arXiv:2305.03946v1 [cs.CG] 6 May 2023

一种改进的移动传感器目标覆盖多项式时间近似方案

Nonthaphat Wongwattanakij* Nattawut Phetmak† Chaiporn Jaikaeo‡Jittat Fakcharoenphol§

2023年5月9日

摘要

本文研究移动传感器的移动距离最小化问题。给定一组n点目标，*k-Sink Minimum Movement Target Coverage Problem* 是安排移动传感器的调度方案，使其从初始所在的 k 基站出发覆盖所有目标，并使传感器的总移动距离最小。对于 k（即基站数量）为常数的情况，我们提出了一种多项式时间近似方案，可在 $n^{O(1/\epsilon)}$ 时间内为该问题求得一个$(1+\epsilon)$近似解。与先前在不作任何目标分布假设的情况下、运行时间为$n^{O(1/\epsilon^2)}$的工作相比，我们的算法将运行时间呈指数级缩短。为设计更快的算法，我们证明了最优解中任意单位面积内传感器数量的一个更强上界，并采用了一种更精细的动态规划算法，其复杂度仅取决于问题的宽度。

1 引言

无线传感器网络（WSNs）应用于军事、工业和灾害应对等各种类型的应用中 [ASSC02, YMG08]。为了有效监测感兴趣区域，需要将传感器节点部署在特定位置，使其能够协同为整个区域提供整体感知覆盖 [Wan11, WZLD20]。无线传感器网络可能由静态传感器节点、移动传感器节点或二者共同组成。借助移动传感器节点，监测区域可以通过让这些移动节点移动到适当位置进行动态调整。这种能力有助于减少传感器节点的总数量，和/或为感兴趣区域提供更好的感知覆盖。

本文研究 k-汇点最小移动目标覆盖问题，其目标是从 k 个站点调度传感器（感知范围为 r），以覆盖所有目标点，同时最小化每个传感器的总距离。Gao、Chen、Wu 和 Chen [GCWC17] 提出了该问题的一个多项式时间近似方案，其运行时间为 $n^{O(1/\epsilon^2)}$；当目标点在监视区域内均匀随机分布时，该方案返回的解的成本至多为最优成本的（$1+\epsilon$）。该结果最初以 [CGWC16] 的形式发表于 INFOCOM'16。

我们的贡献如下。我们观察到，与其他几何问题中的许多多项式时间近似方案一样，它们基于穷举搜索和平移的通用框架并不依赖于目标分布；因此，在没有分布假设的情况下，该框架仍然有效。此外，我们注意到，其算法的运行时间界依赖于这样一个错误论断：对于某个特定区域，最优解中所需传感器数量的上界（见 [CGWC16] 中的定理 3以及 [GCWC17]中的定理 5；另见附录 A）。我们对此进行了修正。我们的证明实际上给出了更强的性能保证，使我们能够设计出更精细的动态规划子程序，这是本文的主要贡献。该子程序用于一个运行时间为 $n^{O(1/\epsilon)}$的算法，其运行时间实现了指数级改进。尽管我们认为这一结果相当理论化，但我们希望，本文提出的动态规划方法能够在其他网络问题中得到更多应用。

*电子邮件：nonthaphat.wo@ku.th。泰国曼谷泰国农业大学计算机工程系。获泰国农业大学工程学院研究生科研基金资助。

†电子邮件：nattawut.p@ku.th。泰国曼谷泰国农业大学计算机工程系。

‡电子邮件：chaiporn.j@ku.ac.th。泰国曼谷泰国农业大学计算机工程系。§电子邮件：jittat@gmail.com。泰国曼谷泰国农业大学计算机工程系。获泰国研究基金RSA-6180074号基金资助。

我们将在第3节介绍网络模型、问题陈述，以及对 Gao 等人 [GCWC17、CGWC16]算法的综述。该算法称为能量有效移动算法（EEMA）。第4节介绍改进后的算法，并证明其运行时间及性能保证。我们的运行时间分析依赖于最优解中所需传感器数量的上界，该上界已在第5节中得到证明。

2 相关工作

覆盖问题已在计算几何领域得到广泛研究 [O'R87]。这些问题对无线传感器网络至关重要（近期综述见 [Wan11]，Wu等人 [WZLD20]编写的著作亦有介绍）。针对布置与部署问题，已有许多启发式算法。例如，Wang 和 Tseng 提出了适用于无障碍物区域的基于装填的完全覆盖算法 [WT08]，Wang、Hu 和 Tseng 提出了适用于有障碍物区域的相应算法 [WHT08]；针对利用虚拟力进行覆盖增强的算法 [ZC04],；针对使用 Voronoi多边形处理覆盖空洞的策略 [MMA+14]；以及针对使用 Delaunay三角剖分进行传感器重定位的算法 [KJ17]。本文与 Gao等人 [GCWC17] 的研究均探讨了移动调度问题。在动态区域覆盖方面，Liu、Dousse、Nain 和 Towsley [LDNT13] 研究了利用移动传感器网络实现覆盖的问题。Liu等人 [LDWS08] 和 He等人 [HCL+12] 研究了以利用传感器屏障保护区域为目标的调度问题。Ammari [Amm12]尝试在确保区域覆盖的同时，尽量降低传感器移动成本。关于改进覆盖的策略，Wang、Lim 和 Ma [WLM09] 提供了一篇综述。Guo 和 Jafarkhani [GJ19]提出了集中式和分布式启发式算法，以在网络生命周期约束下优化传感器移动。Elhoseny等人 [ETYH18] 采用遗传算法作为启发式方法来处理覆盖要求。

当需要理论保证时，人们已经研究了许多版本的覆盖问题的近似算法。第 3.2 节介绍了与本文密切相关的几何图上的多项式时间近似方案的相关工作。本节列举若干关于覆盖问题近似算法的重要研究。对于目标覆盖，若目标是安排传感器激活组以最大化生命周期，Ding 等人 [DWW+12] 针对任意 $\xi > 0$ 设计了一种 $(4+\xi)$-近似算法。对于受限形式的 k-覆盖，Xu 和 Song [XS14] 提出了一种 3-近似算法。当给定每个传感器的移动阈值，且目标是最大化目标覆盖时，Liang、Shen 和 Chen [LSC21] 近期提出了一种近似比为 $(1-1/e)$ 的算法。另一类重要的覆盖问题是在单位圆盘图中寻找支配集。Marathe 等人 [MBH+95] 提出了一种用于寻找支配集的 5-近似算法，以及一种用于寻找连通支配集的 10- 近似算法。对于加权支配集，Erlebach 和 Mihal´ak [EM10] 以及 Zou 等人 [ZWX+11] 分别独立设计了一种 $(4+\epsilon)$-近似算法。Zou 等人 [ZWX+11] 还为该问题的连通版本提出了一种 $(5+\epsilon)$-近似算法。Wu 等人 [WZLD20]近期出版的著作是了解这些进展的绝佳资料。

3 预备知识与问题陈述

3.1 模型与问题陈述

遵循 Gao 等人 [GCWC17，CGWC16],，本文考虑的同质网络可建模为 $G=(T,P,r,S)$，其中 $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ 为目标点集合，$P=\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$ 为站点集合，r 为感知范围，$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_m\}$ 为移动传感器集合。目标点是平面上的静态点，我们希望使用感知范围为 r的传感器对其进行覆盖。如果存在传感器 $s_j \in S$，使得 $d(s_j,t_i) \le r$，则称传感器集合 S 覆盖点 t_i；其中，$d(a,b)$表示平面上两点 a 和 b 之间的欧几里得距离。覆盖要求确保每个目标点 $t_i \in T$ 都必须被覆盖。每个传感器 $s_j \in S$ 都必须安排从某个站点 $p_\ell \in P$移动到其所在位置；移动距离为 $d(s_j,p_\ell)$。由于站点集合 P是静态的，我们可以轻松找到使 $d(s_j,p_\ell)$最小化的 $p_\ell \in P$。之后，我们将该距离简称为 $d(s_j)$，其定义为$min_{p_\ell \in P} d(s_j,p_\ell)$。

