $(\alpha:\beta\gamma) = ((\alpha:\beta):\gamma)$，并且对于任意两个理想 $\alpha \subseteq \alpha'$ 和 $\beta \subseteq \beta'$，都有 $(\alpha:\beta') \subseteq (\alpha':\beta)$。此外，如果 S 是一个乘法封闭子集，那么 $S^{-1}(\alpha:\beta) \subseteq (S^{-1}\alpha : S^{-1}\beta)$，当 A 是诺特环或 β 是有限生成时，等号成立。稍微滥用一下记号，当 $f \in A$ 时，我们记 $(\alpha:f) = (\alpha:\langle f\rangle)$；当 W 是 A 的一个子集时，我们记 $(\alpha:W) = (\alpha:\langle W\rangle)$。

给定有限列表 $L = [L_1, ..., L_n]$ 和 $L' = [L'_1, ..., L'_k]$，我们将使用

$$L \cup L' = [L_1, ..., L_n, L'_1, ..., L'_k]$$

表示列表 L 与 L' 的串接。例如： $[3] \cup [2,3] = [3,2,3]$。

对于有限列表 $C=[C_1,...,C_n]$，我们将用 $|C|$ 表示 C 的大小，在本例中为$|C|=n$。我们用 $C_{i\neq j}$ 表示缺少 j^{th} 分量的 C 子列表。也就是说。

$$C_{i\neq j}=[C_1,...,C_{j-1},C_{j+1},...,C_n]$$

类似地，给定 $I=\{i_1,...,i_k\}\subseteq\{1,...,n\}$，我们将用 $C_{i\in I}$表示列表 $[C_{i_1},...,C_{i_k}]$，并用 $C_{i\notin I}$ 表示 $C_{i\in\{1,...,n\}\setminus I}$。

§2.1 极大与半极大集合族

回忆一下，每个极大集合族都是半极大集合族，并且集合族 N 是半极大集合族，当且仅当对于所有 j， $N_j=(\alpha:\prod_{i\neq j}N_i)$。因此，若 N 是 α的极大或半极大集合族，则对于所有 $N_j\in N$， $\alpha\subseteq N_j$。所以，对于任意子理想 $\beta\subseteq\alpha$， α/β的极大集合族与 α的极大集合族一一对应；半极大集合族也同样如此。

根据 $\omega^*(\alpha)$的定义， α 的任何半极大 $\omega^*(\alpha)$-集合族也必定是极大集合族。一般而言，这并不成立；有些半极大集合族并非极大集合族。例如，考虑环 $\mathbb{Z}$中理想 $\langle 8\rangle$ 的半极大 2-集合 $[\langle 2\rangle,\langle 4\rangle]$。该集合族并非极大，因为 $[\langle 2\rangle,\langle 4\rangle]$ 包含于 $\langle 8\rangle$的（唯一）极大集合族 $[\langle 2\rangle,\langle 2\rangle,\langle 2\rangle]$ 之中。此外， $[\alpha]$ 总是 α的半极大 1-集合族，但只有当 α 是素理想时，它才是极大集合族。

(2.1) 例子。设 α 是 Dedekind整环 $\mathcal{O}$的一个理想，且 $\alpha=\prod_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$ 是 α 分解为素理想所得的分解，必要时重复出现相同的素理想。除重新排序外， $[\mathfrak{p}_i]_i$ 是 α的唯一极大集合，而半极大集合的形式为 $\left[\prod_{j\in I_i}\mathfrak{p}_j\right]_i$，其中 $\bigcup_i I_i=\{1,...,n\}$ 是某种划分。

现在，设 $\mathfrak{m}=0(+)V$ 是环 $A=F(+)V$ 的极大理想，如例 **(1.5)** 中所述。由于 $\mathfrak{m}$ 是素理想，我们知道极大集合 $[\mathfrak{m}]$ 是 $\mathfrak{m}$ 的唯一半极大集合。我们有 $\mathfrak{m}^2=\langle 0\rangle$，因此 $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$ 将是任意理想 $\alpha\neq\mathfrak{m}$ 的唯一极大集合。此外， α 的唯一另一个半极大集合将是平凡集合族 $[\alpha]$。在深入讨论不那么平凡的例子之前，我们还需要更多的工具。

极大集合和半极大集合具有许多结构，这些结构将在后文证明很有用。在讨论这一点之前，我们先证明一个关于这类集合存在性的结果。

(2.2) 引理。设 α 是环 A的一个理想。 α 的每个 n-集合族都包含于至少一个半极大 n-集合族之中。如果 A 是诺特的，或者如果 $\omega^*(\alpha)<\infty$，那么 α 的每个集合族都包含于某个极大集合族之中 α。

证明。根据佐恩引理，每个 n-集合族都必定包含于某个半极大 n-集合族之中。

由引理（**1.1**）可知，对于诺特环的任意理想 α， $\omega^*(\alpha)<\infty$。因此，我们只需证明：若 $\omega^*(\alpha)<\infty$，则每个集合族都包含于某个极大集合中。设 C是 α的一个集合族。必定存在某个 $k\leq\omega^*(\alpha)$，使得 C 包含于一个大小为 k 的集合族C' 中，但 C 不包含于任何大小大于 k的集合族中。由证明前面的部分可知， C' 必包含于一个半极大 k-集合族 N 中。由于“包含于”是传递关系，且 C 不可能包含于大小大于 k的集合族中，因此 N 必定是一个极大集合。由于 $C\leq N$，我们可以得出结论： N 是一个包含 C的极大集合。■

若 $\omega^*(\alpha) = \infty$，则极大集合可能根本不存在。事实上，考虑幺半群环 $\mathbb{Z}[x^{\mathbb{R}^{\geq 0}}] \cong \mathbb{Z}[(\mathbb{R}^{\geq 0}, +)]$的理想$\alpha = \langle x^{\pi} \rangle$。注意，对于任意 n， $\prod_{i=1}^{n} x^{\pi/n} \subseteq \alpha$都定义了 α 的一个集合族，因此 $\omega^*(\alpha) = \infty$。 α 的半极大集合族具有如下形式： $N = [\langle x^{a_i} \rangle]_i$，其中 $\sum_i a_i = \pi$。这些集合族永远不会是极大集合，因为对于任意 $N_j = \langle x^{a_j} \rangle$，$N$总是包含于集合族 $N_{i \neq j} \cup [\langle x^{a_j/2} \rangle, \langle x^{a_j/2} \rangle]$中。由于所有极大集合都是半极大的，我们知道 α 不可能有任何极大集合。

为准备下一个引理，我们来回顾一些关于伴随素理想的事实。对于诺特环 A 的理想 α，关联素理想集合 ass(α) 是满足 $\mathfrak{p} = (\alpha : f)$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 所构成的（有限）集合，其中 $f \in A$。众所周知，对于任意初等分解 $\alpha = \bigcap_i Q_i$，我们有 ass(α) = $\{\sqrt{Q_i}\}_i$。

我们来证明，当 A 是诺特环时， $\mathfrak{p}$ 是 α 的关联素理想，当且仅当 $\mathfrak{p} = (\alpha : (\alpha : \mathfrak{p}))$。必要性方向显然成立。若 $\mathfrak{p} = (\alpha : (\alpha : \mathfrak{p}))$，那么由于 A 是诺特环，我们知道对于某个有限集 $\{f_i\}_i$，有 $\langle \{f_i\}_i \rangle = (\alpha : \mathfrak{p})$。我们有 $\mathfrak{p} = (\alpha : (\alpha : \mathfrak{p})) = (\alpha : \langle \{f_i\}_i \rangle) = \bigcap_i (\alpha : f_i)$，并且由于 $\{f_i\}_i$ 是有限集，我们知道对于某个 f_i，有 $\mathfrak{p} = (\alpha : f_i)$。通过考虑满足 $\mathfrak{p} = (\alpha : (\alpha : \mathfrak{p}))$ 的素理想，可以将许多联系集合与关联素理想的结果推广到非诺特情形，尽管我们在这里并不需要这种一般性。

下面的引理表明，半极大集合 α 中任意元素的任何关联素理想，也必定是 α 的关联素理想。在计算具体例子时，这一事实将很有用（参见 (2.5) 前的讨论）。

(2.3) 引理。设 α 是诺特环的一个理想， N 是 α 的一个半极大集合。那么 $\bigcup_i \text{ass}(N_i) \subseteq \text{ass}(\alpha)$，其中 ass($\alpha$) 是 α 的关联素理想集合。

证明。由于对于半极大集合 N 中的任意元素 N_j，都有 $N_j = (\alpha : \prod_{i \neq j} N_i)$，因此只需证明，对于任意理想 $\gamma \not\subseteq \alpha$，ass($\alpha : \gamma$) $\subseteq$ ass(α)。根据本引理前的讨论， $\mathfrak{p}$ 是 $(\alpha : \gamma)$ 的关联素理想，当且仅当 $\mathfrak{p} = ((\alpha : \gamma) : ((\alpha : \gamma) : \mathfrak{p}))$。假设 $\mathfrak{p}$ 是 $(\alpha : \gamma)$ 的关联素理想。由于对于任意理想 β_i，都有 $((\beta_1 : \beta_2) : \beta_3) = (\beta_1 : \beta_2\beta_3)$，因此我们得到

$$\mathfrak{p} = ((\alpha : \gamma) : ((\alpha : \gamma) : \mathfrak{p})) = (\alpha : \gamma(\alpha : \gamma\mathfrak{p}))$$

因此 $\mathfrak{p} = (\alpha : \gamma(\alpha : \gamma\mathfrak{p}))$。显然， $\gamma(\alpha : \gamma\mathfrak{p}) \subseteq (\alpha : \mathfrak{p})$，于是

$$(\alpha : (\alpha : \mathfrak{p})) \subseteq (\alpha : \gamma(\alpha : \gamma\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$$

这意味着 $(\alpha : (\alpha : \mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$，但显然 $\mathfrak{p} \subseteq (\alpha : (\alpha : \mathfrak{p}))$，因此 $\mathfrak{p} = (\alpha : (\alpha : \mathfrak{p}))$。所以，$(\alpha : \gamma)$ 的任意关联素理想也都是 α 的关联素理想。■

现在让我们聚焦于极大集合族。正如我们将在 (2.5) 中看到的， $\mathbb{Q}[x, y, z]$ 的理想 $\langle x, y, z \rangle^2 \cap \langle x^2, y \rangle$ 有极大集合 $[\langle x^2, y \rangle, \langle x, y, z \rangle]$，其中包含非素元素 $\langle x^2, y \rangle$。因此，极大集合族中的元素并非全都是素理想。尽管如此，我们将证明一个稍弱的结论：极大集合族的每个极大元都是素理想。

(2.4) 引理。设 α 是某个环 A的理想。

(i) 极大集合的极大元都是素理想。

(ii) 如果 M_k 是极大集合 M 的元素，那么对于 M_k 的任意非平凡集合 C，必然存在 M 的极大元 M_m，使得对于所有 j 都有 $\prod_{i \neq j} C_i \subseteq M_m$，且 $\prod_i C_i \prod_{i \neq k,\ m} M_i \subseteq \alpha$。

(iii) 假设 A 是诺特的，令 M 为 α 的极大集合，并令 $\mathfrak{p}$ 为有限集 $\bigcup_i \mathrm{ass}(M_i)$ 中的极大元。则 $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(M_i)$ 当且仅当 $\mathfrak{p} = M_i$。

