arXiv:2305.03951v1 [math.NT] 6 May 2023

尖点形式周期多项式的黎曼猜想

WILLIAM CRAIG 和 WISSAM RAJI

Abstract. 我们研究与权为 k 的尖点形式 f 相关的周期多项式 $r_f(z)$，其中这些尖点形式定义在整个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上。它们是与 f 相关的模 L 函数在临界 L 值处的生成函数。2014 年，El-Guindy 和 Raji 证明，若 f 是特征形式，则 $r_f(z)$ 满足一种“黎曼猜想”，即其所有零点都位于其函数方程的自然边界上。我们证明，这一现象并非特征形式所独有，并给出大量自然的无穷尖点形式族，其周期多项式几乎总是满足黎曼猜想。例如，我们证明，对于权为 $k \geq 120$ 的情形，具有正系数的特征形式线性组合总是具有幺模周期多项式。

1. Introduction

设 S_k 为权为 k 且层为 1 的尖点形式空间。本文研究 f 的周期多项式。为定义傅里叶展开为 $f(z)=\sum_{n\geq 1} a_n q^n$、 $q:=e^{2\pi iz}$ 的 $f \in S_k$ 的周期多项式，考虑 f 的艾希勒积分，其定义为

$$\mathcal{E}_f(z) := \int_z^{i\infty} f(\tau)(\tau - z)^{k-2}\, d\tau = -\frac{(k-2)!}{(2\pi i)^{k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k-1}} e^{2\pi i n z}.$$

f 的周期多项式是次数至多为 $k-2$ 的多项式，它刻画了艾希勒积分 $\mathcal{E}_f(z)$ 的模性误差，即

$$r_f(z) := \mathcal{E}_f(z) - z^{k-2}\mathcal{E}_f\left(-\frac{1}{z}\right).$$

通过考察 f 的傅里叶展开，很容易推得 $r_f(z)$ 是模形式 L 函数 $L(f,s)$ 的临界 L 值的生成函数。更具体地说，我们有

$$r_f(z) = -\frac{(k-2)!}{(2\pi i)^{k-1}} \sum_{n=0}^{k-2} \frac{(2\pi i z)^n}{n!} L(f, k-n-1) = \sum_{n=1}^{k-2} i^{n+k-1} \Lambda(f, k-n-1) z^n,$$

其中

$$\Lambda(f,s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$$

是满足函数方程 $\Lambda(f,s) = \epsilon(f)\Lambda(f, k-s)$ 的完备 L-函数，其中 $\epsilon(f) = \pm 1$。周期多项式理论对模形式理论及其 L-函数具有重要意义。例如，Manin 已证明 [13] 即

$r_f(z)$ 系数中出现的临界 L-值满足以下有理性条件。

定理1.1。设 f 是一个傅里叶系数为有理数的归一化尖点海克特征形式。那么存在 $\omega_\pm(f) \in \mathbb{R}$，使得对所有满足 $1 \le s$、$r \le k-1$ 且 s 为偶、r 为奇的 s, r，$\Lambda(f,s)/\omega_+(f)$ 和 $\Lambda(f,r)/\omega_-(f)$ 均为有理数。

本文关注周期多项式的零点。Conrey、Farmer 和 Imamoglu 首先研究了这一问题 [5], ，他们证明，对于 $f \in S_k$ 特征形式，奇周期多项式 $r_f^-(z)$ 的所有非平凡零点都位于单位圆盘上。不久之后，El-Guindy 和第二作者 [2] 证明，如果 $f \in S_k$ 是特征形式，那么 $r_f(z)$ 的所有零点都位于单位圆盘上。Jin、Ma、Ono 和 Soundararajan [9] 证明了关于层为 N 且权为偶数的新形式的类似结果；Liu、Park 和 Song [12] 则研究了任意层、Nebentypus 和权的新形式所对应的问题。由于对于层为 N的尖点形式，$r_f(z)$ 在变量替换 $z \mapsto 1/\sqrt{N}z$ 下满足函数方程，这些定理后来被称为“周期多项式的黎曼猜想”。我们也将经常使用这一术语。许多其他作者也研究了类似问题；例如，[1, 6, 7, 8]讨论了各种相关问题。

据作者所知，此前所有关于尖点形式周期多项式的黎曼猜想的研究，都聚焦于特征形式的情形（在较高层的情形下则是新形式）。我们证明了适用于非常广泛的尖点形式类别的此类定理。为此，我们的首个主要结果是一个初等且完全明确的充分条件，用于判定任意尖点形式 f 的周期多项式 $r_f(z)$ 是否满足黎曼猜想。由于对于任意常数 A，$r_{Af}(z) = Ar_f(z)$，为简洁起见，我们针对归一化尖点形式表述结果。

定理 1.2. 设 $N \ge 1$, $k \ge 12$ 为整数，且 $f(z) = q^N + \sum_{n>N} c(n)q^n$ 是一个非零归一化尖点形式。设 C_f 为满足对所有 $n \ge N$ 均有 $|c(n)| \le C_f \sigma_0(n) n^{\frac{k-1}{2}}$ 的最小常数。此外，假设

$$\frac{4e^{2\pi}C_f}{(N+1)^{k/4}} + \frac{4e^{2\pi}C_f\,(2\pi)^{\lfloor \frac{k}{4} \rfloor}\left[\sqrt{k}\log(2k)+1\right]}{\left(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor\right)!} + \frac{e^{2\pi N}\,(2\pi N)^{\lfloor \frac{k}{4} \rfloor}}{N^{k-1}\left(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor\right)!} < \frac{1}{N^{k-1}}\left(e^{-2\pi N} - \frac{(2\pi N)^{k/2}}{(k/2)!}e^{2\pi N}\right) \tag{1}$$

并且命题 2.4 的判定条件对 $m = \frac{k}{2} - 1$ 成立。那么 $r_f(z)$ 满足黎曼猜想。

注1.3. 这样的常数 C_f 的存在性事先并不显而易见，但它是 Deligne 证明魏尔猜想的一个著名推论。我们还注意到，尽管 S_k 的 Sturm 基意味着 C_f 可以任意大，但归一化尖点形式 f的 C_f值不可能任意小。