Gao 等人 [GCWC17、CGWC16] 将 k-汇点最小移动目标覆盖问题（k-MMTC）定义如下：给定一组目标点 T、站点集合 P和感知半径 r，寻找一组传感器S，使其覆盖 T，同时使总移动距离最小。他们提出了一种名为

能量有效移动算法（EEMA）的算法，并声称该算法是一种能够解决此问题的多项式时间近似方案（PTAS）（见Subsection3.3中的综述）。

我们想指出，Gao 等人 [GCWC17、CGWC16] 也假设目标点在监视区域内均匀且随机分布。我们的工作不需要这一要求。事实上，我们注意到，即使没有这一分布假设，他们的算法和证明同样成立。

3.2 多项式时间近似方案

多项式时间近似方案 （*polynomial-time approximation scheme*）（PTAS）是一种算法：给定一个常数 $\epsilon > 0$，它能在关于 n（即问题规模）为多项式的时间内，返回一个成本不超过最优解的（$1+\epsilon$）倍的解，前提是 ϵ 为常数。需要注意的是，运行时间可能会随 $1/\epsilon$呈指数增长；也就是说，随着解的质量提高，运行时间可能会非常迅速地增加（如 $1/\epsilon \to \infty$ 当$\epsilon \to 0$时）。

Hunt 等人 [HMR+98]提出了一种用于几何问题的多项式时间近似方案的一般框架，该框架遵循 Baker [Bak94]在平面图中采用的方法。首先，将问题分解为规模小得多的子问题，然后通过动态规划或暴力搜索，分别对这些子问题进行穷举求解。接着，将这些子问题得到的“局部最优”解组合起来，以获得最终解。显然，由于忽略了各个子问题之间的依赖关系，组合后的解可能不是全局最优解。然而，通常可以利用平均论证确保被忽略的成本很小，即当每个子问题的规模足够大时，最多为最优成本的 $1/\epsilon$ 。对于主要基于单位圆盘图的几何问题，Hunt 等人 [HMR+98] 考虑了一个大小为 $O(1/\epsilon) \times O(1/\epsilon)$ 的区域，并利用存在一个大小为 $O(1/\epsilon^2)$ 的可行解这一事实，设计出许多运行时间为 $n^{O(1/\epsilon^2)}$ 的多项式时间近似方案。对于支配集这一类覆盖问题，如果节点不带权，则已有若干针对标准问题的多项式时间近似方案 [HMR+98、NH05] ，以及针对要求支配集连通的情形的多项式时间近似方案 [ZGWD09]。（关于这一主题的全面论述，请参见 [WZLD20] 。）

动态规划方法广泛应用于覆盖问题。Erik Jan van Leeuwen [vL05, vL06, vL09] 将大致相同的加速思路用于单位圆盘图上的支配集问题。

3.3 EEMA 概述 [GCWC17, CGWC16]

Gao、Chen、Wu 和 Chen 提出的 EEMA [GCWC17, CGWC16] 分两个阶段进行。第一阶段将监视区域划分为一组子区域。这使问题的性质从连续优化问题转变为组合问题。第二阶段对第一阶段构造的组合问题求近似解。我们将介绍这两个阶段，而我们的贡献主要在于改进他们提出的 EEMA 的第二阶段。

3.3.1 EEMA 的第一阶段

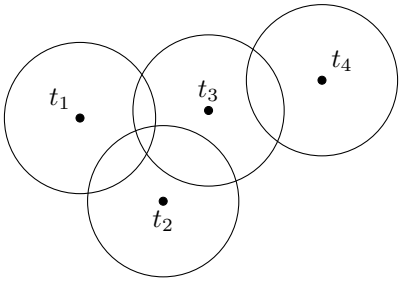
对于每个目标点 t_i，检测周期 $D(t_i)$是一个以 t_i为圆心、半径为 r 的圆。请注意，位于$D(t_i)$的传感器可以覆盖 t_i。检测周期可能相交；因此，位于交点处的单个传感器可以检测与这些周期相关联的所有目标点。EEMA 的第一阶段确定由检测周期交点定义的所有最小子区域（见图 1）。每个子区域都称为曲线边界。 Gao等人证明了以下引理（隐含于 [GCWC17]中的定理 2）。

引理 3.1 ([GCWC17])。 由所有 n 检测周期的交点定义的最小子区域数量为 $O(n^2)$

他们还提出了一种运行时间为 $O(n^2)$的算法（称为图转换算法），用于寻找所有最小子区域。

3.3.2 EEMA 的第二阶段

在第二阶段，Gao等人指出，在某个特定的最小子区域内任意位置放置传感器，所覆盖的目标集合都相同，该集合被定义为该子区域的覆盖集。因此，为了最小化总



Fig图 1： t_1、 t_2、 t_3和 t_4 的检测周期。需要考虑 9 个最小子区域 .

距离，如果必须为该子区域安排传感器的调度方案，传感器就必须从最近的站点出发。对于子区域 σ_i，他们给出了一种算法，用于求出 $w(\sigma_i)$，即从 σ_i 中任意一点到 P 中任意站点的最小距离。给定所有子区域的表示，计算所有子区域 σ_i 的 $w(\sigma_i)$ 仅需 $O(n^2k)$。

完成所有这些预处理步骤后，剩下的问题就是一个组合问题：选择一部分子区域来覆盖所有目标点。

设 Q 为包含所有目标点的包围盒。与许多几何多项式时间近似方案一样，Gao 等人随后采用了一种称为划分算法的算法，将 Q 划分为大小为$2mr \times 2mr$的单元格 $cell(Q)$，对每个单元格 $e \in cell(Q)$ 分别求解最优选择，并返回选定子区域的并集。

划分算法的核心子问题是处理每个单元 e。为了解决每个子问题，Gao 等人采用了暴力搜索，其运行时间为 $n^{O(m^2)}$。为了界定运行时间，他们证明了以下关键引理（在定理 5 中隐含给出）。

引理 3.2 ([GCWC17,CGWC16])。 每个单元 e 中最优解所包含的传感器数量（以及选定子区域数量）至多为 $O(m^2)$。

然而，这个引理是错误的（见附录 A）。我们在第5节修正了这个引理，由此可知传感器数量为 $O(m^2 + k)$，这意味着他们针对每个子问题的算法实际运行时间为 $n^{O(m^2+k)}$。更一般地，如果传感器数量的上界为 L，暴力算法的运行时间将为 $n^{O(L)}$。我们还给出了一个更强的上界，使运行时间可缩短至 $n^{O(m+k)}$，从而实现运行时间的指数级改进。

求解每个子问题后，再以直接的方式合并各个解。Gao 等人使用平移技术证明，如果目标点在 Q 中均匀分布（如第 III-A 节模型所述），则总成本为最优成本的 $(1 + 3/m)$ 倍，从而给出了多项式时间近似方案的 $1 + \epsilon$ 性能保证。我们指出，即使不假设目标点服从该分布，他们的证明仍然成立；为完整起见，我们也在第 4.2 节给出了这一性能保证的证明。

4 算法

我们关注 EEMA 的第二阶段，在这一阶段中，我们完全处理问题的组合版本（在使用 [GCWC17 的图转换算法 CGWC16]进行转换之后）。回想一下，我们给定了一组由检测周期交点 h 定义的最小子区域 $R = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h\}$。还要回想一下， $h = O(n^2)$。此外，对于每个子区域 σ_i，我们还知道将传感器调度到该子区域所需的最小距离 $w(\sigma_i)$。目标是选择一个子区域子集$R' \subseteq R$，在确保这些子区域覆盖所有目标点的同时，使总距离最小。

我们的主要子程序处理一个大小为 $2mr \times 2mr$ 的正方形区域，称为 单元。在第 4.1 节中，我们介绍主要贡献：当所有目标点都位于一个单元内时，使用一种算法以最优解方式解决该问题，其运行时间为 $n_e^{O(m+k)}$，其中 n_e 是能够覆盖 e 中目标点的子区域数量。由于随后我们设定 $m = \Theta(1/\epsilon)$，这意味着总运行时间为 $n^{O(1/\epsilon)}$，优于 [GCWC17] 的暴力算法；该算法的运行时间为 $n^{O(1/\epsilon^2)}$。