证明。显然，由 (ii) 可得 (i)，因此我们先证明 (ii)。假设 $M = [M_1, ..., M_n]$是 α的极大集合，并令 M_k 是 M的一个元素。注意到， M_k 是素理想，当且仅当 $[M_k]$ 是 M_k的唯一极大集合。假设 $C = [C_1, ..., C_\ell]$ 是 M_k的一个集合，且不失一般性，我们可以令 C 为半极大。这意味着，对于任意 $C_i \in C$，都有$M_k \subseteq C_i$，因此

$$M \leq M_{i \neq k} \cup C$$

由 M的极大性可知， $M_{i\neq k} \cup C$ 不能是 α的集合。因此，要么对于某个 m，有 $\prod_{i\neq m} C_i \prod_{i\neq k} M_i \subseteq \alpha$；要么对于某个 $j \neq k$，有 $\prod_i C_i \prod_{i\neq k,\ j} M_i \subseteq \alpha$。若 $\prod_{i\neq m} C_i \prod_{i\neq k} M_i \subseteq \alpha$，则由于 M是极大集合，它必定是半极大的，因此我们有 $\prod_{i\neq m} C_i \subseteq (\alpha : \prod_{i\neq k} M_i) = M_k$。这与 C是 M_k的集合相矛盾。因此，对于某个 $j \neq k$，有 $\prod_i C_i \prod_{i\neq k,\ j} M_i \subseteq \alpha$。

首先，我们将证明可以选取 M_j，使得 M_j 是 M 的极大元。若$M_j \subseteq M_k$，那么由于 $M_k \subseteq C_1$，我们会得到 $\prod_{i\neq 1} C_i \prod_{i\neq k,\ j} M_i \subseteq \prod_i C_i \prod_{i\neq k,\ j} M_i \subseteq \alpha$，这与 $\prod_{i\neq m} C_i \prod_{i\neq k} M_i \not\subseteq \alpha$ 对所有 m 都成立矛盾。现在，若对某个 $j' \neq k$ 有 $M_j \subseteq M_{j'}$，则 $\prod_i C_i \prod_{i\neq k,\ j'} M_i \subseteq \prod_i C_i \prod_{i\neq k,\ j} M_i \subseteq \alpha$。因此，我们可以选取 j，使得 M_j 是 M 的极大元。对于每个 m，我们都有 $M_k \subseteq C_m$，于是

$$\prod_{i\neq m} C_i \cdot \prod_{i\neq j} M_i = \prod_{i\neq m} C_i \cdot M_k \cdot \prod_{i\neq j,k} M_i \subseteq \prod_{i\neq m} C_i \cdot C_m \cdot \prod_{i\neq j,k} M_i \subseteq \alpha$$

因此，对所有 m，都有 $\prod_{i\neq m} C_i \subseteq (\alpha : \prod_{i\neq j} M_i)$。由于 M 是极大的，我们知道 $M_j = (\alpha : \prod_{i\neq j} M_i)$，这意味着对所有 m 都有 $\prod_{i\neq m} C_i \subseteq M_j$。至此，(ii) 的证明完成。

最后，我们将证明 (iii)。设 $M_k \in M$ 满足：对于某个 $\bigcup_i \mathrm{ass}(M_i)$ 中的极大元 $\mathfrak{p}$，有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(M_k)$。为导出矛盾，假设 $M_k \neq \mathfrak{p}$。于是 $(M_k : \mathfrak{p}) \neq M_k$，因此 $[\mathfrak{p}, (M_k : \mathfrak{p})]$ 必须是 M_k 的一个 2-集合。由 (ii)，存在某个 m，使得 $\mathfrak{p}$ 和 $(M_k : \mathfrak{p})$ 都包含在 M_m 中。然而， $\mathfrak{p}$ 是 $\bigcup_i \mathrm{ass}(M_i)$ 的极大元，并且显然对所有 $\mathfrak{q} \in \mathrm{ass}(M_m)$，都有 $M_m \subseteq \mathfrak{q}$。由于 $\mathfrak{p} \subseteq M_m$，且由 $\mathfrak{p}$的极大性可知 $\mathrm{ass}(M_m) = \{\mathfrak{p}\}$，因此 $M_m = \mathfrak{p}$。但我们知道 $\mathfrak{p}(M_k : \mathfrak{p})\prod_{i\neq k,m} M_i \subseteq \alpha$，从而 $M_m(M_k : \mathfrak{p})\prod_{i\neq k,\ m} M_i \subseteq \alpha$。这意味着 $(M_k : \mathfrak{p}) \subseteq (\alpha : \prod_{i\neq k} M_i)$。由于 M 是极大的，我们知道 $(\alpha : \prod_{i\neq k} M_i) = M_k$，因此 $(M_k : \mathfrak{p}) \subseteq M_k$。这意味着 $M_k = (M_k : \mathfrak{p})$，因此 $\mathfrak{p} \notin \mathrm{ass}(M_k)$——矛盾。因此 $M_k = \mathfrak{p}$，证毕。■

现在我们将简要转而讨论如何构造例子。考虑一个诺特环 A，并设 α 是 A 的一个理想，其初等分解为 $\alpha = \bigcap_{i=1}^k Q_i$。当 $\mathrm{ass}(\alpha)$ 的大小和 $\omega(Q_i)$ 的取值都很小时，我们便可以利用引理 (2.4) 和 (2.3) 对 α 的极大集合族进行分类。事实上，α 的每个极大集合族 M 都必须包含一个满足 $M_j \in \mathrm{ass}(\alpha)$ 的元素 M_j，因此 $M_{i\neq j}$ 将是 $(\alpha : M_j)$ 的半极大集合。所以，如果我们能对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(\alpha)$ 分类出 $(\alpha : \mathfrak{p})$ 的所有半极大集合，就能找出 α的每个极大集合。例如：

（2.5）例子。考虑环 $\mathbb{Q}[x, y, z]$ 和理想 $\alpha = \langle x, y, z\rangle^2 \cap \langle x^2, y\rangle$。我们将证明，经过重新排序后，$\alpha$ 有两个极大集合： $[\langle x^2, y\rangle, \langle x, y, z\rangle]$ 和 $[\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle]$。根据引理（2.4），要找出 α 的所有极大集合，只需对 α 的每个关联素理想 $\mathfrak{p}$，找出 $(\alpha : \mathfrak{p})$ 的所有半极大集合。唯一的

α 的两个关联素理想是 $\langle x,y\rangle$ 和 $\langle x,y,z\rangle$。显然，$(\alpha:\langle x,y,z\rangle)=\langle x^2,y\rangle$ 经过重新排序后有两个半极大集合：$[\langle x^2,y\rangle]$ 和 $[\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle]$。列表 $[\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle,\langle x,y,z\rangle]$ 不是集合，因为 $\langle x,y\rangle^2\subseteq\alpha$，因此我们只需考虑 $[\langle x^2,y\rangle,\langle x,y,z\rangle]$；显然它是半极大的，因为 $(\alpha:\langle x^2,y\rangle)=\langle x,y,z\rangle$，且 $(\alpha:\langle x,y,z\rangle)=\langle x^2,y\rangle$。对于元素 $\langle x,y\rangle\in$，关联素理想 ass(α)，注意到 $(\alpha:\langle x,y\rangle)=\langle x,y\rangle$ 是一个素理想，因此只有一个半极大集合 $[\langle x,y\rangle]$，这给出了 α 的一个半极大集合$[\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle]$。因此，$\alpha$ 中包含素理想的半极大集合只有 $[\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle]$ 和 $[\langle x^2,y\rangle,\langle x,y,z\rangle]$ 的重新排序形式。二者互不包含，所以经过重新排序后，α 有两个极大集合：$[\langle x^2,y\rangle,\langle x,y,z\rangle]$ 和 $[\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle]$。

现在令 $\beta=\langle x,y,z\rangle^2\cap\langle x^2,y\rangle\cap\langle a,x^3,y,z\rangle$ 为多项式环 $\mathbb{Q}[a,x,y,z]$ 的一个理想。按照相同的过程，我们得到，β 中包含一个素理想的半极大集合，只有两种：集合 $[\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle,\langle a,x,y,z\rangle]$ 和 $[\langle x^2,y\rangle,\langle x,y,z\rangle]$ 的重新排序。由于 $[\langle x^2,y\rangle,\langle x,y,z\rangle]$ 位于集合 $[\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle,\langle a,x,y,z\rangle]$ 之下，我们知道 β 的极大集合只有 $[\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle,\langle a,x,y,z\rangle]$ 的重新排序。

现在我们将讨论半极大集合的局部化。给定 A 的一个乘法封闭子集 S，以及 A 的理想 α 的一个集合 C，定义 C 关于 S 的局部化为列表 $S^{-1}C=[S^{-1}C_i]_i$。请注意，$S^{-1}C$ 通常不是一个集合。例如，$\mathbb{Z}$ 的理想 $\langle 24\rangle$ 的半极大集合 $[\langle 2\rangle,\langle 4\rangle,\langle 3\rangle]$，其局部化 $(\mathbb{Z}\setminus\langle 2\rangle)^{-1}[\langle 2\rangle,\langle 4\rangle,\langle 3\rangle]=[\langle 2\rangle_{\langle 2\rangle},\langle 4\rangle_{\langle 2\rangle},\langle 1\rangle_{\langle 2\rangle}]$ 包含单位理想。尽管如此，非单位元 $[\langle 2\rangle_{\langle 2\rangle},\langle 4\rangle_{\langle 2\rangle}]$ 构成 $\langle 24\rangle\mathbb{Z}_{\langle 2\rangle}=\langle 8\rangle_{\langle 2\rangle}$ 的一个半极大集合。对于诺特环的任何半极大集合，这一结论都成立，正如下面的引理所示。

(2.6) 引理。设 α 是诺特环 A 的一个理想，且 S 是 A 的一个与 α 不相交的乘法封闭子集。则有：

(i) 如果 M 是满足 $S\cap\bigcup_i M_i=\emptyset$ 的 α 的一个极大集合，则 $S^{-1}M$ 是 $S^{-1}\alpha$ 的一个极大集合。(ii) 对于 α 的任意半极大集合 N，$S^{-1}N$ 中包含所有非单位元的子列表将是理想 $S^{-1}\alpha$ 的一个半极大集合。反之，对于 $S^{-1}\alpha$ 的每个半极大集合 N，都存在 α 的一个半极大集合 N'，使得 N 等于 $S^{-1}N'$ 中包含 $S^{-1}N'$ 的非单位元的子列表。(iii) 当 $n=\omega^*(\alpha)<\infty$ 时，$S^{-1}\alpha$ 的极大 n-集合将与满足 $S\cap\bigcup_i M_i=\emptyset$ 的 α 的极大 n-集合 M 一一对应。

证明。我们来证明 (i)。显然，$S^{-1}M$ 将是 S^{-1}的一个集合。设 M' 是位于 $S^{-1}M$之上的 $S^{-1}\alpha$ 的一个极大集合，并设 $\pi:\ A\to S^{-1}A$ 是典范的。我们首先证明$\prod_i\pi^{-1}(M_i')\subseteq\alpha$。事实上，若$\prod_i\pi^{-1}(M_i')\not\subseteq\alpha$，则由 A的诺特性可知$S\cap(\alpha:\prod_i\pi^{-1}(M_i'))\neq\emptyset$。容易验证，$[\pi^{-1}(M_i')]_i\cup[(\alpha:\prod_i\pi^{-1}(M_i'))]$构成 α的一个集合，且位于 M之上，因此根据极大性，$M=[\pi^{-1}(M_i')]_i\cup[(\alpha:\prod_i\pi^{-1}(M_i'))]$。这与 $\emptyset=(\alpha:\prod_i\pi^{-1}(M_i'))\cap S\subseteq\bigcup_i M_i\cap S=\emptyset$矛盾。因此，$\prod_i\pi^{-1}(M_i')\subseteq\alpha$，于是 $[\pi^{-1}(M_i')]_i$构成一个位于 M之上的集合。由 M的极大性可知 $M=[\pi^{-1}(M_i')]_i$，从而得到 $M'=S^{-1}M$。

