arXiv:2305.03896v1 [physics.plasm-ph] 6 May 2023

一种求解一维线性化 Vlasov–Poisson 方程的新方法

Frank M. Lee* 和 B. A. Shadwick†*University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, NE 68588, United States*（日期：2023年5月9日）

我们提出了一种求解线性化 Vlasov–Poisson 方程的新方法。该方法基于平衡态和初始条件通过柯西型积分所体现的解析性质，能够为分布函数和场给出代数表达式，即无需使用积分即可表示其解。现有的标准方法通常涉及对布罗姆维奇围道进行变形，而这种做法对于某些物理上合理的构型会产生错误结果；或者采用特征函数展开，从而对解的时间结构造成误导。我们的方法更加直观，不存在这些缺陷，并且预测了此前未被认识到的行为。

一维 Vlasov–Poisson方程描述为：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m}E\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{1}$$

它将带电量 q、质量为 m 的等离子体粒子描述为单粒子分布函数 $f(x,\ v,\ t)$，忽略关联 [1]。电场 $E(x,\ t)$ 由下式给出：

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\left(q\int_{-\infty}^{\infty} f dv + \rho_{\rm ion}\right), \tag{2}$$

其中，$\rho_{\rm ion}$ 是离子电荷密度。我们围绕一个空间均匀平衡态 $f_0(v)$ 进行线性化，并假设存在一个固定的中和离子背景，即取 $f = n_0\left[f_0(v) + \delta f(x,v,t)\right],$，其中 δf 是一个小扰动，n_0 是平衡数密度。虽然通常情况下，我们认为线性化仅在有限时间内成立，这可能是由于不稳定性情况下电场的增长，也可能是由于稳定情况下的相空间丝状化 [1] 导致速度梯度变大，但我们仍将线性化方程视为一个独立的理论。由此得到的扰动电场 δE 表示为

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta E = 4\pi q\, n_0\int_{-\infty}^{\infty}\delta f\, dv. \tag{3}$$

线性化的 Vlasov 方程，

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f + v\frac{\partial}{\partial x}\delta f + \frac{q}{m}\, f_0'\,\delta E = 0, \tag{4}$$

由于存在精确解，相关文献对此给予了广泛关注。现有方法通常分为两大类：van Kampen [2] 和 Case [3, 4] 的方法；以及 Jackson [5] 的方法（扩展了 Landau [6] 的方法）。本文介绍一种克服这些方法局限性的新方法，并解决了在不稳定平衡态情况下这些方法之间一个表面上的矛盾。我们的解仅利用柯西型积分 [7], 的成熟性质。涉及复平面中的 Laurent 级数展开和代数运算，并且具有不含积分表达式的精确表示，这不同于 van Kampen–Case 解。此外，与 Jackson 解不同，我们的方法能够自然地得到场和分布函数的正确渐近近似。

Case [3, 4] 通过将线性化的 Vlasov 方程视为一个特征值问题，对 van Kampen 的 [2] 方法进行了推广；在这个问题中，介电函数的零点是离散特征值，而 van Kampen 的驻波对应于实数连续特征值，其贡献写作连续谱积分。由于 van Kampen 对解的贡献仍以不透明的积分表达式表示，这种表述掩盖了其时间行为。Jackson [5] 在 Landau [6], 的方法基础上，通过移动拉普拉斯反演围道并对被积函数作解析延拓，将任意时刻的电场写成留数之和。Jackson 的方法依赖于初始扰动“合理”这一假设；经过仔细分析，我们发现这一假设过于严格。此外，Jackson 的方法暗示所有解都是指数函数之和，且其指数的自变量与时间呈线性关系；正如我们下文将要说明的，这至少对一类初始条件并不成立。Jackson 的方法被标准教科书广泛引用，却忽略了复平面中的函数性质，因而无法捕捉完整的时间演化，通常也无法给出正确的解的渐近近似。

将 $f^{(1)}(k,v,t)$ 和 $E^{(1)}(k,t)$ 分别视为 $\delta f(x,v,t)$ 和 $\delta E(x,t)$ 的空间傅里叶变换，(4) 变为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ivk\right) f^{(1)}(k,v,t) + \frac{q}{m}\, f_0'(v)\, E^{(1)}(k,t) = 0\,, \tag{5a}$$

其中 $E^{(1)}(k,t)$ 由 (3) 的傅里叶变换得到：

$$E^{(1)}(k,t) = \frac{\mathcal{E}}{ik\lambda_{\rm D}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(k,v,t)\, dv, \tag{5b}$$

其中，$\mathcal{E} = m\, v_{\rm th}\,\omega_p/q$ $\omega_p = \sqrt{4\pi q^2 n_0/m}$ 为等离子体频率，$\lambda_{\rm D} = v_{\rm th}/\omega_p$ 为德拜长度，$v_{\rm th}$ 为平衡态的热速度。为简洁起见，我们

* flee3@unl.edu
† shadwick@unl.edu

下文将省略对 k 的依赖。求解式（5）时，自然会出现两个分段解析函数 [7]：介电函数，

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0'(v)}{v-u}\,dv = \begin{cases} \Xi^+(u), & \operatorname{Im}\omega > 0 \\ \Xi^-(u), & \operatorname{Im}\omega < 0, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $u = \omega/k$ 和