为了解决整个问题，将监视区域划分为许多单元格，以便应用动态规划。令 Q 为覆盖监视区域的包围盒。更具体地，假设 Q 的左下角位于 $(0, 0)$，右上角位于 (M, M)。为了

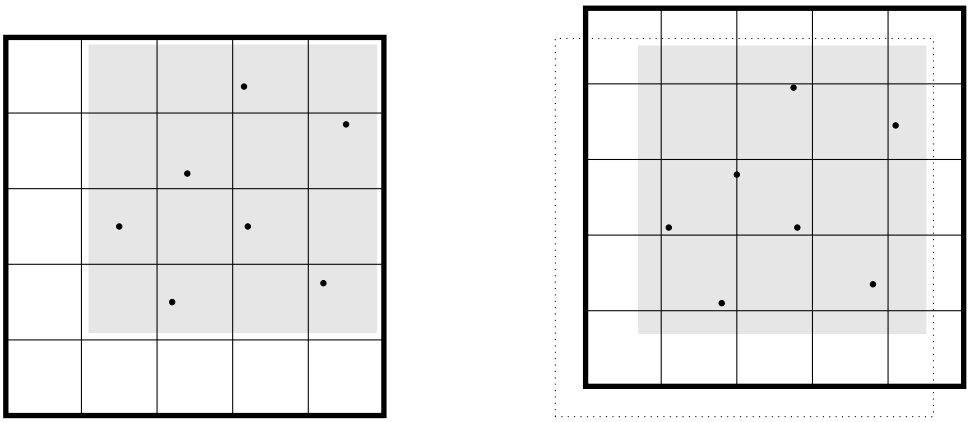


图2：（a）包含目标点（显示在阴影区域中）的输入区域、包围盒 Q以及所有大小为 $2mr \times 2mr$的单元格集合。（b）平移后的包围盒 Q_f 及其单元格 $cell（Q_f）$。

便于平移，我们进一步假设目标点位于顶点分别为 $(2mr, 2mr)$ 和 (M, M) 的正方形内，即不存在 x 或 y 坐标小于 $2mr$ 的目标点。我们将 Q 均匀划分为大小为 $2mr \times 2mr$ 的正方形单元格，共有 $\lceil M/2mr \rceil \cdot \lceil M/2mr \rceil$ 个单元格。每个单元格都是正方形，其左下角和右上角分别为 $(i \cdot 2mr, j \cdot 2mr)$ 和 $((i+1) \cdot 2mr, (j+1) \cdot 2mr)$。令$cell(Q)$表示所有单元格的集合。见图2 (a)。

然后，该算法对每个单元 $e \in cell(Q)$ 应用动态规划子程序，并返回选定子区域的并集。Gao 等 [GCWC17] 证明，返回的解是 4-近似的。

按照 PTAS 设计中的标准技术，与 [GCWC17], 中的做法相同，我们通过平移包围盒来对最优解的成本进行“平均化”，从而获得一个 $(1+\epsilon)$-近似解。我们将在第4.2小节讨论这一步骤，并给出性能保证的证明。

最后，利用将在第5节中证明的界，我们在第4.3小节分析运行时间。

4.1 动态规划

本节将介绍一种动态规划，对于给定的大小为 $2mr \times 2mr$ 的单元 e，它可以求出传感器覆盖 e 中所有目标点的最优调度方案。单元 e 被划分为若干垂直条带，每个条带的大小为 $r \times 2mr$ （稍后将给出其正式定义）。如果已知 e 中每个条带的最优解所用的传感器数量至多为 L，那么本节的动态规划算法的运行时间为 $n_e^{O(L)}$，其中 n_e 是单元 e 内包含目标点的子区域数量。我们在引理5.1中证明 $L = O(m+k)$；由于假设 k 是常数，动态规划的运行时间为 $n_e^{O(m)}$。

由于我们使用动态规划，因此需要定义其他类型的子问题。为避免本节后文产生混淆，我们将单元中的这个主要子问题称为单元格问题。我们进一步将该单元划分为 $2m$ 个垂直条带，每个条带的大小为 $r \times 2mr$。我们将这些条带称为条带 H_1，H_2、.....、H_{2m}。参见图3。

我们定义如下子问题 $\mathcal{A}_i$，对每个 $1 \le i \le 2m$，定义如下。

子问题 $\mathcal{A}_i$： 寻找子区域 R' 的一个子集，使其覆盖 $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_i$ 中的所有目标点，且总距离最小。

令 a_i 表示 $\mathcal{A}_i$的最优总距离。回想一下，根据此定义，a_{2m} 是单元格问题的最优成本。这里我们只考虑寻找最小成本的算法；若还要找到实际的解，只需在动态规划状态中同时保留最优解及其成本。

对于条带 H_i，令 $R_i \subseteq R$ 为覆盖 H_i 中某个目标点的子区域集合。对于一个大小至多为 L 、覆盖 H_i 中某些目标点的子区域子集 $U \subseteq R_i$，我们还为每个 $1 \le i \le 2m$ 定义如下子问题 $\mathcal{B}_i(U)$。

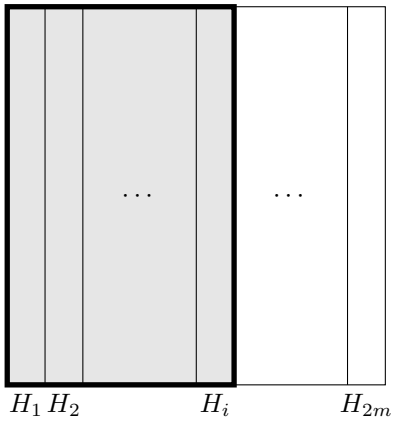


图3：条带 $H_1, \ldots, H_{2m}$ 和子问题 A_i（阴影部分所示）。

子问题 $\mathcal{B}_i(U)$： 寻找子区域子集 R'，使其覆盖 $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_i$ 中的所有目标点，并满足 $R' \cap R_i = U$，且总距离最小。

注意，$\mathcal{B}_i(U)$ 考虑的是与 $\mathcal{A}_i$ 相同的问题，但附加了条件：要覆盖 H_i 中的目标点，必须使用 U 中的子区域。令 $b_{i,U}$ 表示 $\mathcal{B}_i(U)$ 的最优总距离。如果无法做到这一点，则令 $b_{i,U} = \infty$。因此，我们知道

$$a_i = \min_{U \subseteq R_i : |U| \le L} b_{i,U}.$$

因此，只需求解 $\mathcal{B}_i(U)$。

作为基本情况，对于每个 $U \subseteq R_1$，求解 $\mathcal{B}_1(U)$ 时，我们可以轻松检查 U 是否覆盖所有目标点，并保留其成本；否则保留 ∞ 的值。由于 $|U| \le L$，需要考虑的子问题至多有 $O(n_e^L)$ 个。每个子问题需要 $O(n^3)$，因此总运行时间为 $n_e^{O(L)}$。

对于每个 $U \subseteq R_i$，求解 $\mathcal{B}_i(U)$ 时，首先注意到，由于条带宽度为 r，覆盖 H_{i-2} 中任意目标点的子区域 σ' 不可能位于 R_i 中，也就是说，它们无法帮助覆盖 H_i 中的目标点。另一方面，R_i 中的子区域无法覆盖 $H_1, \ldots, H_{i-2}$ 中的任何目标点。因此，在考虑解时，我们只需关注 $U \in R_i$ 和 $U' \in R_{i-1}$ 中子区域之间的依赖关系。于是，为了求得 $\mathcal{B}_i(U)$ 的解，我们枚举所有 $U' \in R_{i-1}$ 并检查

- 若 U和 U'兼容（即，对于 R_{i-1}和 R_i中共同的子区域 σ，U和 U'作出相同的决策，也就是说，$\sigma \in U$ 当且仅当 $\sigma \in U'$），并且
- 若 $U \cup U'$ 覆盖了 H_i中的所有目标点。