现在我们来证明 (ii)。设 N 是 α的半极大集合，并设 N' 是 N 的子列表，其中包含满足 $S\cap N_i=\emptyset$的元素 N_i。由于 A 是诺特的，对于任意$N_{j'}=N_j'\in N'$，我们有

$$\langle 1\rangle\neq S^{-1}N_j=S^{-1}(\alpha:\prod_{i\neq j'}N_i)=(S^{-1}\alpha:S^{-1}\prod_{i\neq j'}N_i)=(S^{-1}\alpha:\prod_{i\neq j}S^{-1}N_i')$$

因此 $\prod_{i\neq j} S^{-1}N_i' \not\subseteq S^{-1}\alpha$和 $S^{-1}N_j' = (S^{-1}\alpha\colon \prod_{i\neq j} S^{-1}N_i')$。由此可知，$S^{-1}N'$ 必定构成 $S^{-1}\alpha$的半极大集合；特别地， $S^{-1}N$ 的非单位元构成 $S^{-1}\alpha$的半极大集合。

设 N' 是 $S^{-1}\alpha$ 的半极大集合，并令 $N_i = \pi^{-1}(N_i')$。注意到 $S^{-1}N_i = N_i'$ 且 $(\alpha\colon \prod_{i\neq j} N_i) \subseteq \pi^{-1}(S^{-1}\alpha\colon \prod_{i\neq j} N_i') = \pi^{-1}(N_i') = N_i$。因此，若 $\prod_i N_i \subseteq \alpha$，则 $N = [N_i]_i$ 是 α 的集合；又由于 $(\alpha\colon \prod_{i\neq j} N_i) \subseteq N_i$，我们知道 N 将是一个半极大集合。因此，我们可以假设 $\prod_i N_i \not\subseteq \alpha$。

注意到 $(\alpha\colon \prod_i N_i) \neq \langle 1\rangle$，但 $S\cap(\alpha\colon \prod_i N_i) \neq \emptyset$。因此， $S^{-1}((\alpha\colon \prod_i N_i)\cdot\prod_{i\neq j} N_i) = \prod_{i\neq j} N_i' \not\subseteq S^{-1}\alpha$，所以 $[(\alpha\colon \prod_i N_i)] \cup [N_i]_i$ 是 α 的集合。由于 N' 是半极大的，对于所有 j， $N_j' = (S^{-1}\alpha\colon \prod_{i\neq j} N_i')$，因此

$$\pi^{-1}(S^{-1}\alpha : S^{-1}(\alpha : \prod_i N_i)\prod_{i\neq j} N_i) = \pi^{-1}(S^{-1}\alpha : \prod_{i\neq j} N_i') = \pi^{-1}(N_j') = N_j$$

这意味着 $(\alpha : (\alpha\colon \prod_i N_i)\prod_{i\neq j} N_i) \subseteq N_j$，因此对所有 j，都有 $N_j = (\alpha : (\alpha\colon \prod_i N_i)\prod_{i\neq j} N_i)$。现在可以得出结论： $[(\alpha : \prod_i N_i)] \cup [N_i]_i$ 是 α 的半极大集合族，证毕。

(iii) 由 (ii) 推出，因此证明完毕。 ■

遗憾的是，如果 $S \cap \bigcup_i M_i \neq \emptyset$，那么 $S^{-1}M$ 的非单位元未必构成 $S^{-1}\alpha$ 的极大集合族。此外，并非 $S^{-1}\alpha$ 的每个极大集合族都能等于某个极大集合族 M 的非单位元集合，其中 α。以下例子说明这一点。

(2.7) 例子。考虑 $\mathbb{Q}[x,y,z]$ 的理想 $\alpha = \langle x,y,z\rangle^2 \cap \langle x^2,y\rangle$。由 (2.5) 可知， α 的极大集合族是 $[\langle x^2,y\rangle, \langle x,y,z\rangle]$ 或 $[\langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle]$ 的重新排序。用素理想 $\langle x,y\rangle$ 局部化 $[\langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle]$，得到极大集合族 $[\langle x,y\rangle_{\langle x,y\rangle}, \langle x,y\rangle_{\langle x,\ y\rangle}]$。我们知道这种局部化必定是极大集合族，因为 $[\langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle]$ 的每个元素都与 $S := A\setminus\langle x,y\rangle$ 不相交。相比之下， $[\langle x^2,y\rangle, \langle x,y,z\rangle]$ 的局部化是列表 $[\langle x^2,y\rangle_{\langle x,y\rangle}, \langle 1\rangle]$，显然 $[\langle x^2,y\rangle_{\langle x,y\rangle}]$ 是一个位于 $\alpha_{\langle x}$ 的（唯一）极大集合族 $[\langle x,y\rangle_{\langle x,y\rangle}, \langle x,y\rangle_{\langle x,y\rangle}]$ 之下的半极大集合族，$_{\ y\rangle} = \langle x^2, y\rangle_{\langle x,\ y\rangle}$。因此，一般而言，极大集合族的局部化中的非单位元未必构成极大集合族。

现在考虑更大的多项式环 $\mathbb{Q}[a,x,y,z]$，并令 $\beta = \langle x,y,z\rangle^2 \cap \langle x^2,y\rangle \cap \langle a,x^3,y,z\rangle$。将 β 按素理想 $\langle x,y,z\rangle$ 局部化，将得到极大集合 $[\langle x^2,y\rangle_{\langle x,y,z\rangle}, \langle x,y,z\rangle_{\langle x,y,z\rangle}]$。根据我们在 (2.5) 中的讨论，我们知道 β 的唯一极大集合族是 $[\langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle, \langle x,y,z,a\rangle]$ 的重新排序，因此极大集合$[\langle x^2,y\rangle_{\langle x,y,z\rangle}, \langle x,y,z\rangle_{\langle x,y,z\rangle}]$ 不可能等于 $(A\setminus\langle x,y,z\rangle)^{-1}M$ 的非单位元，其中 M 是 β 的任意极大集合族。因此，并非 $S^{-1}\beta$ 的每个极大集合都能等于 $S^{-1}M$ 的非单位元，其中 M 是 β 的某个极大集合族。

如果 $\omega^*(\alpha) = n$ 那么， α 的每个半极大 n-集合族也必定是极大集合。因此，作为引理 (2.6) 的一个推论，我们有：

(2.8) 引理。设 α 是诺特环 A 的一个理想，且 $\omega^*(\alpha) = n$。那么，至少存在一个极大 n-集合族 M，使得 $\bigcup_i M_i$ 在 α的所有极大n-集合族中是极小的。

此外，若设 $S := A\setminus\bigcup_i M_i$，则 $\omega^*(S^{-1}\alpha) = n$，且 $S^{-1}\alpha$ 的每个极大 n-集合族都包含 $S^{-1}A$ 的每个极大理想的一个副本。

证明。由于 A 是诺特的，我们知道关联素理想(α) 是一个有限集。根据引理 (2.3) 和 (2.4)，我们知道， α 的任意极大集合族的极大元都必须是有限集关联素理想(α) 的子集。因此，必定存在某个极大 n-集合族 M，使得 $\bigcup_i M_i$ 在极大 n-集合族中是极小的。

M 的极大元都是素理想，因此 $S := A \setminus \bigcup_i M_i$ 必须是 A 的乘法封闭子集。若 $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_k$ 是 M 的极大元，则 $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i$，因此根据素理想回避引理， $S^{-1}A$ 的极大理想将具有 $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ 的形式。

由于所有半极大 n-集合族都是极大 n-集合族，我们可以利用引理（2.6）得出， $S^{-1}\alpha$ 的极大 n- 集合族 $S^{-1}M'$ 对应于 α 的极大 n- 集合族 M'，其极大元都包含在 $\bigcup_i M_i = \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i$ 中。根据 M 的选取，对于 $S^{-1}A$ 的任意极大 n-集合族 $S^{-1}M'$，都有 $\bigcup_i S^{-1}M'_i = \bigcup_i S^{-1}M_i = \bigcup_{i=1}^{k} S^{-1}\mathfrak{p}_i$。根据引理（2.4）， $S^{-1}M'$ 的极大元必定是素理想。利用素理想回避引理，我们知道 $S^{-1}M'$ 必须至少包含 $S^{-1}M$ 的每个极大元的一个副本，而这些极大元恰好是 $S^{-1}A$ 的极大理想。证明完毕。■

继续讨论下一个主题之前，我们先简要谈谈一个有趣的一一对应关系——尽管这里不会用到它。设 $T(A)$ 为全分式环，也就是用正规元集合 $S = \{f \in A \mid \langle 0\rangle = (\langle 0\rangle : f)\}$ 对 A 进行局部化所得的环。根据 S的定义，我们知道 $S^{-1}(\langle 0\rangle : \beta) = (S^{-1}\langle 0\rangle : S^{-1}\beta)$。此外，如果 $\pi : A \to T(A) = S^{-1}A$ 是典范的，那么对于 $T(A)$ 的任意理想 β'，都有 $\pi^{-1}((S^{-1}\langle 0\rangle : \beta')) = (\langle 0\rangle : \pi^{-1}(\beta'))$。由此可知， A 中零理想的半极大（分别为极大）集合族，与 $T(A)$ 中零理想的半极大（分别为极大）集合族自然对应。特别地，任意理想 α 的极大集合族，与全分式环 $T(A/\alpha)$ 中零理想的极大集合族一一对应，半极大集合族也同样如此。

§2.2 波浪号理想 C_I

本小节中，我们介绍集合 C的波浪号理想 C_I。研究这些理想有助于我们了解集合 C 的结构，而波浪号理想则为推广关于半极大集合的一些结果提供了便利的框架。

设 α 是某个环 A的一个理想，并设 $C = [C_1, ..., C_k]$ 是 α的一个集合族。给定一个子集 $I \subseteq \{1, ..., k\}$，我们将 C的波浪号理想 C_I定义为：

$$\widetilde{C_I} := (\alpha : \prod_{i \notin I} C_i) = \{x \in A \mid x \prod_{i \notin I} C_i \subseteq \alpha\}$$

~ ~ ~我们有 $C_\emptyset = \langle 1\rangle$，并且对于 $I \neq \emptyset$，我们知道 C_I 是满足 $C_{i\notin I} \cup [C_I]$ 为~ ~ ~ ~ α的一个集合族的最大理想。为简便起见，我们记作 $C_j = C_{\{j\}}$ 和$C_{j_1, \ ..., \ j_m} = C_{\{j_1,...,j_m\}}$。

~ ~显然， $C_j \subseteq C_j$，此外，列表 $C_{i\in I}$始终是 C_I的一个集合族。我们知道， N是~一个半极大集合族，当且仅当对所有 j，都有 $N_j = N_j := (\alpha : \prod_{i\neq j} N_i)$。特别地，若~ $|N| = \omega^*(\alpha)$，则 N 是一个极大集合，当且仅当对所有 N_j，都有 $N_j = N_j$。

对于 α 的子理想 β，令 $C/\beta = [C_1/\beta, ..., C_k/\beta]$ 为由其诱导的 α/β 集合族。我们总有：

$$\widetilde{C_I}/\beta = \widetilde{(C/\beta)_I}$$

对于乘法封闭集合 S，列表 $S^{-1}C := [S^{-1}C_i]_i$ 不一定是 $S^{-1}\alpha$ 的集合族。为解决这一问题，下面对引理（2.6）的推广表明，只要 α 是诺特环的一个理想，就可以用波浪号理想来描述 $S^{-1}C$ 的子列表 $S^{-1}C_{i\notin I} := [S^{-1}C_i]_{i\notin I}$，使其成为 $S^{-1}\alpha$ 的集合族。