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{(1)}(v,0)}{v-u}\,dv = \begin{cases} F^+(u), & \operatorname{Im} u > 0 \\ F^-(u), & \operatorname{Im} u < 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中，$f^{(1)}(v,\,0)$ 为初始扰动。(6) 和 (7) 右端成对出现的“+”和“–”函数有时被称为“柯西分解”。利用 (5b)、(6) 和 (7)，(5a) 的解可表示为拉普拉斯逆变换 [1]，

$$f^{(1)} = \int_{\Gamma-i\infty}^{\Gamma+i\infty} \left[\frac{f^{(1)}(v,0)}{2\pi i} + \frac{\omega_p^2 f_0'(v)}{k^2}\frac{F^+(is/k)}{\Xi^+(is/k)}\right]\frac{e^{st}\,ds}{s+ivk}, \tag{8}$$

其中，Γ 的选取应确保围道位于被积函数所有极点的右侧，这是拉普拉斯反演定理的要求。同样，电场可以写为 [1]

$$E^{(1)} = -\frac{\mathcal{E}}{k^2\lambda_{\mathrm{D}}^2}\int_{\Gamma-i\infty}^{\Gamma+i\infty} \frac{F^+(is/k)}{\Xi^+(is/k)}\,e^{st}\,ds. \tag{9}$$

对于不稳定平衡态，van Kampen–Case 方法与 Jackson 方法之间似乎存在差异。ϵ 在上半平面中的一个零点意味着在下半平面中存在一个复共轭零点，二者各自对应一个离散模。van Kampen–Case 方法除了考虑与连续谱（即所谓的 van Kampen模）相关的模所产生的贡献外，还包括离散模的贡献。式 (6) 和 (7) 的结构将每一对离散模的振幅联系起来。因此，如果 ϵ 具有一对简单零点 ω_0 和 ω_0^*，则电场具有如下形式：

$$E_{\mathrm{vKC}}^{(1)} = \frac{\mathcal{E}}{ik\lambda_{\mathrm{D}}}\left(A\,e^{-i\omega_0 t} - A^* e^{-i\omega_0^* t}\right) + E_{\mathrm{vK}}, \tag{10}$$

其中

$$E_{\mathrm{vK}} = \frac{\mathcal{E}}{ik\lambda_{\mathrm{D}}}\int_{-\infty}^{\infty} du\left[\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)} - \frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}\right]e^{-ikut} \tag{11}$$

是 van Kampen 模态的贡献。不稳定的双流麦克斯韦平衡态，

$$f_0 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left[e^{-(v-v_0)^2/2\sigma^2} + e^{-(v+v_0)^2/2\sigma^2}\right], \tag{12}$$

给出

$$\Xi^{\pm} = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2\sigma^2}\left\{1 \pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{u+v_0}{2\,\sigma}\,\mathrm{W}\left(\frac{u+v_0}{\pm\sqrt{2}\,\sigma}\right) + \frac{u-v_0}{2\,\sigma}\,\mathrm{W}\left(\frac{u-v_0}{\pm\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right]\right\}, \tag{13}$$

其中

$$\mathrm{W}(z) = e^{-z^2}\,\mathrm{erfc}(-i\,z) \tag{14}$$

是 Faddeeva函数 [8]。与式 (13) 对应的介电函数的零点为 $\omega_0 = \pm ig$，其中 $g > 0$。令初始扰动与平衡态成正比，则有 $A^* = A$，从而得到

$$E_{\mathrm{vKC}}^{(1)} = E_{\mathrm{u}} + E_{\mathrm{d}} + E_{\mathrm{vK}}\,, \tag{15}$$

其中

$$E_{\mathrm{u}} = \frac{\mathcal{E}}{ik\lambda_{\mathrm{D}}}A\,e^{gt} \quad \text{and} \quad E_{\mathrm{d}} = -\frac{\mathcal{E}}{ik\lambda_{\mathrm{D}}}A\,e^{-gt}. \tag{16}$$

然而，Jackson 方法在布罗姆维奇围道平移并变形为环绕极点的围道后，仅会拾取 Ξ^+的零点（即 ϵ的解析延拓）所产生的贡献；当取极限 $\Gamma \to -\infty$时，该围道被舍弃。这意味着电场具有如下形式

$$E_{\mathrm{J}}^{(1)} = E_{\mathrm{u}} + \frac{\mathcal{E}}{ik\lambda_{\mathrm{D}}}D_{\mathrm{J}}, \tag{17}$$

其中 D_{J} 是在
下半平面。(15) 和 (17) 所暗示的时间演化截然不同，因此解决这一表面上的矛盾至关重要。

我们在长度为 $L = 7\lambda_{\mathrm{D}}$ 的周期性区域上，对平衡态 (12) 数值求解了线性化 Vlasov–Poisson 方程 [9] _
$\sigma = v_{\mathrm{th}}/2$ $v_0 = \sqrt{3}\,v_{\mathrm{th}}/2$
$f^{(1)}$ v 0 $= 0.01\,f_0$ $k\,\lambda_{\mathrm{D}} = 2\pi/7$
（，），以及 。我们的结果表明，与 Case 相反，衰减离散模并不存在于电场中；见图 1。从场中移除不稳定模后所剩的部分（红色曲线）显然并非由衰减离散模（绿色曲线）主导，而是由 Ξ^+ 在下半平面的零点所产生的场。