如果两项条 件都满足，则 $\mathcal{B}_{i-1}(U')$和 U 的子区域集合构成 $\mathcal{B}_i(U$的一个可行解). 最后，我们 选择使成本最小的 U'。

对于每个 U，有 $O(n_e^L)$ 个子集 U'需要考虑。因此，为了求出所有 $U \in R_i$对应的 $\mathcal{B}_i(U)$，算法会考虑 $O(n_e^L)$ 个 $\cdot O(n_e^L) = n_e^{O(L)}$，运行时间也因此为 $n_e^{O(L)}$。求出所有 $\mathcal{A}_i$ 的总运行时间因此为 $m \cdot n_e^{O(L)} = m \cdot n_e^{O(m+k)}$，因为 $L = O(m+k)$。

4.2 平移与性能保证

平移过程分为 m 轮。对于每一轮 f，对于 $0 \le f \le m-1$，将包围盒 Q平移，使其左下角位于 $(2f, 2f)$。令 Q_f表示平移后的包围盒，且令$cell(Q_f)$表示 Q_f中的单元格。令 S_f表示第 f轮返回的子区域集合。平移过程从返回的解 S_f'中选取成本最低的解。见图2 (b)。

我们将证明存在某个轮次 f，使得 S_f 的成本为最优成本的 $1 + 4/m$。注意，Gao等人也在 [GCWC17]的定理 8 中给出了类似的证明（在 [CGWC16]中作为定理 6 出现），但他们没有意识到，该证明适用于一般情形，无需满足目标分布假设。为完整起见，我们在此给出证明。

定理4.1。平移过程返回的解，其成本至多为最优成本的 $1+4/m$ 。

证明。 对于任意一组子区域 S'，令 $w(S')$ 为其成本，即

$$w(S') = \sum_{\sigma \in S'} w(\sigma).$$

令 S^* 为最优子区域集合， $w(S^*)$ 为最优总移动成本。考虑轮次f及返回的解 S_f。对于每个 $e \in cell(Q_f)$，对于一组子区域 S'，令 $S'(e)$ 为 S' 中覆盖 e中某个目标的子区域集合。根据动态规划算法的最优性，对于任意 e，有

$$\sum_{\sigma \in S_f(e)} w(\sigma) \leq \sum_{\sigma \in S^*(e)} w(\sigma).$$

对于单元 e 和一组子区域 S'，令 $S'(\delta(e))$ 为 S' 中覆盖 e中某个目标且与 e的边界相交的子区域集合。我们可以将 $S^*(e)$ 的成本分为两部分，即

$$\sum_{\sigma \in S^*(e)} w(\sigma) = \sum_{\sigma \in S^*(e) \setminus S^*(\delta(e))} w(\sigma) + \sum_{\sigma \in S^*(\delta(e))} w(\sigma).$$

注意，对于不同的 e， $e' \in cell(Q_f)$、 $S^*(e) \setminus S^*(\delta(e))$ 和 $S^*(e') \setminus S^*(\delta(e'))$ 两两不相交。因此，对 S_f的成本求和可得， $w(S_f)$ 等于

$$\begin{aligned}
\sum_{e} \sum_{\sigma \in S_f(e)} w(\sigma) &\leq \sum_{e} \sum_{\sigma \in S^*(e)} w(\sigma) \\
&= \sum_{e} \sum_{\sigma \in S^*(e) \setminus S^*(\delta(e))} w(\sigma) + \\
&\quad \sum_{e} \sum_{\sigma \in S^*(\delta(e))} w(\sigma), \\
&\leq w(S^*) + \sum_{e} \sum_{\sigma \in S^*(\delta(e))} w(\sigma),
\end{aligned}$$

其中， e 对 $e \in cell\ (Q_f)$ 求和，最后一个不等式源于严格位于单元 e内部的子区域彼此不相交。

对所有 f取 $w\ (S_f)$ 的平均值，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \sum_{f=0}^{m-1} w(S_f) &\leq \frac{1}{m} \sum_{f=0}^{m-1} \left(w(S^*) + \sum_{e \in cell(Q_f)} \sum_{\sigma \in S^*(\delta(e))} w(\sigma) \right) \\
&= w(S^*) + \frac{1}{m} \sum_{f=0}^{m-1} \left(\sum_{e \in cell(Q_f)} \sum_{\sigma \in S^*(\delta(e))} w(\sigma) \right).
\end{aligned}$$

考虑一个特定的子区域 $\sigma \in S^*$。注意，在所有平移后的实例中，至多有 4 个单元 e 满足 $\sigma \in S^*\ (\delta\ (e))$，因为 σ 至多可与同一条垂直单元边界相交两次，并与另一条水平单元边界相交两次。这意味着第二项至多为

$$\sum_{f=0}^{m-1} \left(\sum_{e \in cell(Q_f)} \sum_{\sigma \in S^*(\delta(e))} w(\sigma) \right) \leq 4w(S^*).$$

将该不等式代入前一个界，可得

$$\frac{1}{m} \sum_{f=0}^{m-1} w(S_f) \leq w(S^*) + \frac{4}{m} w(S^*) = (1+4/m) w(S^*).$$

由于所有 $w(S_f)$'s 都是非负的，因此至少存在一个 f，使得 $w(S_f) \leq (1+4/m) w(S^*)$，如所需。

□

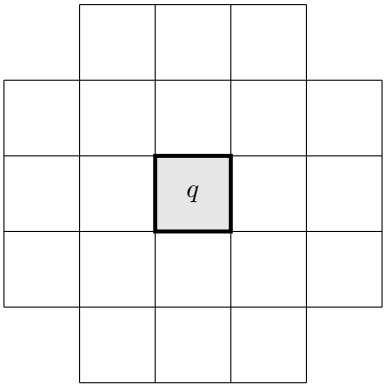


图4：在 q 中，目标点可由传感器覆盖的相邻方格

4.3 运行时间

根据定理4.1，我们需要设置 $m = 4/\epsilon$，以确保算法给出一个 $(1+\epsilon)$-近似解。对于每个平移后的包围盒 Q_f 以及每个单元 $e \in cell(Q_f)$，第 4.1 节中的动态规划算法的运行时间为 $m \cdot n_e^{O(L)}$，其中 n_e 是覆盖了 e 中某个目标的子区域数量，L 是所需传感器数量的上界。

在第5节中，我们证明 $L = O(m+k) = O(m)$，因为我们假设 k 是常数。因此，动态规划算法的运行时间为 $n_e^{O(m)}$。结合对所有平移后的包围盒中的所有单元格执行动态规划的运行时间，可得算法的运行时间为

$$\sum_{f} \sum_{e \in cell(Q_f)} m \cdot n_e^{O(m)} = m^2 h^{O(m)} = m^2 n^{O(m)} = (1/\epsilon^2) n^{O(1/\epsilon)},$$

如前所述。

5 传感器数量的界

我们的关键 re 第4.1节中动态规划运行时间的界所需的结果是 e 以下引 理。

引理5.1。对于每个大小为 $2mr \times 2mr$ 的单元，最优解中边长为 $\sqrt{r/2} \times \sqrt{r/2}$ 的正方形内的传感器数量至多为 $O(1) + O(k) = O(k)$。此外，对于单元内任意大小为 $r \times 2mr$ 的垂直条带，都存在一个最优解，使得该条带中的传感器数量至多为 $O(m+k)$。

以下两个引理足以证明引理5.1。引理5.2讨论远离任何站点的传感器，即移动距离至少为 $r/2$ 的传感器。引理5.3讨论停留在站点附近的传感器。我们说明，证明中并未试图优化这些常数。

引理5.2。对于每个大小为 $2mr \times 2mr$ 的单元，最优解中边长为 $\sqrt{r/2} \times \sqrt{r/2}$ 的 q 正方形内移动距离至少为 $r/2$ 的传感器数量至多为一个常数。