(2.9) 命题。对于诺特环 A 的理想 α，以及与 α 不相交的乘法封闭子集 S，由 $S^{-1}\alpha$ 的集合族构成的子列表 $S^{-1}C_{i\notin I} \subseteq S^{-1}C$ 与满足 $S \cap C_I \neq \emptyset$ 的极大子集 $I \subseteq \{1,...,k\}$ 一一对应。

证明。首先，让我们将波浪号理想构造推广到包含理想 $\sim L_i$ 且满足 $\prod_i L_i \subseteq \alpha$ 的有限列表 L。只需令 $L_I = (\alpha : \prod_{i\notin I} L_i)$ 即可完成这一点。根据 L_I 的构造，L 的子列表 $L_{i\notin I} := [L_i]_{i\notin I}$（其由 α 的集合族构成）自然对应于满足 $L_I = \langle 1\rangle$ 的极大子集 $I \subseteq \{1,...,k\}$。注意，列表 $S^{-1}C := [S^{-1}C_i]_i$ 具有性质 $\widetilde{\prod_i S^{-1}C_i} \subseteq S^{-1}\alpha$。由于 A 是诺特的，我们有 $S^{-1}\widetilde{C}_I = (S^{-1}\alpha : \prod_{i\notin I} S^{-1}C_i) = \widetilde{(S^{-1}C)}_I$，因此 $\widetilde{(S^{-1}C)}_I = \langle 1\rangle$ 当且仅当 $\sim S \cap C_I \neq \emptyset$。命题得证。■

对于诺特环的理想 α，下面对引理（2.3）的推广表明，对于任意集合族 C 和指标集 I，ass(C_I) $\subseteq$ ass(α)。

（2.10）引理。设 α 是诺特环 A 的理想。对于任意由 α 构成的集合族 C，我们有 $\bigcup_I$ ass(C_I) $\subseteq$ ass(α)。

证明。这由引理（2.3）的证明得到。■

考虑到上述引理，下面的结果是引理（2.4）中 (iii) 针对长度尽可能大的集合族的一个弱推广。

（2.11）引理。设 α 是诺特环 A 的强 n-吸收理想，并设 C 是由 n 构成的 α 集合族。如果 ass(C_j) 包含 ass(α) 的一个极大元 $\mathfrak{p}$，则 $C_j = \mathfrak{p}$。

证明。注意到 $[C_j] \cup C_{i\neq j}$ 是由 α 构成的 n 集合族。设 M 是位于 $[C_j] \cup C_{i\neq j}$ 之上的 $\sim\alpha$ 的一个极大集合族。由于 α 是强 n-吸收的，M 必须是一个 n 集合族。不妨重新排列 M，使得对于所有 $i \neq j$，$C_j \subseteq M_j$ 且 $C_i \subseteq M_i$。因此 $\prod_{i\neq j} C_i \subseteq \prod_{i\neq j} M_i$，从而 $M_j = (\alpha : \prod_{i\neq j} M_i) \subseteq (\alpha : \prod_{i\neq j} C_i) = C_j$。然而，$M$ 是极大的，因而是半极大的，所以 $M_j = (\alpha : \prod_{i\neq j} M_i) = M_j$，从而 $M_j = C_j$。由于 $\mathfrak{p}$ 是 ass(α) 的一个极大元且 $\mathfrak{p} \in$ ass(M_j)，根据引理（2.3），我们知道 $\mathfrak{p}$ 必须是 $\bigcup_i$ass(M_i) 的一个极大元。根据引理（2.4）的 (iii)，我们有 $M_j = \mathfrak{p}$，因此 $\sim C_j = \mathfrak{p}$。■

§2.3 阿廷环中的极大集合

如果 α 是环 A 的理想，那么 α 的极大集合将与环 A/α 中零理想的极大集合一一典范对应。特别地，如果 A/α 是阿廷环，那么我们可以利用阿廷环中零理想的极大集合的性质来描述 α 的极大集合。正如我们将在引理（2.13）中看到的，这样的理想 α 在重新排序意义下有唯一的极大集合。

众所周知，任意阿廷环 A 都同构于其局部化 $A \cong \prod_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$ 的（有限）乘积。因此，以下内容在证明引理（2.13）时会很有用。

(2.12) 引理。设 $A = \prod_{i=1}^{r} A_i$ 是一个积环。那么，

(i) M 是 $\langle 0 \rangle_A$ 的半极大集合，当且仅当对每个 k，都存在某个半极大集合 $M^{(k)} = [M_j^{(k)}]_j$ 属于 $\langle 0 \rangle_{A_k}$，使得（重新排序后）我们有

$$M = \left[\prod_{i<k} A_i \times M_j^{(k)} \times \prod_{i>k} A_i \right]_{k,j} = \bigcup_k \left[\prod_{i<k} A_i \times M_j^{(k)} \times \prod_{i>k} A_i \right]_j$$

此外，M 是 $\langle 0 \rangle_A$ 的极大集合，当且仅当每个 $M^{(k)}$ 都是 $\langle 0 \rangle_{A_k}$ 的极大集合。

(ii) $\omega^*_{\prod_i A_i}(0) = \sum_i \omega^*_{A_i}(0)$ *and* $\omega_{\prod_i A_i}(0) = \sum_i \omega_{A_i}(0)$.

证明。**(i)** 显然，**(ii)** 由 **(i)** 得出。 ■

现在来证明下面这个引理，我们将在主要结果定理（3.5）的证明中用到它。

(2.13) 引理。设 A 是一个阿廷环。经过重新排序后，存在唯一的 $\langle 0 \rangle$ 的极大集合 M。此外，每个 $M_i \in M$ 都必须是 A 的极大理想，并且对每个 i，都存在 $f_i \in M_i$，使得对所有 j，$\prod_i f_i = 0$ 且 $\prod_{i \neq j} f_i \neq 0$。

证明。首先，我们将对局部阿廷环 $A_{\mathfrak{m}}$ 证明这一点。事实上，由于任意阿廷环都是诺特环，根据引理（1.1），我们知道 $\omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0) < \infty$。根据命题（1.2），我们知道 $\mathfrak{m}^{\omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0)} = \langle 0 \rangle$。由于 $A_{\mathfrak{m}}$ 是局部的，我们知道 $\mathfrak{m}^{\omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0)} = \langle 0 \rangle$ 蕴含 $\omega^*_{A_{\mathfrak{m}}}(0) \leq \omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0)$。然而 $\omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0) \leq \omega^*_{A_{\mathfrak{m}}}(0)$，因此 $\omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0) = \omega^*_{A_{\mathfrak{m}}}(0)$。显然，$A_{\mathfrak{m}}$ 的唯一极大集合就是由 $\omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0)$ 个 $\mathfrak{m}$ 组成的集合。

既然我们已经证明了局部阿廷环中的这一引理，现在将其推广到任意阿廷环。每个阿廷环 A 都同构于其局部化 $A \cong \prod_i A_{\mathfrak{m}_i}$ 的乘积，因此根据引理（2.12），我们知道 A 的每个极大集合都将是集合 M 的重新排序；该集合对于每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 都由 $\omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0)$ 个 $\mathfrak{m}$ 组成。再次根据引理（2.12），我们有 $\omega_A(0) = \sum_{\mathfrak{m}} \omega_{A_{\mathfrak{m}}}(0) = \sum_{\mathfrak{m}} \omega^*_{A_{\mathfrak{m}}}(0) = \omega^*_A(\alpha)$。特别地，必然存在一个主 $\omega^*(\alpha)$-集合 $[\langle f_i \rangle]_i$。由于 $[\langle f_i \rangle]_i$ 必须包含于 A 的某个极大集合中，而 A 的任意极大集合都是 M 的重新排序，因此我们可以令 $f_i \in M_i$ 对所有 i 成立，从而完成证明。■

§3 n-吸收理想是强 n-吸收的

在本节中，我们将证明主要结果，即定理（3.5）。该定理指出，对于任意理想 α，$\omega(\alpha) = \omega^*(\alpha)$，正如 [AB11] 中的猜想 **(C1)** 所猜想的那样。在证明这一点之前，我们需要两个众所周知的结果；一个来自 Neal McCoy，另一个来自 Edward Davis。

以下论证是研究有限个理想的并的一个基本结果（参见[Got94]），它最初作为一个未命名的引理出现在 McCoy 的著名论文 [McC57] 的第一个定理的证明中。该引理将在引理（3.4）中发挥关键作用。

(3.1) 引理。 [McC57]。设 $\alpha, \gamma_1, ..., \gamma_n$ 是环 A 的理想，使得 $\alpha \subseteq \bigcup_i \gamma_i$，但对所有 j 都有 $\alpha \not\subseteq \bigcup_{i\neq j} \gamma_i$。那么对任意 j，我们有

$$\alpha \cap \bigcap_{i\neq j} \gamma_i \subseteq \gamma_j$$

证明。我们将遵循 McCoy [McC57，定理 1] 的证明。由于 $\alpha \not\subseteq \bigcup_{i\neq j} \gamma_i$，我们知道必定存在某个 $y \in \gamma_j \cap \alpha \setminus \bigcup_{i\neq j} \gamma_i$。给定任意 $x \in \alpha \cap \bigcap_{i\neq j} \gamma_i$，我们必须有 $x+y \in \alpha$，因此必定存在某个 i，使得 $x + y \in \gamma_i$。对于任意 $i \neq j$，我们知道 $x \in \gamma_i$ 和 $y \notin \gamma_i$，因此 $x + y \notin \gamma_i$。这意味着 $x + y \in \gamma_j$，然而 $y \in \gamma_j$，因此 $x \in \gamma_j$。由于 x 的选取是任意的，我们知道 $\alpha \cap \bigcap_{i\neq j} \gamma_i \subseteq \gamma_j$。■

回顾一下，素理想回避引理指出，对于任意有限集的素理想 $\{\mathfrak{p}_i\}_i$ 和任意理想 α，如果 $\alpha \subseteq \bigcup_i \mathfrak{p}_i$，那么对于某个 i，有 $\alpha \subseteq \mathfrak{p}_i$。素理想回避引理的以下推广出现在 [Mat89 的练习 16.8]，中，其中 Matsumura 将这一结果归功于 Edward Davis（但未提供引文）。由于其出人意料的实用性，这一结果通常被称为“Davis素理想回避引理”，正如我们将在定理（3.5）的证明中看到的那样。

(3.2) 引理。（Davis素理想回避引理）。设 β 是 A的一个理想，令$\{\mathfrak{p}_i\}_i$为 A的一个素理想有限集，并假设 $f \in A$。若对于所有 i，均有 $\langle f\rangle + \beta \not\subseteq \mathfrak{p}_i$，则存在某个 $g \in \beta$，使得 $f + g \notin \bigcup_i \mathfrak{p}_i$。

证明。假设 $\mathfrak{p}_j \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ 对所有 $j \neq i$成立，并令 I 为满足条件的集合，其中当 $f \in \mathfrak{p}_i$时有 $i \in I$。我们必须有 $\beta \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ 对所有 $i \in I$成立，因为否则 $\langle f\rangle+\beta \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ 将推出 $f \notin \mathfrak{p}_i$，进而得到 $i \notin I$。因此，对于所有 $i \in I$，都有 $\beta \cdot \prod_{j\notin I} \mathfrak{p}_j \not\subseteq \mathfrak{p}_i$，由素理想回避引理可得 $\beta \cdot \prod_{j\notin I} \mathfrak{p}_j \not\subseteq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{p}_i$。任取 $g \in \beta \cdot \prod_{j\notin I} \mathfrak{p}_j \setminus \bigcup_{i\in I} \mathfrak{p}_i$，即可得到一个元素 $g \in \beta$，使得 $f + g \notin \bigcup_i \mathfrak{p}_i$。■