尽管定理 1.2 并非 $r_f(z)$ 满足黎曼猜想的必要条件，但这一检验让我们能够立即深入了解大族

尖点形式的周期多项式。我们讨论定理 1.2 的两个具体应用。前两个应用给出了尖点形式的自然族，其周期多项式在权充分大时满足黎曼猜想。

定理 1.4. 设 $k \geq 120$ 为偶整数，且设 r 为复向量空间 S_k 的维数，其中 S_k 由尖点形式构成。假设 $f_1, \ldots, f_r$ 是 S_k 的归一化特征基，并假设 $c_1, \ldots, c_r$ 是非负实数，且不全为零。那么，如果 $f = c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r$，则 $r_f(z)$ 满足黎曼猜想。

注 1.5. 由于对于任意常数 A，$r_{Af}(z) = Ar_f(z)$，因此 (1) 中的条件 $c_j \geq 0$ 可以替换为假设 $c_j \in \mathbb{C}$ 具有相同的辐角（除了那些 c_j 等于 0 的情形）。特别地，如果我们假设 $c_j \leq 0$，结论同样成立。

虽然这一首个结果将范围限制在具有正系数的线性组合情形，但对于更一般的特征形式线性组合，仍然可以证明某些非常一般的定理；这类线性组合允许系数同时取正值和负值。下面的定理将对此作出明确说明。

定理 1.6。设 $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ 和 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是非负实数向量，且满足 $\sum_{\ell=1}^{m} c_\ell > \sum_{j=1}^{n} a_j$。对于 $k \geq 12$ 个整数，令 $f_1, \ldots, f_r$ 为特征形式，并令

$\mathcal{F}_k(\mathbf{c}, \mathbf{a}) := \{c_1 f_{i_1} + \cdots + c_m f_{i_m} - a_1 f_{j_1} - \cdots - a_n f_{j_n} \colon 1 \leq i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_n \leq r$ 互不相同$\}$ 且

$$\mathcal{F}(\mathbf{c}, \mathbf{a}) := \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{F}_k(\mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

那么存在一个依赖于 $\mathbf{c}$、$\mathbf{a}$ 的常数 k_0，使得对于所有 $k \geq k_0$，$r_f(z)$ 对所有 $f \in \mathcal{F}_k(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ 都满足黎曼猜想。特别地，至多有有限多个 $f \in \mathcal{F}(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ 具有如下性质：$r_f(z)$ 不满足黎曼猜想。

这些结果引出了有趣的概率解释。例如，定理 1.4 表明，如果从 S_k 中“随机”选取一个尖点形式，那么 $r_f(z)$ 满足黎曼猜想的概率应当大于零。我们将在第 4 节中更详细地讨论这一解释。此外，定理 1.6 表明，对于一个系数相较于权重较小的一般尖点形式，其周期多项式应当满足黎曼猜想。这一想法也将在后续结果中具体阐明，尤其是在定理 3.1 中。

本文其余部分的组织如下。第 2 节讨论主要证明所需的预备结果，包括幺模多项式、模 L-函数的基本性质，以及与指数函数相关的某些多项式的零点。第 3 节证明定理 1.2 和 3.1，它们是本文的主要技术结果，并将定理 1.4 和 1.6 推导为推论。在第 4 节，我们探讨统计问题，并证明“随机选取的周期多项式”满足黎曼猜想的概率为正。最后，在第 5 节讨论未来研究的若干可能方向，特别是讨论一些

对于这些尖点形式，定理 1.2 并不适用，但它们仍然经常具有幺模周期多项式。

Acknowledgements

第一作者获得了欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线 2020 研究与创新计划下提供的资助（资助协议编号：101001179）。第二作者感谢贝鲁特美国大学（AUB）高级数学科学中心（CAMS）提供的支持，并感谢 Kathrin Bringmann 邀请其前往德国科隆进行富有成果的学术访问，本项目正是在此期间开展的。作者感谢 Kathrin Bringmann 提出的宝贵意见，这些意见改进了本文稿。

2. Preliminary results

2.1. 幺模多项式。本节简要概述幺模多项式，以及证明某些多项式为幺模多项式的有用判据。研究幺模多项式需要用到自互反多项式这一概念。自互反多项式是指满足以下条件的任意多项式 $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ ：存在某个模长为 1 的复数 ε ，使得

$$P(z) = \varepsilon z^{\deg(P)} P\left(1/z\right).$$

Cohn [4] 证明，多项式 $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ 是幺模多项式，当且仅当它是自反的，且 $P'(z)$ 的所有零点都位于闭单位圆盘内。利用这一判据，并采用 Lal´ın 和 Smyth 的一种论证，[11], El-Guindy 与第二作者证明了以下有助于构造幺模多项式的结果。

命题 2.1（[2, 定理 2.2]）。设 $h(z) \in \mathbb{C}[z]$ 是一个所有零点均位于闭单位圆盘内的 n 次多项式。对于任意 $d \geq n$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，考虑多项式

$$P\left(\lambda; z\right) = z^{d-n} h(z) + \lambda z^n \overline{h}\left(1/z\right).$$

那么，对任意满足 $|\lambda| = 1$ 的 $P(\lambda;\ z) \neq 0$，都有 $P(\lambda; z)$ 是幺模多项式。

在我们的应用中， $P\left(\lambda; z\right)$ 将是周期多项式，而我们将利用已完成 L-函数 $\Lambda\left(f, s\right)$ 的函数方程来构造多项式 $h(z)$。

2.2. 尖点形式的周期多项式与 L-函数。现在我们定义本文的关键对象。固定一个尖点形式 $f \in S_k$。设其傅里叶展开为

$$f(z) = \sum_{n \geq N} c(n) q^n,$$

其中，按惯例 $q = e^{2\pi i z}$，而 $N = N(f) \geq 1$是 f在 $i\infty$处的消失阶。注意，如果 f 是特征形式，那么特征形式理论的一个基本结果是 $N = 1$。