证明。注意，q 中的传感器可以覆盖相邻方格中的目标点（每个方格大小均为 $\sqrt{r/2} \times \sqrt{r/2}$）。然而，由于感应半径至多为 r，它们无法覆盖距离更远的目标点。我们按照图4所示额外画出20个相邻方格。注意，将传感器从 q 内部移动到这些方格中的任意一个，都需要额外移动距离 r；因此成本也会相应增加这么多。然而，由于本引理中考虑的每个传感器已经移动了距离 $r/2$，移除一个传感器会使成本降低 $r/2$。

我们将用反证法证明该引理。设 m_q 是 q 内传感器的数量。假设 q 中至少有 63 个传感器，即 $m_q \geq 63$。考虑另一个解：从 q 中任意移除 $m_q - 21$ 个传感器，并将另外 20 个传感器移至全部 20 个相邻方格。请注意，新的调度方案覆盖了此前覆盖的所有目标点。一方面，移除传感器会使成本至少降低

$(m_q - 21) \cdot r/2 \geq (63 - 21) \cdot r/2 = 20r$。另一方面，将传感器移至相邻方格最多会使成本增加 $20r$。因此，我们得到一个成本更低的解，这与假设矛盾。

□

接下来需要分析靠近站点的传感器。以下引理5.3表明，对于站点 $p \in P$，存在一个最优解，其调度方案中距 p不超过 $r/2$ 的传感器至多有 $O(1)$ 个。再次提醒，我们不试图优化该引理中的常数。

引理5.3。 在一个最优解中，距某个特定站点 p_ℓ 不超过 $r/2$的传感器的移动距离至多为一个常数。

考虑站点 $p \in P$。由于可以免费将传感器放置在 p，我们假设半径为 r 、以 p 为中心的范围内的所有目标点都已被覆盖。我们先给出一个重要观察。

引理 5.4。 对于任意距离 $0 < a \leq r/2$，起点为 p 且到 p 的距离在 $[a/2, a]$ 范围内的传感器数量至多为一个常数。

证明。 处于此范围内的传感器可能覆盖满足距离条件 $r \leq d(p,\ t) \leq r + a$的目标点 t，其中距离 $d(p,\ t)$。将该距离范围内的区域称为圆环 $Ring(r,\ r + a)$。注意，我们可以在半径为$2a \leq r$ 的圆周围放置6个传感器，从而完全覆盖 $Ring(r,\ r + a)$，成本为 $12a$。由于到站点 p 的距离落在 $[a/2, a]$ 范围内的每个传感器都至少需要移动 $a/2$ 的距离，因此该范围内若有超过24个传感器，成本就会高于这个简单的可行解，从而导致矛盾。

□

虽然前一个引理是证明该界的良好步骤，但它可以无限次应用（因为距离可以变得越来越小），从而导致传感器数量无界。为了解决这一问题，我们需要引入进展的概念。我们首先概述引理5.3的证明。

为了证明这一引理，我们将反复对最优解应用引理 5.4。如果我们能够证明应用该引理的次数是一个常数，就可以知道传感器总数也是一个常数。在本节后文中，我们主要陈述所需的预备引理；其证明推迟至附录 B。

考虑最优解中距离站点 p 最远的传感器，该传感器到 p 的距离落在区间 $(0, r/2]$ 内。设该距离为 a_1 ，并将该传感器记为 s_1。引理 5.4 确保了到 p 的距离落在 $[a_1/2, a_1]$ 范围内的传感器数量是一个常数。

为了再次应用引理 5.4，我们寻找距离 p 比 $a_1/2$ 更近的最远传感器。令 a_2 为它的距离。重复这一过程，得到距离序列 a_1、 a_2、.....，其中

$$a_{i+1} \leq a_i/2.$$

这些距离定义了传感器的层级序列，其中 L_i 是距离 p 落在区间 $(a_i/2$、 $a_i]$ 内的传感器集合。

为了证明层级数量至多为常数，我们定义以下已覆盖角度的概念，以刻画这一过程的进展。从位于 $(x_p$、$y_p)$ 的站点 p 出发，选取一条参考线 ℓ ，使其为从 $(x_p$、 $y_p)$ 到 $(\infty$、 $y_p)$ 的（半）直线。对于任意目标 t，给定 p 和直线 ℓ，我们可以将由线段 pt 和直线 ℓ确定的角度定义为 θ_t 。我们称 t 位于角度 θ_t 处，并且也将 θ_t 称为 t 的角度 。如果角度区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 内的每个目标，其角度为 $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ 且距离介于 r 和 a' 之间，都已被覆盖，则称该角度区间在半径 a' 处已覆盖。

更确切地说，我们必须说明如何计算已覆盖角度。处理层级 L_i的传感器时，我们只考虑该层级中距离 p最远的一个传感器 s 。设 a 为 s 到站点 p的距离。在这一层级，我们考虑 p 在半径 $a/2$处覆盖的角度区间。考虑下一个层级 L_{i+1}时，我们再次只考虑一个传感器 $s' \in L_{i+1}$ ，该传感器距 p 的距离最远，为 a' ，并尝试计算半径 $a'/2$处的已覆盖角度。由于先前在半径 $a/2$ 处已覆盖的区间在半径 $a'/2 < a/2$处仍然被覆盖，因此我们也可以将上一层级的所有已覆盖区间计入这一层级。需要注意的是，虽然较低层级 s 的传感器在半径 $a'/2$ 处可能覆盖更多角度（用于较高层级的分析），但在分析新增的已覆盖角度时，我们会将已覆盖区间固定不变；因此，已覆盖角度区间构成了实际覆盖角度的下界。

因此，为了跟踪进展，我们维护一个由互不相交的（圆形）角度区间组成的集合 S 以及当前的保证半径 α，并满足以下条件：对于某个区间 $I \in S$，任何与站点 p的距离至多为 α 、角度为 θ_t 且满足 $\theta_t \in I$ 的目标 t，都已被当前的传感器集合覆盖。我们指出，如果某个半径为 α的集合 S 满足此条件，那么对于任意半径 $\alpha' < \alpha$，该条件也成立。

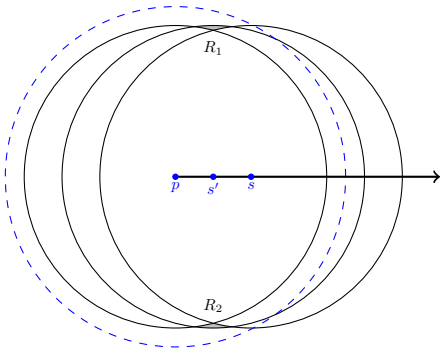


图5： $C_{s'} \setminus (C_p \cup C_s)$ 中的两个区域 R_1 和 R_2。蓝色虚线圆表示距离 $r + a'/2$.

以下引理（证明见附录B.1）表明，如果我们在距离 a处放置一个传感器，距离参照点为 p，那么它将覆盖一个角度区间；当半径为 a' 时，该区间的宽度至少为 $2\cdot$反余弦$(13/20)$，其中 $a' \le a/2$。（另见图 8。）

引理5.5。 假设站点 p 位于$(0,0)$。若将传感器 s 放置在距 p a 的位置，不失一般性，可放置在$(a,0)$，其中 $a \le r/2$，则该区间

$$[-\arccos(13/20), \arccos(13/20)]$$

在半径为 a'的范围内被覆盖，其中 $a' \le a/2$。

引理5.5基本上使我们能够从一个层级推进到下一个层级。然而，当我们有来自多个层级的圆时，还需要更多结构来保证这一点。考虑位于两个相邻层级（即 $s \in L_i$ 和 $s' \in L_{i+1}$）的两个传感器 s 和 s'。假设 s 距站点 p a ，其中 $a \le r/2$；这也意味着 s' 距 p $a' \le a/2$。我们考虑由 s'额外覆盖的区域。形式化地，设圆 $C_p, C_s,$和 $C_{s'}$ 分别表示以 $p, s,$和 s'为圆心、半径为 r 的圆。由 s' 额外覆盖的区域为 $C_{s'} \setminus (C_p \cup C_s)$，如图5所示。关于这些区域的以下引理至关重要。