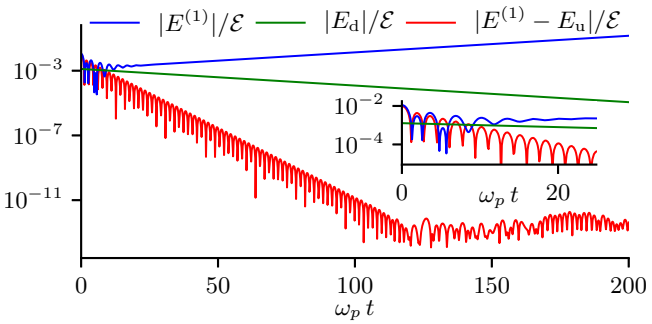


图 1. 线性化 Vlasov–Poisson 方程的数值解：电场 $|E^{(1)}|/\mathcal{E}$（蓝色）；电场中推定的衰减模贡献，$|E_{\mathrm{d}}|/\mathcal{E}$（绿色）；以及去除增长模后的电场，$|E^{(1)} - E_{\mathrm{u}}|/\mathcal{E}$（红色）。

为了进一步了解这一点，考虑一种洛伦兹双流平衡，对于该平衡态，解可以很容易地以闭式求得。诚然，这种分布并不符合物理实际，但线性理论的数学性质不受影响。我们取

$$f_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{(v+v_0)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(v-v_0)^2+\alpha^2}\right], \tag{18}$$

对于该情况

$$\Xi^{\pm}(u) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2}\frac{(u\pm i\alpha)^2+v_0^2}{\left[(u\pm i\alpha)^2-v_0^2\right]^2}. \tag{19}$$

设 $\beta = \omega_p\sqrt{\lambda-\Lambda^2-1/2}$、$\lambda^2 = 1/4+2\Lambda^2$ 和 $\Lambda = k\,v_0/\omega_p$。若 $v_0 > \alpha$，则对于 $k < \omega_p\sqrt{v_0^2-\alpha^2}/(v_0^2+\alpha^2)$，我们有 $\beta > k\,\alpha$，且 ϵ 在上半平面的 $i\tilde{g} = i(\beta - k\,\alpha)$ 处有一个根，在下半平面的$-i(\beta - k\,\alpha)$ 处也有一个根。由 (19) 可知，上半平面的根对应于 Ξ^+ 的一个零点，而下半平面的根则是 Ξ^-的一个零点。此外，Ξ^+ 在下半平面的频率 $ih = -i(\beta + k\,\alpha)$ 和$\pm\delta - ik\,\alpha$处有根，其中 $\delta = \omega_p\sqrt{\lambda+\Lambda^2+1/2}$；这些不是 ϵ 的零点，而是其解析延拓的零点，因此，不是系统的正规模。

由于 Ξ^+ 的零点数量有限，且当 $\mathrm{Re}\,s \to -\infty$时，被积函数趋于零，因此在围绕极点取极限 $\Gamma \to -\infty$的 Jackson 方法在此情况下给出了正确的解。对于该系统，van Kampen–Case 形式中的积分可以直接计算，从而验证了基于（9）的计算结果。电场为

$$\frac{E^{(1)}}{\widetilde{\mathcal{E}}} = \mu\,\frac{\omega_p}{ik\alpha}\left(\frac{\zeta_+}{2}\,e^{\tilde{g}t}+\frac{\zeta_+}{2}\,e^{-ht}+\zeta_-\,e^{-\alpha t}\cos\delta t\right), \tag{20}$$

其中 $\widetilde{\mathcal{E}} = m\,\alpha\,\omega_p/q$、$\zeta_\pm = (\lambda\mp 2\Lambda^2\mp 1/2)/(\lambda\mp 4\Lambda^2\mp 1/2)$，以及 $f^{(1)}(v,0) = \mu f_0(v)$。（注意，我们选择的特征速度尺度为 α，而不是未定义的 v_{th}。）式（20）中的第一项来自 ϵ 在上半平面的根，而其余各项则来自 Ξ^+ 在下半平面的零点，代表朗道阻尼。可以得到 $f^{(1)}(v,t)$ 的闭式表达式，但这里并不重要。式（20）的形式与式（17）相同，而并非明显地与式（15）相同；式（20）中没有任何一项与 $e^{-\tilde{g}t}$成正比，后者对应于 ϵ 在下半平面的根。van Kampen–Case 的预言认为，衰减离散模应当出现在解中，但显然这是不正确的。在计算过程中可以清楚地看到，E_{vK} 包含一项恰好抵消衰减离散模贡献的项；正如我们稍后将展示的，这种抵消是普遍存在的。