§3.1 主定理

在本小节中，我们将运用前面得到的引理，完成证明 $\omega(\alpha) = \omega^*(\alpha)$ 的最后几步。以下引理是该证明中的关键一步，因为它使我们能够将问题化简到一个方便的情形。

(3.3) 引理。对任意理想 α， $\omega(\alpha) = \omega^*(\alpha)$ 当且仅当，对于某个准局部诺特环的任意理想α， $\omega(\alpha) = \omega^*(\alpha)$；该环满足：每个极大 $\omega^*(\alpha)$-集合 α 都包含该环的每个极大理想的一个副本。

证明。“仅当”方向显然成立。我们将用逆否命题论证证明另一个方向。假设 α 是环 A 的理想，且 $\omega(\alpha) < \omega^*(\alpha)$。我们将证明，存在 A 的一个有限生成子环 B 以及一个乘法封闭子集 $S \subseteq B$，使得 $\omega(S^{-1}(\alpha \cap B)) < \omega^*(S^{-1}(\alpha \cap B))$，并且环 $S^{-1}B$ 是一个准局部诺特环，具有如下性质： $S^{-1}(\alpha\cap B)$的每个极大 $\omega^*(S^{-1}(\alpha\cap B))$-集合都包含 $S^{-1}B$的每个极大理想的一个副本。

我们知道 $\omega(\alpha) < \omega^*(\alpha)$，因此必定存在一个由 α 组成的集合 C，其大小大于$\omega(\alpha)$。对于每个 j，都有 $\prod_{i\neq j} C_i \not\subseteq \alpha$，因此对于每个 $i \neq j$，必定存在某个 $f_{ij} \in C_i$ 使得 $\prod_{i\neq j} f_{ij} \notin \alpha$。由此可得 $\langle\{f_{ij}\}_{j\neq i}\rangle \subseteq C_i$，因此列表 $[\langle\{f_{ij}\}_{j\neq i}\rangle]_i$ 是一个大小大于 $\omega(\alpha)$的集合，其中 $\{f_{ij}\}_{j\neq i}$ 遍历固定的 i对应的 j。令 B为由每个 f_{ij}生成的 A 的有限生成子环。类似地，$[\langle\{f_{ij}\}_{j\neq i}\rangle_B]_i$ 是一个大小大于 $\omega(\alpha)$的 $\alpha \cap B$ 集合。由于 $\omega(\alpha \cap B) \leq \omega(\alpha)$，我们知道 $\omega(\alpha \cap B) <\omega^*(\alpha \cap B)$。因此，我们有一个有限生成环 B，满足 $\omega(\alpha \cap B) < \omega^*(\alpha \cap B)$。

由于 B 是有限生成环， B 必定是诺特环，因此根据引理（1.1），我们知道 $\omega^*(\alpha \cap B) < \infty$。令 $n = \omega^*(\alpha \cap B)$。根据引理（2.8），必定存在一个极大 n-集合 M，由 $\alpha \cap B$ 组成，且 $\bigcup_i M_i$ 是极小的。令 $S = B \setminus \bigcup_i M_i$；由于引理（2.4）表明 M 的极大元是 B的素理想，我们知道S 是乘法封闭子集。根据素理想避开定理， $S^{-1}B$ 必定是一个准局部诺特环。再次根据引理（2.8），我们知道 $\omega^*(S^{-1}(\alpha \cap B)) = \omega^*(\alpha \cap B)$，并且 $S^{-1}(\alpha \cap B)$的任何极大 n-集合都将包含 $S^{-1}B$的每个极大理想的一个副本。由于 $\omega(S^{-1}(\alpha \cap B)) \leq \omega(\alpha \cap B) < \omega^*(\alpha \cap B) = \omega^*(S^{-1}(\alpha \cap B))$，我们知道 $\omega(S^{-1}(\alpha \cap B)) < \omega^*(S^{-1}(\alpha \cap B))$，正如所需。■

牢记引理（3.3），让我们证明定理（3.5）中最后也是最重要的引理。

(3.4) 引理。设 A 是一个准局部诺特环，且 α 是 A 的一个理想，满足 $\omega^*(\alpha) = n$，并且 α 的每个半极大 n-集合都包含 A 的所有极大理想。那么必定存在某个 n-集合 C，使得对于每个 $C_j \in C$，以下条件之一成立

(i) $\widetilde{C}_j$ *is a maximal ideal and* $C_j = \widetilde{C}_j$*, or,*

(ii) C_j 不是极大理想，并且 C_j 是一个主理想。

而且， C 包含 A 的每个极大理想的一个副本。

证明。考虑 α 的一个 n-集合 C，使得 C 中属于 A 的极大理想的 $\sim$ 元素数量尽可能多。由于 $[C_j] \cup C_{i \neq j}$ 也是一个 n-集合，我们知道，每当 C_j 是极大理想时，必有 $C_j = C_j$。现在，如果 C_k 不是极大理想，且 $f \in C_k$ 满足 $[\langle f \rangle] \cup C_{i \neq k}$ 是 A 的一个集合，那么 $C' = [\langle f \rangle] \cup C_{i \neq k}$ 必须包含 C 中作为极大理想的每个元素。如果 C'_j 是极大理想，那么 $C'_j = C'_j$；因为否则， $[C'_j] \cup C'_{i \neq j}$ 就是 α 的一个 n-集合，其中包含的极大理想副本比 C 更多。因此，如果我们能证明：每当 C_k 不是极大理想或主理想时，必定存在 $f \in C_k$，使得 $[\langle f \rangle] \cup C_{i \neq k}$ 是 A 的一个集合，那么我们就可以重复这一过程，得到一个 n-集合，其元素满足 (i) 或 (ii)。

继续之前，我们必须证明 C 包含 A的每个极大理想的一个副本。事实上，根据引理（2.2），必定存在一个位于 C 之上且满足 $C_i \subseteq M_i$（对所有 i均成立）的极大集合 M。由于 $|C| = \omega^*(\alpha)$，我们知道 $|M| = |C|$，因此对所有 i均有 $M_i = M_i \subseteq C_i$。我们已假设，每个极大 $\omega^*(\alpha)$- 集合都必须包含 $M_i = \mathfrak{m}$ 的一个副本，即每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 的一个副本。因此，我们有 $\mathfrak{m} = M_i \subseteq C_i$，从而 $C_i = \mathfrak{m}$。根据 C的选择，我们知道 $C_i = C_i = \mathfrak{m}$，因此 C 必须包含 A的每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 的一个副本。特别地， C 的极大元都是极大理想。

假设存在某个 $C_k \in C$，它既非极大也非主。回顾第 §2.2 节中的内容，$C_{k,\ j} := (\alpha : \prod_{i \neq k,\ j} C_i)$。如果 $C_k \not\subseteq \bigcup_{j \neq k} C_{k,\ j}$，那么存在某个 $f \in C_k$，使得 $f \notin \bigcup_{j \neq k} C_{k,\ j} = \bigcup_{j \neq k} (\alpha : \prod_{i \neq j,\ k} C_i)$，因此对于任意 $j \neq k$，都有 $\langle f \rangle \prod_{i \neq k,\ j} C_i \not\subseteq \alpha$。由于 $f \in C_k$，我们知道 $\langle f \rangle \prod_{i \neq k} C_i \subseteq \alpha$。然而， C是一个集合，因此 $\prod_{i \neq k} C_i \not\subseteq \alpha$。由此可知， $[\langle f \rangle] \cup C_{i \neq k}$ 必定是 α的一个集合。因此，我们只需证明 $C_k \not\subseteq \bigcup_{i \neq k} C_{k,\ i}$。

为导出矛盾，假设 $C_k \subseteq \bigcup_{i \neq k} C_{k,i}$。我们将证明这意味着存在 $\ell \neq k$ 使得 $C_k \subseteq C_{k,\ell}$，这与 $C_{k,\ell} := (\alpha : \prod_{i \neq k,\ell} C_i)$ 矛盾，因此我们将得到 $\prod_{i \neq \ell} C_i \subseteq \alpha$。

每当 $C_j \subseteq C_t$ 对某个 j 成立，且 t 不等于 k时，就有 $\prod_{i\neq k,t} C_i \subseteq \prod_{i\neq k,j} C_i$ ~ ~，因此 $C_{k,j} = (\alpha : \prod_{i\neq k,j} C_i) \subseteq (\alpha : \prod_{i\neq k,t} C_i) = C_{k,t}$。由于$C$ 的每个极大元都是极大理想，且 C_k 不是极大元，因此必定存在一些正整数~$m_1, ..., m_r \neq k$，使得每个 C_{m_i} 都是 A的极大理想，且满足 $C_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} C_{k,m_i}$ 以及 ~ ~ ~$C_k \not\subseteq \bigcup_{i\neq j} C_{k,m_i}$ 对所有 j都成立。由此可得，对所有 $i \neq j$, $C_{k,m_i} \neq C_{k,m_j}$，因此对所有 $i \neq j$, $C_{m_i} \neq C_{m_j}$。

根据引理 (3.1)，我们必有 $C_k \cap \bigcap_{i\neq j} \widetilde{C}_{k,m_i} \subseteq$ ~ C_{k,m_j} 对于任意 j。然而，根据~ ~C_{k,m_i} 的定义，我们有 $C_k C_{m_i} \subseteq C_{k,m_i}$ 对于任意 i。因此，对于任意 j，我们有

$$C_k \cdot \bigcap_{i\neq j} C_{m_i} \subseteq \bigcap_{i\neq j} C_k C_{m_i} \subseteq C_k \cap \bigcap_{i\neq j} \widetilde{C}_{k,m_i} \subseteq \widetilde{C}_{k,m_j}$$

~ ~这意味着 $C_k \cdot \bigcap_{i\neq j} C_{m_i} \subseteq C_{k,m_j}$ 因此 $\bigcap_{i\neq j} C_{m_i} \subseteq (C_{k,m_j} : C_k)$。由于 $(C_{k,m_j} :$~ ~$C_k) = C_{m_j}$ 且 $C_{m_j} = C_{m_j}$，我们知道 $\bigcap_{i\neq j} C_{m_i} \subseteq C_{m_j}$。这与假设矛盾，因为 C_{m_j} 是一个素理想，且对于所有 $i \neq j$, $C_{m_i} \not\subseteq C_{m_j}$，这意味着 $\bigcap_{i\neq j} C_{m_i} \not\subseteq C_{m_j}$。因此~$C_k \not\subseteq \bigcup_{i\neq k} C_{k,i}$，证毕。 ■

最后，我们可以证明主要结果。我们首先将问题归约到引理（3.3）的情形，在那里可以运用Davis素理想回避引理，结合引理（3.4）和（2.13）构造一个主 $\omega^*(\alpha)$-集合。

（3.5）定理。设 α 是任意环 A的任意理想。那么，

$$\omega(\alpha) = \omega^*(\alpha)$$

证明。根据引理（3.3），不妨设 A 是一个准局部诺特环，且 α 是 A 的一个理想，并且 $\omega^*(\alpha) = n$，使得 α 的每个半极大 n-集合都包含 A的每一个极大理想。现在，令 C 是引理（3.4）中的 α 的一个 n-集合，令 $[M_i]_i$是 C 的子列表，其中包含 C的所有极大元；再令 $[\langle h_i\rangle]_i$ 是 C的子列表，其中包含 C的所有非极大元。