引理5.6。 设 s 和 s' 是分别位于层级 L_i 和 L_{i+1} 、与站点 p的距离分别为 a 和 a' 的传感器，其中 $a' \le a/2 \le r/4$。考虑 $C_{s'} \setminus (C_p \cup C_s)$。如果该集合包含两个不相交区域 R_1和 R_2，则两个区域中距离站点 p最远的点到该站点的距离至多为 $r + a'/2$ 。

引理5.6的证明见附录B.2。根据引理5.6，我们可以论证，如果 $C_{s'} \setminus (C_p \cup C_s)$包含两个区域，那么在距离$p$严格小于 $a'/2$ 的位置放置两个传感器成本更低；因为这样成本为 $2 \cdot a'/2 < a'$；这与最优解的最优性矛盾。因此， $C_{s'}$ 的额外覆盖区域只包含一个区域。在这种情况下，我们肯定可以旋转 $C_{s'}$，使其在距离 $a'/2$ 处的额外覆盖角度最大，且至少为反余弦$(13/20)$，即引理5.5所保证角度的一半。

图6展示了 s'覆盖的额外角度。

我们来正式陈述上述关于位于两个相邻层级的两个传感器的讨论。其证明见附录B.3。

引理 5.7。 考虑位于相邻层级 L_i 和 L_{i+1} 的两个传感器 s 和 s' 。设 a 和 a' 分别为从 s 和 s' 到 p 的距离。设传感器 s 在半径 $a/2$ 下覆盖的角度区间为 I。传感器 s' 在半径 $a'/2$ 下覆盖的额外角度（相对于 I）至少为 反余弦$(13/20)$。

现在我们可以证明关键引理5.3了。

证明。（引理5.3的证明）

我们证明层级数量是常数。在分析中，我们维护一个由不相交的已覆盖角度区间构成的集合 S，以及半径 b。

回想一下， a_1、 a_2、.....分别是层级为 L_1、 L_2、.....的传感器 s_1、 s_2、.....到站点p的最远距离。最初，从层级 L_1开始，考虑最远的传感器 $s_1 \in L_1$，根据引理5.5，我们有

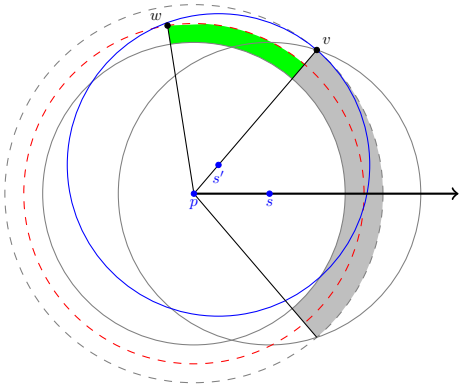


图6：距离站点 p 为 $a' = a/2$ 的传感器 s' （层级 L_{i+1}）如何在半径 $a'/2$ 处覆盖额外角度区间$[2\theta, \theta]$（以绿色显示），其中 $\theta =$ 反余弦(13/20)。

在半径为 $b = a_1/2$时， s_1 覆盖宽度为 $2 \cdot$反余弦(13/20)的区间。因此，我们有 S 在半径为 $b = a_1/2$时包含一个宽度为 $2 \cdot$ 反余弦(13/20)的已覆盖角度区间。

当我们考虑更高层级的传感器时，可以通过增加区间的总宽度或减少区间数量来取得进展。直观来说，我们证明，在遍历这些层级时，以下事件之一会发生：

(1) 考虑层级 L_i 中距离为 a_i的传感器 s_i 时，半径 $a_i/2$ 处已覆盖区间的宽度总和至少增加一个常数（更准确地说，至少增加反余弦(13/20) ≈0.863）；或者 (2) 如果 s_i 不满足前一性质，则意味着 s_i “位于”来自较低层级的另外两个彼此间隔较远的传感器之间；在这种情况下，我们证明已覆盖区间的数量会减少。

考虑位于层级 L_i、距离为 a_i 的传感器 s_i 。我们考虑半径为 $b = a_i/2$ 时已覆盖角度的区间。如前所述，角度属于 S 中任一区间的每个目标，在新的较小半径 b 处都已被覆盖。设区间 J_i 为 s_i 在半径 $a_i/2$ 处覆盖的角度区间。同样根据引理5.5，我们有 J_i 的宽度为 $2 \cdot$ 反余弦(13/20)。

我们希望将 J_i 添加到 S 中。如果 J_i 至多与 S 中已有的一个区间 J' 相交，那么我们知道，额外角度要么至少为反余弦(13/20)，要么根据引理 5.7，我们可以沿半径为 a_i 的圆移动 s_i ，使 J_i 与 J' 合并后的额外角度至少为反余弦(13/20)；由此发生事件 (1)。唯一不成立的情况是，移动 s_i 后，J_i 与两个区间相交；因此，添加 J_i 会减少 S 中区间的数量，从而发生事件 (2)。

由于区间的数量不可能少于 1，且每次事件 (1) 发生时，我们都会使总宽度增加一个常数，并且至多引入一个新区间，因此我们知道这两个事件发生的次数也都是常数次，因为总宽度至多为 2π。（更准确地说，层级数量至多为 $\lceil 2 \cdot 2\pi /$反余弦$(13/20)\rceil = 15$。）这意味着我们遇到的层级数量至多为常数，从而得出该引理。 □

6 结论

我们提出了一种多项式时间近似方案，用于求解该问题中的$(1+\epsilon)$-近似解；当 k（即基站数量）为常数时，其运行时间为 $n^{O(1/\epsilon)}$ 。与Gao 等人 [GCWC17] 提出的运行时间为 $n^{O(1/\epsilon^2)}$的多项式时间近似方案相比，这一方案在效率上实现了指数级提升。我们证明了最优解中任意单位面积内传感器数量的一个更强上界，并采用了更精细的动态规划算法，其复杂度仅取决于问题的宽度。我们希望，本文提出的动态规划方法能够应用于其他网络问题。

参考文献

[Amm12] Habib M. Ammari. 任务导向型移动无线传感器网络中的 k 覆盖问题。计算机网络，56(7):1935–1950，2012。[ASSC02] I.F. Akyildiz、W. Su、Y. Sankarasubramaniam 和 E. Cayirci. 无线传感器网络：综述。计算机网络，38(4):393–422，2002。[Bak94] Brenda S. Baker. 平面图上 NP 完全问题的近似算法。《J. ACM》，41(1):153–180，1994 年 1 月。[CGWC16] Z. Chen、X. Gao、F. Wu 和 G. Chen. 一种用于最小化目标覆盖问题中移动传感器移动距离的 PTAS。载于《IEEE INFOCOM 2016——第 35 届 IEEE 国际计算机通信会议》，第 1–9 页。IEEE INFOCOM 2016——第 35 届 IEEE 国际计算机通信会议，2016。[DWW+12] Ling Ding、Weili Wu、James Willson、Lidong Wu、Zaixin Lu 和 Wonjun Lee. 无线传感器网络目标覆盖问题的常数近似算法。载于《2012 年 IEEE INFOCOM 会议录》，第 1584–1592 页，2012。[EM10] Thomas Erlebach 和 Mat ́uˇs Mihal ́ak. 单位圆盘图中最小权支配集问题的 $(4+\epsilon)$-近似算法。载于 Evripidis Bampis 和 Klaus Jansen 编，《近似与在线算法》，第 135–146 页，柏林，海德堡，2010。施普林格·柏林·海德堡。[ETYH18] Mohamed Elhoseny、Alaa Tharwat、Xiaohui Yuan 和 Aboul Ella Hassanien. 优化移动无线传感器网络的 k 覆盖。《专家系统与应用》，92:142–153，2018。[GCWC17] Xiaofeng Gao、Zhiyin Chen、Fan Wu 和 Guihai Chen. 移动传感器网络中k-汇点最小移动目标覆盖问题的节能算法。IEEE/ACM《网络汇刊》，25(6):3616–3627，2017 年 12 月。[GJ19] Jun Guo 和 Hamid Jafarkhani. 有限通信范围无线传感器网络中的移动高效传感器部署。IEEE《无线通信汇刊》，18(7):3469–3484，2019。[HCL+12] Shibo He、Jiming Chen、Xu Li、Xuemin Shen 和 Youxian Sun. 移动传感器网络的高性价比屏障覆盖。载于《2012 年 IEEE INFOCOM 会议录》，第 819–827 页，2012。[HMR+98] Harry B Hunt、Madhav V Marathe、Venkatesh Radhakrishnan、S.S Ravi、Daniel J Rosenkrantz 和 Richard E Stearns. 几何图中 NP 困难和 PSPACE 困难问题的 NC 近似方案。《算法杂志》，26(2):238–274，1998。[KJ17] Thamarak Khampeerpat 和 Chaiporn Jaikaeo. 满足非均匀动态覆盖需求的移动传感器重定位。《IEICE 信息与系统汇刊》，100-D(3):520–530，2017。[LDNT13] Benyuan Liu、Olivier Dousse、Philippe Nain 和 Don Towsley. 移动传感器网络的动态覆盖。IEEE《并行与分布式系统汇刊》，24(2):301–311，2013。[LDWS08] Benyuan Liu、Olivier Dousse、Jie Wang 和 Anwar Saipulla. 无线传感器网络的强屏障覆盖。MobiHoc '08，第 411–420 页，美国纽约州纽约市，2008。计算机协会。[LSC21] Dieyan Liang、Hong Shen 和 Lin Chen. 移动无线传感器网络中的最大目标覆盖问题。《传感器》，21(1)，2021。[MBH+95] M. V. Marathe、H. Breu、H. B. Hunt、S. S. Ravi 和 D. J. Rosenkrantz. 单位圆盘图的简单启发式算法。《网络》，25(2):59–68，1995。