将式 (8) 中的复平面旋转$u = is/k$ 很方便，由此得到

$$f^{(1)} = \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty}\left[\frac{f^{(1)}(v,0)}{-2\pi i}-\frac{\omega_p^2 f_0'(v)}{k^2}\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}\right]\frac{e^{-ikut}}{u-v}\,du\,, \tag{21}$$

其中 $\gamma = \Gamma/k$。现在，围道为水平线，且位于被积函数的极点上方。积分中核 $1/(u-v)$ 的存在，使我们能够运用柯西型积分的成熟性质 [7]。对于 v 为实数的情形，我们将式 (21) 解释为一个“–”函数，它由围绕布罗姆维奇围道进行柯西分解而得（回想一下，$\gamma > 0$，因此实数 v 轴位于布罗姆维奇围道下方）。该方法的优势在于，布罗姆维奇围道保持固定，而确定唯一的“+”和“–”柯西分解只需对柯西密度（即不包括核的被积函数）进行代数运算。分布函数变为

$$f^{(1)} = f^{(1)}(v,0)e^{-ikvt} - 2\pi\,i\,\frac{\omega_p^2}{k^2}\,f_0'(v)\,\Phi^-(v,t), \tag{22}$$

由于式 (21) 中的第一项给出

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty}\frac{e^{-iku t}}{u-z}\,du = \begin{cases} 0, & \mathrm{Im}\,z > \gamma \\ -e^{-ikzt}, & \mathrm{Im}\,z < \gamma \end{cases} \tag{23}$$

并且我们定义了

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty}\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}\frac{e^{-iku t}}{u-z}\,du = \begin{cases}\Phi^+, & \mathrm{Im}\,z > \gamma \\ \Phi^-, & \mathrm{Im}\,z < \gamma.\end{cases} \tag{24}$$

利用式 (22)，我们从式 (5a) 得到 $E^{(1)}(t)$:

$$E^{(1)} = 2\pi\,i\,\frac{\mathcal{E}}{k^2\lambda_{\mathrm{D}}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikv\right)\Phi^-. \tag{25}$$

因此，求解的关键在于：给定 $F^+e^{-iku t}/\Xi^+$，确定 Φ^-。$F^\pm$ 和 $\Xi^\pm$ 是关于实轴的柯西分解，而 $\Phi^\pm$ 是关于布罗姆维奇围道的柯西分解。因此，在计算 Φ^- 时不会用到 F^- 或 Ξ^-；整个问题完全由 F^+、Ξ^+和 $e^{-iku t}$ 及其各自的解析性性质决定。

分解 (24) 必须满足 $\Phi^\pm$ 相应的函数性质：它们必须是解析的，并且当 $\mathrm{Im}\,z \to \pm\infty$ 时趋于零。注意，对于 $\mathrm{Im}\,z \to \mp\infty$，不存在此类条件。由索霍茨基关系 [7]，可得：

$$\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}e^{-iku t} = \Phi^+(u,t) - \Phi^-(u,t). \tag{26}$$

F^+ 在实轴下方的行为是 Jackson 构造忽略的关键事实。然而，如果我们假设 $F^+e^{-iku t}/\Xi^+$ 在 $\mathrm{Im}\ u \to -\infty$ 时趋于零（正如 Jackson 所做的那样），那么唯一的奇点来自 F^+ 的极点和 Ξ^+的零点。于是，通过将极点与 F^+/Ξ^+分离，可以推导出 $\Phi^\pm$：

$$\Phi^- = -\frac{F^+(z)}{\Xi^+(z)}e^{-ikzt} + \sum_n \mathrm{P}_n\left[\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}e^{-iku t}\right](z), \tag{27}$$

and

$$\Phi^+ = \sum_n \mathrm{P}_n\left[\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}e^{-iku t}\right](z), \tag{28}$$

其中，$\mathrm{P}_n[\varphi](z)$ 表示 φ 关于 z的函数在其第 n 个极点处的 Laurent 级数的主部。将 Φ^- (27) 代入 (22) 和 (25) 得到

$$f^{(1)} = f^{(1)}(v,0)\, e^{-ikvt} + 2\pi\, i\, \frac{\omega_p^2}{k^2}\, f_0'(v) \left\{ \frac{F^+(v)}{\Xi^+(v)}\, e^{-ikvt} - \sum_n \mathrm{P}_n \left[\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}\, e^{-ikut} \right](v) \right\} \quad (29)$$

and

$$\frac{E^{(1)}}{\mathcal{E}} = -\frac{2\pi}{k\lambda_\mathrm{D}} \sum_n \mathrm{Res}_n \left[\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}\, e^{-ikut} \right], \quad (30)$$

其中，$\mathrm{Res}_n[\varphi]$ 表示 φ 在其第 n个极点处的留数。注意，这些求和可能包含无穷多项。表达式 (29) 和 (30) 是通过将围道平移并绕极点变形而得到的传统 Jackson 结果，标准教科书中对此有广泛引用。然而，只有当 $\mathrm{Im}\ u \to -\infty$ 时，F^+/Ξ^+ 的发散速度慢于 e^{ikut}，这一结果才成立。