回忆一下，与 f 关联的 L-函数在 $\mathrm{Re}\left(s\right) > 1$ 时定义为

$$L\left(f, s\right) := \sum_{n \geq N} \frac{c(n)}{n^s}.$$

随后， L-函数的特殊值便由周期多项式的系数编码，我们回顾一下，引言中给出的周期多项式为

$$r_f(z) = -\frac{(k-2)!}{(2\pi i)^{k-1}} \sum_{n=0}^{k-2} \frac{(2\pi i z)^n}{n!} L(f, k-n-1).$$

由于我们只关心 $r_f(z)$ 的零点模长，为方便起见，我们将其归一化为一个实系数多项式。令 $w := k-2$，在本文余下部分中，我们考虑修正周期多项式

$$p_f(z) := -\frac{(2\pi i)^{w+1}}{w!} r_f(z/i) = \sum_{n=0}^{w} L(f, w-n+1) \frac{(2\pi z)^n}{n!}.$$

因此， $r_f(z)$ 是单位模的，当且仅当 $p_f(z)$ 是单位模的。

现在我们推导一个判据，用以证明 $p_f(z)$ 的幺模性。关键事实是众所周知的函数方程

$$\frac{(2\pi)^{k-s}}{\Gamma(k-s)} L(f,s) = i^k \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} L(f, k-s). \tag{2}$$

我们利用这个函数方程，将 L-函数 $L(f,s)$ 的临界值联系起来。更具体地说，对于任意整数 $0 \le n \le w$，恒等式

$$L(f, w-n+1) = i^k \frac{(2\pi)^{w-n} n!}{(2\pi)^n (w-n)!} L(f, n+1) \tag{3}$$

由 (2) 可轻易推出。利用 (3) 作简单计算可知， $p_f(z)$ 是自反互易的。更具体地说，我们有

$$p_f(z) = i^k z^w p_f\left(\frac{1}{z}\right) = i^k \sum_{n=0}^{w} L(f, w-n+1) \frac{(2\pi)^n}{n!} z^{w-n}.$$

注意到，由于 f 是 1级全纯模形式， k 必须为偶数，因此 $i^k = \pm 1$。这个等式启发我们利用命题 2.1。现在我们引入记号以明确这一联系。令 $m := \frac{w}{2} = \frac{k}{2} - 1$ 在本文余下部分中成立，我们定义多项式

$$q_f(z) := \sum_{n=0}^{m-1} L(f, w-n+1) \frac{(2\pi)^n}{n!} z^{m-n} + \frac{1}{2} L\left(f, \frac{k}{2}\right) \frac{(2\pi)^m}{m!}. \tag{4}$$

注意 L-函数的函数方程蕴含了关键恒等式 y

$$i^k p_f(z) = z^m q_f(z) + i^k z^m q_f(1/z). \tag{5}$$

将命题 2.1 应用于 (5)，我们得到关于 $r_f(z)$ 幺模性的以下判据。

命题 2.2. 设 $f \in S_k$ 是一个尖点形式。若 $q_f(z)$ 的零点位于闭单位圆盘内，则周期多项式 $r_f(z)$ 是单位模的。

命题 2.2 中关于幺模性的判据，正是我们将用于证明本文主要结果的内容。本文其余部分将专门介绍所需的技巧，以证明对于一大类尖点形式 f， $q_f(z)$ 的零点位于闭单位圆盘内。基本思路是用近似数值替代 L-函数，这需要了解 L-函数的系数大小。

2.3. L-函数的估计。根据命题 2.2，周期多项式的单位模问题可归结为研究多项式 $q_f(z)$。在解释严谨的技术细节之前，我们先给出一种启发式说明，阐释这一方法。首先，容易看出，对于任意常数 A和任意 $f \in S_k$, $r_{Af}(X) = Ar_f(z)$。因此，不失一般性，我们可以假设 $f \in S_k$已归一化，即 $f(z) = q^N + O\left(q^{N+1}\right)$。由于 L-函数的大部分大小来自其最前面的项，我们有如下朴素近似： $L(f, s) \approx N^{-s}$。利用这一近似，我们看到

$$q_f(z) \approx \sum_{n=0}^{m} N^{-w+n-1} \frac{(2\pi)^n}{n!} z^{m-n} = N^{-w-1} \sum_{n=0}^{m} \frac{(2\pi N)^n}{n!} z^{m-n}.$$

右侧出现的多项式与指数函数密切相关。特别地，对于任意实数 $\beta > 0$ ，考虑标准的泰勒级数展开

$$\exp(2\pi\beta z) = T_{m,\beta}(z) + R_{m,\beta}(z), \quad T_{m,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{m} \frac{(2\pi\beta z)^n}{n!}.$$

因此很容易看出，对于

$$H_{m,\beta}(z) := z^m T_{m,\beta}(1/z)$$

先前的启发式近似表明

$$q_{f,a}(z) \approx N^{-(w+1)} H_{m,N}(z).$$

由于多项式的零点是其系数的连续函数，$q_f(z)$ 的零点应当与 $H_{m,\ N}(z)$ 的零点具有相似的行为。现在，随着 m 增大，$T_{m,\ N}(z)$ 的零点趋向无穷远点，因为指数函数在 $\mathbb{C}$ 上不为零；因此，$H_{m,\ N}(z)$ 的零点必定趋于零，最终应落在单位圆盘内。要使这一论证严谨，我们需要的主要技术工具是引理 2.3，它用严格的数学术语说明了近似关系 $L(f, s) \approx N^{-s}$。随后，我们将使用 Rouch´e 定理，严谨地比较 $H_{m,\ N}(z)$ 与 $q_f(z)$ 的零点。

我们以所需的关于 L-函数的技术估计结束本节，而 $H_{m,\ N}(z)$ 的零点研究留待下一节进行。我们证明该引理所用的方法，是对 Conrey、Farmer 和 Imamoglu 工作中的关键引理[5]所作的改进。

引理 2.3. 设 $f(z) = q^N + \sum c(n)q^n \in S_k$ 是一个非零的归一化尖点形式。设 $C_{f^{n>N}}$ 为一个常数，使得对所有 $n \geq 1$ 都有 $|c(n)| \leq C_f \sigma_0(n) n^{\frac{k-1}{2}}$。则对所有 $\sigma \geq \frac{3k}{4}$，有

that

$$\left|L\left(f,\sigma\right)-N^{-\sigma}\right|<\frac{4C_f}{\left(N+1\right)^{k/4}}.$$