重新排序后，我们有 $C = [M_i]_i \cup [\langle h_i\rangle]_i$，因此 $[M_i]_i$ 必须是 β 理想的~ 集合: $= (\alpha : \prod_i h_i)$；也就是说，$\beta = C_I$，其中 I 满足 $C_{i\in I} = [M_i]_i$。由于 $[M_i]_i$ 的元素都是 A 的极大理想，我们知道 $[M_i]_i$ 必须是 β 的极大集合。由于 $\prod_i M_i \subseteq \beta \subseteq M_i$，我们知道 A/β 的极大理想必须是集合 $\{M_i/\beta\}_i$ 的元素。

由于 $\prod_i (M_i/\beta) = 0/\beta$，我们知道 A/β 的每个素理想都必须包含某个极大理想 M_i/β，因此 A/β 必须是阿廷的。根据引理（2.13），我们知道对于每个 i，必然存在某个 $f_i \in M_i$，使得 $[\langle f_i\rangle]_i$ 是 β 的集合。由于 $\prod_i M_i \subseteq \beta$，对于任意$\mathfrak{p} \in$ 关联素理想$(\alpha)\backslash\{M_i\}_i$，我们知道 $\beta \not\subseteq \mathfrak{p}$，因此对于任意 j 都有 $\langle f_j\rangle + \beta \not\subseteq \mathfrak{p}$。根据 Davis 素理想避开引理（3.2），对于每个 f_j，存在某个 $g_j \in \beta$，使得 $f_j + g_j \notin \bigcup$(关联素理想$(\alpha) \setminus \{M_i\}_i$)。因此不失一般性，我们可以假设对于所有 j，$f_j \notin \bigcup$(关联素理想$(\alpha) \setminus \{M_i\}_i$)。

我们将证明 $\prod_i h_i \prod_k f_k \in \alpha$ 定义了一个主 n集合。事实上，由于 $[\langle f_k\rangle]_k$构成了 $\beta = (\alpha : \prod_i h_i)$ 的集合，我们知道 $\prod_{k\neq j} f_k \not\subseteq (\alpha : \prod_i h_i)$，因此对所有 j，都有 $\prod_i h_i \prod_{k\neq j} f_k \not\subseteq \alpha$。所以我们只需证明对所有 j，都有 $\prod_{i\neq j} h_i \prod_k f_k \not\subseteq \alpha$。令 $S = A \setminus \bigcup$(关联素理想$(\alpha) \setminus \{M_i\}_i$)，并注意到 S 是乘法封闭的。由于对所有 j，都有$f_j \notin \bigcup$(关联素理想$(\alpha) \setminus \{M_i\}_i$)，我们知道对所有 j，都有 $f_j \in S$。此外，对所有 j，都有 $M_j \cap S \neq \emptyset$。这意味着:

$$(S^{-1}\alpha : S^{-1}\langle \prod_{i\neq j} h_i \prod_k f_k\rangle) = (S^{-1}\alpha : S^{-1}\langle \prod_{i\neq j} h_i\rangle) = (S^{-1}\alpha : S^{-1} \prod_{i\neq j} h_i \prod_k M_k)$$

因此 $S^{-1}(\alpha:\prod_{i\neq j}h_i\prod_k f_k) = S^{-1}(\alpha:\prod_{i\neq j}h_i\prod_k M_k)$。令 j' 满足 $\sim C_{j'} = \langle h_j\rangle$，于是 $C_{j'} = (\alpha:\prod_{i\neq j}h_i\prod_k M_k)$。根据引理 (2.10)，我们知道 关联素理想$(C_{j'}) = \sim$关联素理想$(\alpha:\prod_{i\neq j}h_i\prod_k M_k) \subseteq$关联素理想$(\alpha)$。根据引理 (2.11)以及 C的选择，我们知道 关联素理想$(C_{j'}) \subseteq$关联素理想$(\alpha)\setminus\{M_i\}_i$。因此

$$\langle 1\rangle \neq S^{-1}\widetilde{C}_{j'} = S^{-1}(\alpha:\prod_{i\neq j}h_i\prod_k M_k) = S^{-1}(\alpha:\prod_{i\neq j}h_i\prod_k f_k)$$

这意味着 $(\alpha:\prod_{i\neq j}h_i\prod_k f_k) \neq \langle 1\rangle$，因此对于每个 j都有 $\prod_{i\neq j}h_i\prod_k f_k\notin\alpha$。因此，$\prod_i h_i\prod_k f_k\in\alpha$ 定义了一个由 α构成的主 n集合族 $[\langle h_i\rangle]_i\cup[\langle f_k\rangle]_k$，如所需。■

§4 一些新的猜想

本节介绍并讨论三个与（C2）密切相关的新猜想——这是 Anderson 和 Badawi 提出的关于吸收理想的最后一个尚未解决的猜想。这些猜想之间的关系可以用下图概括：

$$(4.4) \xrightarrow[\text{Prop. (4.6)}]{} (4.3) \Longrightarrow \textbf{(C2)} \xleftrightarrow[\text{Cor. (4.9.1)}]{} (4.8)$$

§4.1 $\alpha[X]$的集合族

本小节重点探讨对于由 $\alpha[X]$构成的集合族 C，嵌入 $C_j\subseteq c(C_j)[X]$ 的严格性，最终引出猜想（4.3）。该猜想提出，当 α 是诺特环的一个理想且 C 是由 α构成的极大集合族时，这一嵌入为等式。

我们将通过给出 McCoy [McC42], 的一个著名定理的略微推广来开始本小节。该定理指出，如果 γ 是多项式环 $A[X]$ 的一个理想，并且存在非零的 $f\in A[X]$ 满足 $f\gamma = \langle 0\rangle$，那么存在非零的 $a\in A$ 满足 $a\gamma = \langle 0\rangle$。在进行推广之前，我们需要先明确一些术语。对于非零多项式 $f = \sum_v f_v\prod_{i=1}^n x_i^{v_i}\in A[x_1,...,x_n] = A[X]$，定义 f的次数为满足 $f_v\neq 0$ 的字典序最大的 v，并将内容理想$c(f) = \langle\{f_v\}_v\rangle$定义为由 f的系数生成的 A的理想。类似地，如果 β是 $A[X]$ 的一个理想，则令 $c(\beta) = \sum_{f\in\beta}c(f)$。

(4.1) 命题。设 γ 是 $A[X] = A[x_1,...,x_n]$ 的一个非零理想，且 $f\in A[X]$非零并满足 $f\gamma = \langle 0\rangle$。那么存在某个 $a\in A$，使得 $af\neq 0$，但 $c(af)\gamma = \langle 0\rangle$。

证明。我们将推广 [Sco54]中给出的证明。令 $g = \sum_r g_r X^r\in Af$ 为可能次数最小的非零元素。为导出矛盾，假设 $c(g)\gamma\neq\langle 0\rangle$。由于 $c(g)\gamma\neq\langle 0\rangle$，必定存在 γ 中的某个元素 $h = \sum_v h_v X^v$，使得 $c(g)h\neq\langle 0\rangle$；等价地，$c(h)g\neq\langle 0\rangle$。令 I 为满足 $h_v\cdot g\neq 0$ 的指标集 $v\in I$。注意$gh\in f\gamma = \langle 0\rangle$，因此

$$0 = gh = g(\sum_{v\in I}h_vX^v + \sum_{w\notin I}h_wX^w) = g\sum_{v\in I}h_vX^v = (\sum_r g_rX^r)(\sum_{v\in I}h_vX^v)$$

现在令 k为 I中的最大元素，并令 m 为使得 $g_m\neq 0$ 成立的最大值（即 g的首项系数）。那么，$(\sum_r g_rX^r)(\sum_{v\in I}h_vX^v) = 0$ 蕴含 $g_mh_k = 0$，从而次数

$h_k g$ 的次数小于 g 的次数。由于 $k \in I$，我们知道 $h_k g \neq 0$，因此 $h_k g$ 是 Af 的一个非零元素，其次数按字典序小于 g 的次数——这与选择 g 矛盾。■

现在，让我们将上述命题应用于集合族的情形，这有助于我们~ ~理解 $C_j \subseteq c(C_j)[X]$的严格性。

~(4.1.1) 推论。设 C 是 $\alpha[X]$的一个集合族。对于任意 $f \in C_j \setminus \alpha[X]$，存在某个~ $a \in A$，使得 $af \notin \alpha[X]$，但 $c(af) \subseteq C_j$。

证明。将命题（4.1）应用于环 $A[X]/\alpha[X] = (A/\alpha)[X]$。 ■

下面的命题可以被理解为一种由 Dedekind–Mertens 引理推广的形式的结果，但其背景是集合族。此外，这是我们目前对于嵌入 $C_j \subseteq c(C_j)[X]$ 的严格性所能作出的最强的一般性陈述。

(4.2) 命题。设 α 是环 A 的一个理想，且满足 $\omega(\alpha) < \infty$。对于 $\alpha[X]$的任意集合族 C 以及每个 $C_j \in C$，有：

$$c\left(\widetilde{C}_j\right)^{\omega(\alpha)} \subseteq \widetilde{C}_j$$

证明。显然，对于每个有限生成子理想 J of $\widetilde{C}_j$，$c(\widetilde{C}_j)^{\omega(\alpha)} \subseteq \widetilde{C}_j$ 当且仅当 $c(J)^{\omega(\alpha)} \subseteq \widetilde{C}_j$。类似地，对于每个有限生成子理想 of，$c(J)^{\omega(\alpha)} \subseteq \widetilde{C}_j = (\alpha[X] : \prod_{i\neq j} C_i)$ 当且仅当 $c(J)^{\omega(\alpha)} \subseteq ($ $\alpha[X]$ J' J' $\prod_{i\neq j} C_i$ $JJ' \subseteq :)$。我们总有，因此 $( ) =$ $\alpha[X]$ $c\ JJ' \subseteq \alpha$。

戴德金–默滕斯引理的一个弱推论指出，对于任意 $f, g \in A[X]$，都存在某个 k，使得 $c(f)^k c(g) \subseteq c(fg)$。为 $J = \langle \{f_i\}_i \rangle$ 和 $J' = \langle \{g_j\}_j \rangle$ 各自固定一个有限生成集后，我们可以选取足够大的 k，使得对于所有 i 和 j，$c(f_i)^k c(g_j) \subseteq c(f_i g_j)$。由于 $c(f_i g_j) \subseteq c(JJ') \subseteq \alpha$，我们知道 $c(f_i)^k c(g_j) \subseteq \alpha$。若 m 是有限集 $\{f_i\}_i$ 的大小，则根据鸽巢原理，$c(J)^{mk} = (\sum_i c(f_i))^{km} \subseteq \sum_i c(f_i)^k$。这意味着 $c(J)^{mk} c(J') \subseteq \sum_{i,j} c(f_i)^k c(g_j) \subseteq \alpha$。由定理（3.5），我们有 $c(J)^{\omega(\alpha)} c(J') \subseteq \alpha$，因此 $c(J)^{\omega(\alpha)} \subseteq (\alpha[X] : J')$，证毕。■

回顾一下，引理（1.1）指出，诺特环的任意理想都具有有限的吸收数，而根据引理（2.4），极大集合的极大元始终都是素理想。因此，根据上述命题（4.2），如果 α 是诺特环 A 的一个理想，那么 α 的任意极大集合 M 的极大元都将具有如下形式：$\mathfrak{p}[x]$，其中 $\mathfrak{p}$ 是 A的某个素理想。结合上述结果，自然会产生这样一个问题：M 中的每个元素是否都具有如下形式：$\beta[x]$，其中 β 是 A的某个理想。等价地：

(4.3) 猜想。对于诺特环的理想 α，$\alpha[x]$ 的极大集合是形如 $M[x] := [M_i[x]]_i$ 的集合，其中 $M = [M_i]_i$ 是某个 α 的极大集合。

在诺特情形下，猜想（4.3）自然意味着每个 $\alpha[X] = \alpha[x_1, ..., x_n]$ 的极大集都将具有 $M[X]$ 的形式。我们也可以问猜想（4.3）在非诺特情形下是否成立，但本文不作探讨。

如果 α 是 A 的理想，且 $\omega(\alpha)$ 是有限的，那么我们总能找到一个足够大的 A 的有限生成子环 B，使得 $\omega(\alpha \cap B) = \omega(\alpha)$。现在，如果 $\omega(\alpha[x]) > \omega(\alpha)$，那么我们可以选取足够大的 B，使得还有 $\omega((\alpha \cap B)[x]) > \omega(\alpha \cap B)$。因此，如果

如果所有有限生成环都满足（C2），那么所有环都必须满足（C2）。由于有限生成环是诺特的，猜想（4.3）自然蕴含（C2）。

§4.2 有限多个极大集合?