麦克斯韦初始条件给出的 F^+ 通常不满足这一条件，因此需要对柯西分解 (26) 进行修正，进而得到的解将不同于 Jackson 形式所得到的解。考虑

$$f^{(1)}(v,0) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\, a}\, e^{-v^2/2a^2}, \quad (31)$$

它在两个半平面内都有本性奇点，并可将其分解为

$$f^{(1)}(u,0) = \frac{\mu}{\sqrt{8\pi} a} \left[\mathrm{W}\left(\frac{u}{\sqrt{2}\, a} \right) + \mathrm{W}\left(-\frac{u}{\sqrt{2}\, a} \right) \right]. \quad (32)$$

(32) 右侧的第一项（第二项）在上（下）半平面内解析，并在无穷远点处趋于零，但在相反的半平面内的无穷远点处有本性奇点。因此，

$$F^\pm = \pm \frac{\mu}{\sqrt{8\pi}\, a}\, \mathrm{W}\left(\pm \frac{u}{\sqrt{2}\, a} \right) \quad (33)$$

并分离由 Ξ^+ 产生的极点以及由 W 函数和 e^{-ikut}产生的奇点；后者需要移动自变量，从而可进行柯西分解 (26)，得到

$$\Phi^- = \frac{\mu}{\sqrt{8\pi}\, a} \left\{ \mathrm{W}\left(\frac{-z}{\sqrt{2}a} \right) \frac{e^{-ikzt}}{\Xi^+} - \mathrm{W}\left(\frac{ibt - z}{\sqrt{2}a} \right) \frac{e^{-ct^2}}{\Xi^+} - \sum_n \mathrm{P}_n \left[\mathrm{W}\left(\frac{-u}{\sqrt{2}a} \right) \frac{e^{-ikut}}{\Xi^+} - \mathrm{W}\left(\frac{ibt - u}{\sqrt{2}a} \right) \frac{e^{-ct^2}}{\Xi^+} \right](z) \right\}, \quad (34)$$

其中 $b = -ka^2$ 和 $c = k^2a^2/2$。将其代入 (25)，可得

$$\frac{E^{(1)}}{\mathcal{E}} = \frac{\mu}{ik\lambda_\mathrm{D}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{i}{a} \sum_n \mathrm{Res}_n \left[\mathrm{W}\left(\frac{-u}{\sqrt{2}a} \right) \frac{e^{-ikut}}{\Xi^+} - \mathrm{W}\left(\frac{ibt - u}{\sqrt{2}a} \right) \frac{e^{-ct^2}}{\Xi^+} \right] + \Delta\, e^{-ct^2} \right\}, \quad (35)$$

其中 Δ是一个取决于平衡态的常数。麦克斯韦分布在复平面中的行为更为复杂，因此柯西分解从根本上有所不同，其时间演化并非简单地由指数函数之和构成，且指数函数的自变量不随时间线性变化；这与 Jackson 方法的预期不同。在这种情况下，显然，当 (9) 中的布罗姆维奇围道移动时，$\Gamma \to -\infty$，围道对积分的贡献不会消失。

为说明 (35) 的后果，我们取平衡态。

$$f_0 = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{v^2 + \alpha^2}, \quad (36)$$

对于 which

$$\Xi^\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{1}{(u \pm i\,\alpha)^2} \quad (37)$$

和 $\Delta = 1$。该场是

$$\frac{E^{(1)}}{\widetilde{\mathcal{E}}} = \mu\, \frac{\omega_p}{ik\alpha} \left(\eta \left| \mathrm{W}\left(\frac{ik\alpha - \omega_p}{\sqrt{2}ak} \right) \right| e^{-k\alpha t} \cos(\omega_p t + \theta) + e^{-ct^2} \left\{ 1 + \eta\ \mathrm{Im} \left[\mathrm{W}\left(\frac{ibkt + ik\alpha - \omega_p}{\sqrt{2}ak} \right) \right] \right\} \right) \quad (38)$$

其中 $\eta = \sqrt{2\pi}\,\overline{\omega_p}/ak$ 和 $\theta =$ 是 W 函数 $[(ik\alpha - \omega_p)/\sqrt{2}a\overline{k}]$ 的参数。精确解（其中 $\mu = 0.01$、$a/\alpha = 0.2$ 和 $k\,\alpha/\omega_p = 1/2$）与 van Kampen 解的比较如图 2 所示。我们通过使用任意精度 Python 库 mpmath [10]（计算精度为 200 位小数）对式 (11) 进行数值求值，计算得到了 van Kampen 解。我们通过将电场拟合为 $E_\mathrm{L} + E_\mathrm{W}$，来比较式 (11) 与解析形式 (38)，其中

$$E_\mathrm{L} = l_1 e^{l_2 t} \cos(l_3\, t + l_4) \quad (39a)$$

and

$$E_\mathrm{W} = w_1\, e^{-w_2 t^2} [1 + w_3\ \mathrm{Im}\, \mathrm{W}(iw_4 t + iw_5 + w_6)]\,. \quad (39b)$$