此外，对于任意整数 $\sigma\geq\frac{k}{2}$，我们有

$$\left|L\left(f,\sigma\right)\right|<2C_f\left[2\sqrt{k}\log\left(2k\right)-2\sqrt{N-1}+1+2^{k/2+1}e^{-\pi k}\right].$$

证明。利用三角不等式以及界 $|c(n)|\leq C_f\sigma_0(n)n^{\frac{k-1}{2}}$, $\sigma\geq\frac{3k}{4}$ 和平凡界 $\sigma_0(n)\leq 2\sqrt{n}$，我们得到

$$\left|L\left(f,\sigma\right)-N^{-\sigma}\right|=\sum_{n\geq N+1}\frac{|c(n)|}{n^{\sigma}}\leq C_f\sum_{n\geq N+1}\frac{\sigma_0(n)}{n^{\frac{3k}{4}-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}}\leq 2C_f\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{n^{k/4}}.$$

由定值公式可知 $N\leq\frac{k}{12}$，因此对于 $k\geq 12$，我们有 $\frac{N+1}{k-4}\leq\frac{1}{4}$。结合这一估计与初等黎曼和，可得

$$\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{n^{k/4}}<\frac{1}{\left(N+1\right)^{k/4}}+\int_{N+1}^{\infty}\frac{1}{x^{k/4}}dx=\frac{1+\frac{4}{k-4}\left(N+1\right)}{\left(N+1\right)^{k/4}}<\frac{2}{\left(N+1\right)^{k/4}}$$

因此

$$\left|L\left(f,\sigma\right)-N^{-\sigma}\right|<\frac{4C_f}{\left(N+1\right)^{k/4}}$$

这就得到了引理的第一部分。为了证明第二部分，我们首先假设 $\sigma\geq\frac{k}{2}+1$ 是一个整数。令 $\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ 为经典的黎曼 ζ 函数。利用狄利克雷卷积，经典地可知 $\zeta(s)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_0(n)n^{-s}$。根据引理中假设的界，我们立即得到

$$\left|L\left(f,\sigma\right)\right|\leq C_f\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\sigma_0(n)}{n^{3/2}}<C_f\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2. \tag{6}$$

现在我们来考虑情形 $\sigma=\frac{k}{2}$。运用解析数论中的标准技巧，我们有

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)L\left(f,\frac{k}{2}\right)=2\sum_{n=N}^{\infty}\frac{c(n)}{n^{k/2}}\int_{2\pi n}^{\infty}e^{-x}x^{k/2}\frac{dx}{x}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\left|L\left(f,\frac{k}{2}\right)\right|&\leq\frac{2}{\Gamma\left(k/2\right)}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|c(n)|}{n^{k/2}}\int_{2\pi n}^{\infty}e^{-x}x^{k/2}\frac{dx}{x}\\&\leq\frac{2C_f}{\Gamma\left(k/2\right)}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}}\int_{2\pi n}^{\infty}e^{-x}x^{k/2}\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

由于 $N < k$，将积分下限延伸至零后，我们得到

$$\sum_{n=N}^{k} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} \int_{2\pi n}^{\infty} e^{-x} x^{k/2} \frac{dx}{x} < \Gamma\left(k/2\right) \sum_{n=N}^{k} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}}.$$

根据 [5] 中的论证，我们有

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{k} \log\left(2k\right),$$

并通过使用 简单的归纳论证，结合 $\sigma_0(n) \geq 1$ ，可以证明

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{N-1} - 1.$$

因此可得

$$\sum_{n=N}^{k} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} \int_{2\pi n}^{\infty} e^{-x} x^{k/2} \frac{dx}{x} < \Gamma\left(k/2\right) \left[2\sqrt{k} \log\left(2k\right) - 2\sqrt{N-1} + 1\right].$$

我们还有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} \int_{2\pi n}^{\infty} e^{-x} x^{k/2} \frac{dx}{x} &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} \int_{2\pi n}^{\infty} e^{-\pi n} e^{-x/2} x^{k/2} \frac{dx}{x} \\
&= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} 2^{k/2} e^{-\pi n} \int_{\pi n}^{\infty} e^{-u} u^{k/2} \frac{du}{u} \\
&< 2^{k/2} \Gamma\left(k/2\right) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} e^{-\pi n} \\
&< 2\Gamma\left(k/2\right) \cdot 2^{k/2} e^{-\pi k}.
\end{aligned}$$

因此，经过一些化简后，我们得到 $\sigma = \frac{k}{2}$

$$|L\left(f, \sigma\right)| < 2C_f \left[2\sqrt{k} \log\left(2k\right) - 2\sqrt{N-1} + 1 + 2^{k/2+1} e^{-\pi k}\right]. \tag{7}$$

利用 (6)，我们看到，只要满足 $\sigma \geq \frac{k}{2}$ ，(7) 对所有情形都成立

$$\frac{1}{4}\zeta\left(3/2\right)^2 - \frac{1}{2} < \sqrt{k} \log\left(2k\right) - \sqrt{N-1} + 2^{k/2} e^{-\pi k}.$$

该表达式的左侧为 ≈ 1.206。注意，由于 $N < k$，只需证明

$$\frac{1}{4}\zeta\left(3/2\right)^2 - \frac{1}{2} < \sqrt{k} \log\left(2k\right) - \sqrt{k} + 2^{k/2} e^{-\pi k}.$$

实值函数 $g(x) := \sqrt{x} \log\left(2x\right) - \sqrt{x} + 2^{x/2} e^{-\pi x}$ 对于所有 $x > 3$ 都有 $g(x) > \frac{1}{4}\zeta(3/2)^2 - \frac{1}{2}$。特别地，由于 $f \in S_k$ 是一个非零的 1级尖点形式，我们有 $k \geq 12$，因此 (7) 对所有 $\sigma \geq \frac{k}{2}$ 都适用。□