[MMA+14] Hamid Mahboubi、Kaveh Moezzi、Amir G. Aghdam、Kamran Sayrafian-Pour 和 Vladimir Marbukh。用于提升无线移动传感器网络覆盖率的分布式部署算法。《IEEE工业信息学汇刊》，10(1):163–174，2014。[NH05] Tim Nieberg 和 Johann Hurink。单位圆盘图上的最小支配集问题的多项式时间近似方案。载于 WAOA，第 296–306 页。施普林格，2005。[O'R87] Joseph O'Rourke。《艺术画廊定理与算法》。牛津大学出版社，1987。[vL05] Erik Jan van Leeuwen。单位圆盘图的近似算法。载于 Dieter Kratsch 编，《计算机科学中的图论概念》，第 31 届国际研讨会 WG 2005，法国梅斯，2005 年 6 月 23–25 日，修订后的精选论文，《计算机科学讲义》第 3787 卷，第 351–361 页。施普林格，2005。[vL06] Erik Jan van Leeuwen。圆盘图的更优近似方案。载于 Lars Arge 和 Rusins Freivalds 编，《算法理论——SWAT 2006》，第 316–327 页，柏林、海德堡，2006。施普林格·柏林·海德堡。[vL09] Erik Jan van Leeuwen。几何对象系统上的优化与近似。博士论文，阿姆斯特丹大学，2009。[Wan11] Bang Wang。传感器网络中的覆盖问题：综述。《ACM计算调查》，43(4):32:1–32:53，2011年10月。[WHT08] You-Chiun Wang、Chun-Chi Hu 和 Yu-Chee Tseng。无线传感器网络中传感器的高效部署与调度。《IEEE移动计算汇刊》，7(2):262–274，2008。[WLM09] Bang Wang、Hock Beng Lim 和 Di Ma。改善无线传感器网络覆盖率的移动策略综述。《计算机通信》，32(13):1427–1436，2009。[WT08] You-Chiun Wang 和 Yu-Chee Tseng。用于确保多级覆盖的移动无线传感器网络分布式部署方案。《IEEE并行与分布式系统汇刊》，19(9):1280–1294，2008。[WZLD20] Weili Wu、Zhao Zhang、Wonjun Lee 和 Ding-Zhu Du。《无线传感器网络中的最优覆盖》。施普林格优化及其应用丛书第 978-3-030-52824-9 号。施普林格，2020年12月。[XS14] Xiaohua Xu 和 Min Song。无线网络中的受限覆盖。载于 IEEE INFOCOM 2014——IEEE 计算机通信会议，第 558–564 页，2014。[YMG08] Jennifer Yick、Biswanath Mukherjee 和 Dipak Ghosal。无线传感器网络综述。《计算机网络》，52(12):2292–2330，2008。[ZC04] Yi Zou 和 Krishnendu Chakrabarty。分布式传感器网络中的传感器部署与目标定位。《ACM嵌入式计算系统汇刊》，3(1):61–91，2004年2月。[ZGWD09] Zhao Zhang、Xiaofeng Gao、Weili Wu 和 Ding-Zhu Du。三维无线传感器网络中最小连通支配集的多项式时间近似方案。《全球优化杂志》，45(3):451–458，2009年11月。[ZWX+11] Feng Zou、Yuexuan Wang、Xiao-Hua Xu、Xianyue Li、Hongwei Du、Pengjun Wan 和 Weili Wu。单位圆盘图上最小权支配集与最小权连通支配集的新近似算法。《理论计算机科学》，412(3):198–208，2011年1月。

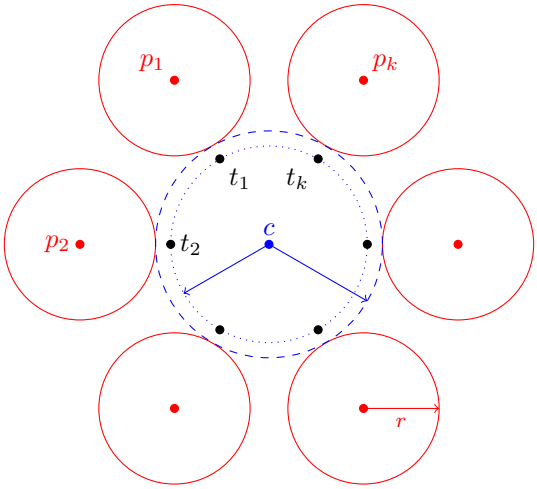


图 7：一个需要 k 个传感器的反例。

Gao等人[GCWC17]中传感器界的一个反例

Gao 等人 [GCWC17]提出的算法（最初发表于 [CGWC16]）基于这样一个事实：最优解中每个大小为 $2mr \times 2mr$ 的单元 e所需的传感器数量至多为 $O(m^2)$。请注意，这个界与 k（即站点数量）无关。论文中的证明利用了这样一个事实：存在一个使用如此多传感器的可行解。然而，k-MMTC 的实际成本是总距离，而非传感器数量。本节将给出一个反例，说明 [GCWC17] 中关于传感器数量的界（定理 5）并不成立，该反例需要 k 个传感器。

我们假设 m 足够大；当误差要求 ϵ 足够小时（即 $m = \Omega(1/\epsilon)$）这一条件成立。令 c 为单元 e中心的点。对于任意 $\alpha > 0$ 和足够小的 $\beta > 0$，在距离 α 处均匀放置 k 个目标点，使其与 c 的距离为 α；对于每个目标点 t_i，在与 c 相同的方向上、距离 $r+\alpha+\beta$处放置一个站点 p_i，其中方向由 t_i确定。图 7 展示了这个例子。考虑这样一种解：对于每个目标点 t_i，我们将一个传感器从 p_i 移动距离 β 来覆盖它，得到成本为 $k\beta$、使用 k个传感器的解。如果希望使用更少的传感器，就必须将某个传感器移动更远的距离，而该距离取决于 α 和 k；因此，我们总可以选取足够小的 β，使得这段额外距离大于 $k\beta$。由此可知，最优解至少需要 k 个传感器，正如所述。