这样做需要极高的精度，因为涉及 W 函数的项是其参数的缓变函数，而类高斯行为会持续一段时间，之后与 Ξ^+ 的单对根相关的指数衰减（朗道阻尼）才会占主导。图 2 上方面板中的红色虚线表示 E_vK。蓝线表示去除 E_L 后的电场，绿线则表示去除 E_W 后的电场。拟合提取出的参数与解析值的吻合精度约达 150 位。拟合残差（以相对

误差的形式显示在图 2 下方面板中）几乎没有明显结构，证实拟合函数很好地再现了解析形式。人们常指出，朗道阻尼代表系统的“长时间”行为。在系统由这种长时间行为主导之前，场振幅必须下降约 20 个数量级；在最初约 16 个等离子体周期内，朗道阻尼几乎不可见。这完全是由初始条件的贡献造成的，而初始条件在物理上并非不合理。

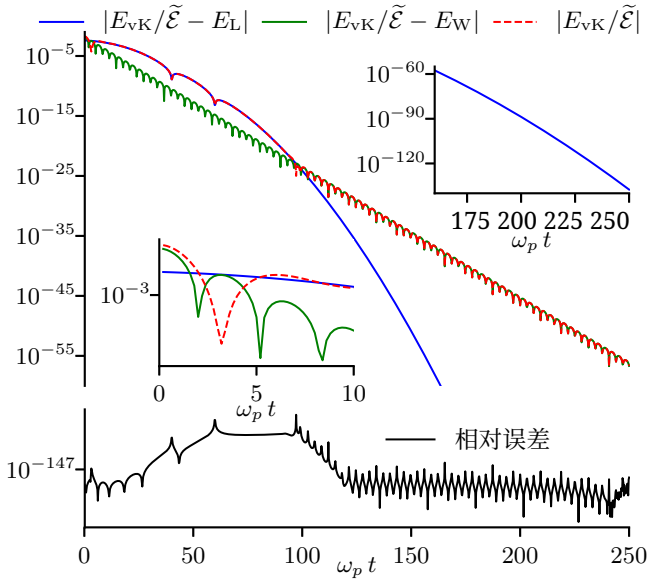


图 2. 对于窄麦克斯韦初始扰动和洛伦兹平衡态，使用 van Kampen 计算的电场（红色虚线）。下方面板中显示的将 van Kampen 解拟合到（39）的相对误差，证实了（38）的正确性。详情请见正文。

必须强调的是，非指数项的存在，即除 Jackson 的结果之外的项，并不只取决于初始条件或平衡态的形式，还取决于当 Im $u \to -\infty$ 时，F^+/Ξ^+ 是否比 $e^{iku t}$ 发散得更快。因此，对于与上述相同的初始条件和平衡态

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, v_{\rm th}} e^{-v^2/2v_{\rm th}^2} \tag{40}$$

只要 $v_{\rm th}$ $a <$ ，就可以呈现定性上相同的行为。对于这一平衡态

$$\Xi^+ = 1 + \frac{\omega_p^2}{v_{\rm th}^2 k^2}\left[1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{u}{v_{\rm th}}\,\mathrm{W}\left(\frac{u}{\sqrt{2}\, v_{\rm th}}\right)\right], \tag{41}$$

以及 $\Delta = 3/4$。由于 Ξ^+ 有无限多个零点，因此无法得到场的闭式表达式。对于 $a = v_{\rm th}/10$，使用 Ξ^+ 的前 1000 个零点计算得到的场 (35)（结合 (41)）如图 3 中的蓝色曲线所示。绿色曲线表示使用相同零点计算得到的 Jackson 解。红色虚线曲线是该平衡态和初始条件下，在长度为 $L = 4\pi\lambda_{\rm D}$ 的周期性区域上对线性化 Vlasov–Poisson 方程的数值解，其中 $k\lambda_{\rm D} = 1/2$ 和 $\mu = 0.01$。

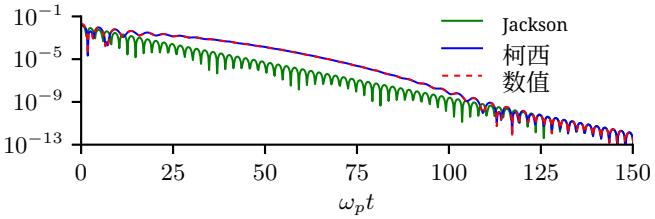


图 3. 麦克斯韦初始扰动比麦克斯韦平衡态更窄时，带有 (41) 的电场 (35)（蓝色）。显然，Jackson 方法 (30)（绿色）未能捕捉到电场中的一个关键特征；数值解（红色虚线）中存在这一特征，而通过柯西分解得到的表达式（蓝色）则再现了这一特征。详情见正文。

此外，Jackson 方法在对被积函数作解析延拓的同时，将 (9) 中的 $\Gamma \to -\infty$ 平移，一般而言并不一定能为解提供可靠的渐近近似。考虑上述初始条件和平衡态

$$f_0 = \frac{1}{2\, v_{\rm th}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi\, v}{2\, v_{\rm th}}\right) \tag{42}$$