2.4. 截断指数级数。本节简要讨论当 m 变大时 $H_{m,N}(z)$ 的这些零点。回顾泰勒分解

$$\exp(2\pi Nz) = T_{m,N}(z) + R_{m,N}(z), \quad T_{m,N}(z) := \sum_{n=0}^{m} \frac{(2\pi Nz)^n}{n!},$$

以及相关多项式

$$H_{m,N}(z) := z^m T_{m,N}(1/z).$$

在本节中，我们研究 $H_{m,N}(z)$ 的零点，以期证明一般情况下 $H_{m,N}(z)$ 的所有零点都位于闭单位圆盘内。

命题 2.4. 假设 $m, N \geq 1$ 是满足 $1 \leq N \leq \frac{1}{4}\log(m)$ 和 $m \geq 210$ 的整数。那么

$$|T_{m,N}(z)| \geq e^{-2\pi N} - \frac{(2\pi N)^{m+1}}{(m+1)!} e^{2\pi N} > 0$$

对每个 $|z| \leq 1$ 都成立。在相同条件下，$H_{m,N}(z)$ 的所有零点都在闭单位圆盘内。此外，对于 $m \geq 20$，$H_{m,1}(z)$ 的所有零点都在单位圆盘内。

注 2.5. 我们的主要结果只用到 $N = 1$ 和 $m \geq 20$ 的情形。然而，证明的更一般表述与第 5 节中对 $N \geq 2$ 情形的讨论有关。

命题 2.4 的证明。关于$H_{m,\,1}(z)$的断言已在 [2, 定理 3.1], 中得到证明，因此我们转而考虑更一般的情形。设 z 为一个复数，满足 $|z| = r$ 且 $0 \leq r \leq 1$。令 $f(z) = \exp(2\pi Nz)$。注意到根据泰勒定理，我们有如下界

$$|R_{m,N}(z)| \leq \frac{\left|f^{(m+1)}(z_0)\right|}{(m+1)!}|z|^{m+1}$$

对某个 $0 \leq z_0 \leq r$成立。由于 $f^{(m+1)}(z) = (2\pi N)^{m+1} e^{2\pi Nz}$，因此我们得到

$$|R_{m,N}(z)| \leq \frac{(2\pi N)^{m+1}}{(m+1)!} r^{m+1} e^{2\pi rN} \leq \frac{(2\pi/N)^{m+1}}{(m+1)!} e^{2\pi/N}$$

因为对于 $N > 0$，上界显然是 r 的增函数。因此，根据三角不等式、 $0 \leq r \leq 1$这一事实以及$T_{m,\,N}(z)$的定义，对所有$|z| \leq 1$，我们有

$$|T_{m,N}(z)| \geq \left|e^{2\pi Nz}\right| - |R_{m,N}(z)| \geq e^{-2\pi N} - \frac{(2\pi N)^{m+1}}{(m+1)!} e^{2\pi N}. \tag{8}$$

现在，如果我们定义函数

$$F_\alpha(m) := e^{-\alpha} - \frac{\alpha^{m+1}}{(m+1)!} e^{\alpha},$$

只需证明，在定理的假设下，我们有 $F_{2\pi N}(m) > 0$。现在，经过一些初等运算，我们得到：对于任意 $\alpha, m > 0$， $F_\alpha(m) > 0$ 当且仅当

$$2\alpha + (2m+2)\log(\alpha) < \log(m+1)!.$$

现在，对于任意 $n \geq 1$，众所周知

$$\log(n!) \geq n\log(n) - n + 1,$$

因此，要证明 $F_\alpha(m) > 0$，只需证明

$$2\alpha + (2m+2)\log(\alpha) < (m+1)\log(m+1) - m. \tag{9}$$

由于 α 和 $\log(\alpha)$ 都是 α 的递增函数，因此若 (9) 对$\alpha = \alpha_0$ 和 $m \geq m_0$成立，则对 $\alpha \leq \alpha_0$ 和 $m \geq m_0$也成立。令 $\alpha = 2\pi N$，则 (9) 化为

$$4\pi N + (2m+2)\log(2\pi N) < (m+1)\log(m+1) - m, \tag{10}$$

若我们对某些 $N = N_0 \geq 1$ 和 $m \geq m_0$ 证明 (10)，则对 $1 \leq N \leq N_0$ 和 $m \geq m_0$ 也成立。现在，直接计算可验证，当 $N = \frac{1}{4}\log(m)$ 对所有 $m \geq 210$ 成立时，(10) 成立，因此对于所有 $1 \leq N \leq \frac{1}{4}\log(m)$ 以及所有 $m \geq 210$，(10) 均成立，由 (8) 可得

$$|T_{m,N}(z)| \geq \left|e^{2\pi N z}\right| - |R_{m,N}(z)| \geq e^{-2\pi N} - \frac{(2\pi N)^{m+1}}{(m+1)!}e^{2\pi N} > 0.$$

这就证明了命题的第一部分。关于 $H_{m,N}(z)$ 的零点的结论，可由第一部分结合恒等式 $H_{m,N}(z) = z^m T_{m,N}(1/z)$ 得出。□

注记 2.6. 从 $H_{m,N}(z)$ 的定义容易看出，若命题 2.4 的假设成立且 $|z| = 1$，则

$$|H_{m,N}(z)| \geq e^{-2\pi N} - \frac{(2\pi N)^{m+1}}{(m+1)!}e^{2\pi N} > 0. \tag{11}$$

3. Proofs of main results

3.1. 定理 1.2 的证明。设 $f \in S_k$ 是一个在无穷远点的消失阶为 $N \geq 1$ 的非零尖点形式。在整个证明过程中，我们使用记号 $m = \frac{w}{2} = \frac{k}{2} - 1$。我们先进行一些计算，以比较多项式 $q_f(z)$ 和 $N^{-(w+1)}H_{m,\ N}(z)$。根据引理