B 引理的证明

B.1 引理5.5的证明

引理5.5。假设站点 p 位于$(0,0)$。若将传感器 s 放置在距 p为 a 的位置，不失一般性，可将其置于$(a,0)$，其中 $a \le r/2$，则该区间

$$[-\arccos(13/20), \arccos(13/20)]$$

在半径 a'下被覆盖，其中 $a' \le a/2$。

证明。设 s 为距 p为 a 的传感器。考虑两个圆 C_p 和 C_s，它们分别以 p 和 s 为圆心，半径均为 r。设 C' 为另一个圆，其圆心为 p，半径为 $r + a' \le r + a/2$。由于 C_s 和 C_p 中距 p 不超过 $r + a'$ 的目标点均已被覆盖，因此未覆盖目标点必定位于 $C' \setminus (C_s \cup C_p)$ 中。最坏情况发生在 C' 最大时，因此我们假设 $a' = a/2$。此外，注意到 a 最大时，被覆盖区间最小；因此，我们还假设 $a = r/2$。此情形如图 8 所示。

我们计算 θ of vps 的角度，该角度是所覆盖角度的一半。根据假设，我们知道 pv 的长度为 $r + a' = r + r/4 = 5r/4$，sv 的长度为 r,以及 $ps = a = r/2$的长度。设 q为 ℓ 上的一点，使角度 pqv 为直角。通过初等计算可得其长度

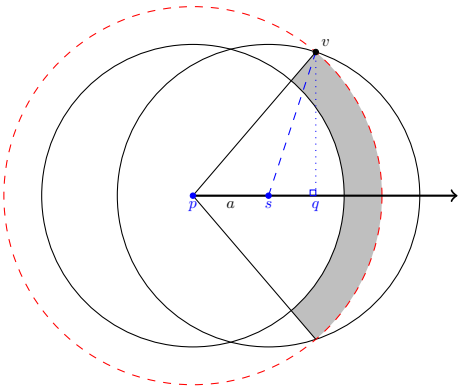


图 8：位于 $(a,\ 0)$ 的单个传感器如何覆盖角度区间 $[-\theta,\theta]$ 内的目标点。黑色圆为 C_p和 C_s；虚线圆为 C'。引理中考虑的覆盖区域以阴影表示。

为$\overline{sq} = 5r/16$。因此，角度 θ 等于

$$\arccos\left(\frac{r/2 + 5r/16}{5r/4}\right) = \arccos(13/20).$$

由于覆盖区间为 $[-\theta,\theta] = [-$ 反余弦$(13/20),$ 反余弦$(13/20)],$，因此引理得证 . □

B.2 引理5.6的证明

引理 5.6。 设 s 和 s' 分别为位于层级 L_i 和 L_{i+1} 、与站点 p的距离分别为 a 和 a' 的传感器，其中 $a' \le a/2 \le r/4$。考虑 $C_{s'} \setminus (C_p \cup C_s)$。如果该集合包含两个不相交区域 R_1和 R_2，则两个区域中距离站点 p更远的点到该站点的距离至多为 $r + a'/2$ 。

证明。 为证明该引理，我们假设 $C_{s'} \setminus (C_p \cup C_s)$ 包含两个区域 R_1 和 R_2，并且区域中存在某个点 t_1，其到站点 p的距离至少为 $r + a'/2$ 。不失一般性地，假设区域 R_1 是具有正 y 坐标的点构成的区域，而 R_2 是具有负 y 坐标的点构成的区域。我们进一步假设 $t_1 \in R_1$。

令 $\delta = a'/2 \le a/4$。给定这一配置，我们注意到，当然可以移动 s'，使得 (1)t_1 与 p 的距离恰好为 $r + a'/2 = r + \delta$，且位于 C_s 的边界上；(2) 区域 R_2 恰好包含一个点 t_2，该点位于 C_p 和 C_s 的边界交点处。此外，这样做不会增大 s' 到 p 的距离。图 9 展示了这一假设，其中$\delta = a'/2$。我们注意到，图中未显示 s' 。

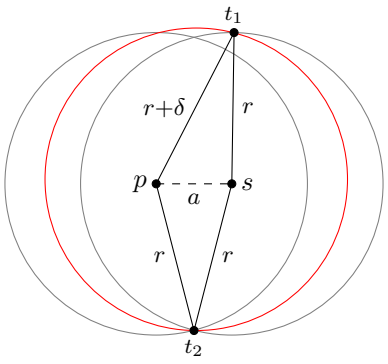


图 9：我们的证明中的点 $t_1 \in R_1$ 和 $t_2 \in R_2$ 。

我们的目标是证明，对于任何满足假设的点 s'， s' 都必定离 p 太远；更确切地说，

$$d(p, s') > 2\delta = a';$$

因此，我们得到了所需的矛盾。

在本节中，我们考虑一个简单四边形 $\square pt_2st_1$ （见图 9）。在分析中，我们令 p 位于位置 $(0,0)$，并令 s 位于 $(a,0)$。若固定 t_1 和 t_2，点 s' 必须位于 $C_{t_1} \cup C_{t_2}$ 中，后文将其称为可行区域 $R_f = C_{t_1} \cup C_{t_2}$。不失一般性，我们假设 s' 是 R_f 中距离 p 最近的点。（见图 10。）以下引理给出了 s' 的位置。

引理 B.1. 点 s' 位于

$$\left(\frac{\delta^2 + 2r\delta + a^2}{2a} - \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{((2r+\delta)^2 - a^2)(a^2 - \delta^2)}}{2a} - \frac{\sqrt{(2r)^2 - a^2}}{2} \right).$$

证明。 t_2 的位置为

$$\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{(2r)^2 - a^2}}{2} \right),$$

t_1 的位置为

$$\left(\frac{\delta^2 + 2r\delta + a^2}{2a}, \frac{\sqrt{((2r+\delta)^2 - a^2)(a^2 - \delta^2)}}{2a} \right).$$

令 m 为 t_2 和 t_1 的中点，则 m 的坐标是 t_1 和 t_2 的坐标的平均值。我们注意到 $s \in R_f$。此外，s 是 R_f 中距离 p 最远的点。因此，点 s' 是点 s 关于点 m 的对称点；已知 s 位于 $(a,0)$，其坐标可计算如下。

□

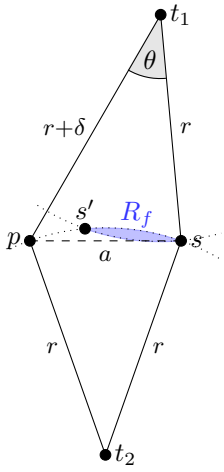


图 10： R_f 和 s'的可行区域。

根据引理 B.1，仅考虑 s'的 x 坐标，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 + 2r\delta + a^2}{2a} - \frac{a}{2} &= \frac{\delta^2 + 2r\delta + a^2 - a^2}{2a} \\
&= \frac{\delta^2 + 2r\delta}{2a} \\
&\geq \frac{\delta^2 + 2r\delta}{r} \\
&= \frac{\delta^2}{r} + 2\delta \\
&> 2\delta,
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由以下事实得出： $a \leq r/2$ ；第二个严格不等式成立是因为 $\delta > 0$。因此， $d(p, s') > 2\delta$ ，如所需。

□

B.3 引理5.7的证明

引理 5.7. 考虑位于相邻层级 L_i 和 L_{i+1} 的两个传感器 s 和 s'。设 a 和 a' 分别为 s 和 s' 到 p 的距离。设 s 在半径 $a/2$ 下覆盖的角度区间为 I。s' 在半径 $a'/2$ 下覆盖的额外角度（相对于 I）至少为 反余弦$(13/20)$。

证明。设 s 和 s'的两个覆盖圆分别为 C_s 和 $C_{s'}$，并设 C_p 为以 p为圆心、半径为 r 的圆。引理5.6表明，如果区域 $C_{s'} \setminus (C_s \cup C_p)$包含两个区域，那么可以用两个圆覆盖它们，且这两个圆到 p的距离至多为 $a'/2$，总成本小于 a'；但这会导致矛盾。

因此，$C_{s'} \setminus (C_s \cup C_p)$只包含一个区域。设 v 为 $C_{s'}$ 和 C_s 在 C_p之外的交点。（见图6。）我们声称，$C_{s'}$ 覆盖的额外角度至少为反余弦$(13/20)$。为此，反设不然。在这种情况下，v到 p的距离小于 $r + a'$；因此，我们可以在以 p 为圆心、半径为 a' 的圆上移动 s'，保持移动成本不变，同时增加 $C_s \cup C_p$之外的覆盖面积。 □