对于该情形而言

$$\Xi^+ = 1 + \frac{\omega_p^2}{8\, k^2 v_{\rm th}^2}\left[\psi^{(1)}\left(\frac{v_{\rm th} - iu}{4\, v_{\rm th}}\right) - \psi^{(1)}\left(\frac{3v_{\rm th} - iu}{4\, v_{\rm th}}\right)\right], \tag{43}$$

其中 $\psi^{(1)}$ 是三伽马函数 [8] 和 $\Delta = 1$。如图 4 所示，Jackson公式在此处失效，因为随着添加的项越来越多，解会发散。红色虚线曲线是针对这一平衡态和周期性区域上的初始条件，线性化 Vlasov–Poisson 方程的数值解，区域长度为 $L = 4\pi\lambda_{\rm D}$，其中 $k\lambda_{\rm D} = 1/2$、$a = v_{\rm th}$ 和 $\mu = 0.01$。蓝色曲线是使用 Ξ^+的前 20 个零点，根据 (43) 得到的 (35)。Jackson公式失效的原因在于，Ξ^+ 的零点沿虚轴向下移动；在 (30) 中将其代入分子 F^+ 后，会导致振幅变得越来越发散。相比之下，柯西分解得到的 (35) 中的分子在下半平面的无穷远点处趋于零，因此具有恰当的渐近形式。因此，考察整个柯西密度的行为至关重要，而不仅仅是通常所考察的 Ξ^+。

对于具有任意阶有限个不稳定模态的平衡态，采用我们的记号，van Kampen–Case 解 [2–4], 表示为

$$f^{(1)} = -2\pi i \frac{\omega_p^2}{k^2} f_0' \left\{ \sum_j \mathrm{P}_j \left[\frac{F^+}{\Xi^+} e^{-iku t}\right](v)\right.$$

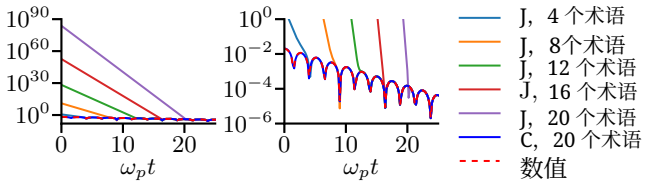


图 4. 式 (35) 中取式 (43) 的电场（蓝色），以及截取不同项数的 Jackson 解（式 (30)，左图）。右图展示了放大的刻度。采用柯西分解得到的解（蓝色，仅取 20 项）与线性化 Vlasov–Poisson 方程的数值解（红色虚线）非常吻合。

$$+\sum_j \mathrm{P}_j\left[\frac{F^-}{\Xi^-}e^{-ikut}\right](v)\Bigg\}+\int_{-\infty}^{\infty}du\left[\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}-\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}\right]\times\left[\frac{\omega_p^2}{k^2}\,\mathrm{P}\,\frac{f_0'(v)}{v-u}+\frac{\Xi^+(u)+\Xi^-(u)}{2}\,\delta(v-u)\right]e^{-ikut}, \tag{44}$$

其中，求和分别遍历 Ξ^+ 上半平面和 Ξ^- 下半平面中的零点，P 表示柯西主值。利用柯西分裂的性质，我们得到

$$\lim_{\mathrm{Im}\,z\to 0^+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}\frac{e^{-ikut}}{u-z}\,du=\sum_j \mathrm{P}_j\left[\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}e^{-ikut}\right](v) \tag{45}$$

and

$$\lim_{\mathrm{Im}\,z\to 0^-}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}\frac{e^{-ikut}}{u-z}\,du=-\frac{F^-(v)}{\Xi^-(v)}\,e^{-ikvt}+\sum_j \mathrm{P}_j\left[\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}e^{-ikut}\right](v), \tag{46}$$

结合索霍茨基关系 [7],

$$\lim_{\mathrm{Im}\,z\to 0^\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}\frac{e^{-ikut}}{u-z}\,du=\pm i\pi\frac{F^-(v)}{\Xi^-(v)}\,e^{-ikvt}+\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}\frac{e^{-ikut}}{u-v}\,du, \tag{47}$$

我们可以写出

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}\frac{e^{-ikut}}{v-u}\,du=i\pi\frac{F^-(v)}{\Xi^-(v)}e^{-ikvt}-2\pi\,i\sum_j \mathrm{P}_j\left[\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}e^{-ikut}\right](v). \tag{48}$$

代入（44）后，（48）中对 j 求和的各项恰好抵消了衰减离散模对分布函数的贡献，从而得到

$$f^{(1)}=-2\pi i\frac{\omega_p^2}{k^2}f_0'\sum_j \mathrm{P}_j\left[\frac{F^+}{\Xi^+}e^{-ikut}\right](v)-i\pi\,\frac{\omega_p^2}{k^2}\,f_0'\,\frac{F^-}{\Xi^-}\,e^{-ikvt}+\int_{-\infty}^{\infty}du\Bigg\{\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}\frac{\omega_p^2}{k^2}\,\mathrm{P}\,\frac{f_0'(v)}{v-u}+\left[\frac{F^+(u)}{\Xi^+(u)}-\frac{F^-(u)}{\Xi^-(u)}\right]\frac{\Xi^+(u)+\Xi^-(u)}{2}\,\delta(v-u)\Bigg\}e^{-ikut}. \tag{49}$$