研究吸收理想时面临的一个主要障碍，是难以计算 $\omega(\alpha)$。目前，尚无已知算法能够计算环 $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_r]$ 中任意理想 α 的 $\omega(\alpha)$，我们甚至还没有证明这类算法确实存在。

如果诺特环中的理想 α 有有限多个极大集合，并且存在某种算法可以计算出它的所有极大集合，那么我们就能得到一个计算 $\omega(\alpha)$ 的算法。有证据表明，这类理想 α 可能很常见。例如，诺特环的 2-吸收理想有有限多个极大集合，而且计算这些集合族很简单：根据引理（2.4），诺特环中的每个（非素）2-吸收理想 α 都有形如 $[(\alpha : \mathfrak{p})\ \mathfrak{p}]$ 的极大集合，其中 $\mathfrak{p}$ 是某个关联素理想（重新排序后）。由于诺特环的任意理想都只有有限多个伴随素理想，因此我们知道诺特环的 2-吸收理想有有限多个极大集合。

基于这一动机，我们提出下面的猜想，希望肯定的答案能够推动对吸收理想和极大集合的计算研究。

（4.4）猜想。诺特环的任意理想都有有限多个极大集合。

总结上述讨论，如果猜想（4.4）成立，那么我们可以提出如下自然问题："如果 α 是一个 $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_r]$ 的理想，是否存在一种算法，能够计算出 α 的所有极大集合？"

事实证明，猜想（4.4）相当强。不仅它可以平凡地推出引理（1.1）等结果，而且猜想（4.4）实际上强于猜想（4.3），因而也强于 Anderson 和 Badawi 的第二个猜想（C2）。在证明这一点之前，我们需要一些定义和一个引理。

对于多项式环 $A[x, y]$，元素 $f \in A[x, y]$ 的 x-次数是 $f = \sum_i f_i x^i$ 的次数，其中系数为 $f_i \in A[y]$。现在设 β 是 $A[x, y]$ 的一个理想，并定义 β 的 x-内容 $c_x(\beta)$ 为 β 的内容理想，其中将 $A[x, y] = (A[y])[x]$ 视为关于 x 的多项式环。因此，$\beta \subseteq c_x(\beta)[x] \subseteq c(\beta)[x, y]$；类似地定义 c_y，可得 $c_y(c_x(\beta)[x])[y] = c(\beta)[x, y] = c_x(c_y(\beta)[y])[x]$。对于每个 $h \in A[x]$，定义求值映射 $\mathrm{eval}_h : A[x, y] = (A[x])[y] \to A[x]$ 为如下同态：固定 $A[x]$，并将 y 送到 h（即 $\mathrm{eval}_h(\sum_i f_i y^i) = \sum_i f_i h^i$）。

(4.5) 引理。设 α 是 A 的一个理想，且 β 是 $A[x, y]$ 的一个理想，它可以由次数小于 k 的 x-次元素生成。那么，$\beta \subseteq \alpha[x, y]$ 当且仅当 $\mathrm{eval}_{x^k}(\beta) \subseteq \alpha[x]$。

证明。设 $\{f_i\}_i$ 是 β 的一个生成集，使得对于所有 f_i，f_i 的 x-次数小于 k。现在令 $f_i = \sum_j f_{ij} y^j$，其中 $f_{ij} \in A[x]$，因此每个 f_{ij} 的 x-次数都必须小于 k。根据引理 (1.3)，如果 $h \in A[x]$ 的 x-次数小于 ℓ，那么对于任意 $h \in A[x]$，$c(g + x^\ell h) = c(g) + c(h)$。将这一结论归纳地应用于 $c(\sum_j f_{ij} x^{kj})$，得到等式 $c(\sum_j f_{ij} x^{kj}) = \sum_j c(f_{ij})$。这意味着 $c(\mathrm{eval}_{x^k}(f_i)) = \sum_j c(f_{ij}) = c(f_i)$，因此 $c(\mathrm{eval}_{x^k}(\beta)) = c(\beta)$。由于对于任意理想 γ 和不定元集合 X，$\gamma \subseteq \alpha[X]$ 当且仅当 $c(\gamma) \subseteq \alpha$，等式 $c(\mathrm{eval}_{x^k}(\beta)) = c(\beta)$ 蕴含所需结论。■

请回忆，对于 C of α 的集合，我们定义 $C[x] := [C_i[x]]_i$，它始终是 $\alpha[x]$ 的集合。对于 N of $\alpha[x,y]$ 的集合，我们将 N 的内容定义为列表 $c(N) := [c(N_i)]_i$，其中内容理想 $c(N_i)$ 是 A 的理想——尽管 $c(N)$ 不一定是 α 的集合。同样，我们以相同方式定义 $c_x(N)$ 和 $c_y(N)$。

(4.6) 命题。若 α 是诺特环 A 的理想，且 $\alpha[x]$ 有有限多个极大集合，则 $\alpha[x]$ 的极大集合将具有如下形式： $M[x]$ ，其中 M 是 α 的某个极大集合。特别地，

$$\textit{Conjecture (4.4)} \implies \textit{Conjecture (4.3)}.$$

证明。首先，我们来说明，只需证明每个 $\alpha[x,y]$ 的极大集合 M 都满足 $M = c_y(M)[y] := [c_y(M_i)[x]]_i$。由 x 和 y 的对称性可知，这意味着 $M = c_x(M)[x]$。特别地， $c(M_i)[x,y] = c_x(c_y(M_i)[y])[x] = c_x(M_i)[x] = M_i$，因此 $\alpha[x,y]$ 的每个极大集合都具有 $M = c(M)[x,y]$ 的形式。接下来，我们需要证明这意味着 $\alpha[x]$ 的所有极大集合 N 都具有 $C[x]$ 的形式，其中 C 是 α 的某个（必然是极大的）集合。设 M 是 $\alpha[x,y]$ 的一个极大集合，且位于 $N[y]$ 之上。根据假设，我们有 $M = c(M)[x,y]$，因此 $c(M)[x]$ 是 $\alpha[x]$ 的一个集合，且位于 N 之上。由于 N 是极大的，我们知道 $N = c(M)[x]$，这正是所需。

设 M 是 $\alpha[x,y]$ 的一个极大集合，我们将证明 $M = c_y(M)[y]$。设 k 是一个足够大的正整数，使得每个 M_j 和 $\prod_{i\neq j} M_i$ 都能由次数小于 $\frac{1}{2}k$ 的 x 元素生成；这是可能的，因为 $A[x,y]$ 是诺特的。由于我们已假设 $\alpha[x]$ 只有有限多个极大集合，因此可以选取足够大的 k ，使得对于 $\alpha[x]$ 的每个极大集合 N ，每个理想 $\prod_{i\neq j} N_i$ 都能由次数小于 $\frac{1}{2}k$ 的 x 元素生成。

显然， $\prod_i \mathrm{eval}_{x^k}(M_i) \subseteq \mathrm{eval}_{x^k}(\alpha[x,y]) = \alpha[x]$，并且根据引理 (4.5)，对于所有 j，必有 $\prod_{i\neq j} \mathrm{eval}_{x^k}(M_i) \not\subseteq \alpha[x]$ 。因此，列表 $[\mathrm{eval}_{x^k}(M_i)]_i$ 是一个 $\alpha[x]$ 的集合，所以必定存在 $\alpha[x]$ 的某个极大集合 N ，它包含在 $[\mathrm{eval}_{x^k}(M_i)]_i$ 之上。经重新排序后，我们可以假设对于所有 M_i， $\mathrm{eval}_{x^k}(M_i) \subseteq N_i$ 。

由于 N 是极大的，我们有 $N_j = (\alpha : \prod_{i\neq j} N_i)$，因此 $\mathrm{eval}_{x^k}(M_j) \subseteq N_j$ 意味着 $\mathrm{eval}_{x^k}(M_j)\prod_{i\neq j} N_i \subseteq \alpha[x]$；等价地， $\mathrm{eval}_{x^k}(M_j\prod_{i\neq j} N_i) \subseteq \alpha[x]$。根据 k 的选取， M_j 和 $\prod_{i\neq j} N_i$ 均可由 x- 次数小于 $\frac{1}{2}k$ 的元素生成，因此必然存在理想 $M_j\prod_{i\neq j} N_i$ 的生成集 $\{f_i\}_i$，使得每个 f_i 的 x-次数都小于 k。由引理 (4.5)，我们知道 $M_j\prod_{i\neq j} N_i \subseteq \alpha[x,y]$。这意味着 $M_j \subseteq (\alpha[x,y] : \prod_{i\neq j} N_i) = (\alpha[x] : \prod_{i\neq j} N_i)[y] = N_j[y]$，从而根据 M 的极大性得到 $M = N[y]$。因此， $M = c_y(M)[y]$，正如所需。■

我们应注意到，可以将“极大”替换为“半极大”，且上述证明仍然成立。然而，某个理想 $\alpha[x]$ 可能存在不具有 $N[x]$ 这种形式的半极大集合。事实上，考虑以下受 [Gil67, 定理 1] 的证明启发的例子。列表 $[\langle z-yx\rangle, \langle z+yx\rangle]$ 是环 $(\mathbb{Q}[y,z])[x]$ 中 $\langle z^2, y^2\rangle[x]$ 的一个集合，但 x-内容 $\langle z,y\rangle\cdot\langle z,y\rangle = \langle z^2, zy, y^2\rangle$ 的乘积并不包含于 $\langle z^2, y^2\rangle$。因此，任何位于 $[\langle z-yx\rangle, \langle z+yx\rangle]$ 之上的 $\langle z^2, y^2\rangle[x]$ 的半极大 2-集合都不可能具有 $N[x]$ 这种形式。特别是，这意味着 $\langle z^2, y^2\rangle[x]$ 有无穷多个半极大集合。然而， $\langle z^2, y^2\rangle[x]$ 的每个半极大集合都位于唯一的极大集合 $[\langle z,y\rangle[x], \langle z,y\rangle[x], \langle z,y\rangle[x]]$ 之下。

理想只有有限个半极大集合的情况并不常见。事实上， α 有有限个半极大集合，当且仅当存在有限个理想 β 满足 $\beta = (\alpha : (\alpha : \beta))$。确实，对于这样的理想 $\beta \neq \alpha$ ，列表 $[\beta, (\alpha : \beta)]$ 是一个半极大

2-集合，因此“仅当”方向显然成立。容易验证，对于半极大集合 N中的任意元素 N_j，都有 $N_j = (\alpha : (\alpha : N_j))$。对于任意有限个理想组成的有限集 $\mathcal{B}$，其元素属于 $\mathcal{B}$ 的 α 集合族也必定有限。因此，若满足 $\beta = (\alpha: (\alpha: \beta))$的理想只有有限个，那么 α的半极大集合也只有有限个。