2.3，对于所有 $|z|=1$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|q_f(z)-N^{-(w+1)}H_{m,N}(z)\right| \\
&\quad\le \sum_{n=0}^{m-1}\left|L\left(f,w-n+1\right)-N^{-(w-n+1)}\right|\frac{(2\pi)^n}{n!}+\left(\left|L\left(f,w-m+1\right)\right|+N^{-(w-m+1)}\right)\frac{1}{m!} \\
&\quad\le \sum_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{4}\rfloor-1}\left|L\left(f,w-n+1\right)-N^{-(w-n+1)}\right|\frac{(2\pi)^n}{n!} \\
&\qquad+\sum_{n=\lfloor\frac{k}{4}\rfloor}^{m}\left(\left|L\left(f,w-n+1\right)\right|+N^{-(w-n+1)}\right)\frac{(2\pi)^n}{n!} \\
&\quad< \sum_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{4}\rfloor-1}E_1\left(f\right)\frac{(2\pi)^n}{n!}+\sum_{n=\lfloor\frac{k}{4}\rfloor}^{m}\left(E_2\left(f\right)+N^{-(w-n+1)}\right)\frac{(2\pi)^n}{n!},
\end{aligned}$$

其中我们定义

$$E_1\left(f\right):=\frac{4C_f}{\left(N+1\right)^{k/4}}$$

and

$$E_2\left(f\right):=2C_f\left[2\sqrt{k}\log\left(2k\right)-2\sqrt{N-1}+1+2^{k/2+1}e^{-\pi k}\right].$$

上述上界中的第一项可估计为

$$\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{4}\rfloor-1}E_1\left(f\right)\frac{(2\pi)^n}{n!}=\frac{4C_f}{\left(N+1\right)^{k/4}}\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{4}\rfloor-1}\frac{(2\pi)^n}{n!}<\frac{4e^{2\pi}C_f}{\left(N+1\right)^{k/4}}=:C_f\alpha_{k,N}.$$

第二项可以分解为两部分，我们分别利用泰勒定理对其进行估计。于是，利用 $N\ge 1$、$k\ge 12$ 和 $\sqrt{k}\log(2k)<k\,\text{for}k\ge 12$，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\lfloor\frac{k}{4}\rfloor}^{m}E_2\left(f\right)\frac{(2\pi)^n}{n!}&<2C_f\left[2\sqrt{k}\log\left(2k\right)-2\sqrt{N-1}+1+2^{k/2+1}e^{-\pi k}\right]\sum_{n=\lfloor\frac{k}{4}\rfloor}^{\infty}\frac{(2\pi)^n}{n!} \\
&<\frac{4e^{2\pi}C_f\left(2\pi\right)^{\lfloor\frac{k}{4}\rfloor}\left[\sqrt{k}\log\left(2k\right)+1\right]}{\left(\lfloor\frac{k}{4}\rfloor\right)!}=:C_f\beta_k
\end{aligned}$$

通过应用泰勒定理，同理

$$\sum_{n=\lfloor\frac{k}{4}\rfloor}^{m}N^{-(w-n+1)}\frac{(2\pi)^n}{n!}<N^{-(w+1)}\sum_{n=\lfloor\frac{k}{4}\rfloor}^{\infty}\frac{(2\pi N)^n}{n!}<\frac{e^{2\pi N}\left(2\pi N\right)^{\lfloor\frac{k}{4}\rfloor}}{N^{w+1}\left(\lfloor\frac{k}{4}\rfloor\right)!}=:\gamma_{k,N}.$$

因此，我们有

$$\left|q_f(z) - N^{-(w+1)} H_{m,N}(z)\right| < C_f \alpha_{k,N} + C_f \beta_k + \gamma_{k,N}. \tag{12}$$

现在，回顾（11），如果 $m \geq 210$ 和 $1 \leq N \leq \frac{1}{4}\log(m)$，则有

$$\left|N^{-(w+1)} H_{m,N}(z)\right| \geq \delta_{k,N} > 0,$$

其中

$$\delta_{k,N} := N^{-(w+1)} \left(e^{-2\pi N} - \frac{(2\pi N)^{k/2}}{(k/2)!} e^{2\pi N} \right).$$

因此，如果我们假设 $m \geq 210$、$1 \leq N \leq \frac{1}{4}\log(m)$，以及不等式

$$C_f \alpha_{k,N} + C_f \beta_k + \gamma_{k,N} < \delta_{k,N}, \tag{13}$$

可以将命题 2.4 与方程（12）和（13）结合起来，得到

$$\left|q_f(z) - N^{-(w+1)} H_{m,N}(z)\right| < \left|N^{-(w+1)} H_{m,N}(z)\right|.$$

因此，如果我们假设（13），则 Rouch´e 定理的假设条件得到满足，并且我们看到 q_f（z）和 $H_{m,\ N}$（z）在单位圆盘内具有相同数量的零点。随后，我们可以调用命题 2.4 来确定 q_f（z）在单位圆盘内有多少个零点。特别地，如果 m、N 满足 $H_{m,\ N}$（z）的所有零点都在单位圆盘内，那么由于 q_f（z）和 $H_{m,\ N}$（z）具有相同的次数，q_f（z）的所有零点也都在单位圆盘内；于是根据命题 2.2，我们有 r_f（z）是单位模的。由此我们证明了不等式（13）成立足以证明 r_f（z）是单位模的，从而完成了定理 1.2 的证明。

3.2. 定理 3.1 的证明。现在我们证明定理 1.2 的一个非常一般的推论，该推论对于研究某些尖点形式族很有用。从哲学角度来说，这一定理告诉我们：如果 $f \in S_k$ 是特征形式 $f = c_1 f_1 + \ldots c_r f_r$ 的线性组合，那么只要 c_j 不会过度相互抵消，$r_f(z)$ 就会满足黎曼猜想。

定理 3.1。设 $k \geq 180$ 是一个偶整数，并设 $f = c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r$ 是权为 k 的尖点形式，其中 f_j 表示 S_k 和 $c_j \in \mathbb{C}$ 的特征形式，且不全为零。定义函数 $U(k)$ 如下：

$$U(k) := \frac{0.001865}{4e^{2\pi}} 2^{k/4},$$

并假设系数 c_i 满足不等式

$$\sum_{j=1}^{r} |c_j| \leq U(k) \cdot \left| \sum_{j=1}^{r} c_j \right|. \tag{14}$$