因此显然，Case 对离散模的计数并不正确。作为特征值问题的一部分，只要存在增长离散模，衰减离散模就必然存在；但它们总是会与 van Kampen模的一个贡献相抵消，因此永远不会对分布函数或电场的时间演化产生贡献。这一结果如图 5 所示。

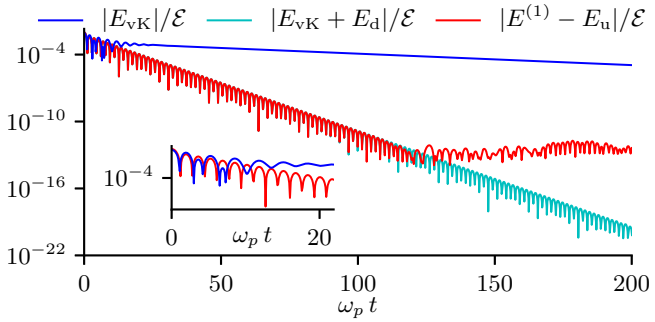


图 5. van Kampen 模对场的贡献 $|E_{\mathrm{vK}}|/\mathcal{E}$（蓝色），对应图 1 所示的系统。场主要由指数衰减主导，其衰减形式与 Case 衰减离散模相同（但振幅相反） E_{d}。将 E_{d} 加到 van Kampen 模的贡献上$|E_{\mathrm{vK}}+E_{\mathrm{d}}|/\mathcal{E}$（青色），会产生抵消，其演化与从数值解的场中减去增长模时相同 $|E^{(1)}-E_{\mathrm{u}}|/\mathcal{E}$（红色）。

Elskens 和 Escande [11] 在准线性理论的背景下，提出了一种用于近似 Vlasov 动力学的有限自由度粒子模型。他们认为，不稳定/稳定特征模对伴随着朗道阻尼，因此衰减特征模对电场的贡献会被朗道阻尼抵消。与此不同，尽管我们发现连续谱恰好会抵消衰减离散模，但离散模的衰减率与 Landau 极点给出的衰减率显著不同，相速度也是如此。我们的结果是线性化系统的解所具有的一项严格性质，并非近似论证的结果。

我们开发了一种求解线性化 Vlasov–Poisson 系统的方法，该方法基于平衡态和初始条件的解析性，并利用了柯西型积分的性质。我们的方法为分布函数和场生成代数表达式，即解无需通过积分表示；该方法在-

对（24）的解释可以推广到一大类反演积分。当平衡态导致 Ξ^+ 具有无限多个零点时，我们的方法能够为场和分布函数提供可靠的渐近近似。我们证明，对于“合理的”初始条件和稳定的平衡态，解所表现出的时间依赖性可能比通过直接计算拉普拉斯逆变换所预期的简单指数衰减和振荡更加复杂。我们的分析解释了不稳定系统中 Jackson 解与 van Kampen–Case 解之间表面上的不一致。我们证明，衰减离散模对场和分布函数的贡献，总是会被 van Kampen 模的相应贡献所抵消。Case 以正交特征函数形式给出的表述忽略了这样一个事实：van Kampen模与衰减离散模本征函数并不相互独立。因此，Case 的“模计数”是不正确的。由 $\epsilon = 0$ 的解产生的正规模并非全部出现在解中；只有不稳定离散模得以保留。

致谢

本研究得到美国能源部（U. S. DoE）合同编号 DE-SC0018363 和美国国家科学基金会（NSF）合同编号 PHY-2108788 的资助。

F.M.L. 和 B.A.S. 对本研究作出了同等贡献。

[1] N. A. Krall 和 A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* 1973 （McGraw-Hill，纽约，）。[2] N. G. van Kampen，《等离子体中驻波理论》，Physica **21**，949（1955）。[3] K. M. Case，《等离子体振荡》，Ann. Phys. **7**，349（1959）。[4] K. M. Case，《等离子体振荡》，Phys. Fluids **21**，249（1978）。[5] J. D. Jackson，《纵向等离子体振荡》，J. Nucl. Energy C **1**，171（1960）。[6] L. D. Landau，《电子等离子体的振动》，J. Phys. USSR **10**，25（1946），[Sov. Phys. JETP **16**，547，（1946）]。[7] F. D. Gakhov，*Boundary Value Problems*（Dover，纽约，York，1990）。[8] K. B. Oldham、J. C. Myland 和 J. Spanier, *An Atlas of Functions* 2 + ，第 nd 版（Springer Science Business Media，2009）。[9] M. Carri´e 和 B. A. Shadwick，《一种用于求解一维 Vlasov–Poisson 系统的无条件稳定时间隐式算法》，《J. Plasma Phys.》**88**，905880201 2022( )。[10] F. Johansson *et al.*, *mpmath: A Python Library for Arbitrary-Precision Floating-Point Arithmetic (Version 0.18)* 2013 ( ), http://mpmath.org/。[11] Y. Elskens 和 D. Escande, *Microscopic Dynamics ofPlasmas and Chaos*（英国布里斯托尔，Institute of Physics Publishing，2003）。