继续下一个主题之前，我们先简要说明如何利用 (4.6) 的证明来简化（C2）。首先，用 (†) 表示以下假设：

“每当 α 是诺特环的一个理想，且 $\omega(\alpha[x]) > \omega(\alpha)$ 时，就存在有限多个极大 $\omega(\alpha[x])$-集合族，其中 $\alpha[x]$。”

我们将简要说明 (†) 与（C2）等价，但在继续之前，需要介绍 Laradji 的一个结果——不过这里我们将给出不同的证明。

(4.7) 引理。 [Lar17，推论 2.13]。对任意理想 α， $\omega(\alpha[x]) = \omega(\alpha[X])$。
证明。由归纳法，只需证明 $\omega(\alpha[x]) = \omega(\alpha[x, y])$。设 $\prod_i f_i \in \alpha[x, y]$定义了一个由 $\alpha[x, y]$组成的集合族，并取 k大于 $\prod_i f_i$的 x次数。显然$\prod_i \mathrm{eval}_{x^k}(f_i) = \mathrm{eval}_{x^k}(\prod_i f_i) \in \alpha[x]$，且根据引理 (4.5)，对所有 j，我们有 $\prod_{i\neq j} \mathrm{eval}_{x^k}(f_i) \notin \alpha[x]$。因此， $[\langle \mathrm{eval}_{x^k}(f_i)\rangle]_i$是一个由 $\alpha[x]$组成的集合族，所以 $\omega(\alpha[x, y]) \leq \omega(\alpha[x])$，进而$\omega(\alpha[x]) = \omega(\alpha[x, y])$。■

假设 (†)，并按照命题 (4.6) 的证明，改为考虑大小为 $\omega\left(\alpha[x, y]\right) = \omega\left(\alpha[x]\right) > \omega\left(\alpha\right)$ 的集合族M，以及由长度为 $\omega\left(\alpha[x]\right)$ 的 $\alpha[x]$组成的极大集合 N 的有限集。对 (4.6) 的证明作相应修改并继续进行，可得，对于某个由 α组成的集合族 N，有 $M = N[x, y]$。这与 $|N| = |N[x, y]| = |M| > \omega\left(\alpha\right)$ 矛盾，因此 $\omega\left(\alpha[x, y]\right) = \omega\left(\alpha\right)$。所以 (†) 蕴含（C2），进而 (†) 等价于（C2）。

§4.3 分次环的吸收理想

所有分次环都假设是以无挠阿贝尔群为分次群的分次环。设 R 是一个带有 G-分次 $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ 的环。若对于某个 $g \in G$ 有 $y \in R_g$，则称元素 $y \in R$ 为齐次元素，此时称 g 为 y 的（齐次）次数。对于 $f \in R$，若每个 f_j 都是次数为 $g_j \in G$ 的齐次元素，且对所有 $j \neq j'$ 都有 $g_j \neq g_{j'}$，则称 $f = \sum_j f_j$ 为 f 的齐次分解。我们称（必为有限的）集合 $\{f_j\}_j$ 为 f 的齐次分量。

如果理想 β 满足：对于任意 $f \in \beta$，它的所有齐次分量 f_j 也都属于 β，则称其为齐次理想。这等价于说， β 可以由一组齐次元素生成。对于 R的任意理想 α，定义 α^* 为由 α 的齐次分量生成的 R 的理想，它是包含于 α 中的唯一最大齐次理想。即

$$\alpha^* = \left\langle\, \alpha \cap \bigcup_{g\in G} R_g \,\right\rangle$$

众所周知，如果 $\mathfrak{p}$ 是素理想，那么 $\mathfrak{p}^*$ 也必定是素理想 [Sta23，引理 00JT]。由于吸收理想是素理想的推广，自然会问同样的结论是否也适用于 n-吸收理想：

（4.8）猜想。对于分次环 R 的任意理想 α，我们有 $\omega(\alpha^*) \leq \omega(\alpha)$。

很快我们就会看到，猜想（4.8）等价于 Anderson 和 Badawi 的第二个猜想（C2）。首先，让我们确立目前能够证明的关于 $\omega(\alpha^*)$ 的最强界。

(4.9) 命题。设 α 是分次环 R的一个理想。那么，

$$\omega(\alpha^*) \leq \omega(\alpha[x])$$

证明。令 $n = \omega(\alpha[x])$，假设 $n < \infty$，并设 $\prod_{i=1}^{n+1} f_i \subseteq \alpha^*$。我们将证明，对于某个 t，有$\prod_{i\neq t} f_i \subseteq \alpha^*$，因此 $\omega(\alpha^*) \leq n$。

令 $f_i = \sum_j f_{ij}$ 为每个 i 的 f_i 齐次分解。令 B 为 R 的有限生成子环，由每个 i 和 j 的元素 f_{ij} 生成，并令 H 为由每个 f_{ij} 的次数生成的子群。显然， B 具有由 R 上的分次诱导的 H-分次，并且每个 f_i 都必须是 B 的一个元素。这意味着 $(\alpha \cap B)^* = \alpha^* \cap B$。

由于 G 是无挠的，我们知道 H 必须是有限生成无挠阿贝尔群。根据有限生成阿贝尔群基本定理，我们知道 $H \cong (\mathbb{Z}^r, +)$，其中 r 为某个值。令 g_1, ..., g_r 为 H 的一组（自由）生成元，并令 $\pi\colon H \to \mathbb{Z}^r$ 为由 $\pi(g_i^k) = (0, .., k, .., 0)$ 给出的同构，其中 k 位于第 i^{th} 个位置。利用 π，我们可以构造一个嵌入 $\phi\colon B \to B[X^{\pm 1}] := B[x_1^{\pm 1}, ..., x_r^{\pm 1}]$，其定义为

$$\phi(y) = \sum_j y_j \prod_k x_k^{\pi(h_j)_k}$$

其中， $y = \sum_j y_j$ 是 y 的齐次分解，其中 y_j 的次数为 $h_j \in H$。注意， ϕ 是一个分次环的单射同态，满足对于 B的任意理想 β，均有 $\langle \phi(\beta) \cap \beta[X^{\pm 1}] \rangle = \langle \phi(\beta^*) \rangle = \beta^*[X^{\pm 1}]$。特别地， $\phi(\alpha^* \cap B) \subseteq (\alpha^* \cap B)[X^{\pm 1}] \subseteq (\alpha \cap B)[X^{\pm 1}]$。

根据引理（4.7），我们知道 $\omega((\alpha \cap B)[x]) = \omega((\alpha \cap B)[X])$，因此 $\omega((\alpha \cap B)[X]) \leq \omega(\alpha[x]) = n$。局部化只会减小吸收数，因此我们有$\omega\left((\alpha \cap B)[X^{\pm 1}]\right) \leq n$。然而 $\phi(\prod_{i=1}^{n+1} f_i) = \prod_{i=1}^{n+1} \phi(f_i) \subseteq \phi(\alpha^* \cap B) \subseteq (\alpha \cap B)[X^{\pm 1}]$，因此必定存在某个 t 使得

$$\phi(\prod_{i\neq t} f_i) = \prod_{i\neq t} \phi(f_i) \subseteq (\alpha \cap B)[X^{\pm 1}]$$

因此，我们有 $c(\phi(\prod_{i\neq t} f_i)) \subseteq \alpha \cap B$。根据 ϕ 的构造，对于任意 $y \in B$，我们有 $c(\phi(y)) = \langle \{y_j\}_j \rangle \lhd B$，其中 $y = \sum_j y_j$ 是 y 的齐次分解。特别地， $c(\phi(\prod_{i\neq t} f_i)) \subseteq \alpha \cap B$ 意味着 $\prod_{i\neq t} f_i$ 的齐次分解中的每个元素都必须是 $\alpha \cap B$ 的一个元素，进而 $\prod_{i\neq t} f_i \in (\alpha \cap B)^* \subseteq \alpha^*$。因此，$\omega(\alpha^*) \leq \omega(\alpha[x])$。■

作为上述命题的推论，我们得到：

（4.9.1）推论。猜想（4.8）等价于（C2）。

证明。由命题（4.9），我们知道（C2）蕴含猜想（4.8）。下面证明猜想（4.8）蕴含（C2）。设 α 是环 A的一个理想，令 β 是由 $\beta = \alpha[x] + \langle x - 1 \rangle$给出的 $A[x]$的理想。注意到 $A[x]/\beta \cong A/\alpha$，因此 $\omega(\alpha) = \omega(\beta)$。若赋予多项式环 $A[x]$ 典范的 $\mathbb{Z}$-分次，则 $\beta^* = \alpha[x]$。因此，

$$\omega(\alpha[x]) = \omega(\beta^*) \leq \omega(\beta) = \omega(\alpha) \leq \omega(\alpha[x])$$

因此，视需要而定， $\omega(\alpha) = \omega(\alpha[x])$。 ■

致谢

我感谢 Adam Logan 对本手稿初稿提出的意见，以及这些年来给予我的悉心支持和建议。我也要感谢 Ayman Badawi 为我指引了有用的资料，并对我早先（与此无关）的研究思路提出了意见。

参考文献

[McC42] Neil H. McCoy：《关于零因子的注记》。载于：《美国数学月刊》49.5（1942），第286–295页。[Sco54] W. R. Scott：《多项式环中的零因子》。载于：《美国数学月刊》61.5（1954），第336–336页。[McC57] Neal H. McCoy：《关于有限个理想和子群的并的注记》。载于：《美国数学学会会刊》8.4（1957），第633–637页。[Nag62] Masayoshi Nagata：《局部环》。载于：（1962）。[Gil67] Robert W. Gilmer Jr.：《Hilfssatz von Dedekind-Mertens 的一些应用》。载于：《斯堪的纳维亚数学》（1967），第240–244页。[Mat89] Hideyuki Matsumura：《交换环理论》。剑桥大学出版社，1989。[Got94] Christian Gottlieb：《关于有限个理想和陪集的并》。载于：《代数通信》22.8（1994），第3087–3097页。[Bad07] Ayman Badawi：《关于交换环的2-吸收理想》。载于：《澳大利亚数学学会公报》75.3（2007），第417–429页。[AB11] David F. Anderson 和 Ayman Badawi：《关于交换环的n-吸收理想》。载于：《代数通信》39.5（2011），第1646–1672页。[Cah+14] Paul-Jean Cahen、Marco Fontana、Sophie Frisch 和 Sarah Glaz：《交换环理论中的开放问题》。载于：《交换代数》。Springer，2014，第353–375页。[CW16] Hyun Seung Choi 和 Andrew Walker：《n-吸收理想的根》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1610.10077（2016）。[Don16] Guram Donadze：《无限域上交换代数的 Anderson-Badawi 猜想》。载于：《印度纯粹与应用数学杂志》47.4（2016），第691–696页。[Bad17] Ayman Badawi：《交换环的n-吸收理想及三个猜想的最新进展：综述》。载于：《环、多项式与模》（2017），第33–52页。[Lar17] Abdallah Laradji：《关于n-吸收环和理想》。载于：《数学评论》。第147卷。波兰科学院数学研究所，2017，第265–273页。[Don18] Guram Donadze：《Anderson–Badawi 根（I）$^n \subseteq I$ 公式关于n-吸收理想的证明》。载于：《数学科学会议录》128.1（2018），第1–6页。

[CW20] Hyun Seung Choi 和 Andrew Walker.《吸收理想的根》。载于：《交换代数杂志》12.2（2020年），第171–177页。[Sta23] Stacks 项目作者。Stacks 项目。https://stacks.math.columbia.edu。2023年。