那么，周期多项式 $r_f(z)$ 满足黎曼猜想。特别是，如果对所有 j 都有 $c_j \in \mathbb{R}$，并定义 $C^{\pm} := \pm \sum_{\pm c_j > 0} c_j$，那么只要以下不等式之一

$$C^{\pm} \leq \frac{U(k) - 1}{U(k) + 1} C^{\mp}$$

成立， $r_f(z)$ 就满足黎曼猜想。

证明。设 $f = c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r$ 如定理所述。我们不妨假设 $C := \sum_{j=1}^{r} c_j \neq 0$，否则（14）不成立。于是 $f = Cq + O(q^2)$，我们不妨将其归一化为 $f^* = \frac{1}{C} f = q + O(q^2)$。现在，若 $f = \sum_{n\geq 1} a(n) q^n$，则由德利涅定理可知 $|a(n)| \leq C^* \sigma_0(n) n^{\frac{k-1}{2}}$，其中 $C^* := \sum_{j=1}^{r} |c_j|$。采用上文的记号，我们有 $C_{f^*} \leq \frac{C^*}{C}$。注意，定理陈述中对 c_j 的主要条件可改写为 $\frac{C^*}{C} \leq U(k)$。因此，只需证明：若 $g \in S_k$ 是一个归一化尖点形式，则只要 $C_g \leq U(k)$， $r_g(z)$的黎曼猜想就成立。

我们通过仔细计算 (17) 中各项的界来证明这一断言。根据这些定义，可以直接计算出对所有 $k \geq 150$ ， $\delta_{k,1} > 0.001867$ 和 $\gamma_{k,1} < 10^{-10}$ 的界，因此只需证明下面这个更简单的不等式，即可证明 (17)：

$$C_g \alpha_{k,1} + C_g \beta_k < 0.001866. \tag{15}$$

现在，利用对 $k \geq 150$ 成~~立的不等式 $\frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k}} \log\left(\frac{2k+4}{2k}+1\right)\log()+1$~~ < 1.01，便可直接推导出以下不等式：

$$\beta_{k+2} < \begin{cases} 1.01\beta_k & \text{if } k \equiv 0 \pmod 4, \\ \dfrac{1.01 \times 2\pi}{\frac{k}{4}+1}\beta_k & \text{if } k \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

注意到 $150 \equiv 2 \pmod 4$、当 $k \geq 150$ 时 $\frac{k}{4} - 1 > 36$ ，以及 $\beta_{150} < 10^{-8}$，可知对于每个整数 $\ell \geq 0$ 和 $k = 150 + 2\ell$，都有

$$\beta_k < (1.01)^{\ell} \left(\frac{2\pi}{36}\right)^{\lceil \frac{\ell}{2} \rceil} \beta_{150} < \left(\frac{3}{7}\right)^{\ell} 10^{-8}.$$

这一条件意味着，当 $C_g < 100\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{k-150}{2}} =: U^*(k)$ 时， $\beta_k < \frac{1}{C_g} 10^{-6}$；因此，若假设 C_g 满足这一条件，则不等式 (15) 可由下式推出：

$$\alpha_{k,1} < \frac{0.001865}{C_g},$$

经过简单化简可得

$$C_g < \frac{0.001865}{4e^{2\pi}} 2^{k/4} = U(k). \tag{16}$$

因此，根据定理 1.2，我们得出，如果 $C_g < \min(U^*(k)\ U(k))$，则 g 的周期多项式是单位模的。容易看出，对于 $k \geq 180$， $U(k) < U^*(k)$，因此实际上我们只需证明，对于 $k \geq 180$， $C_g < U(k)$，即可完成证明。□

3.3. 定理 1.4 和 1.6 的证明。我们首先证明定理 1.4。注意，由于对所有 j 都有 $c_j \geq 0$，我们不妨将定理 1.2 专门化到 $N = 1$ 的情形。因此，根据命题 2.4，假设 $k \geq 42$ 和

$$C_f \alpha_{k,1} + C_f \beta_k + \gamma_{k,1} < \delta_{k,1} \tag{17}$$

足以证明 f 的周期多项式具有幺模性。我们首先证明 (17)。与先前的证明一样，注意如果 $C = c_1 + \cdots + c_r$ and $f^*(z) := \frac{1}{C} f(z) = q + O(q^2)$，我们只需证明 $r_{f^*}(z)$ 满足黎曼猜想。现在，由于 f 是 C 个特征形式的线性组合，德利涅界告诉我们 $C_f \leq C$，因此 $C_{f^*} \leq 1$。所以，要证明 f 具有单位模周期多项式，我们只需证明 $\alpha_{k,\ 1} + \beta_k + \gamma_{k,\ 1} < \delta_{k,\ 1}$。显然，这在渐近意义下成立，因为 $\alpha_{k,\ 1}, \beta_{k,\ 1}, \gamma_{k,\ 1} \to 0$ 当 $k \to \infty$，且 $\delta_{k,\ 1} > 0$ 并且是 k 的递增函数；事实上，这个不等式对 $k \geq 120$ 成立，因此定理 1.4 得证。

现在我们证明定理 1.6。对于这一结果，使用定理 3.1 会更方便。若 $f \in \mathcal{F}(\mathrm{c, a})$，即 $f = c_1 f_{i_1} + \cdots + c_m f_{i_m} - a_1 f_{j_1} - \cdots - a_n f_{j_n}$，按照定理 3.1 的记号，我们有 $C^+ = \sum_{i=1}^m c_i$、$C^- = \sum_{j=1}^n a_j$ 和 $C^+ > C^- \geq 0$。由定理 3.1，只需证明

$$C^- \leq \frac{U(k) - 1}{U(k) + 1} C^+$$

对 $k \gg 0$成立。这显然是因为 $C^+ > C^-$ 和 $\frac{U\ k\ -1}{U\ k}\ ()()+1 \to 1$ 当 $k \to \infty$时。

4. Probabilistic interpretations

本节讨论由定理 1.4 引出的若干概率考量。在陈述这些结果之前，我们需要先建立一些记号。对于偶数整数 $X \geq 1$ 和 $k \geq 12$，定义集合

$$\mathcal{S}_{k,X} := \{f = c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r : -X \leq c_j \leq X, c_j \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{S}_{k,X}^{\mathrm{RH}} := \{f \in \mathcal{S}_{k,X} : r_f(z) \text{ satisfies the Riemann hypothesis}\}.$$

我们还考虑函数

$$\mathcal{P}_k(X) := \frac{\left|\mathcal{S}_{k,X}^{\mathrm{RH}}\right|}{\left|\mathcal{S}_{k,X}\right|},$$

它可以解释为随机选取的尖点形式的周期多项式满足黎曼猜想的概率$f \in \mathcal{S}_{k,\ X}$。考虑对所有 j，$c_j \leq 0$ 或$c_j \geq 0$ 成立的概率，即可由定理 1.4 立即推出以下推论。

Cor推论 4.1. 设 $X \geq 1$ 为一个整数，且 $k \geq 180$。如果 $r = \dim(S_k)$，则 n

$$\mathcal{P}_k(X) \geq \frac{1}{2^{r-1}}.$$

注释4.2. 也可以证明类似的结论，允许 X 和 c_j 取实值，并以下密度来表述。为简单起见，我们不详细讨论这一点。

从概念上讲，我们将推论 4.1 理解为这样一个命题：对于较大的权 k，随机选取的尖点形式满足黎曼猜想的概率为正。这引出了许多关于数值 $\mathcal{P}_k(X)$ 性质的有趣问题，尤其是关于其极限值的问题。利用本文中的结果，我们能够证明如下极限结论，其中 $k \to \infty$。

推论 4.3。设 $X \geq 1$ 是一个整数。那么我们有

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{P}_k(X) = 1.$$

证明。我们采用定理 3.1 的记号，自动可得 $f \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{RH}, x}$ 若 $C^+ = 0$ 或 $C^- = 0$，因此我们只考虑 $C^{\pm} \neq 0$ 的情形。暂且假设 f 在 $i\infty$ 处只有一个简单极点，因此 $C^+ \neq C^-$。不失一般性，设 $C^+ > C^-$。根据定理 3.1，$f \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{RH}, x}$ 若

$$C^- \leq \frac{U(k)-1}{U(k)+1} C^+.$$

这对 $k \gg 0$ 成立，因此每个在 $i\infty$ 处有一个简单极点的 $f \in \mathcal{S}_k, x$ 都属于 $\mathcal{S}_k^{\mathrm{RH}, x}$，若 k 足够大。因此，只需证明 f 在 $i\infty$ 处有一个简单极点这一条件在 $k \to \infty$ 时以概率 1 成立。由于 $f = c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r$ 在无穷远点有一个简单极点当且仅当 $c_1 + \cdots + c_r \neq 0$，结论立即由 $r \to \infty$ as$k \to \infty$ 得出。□

5. Further directions

5.1. 单模性的障碍。尽管定理 1.2 给出了一个充分条件，原则上适用于任意尖点形式，但它并非必要条件。实际上，当 k 较小或 $N \geq 2$ 时，定理 1.2 的效果并不好。事实上，注意到，尽管我们证明了命题 2.4 的一个版本，它在 $N \geq 2$ 的情况下效果相当不错，但式 (1) 的渐近性质对于不同的 N 大不相同；实际上，如果 C_f 有界且 $N \geq 1$ 固定，那么式 (1) 对 $k \gg 0$ 成立，当且仅当 $N = 1$。一种试图改善这种情况的方法，是只考虑 f，使其 C_f 的值非常小。然而，这样做也行不通。为说明这一点，考虑一个权为 k 且 $N \geq 2$ 的尖点形式 $f = q^N + \sum_{n\geq N+1} c(n) q^n$。将假设 $|c(n)| \leq C_f \sigma_0(n) n^{\frac{k-1}{2}}$ 应用于情形 $c(N) = 1$ 时，我们得到下界 $C_f \geq \left(\sigma_0(N) N^{\frac{k-1}{2}}\right)^{-1}$。现在，若固定 $N \geq 2$，要使式 (1) 在 $k \to \infty$ 时成立，就要求 $4e^{2\pi} C_f (N+1)^{-k/4}$ 比 $N^{-(k-1)}$ 更快地趋于零。这就要求 $C_f = o\left(N^{-(3k/4-1)}\right)$，而先前关于 C_f 的下界排除了这种可能。如果允许 N 随 k 增大，情况会变得更糟，因为式 (1) 左边的第一项和第二项都无法在 $k \to \infty$ 时足够快地趋于零。顺便指出，当 S_k 的维数大于 1 时，归一化尖点形式 $f \in S_k$ 在 C_f 处可以取得任意大的值；这是存在 S_k 的 Sturm 基所导致的。因此，看来无法单凭定理 1.2 精确确定 $f \in S_k$ 中哪些元素的周期多项式满足黎曼猜想。

因此，如果我们希望研究 f 的消失阶为 $N \geq 2$ 时的周期多项式的黎曼猜想，或研究消失阶可变的尖点形式族中的这一问题，就必须改进定理 1.2，或者发展一种新方法。既然似乎没有更好的办法来选择多项式 $q_f(z)$，改进定理 1.2 最可行的途径便是改进引理 2.3 中的估计。我们正是在这个引理中看到了定理 1.2 仅对 $N = 1$ 有用的原因：对于归一化尖点形式 f，当 $N = 1$ 时，关于 $s \gg 0$ 的近似 $L(f, s) \approx N^{-s}$ 才是良好的近似。这是因为在狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ 中，只有项 $n = 1$ 与 s 无关，其余各项都在 $s \to \infty$ 时趋于 0。因此，若 $N \geq 2$，则“主项” N^{-s} 和“误差项” $L(f, s) - N^{-s}$ 都会以相近的速度在 $s \to \infty$ 时趋于 0。因此，要证明关于周期多项式零点的更强结果，就应当对引理 2.3 作出非平凡的改进。特别是，如果希望研究 $N \geq 2$ 固定的情形，只需加强引理 2.3 的第一部分；而要处理 $N \to \infty$ 随 $k \to \infty$ 变化的尖点形式族，则两部分都需要改进。

5.2. 常数 C_f 的界定。对于任意形式 $f = \sum_{n\geq 1} c(n)q^n$，要给出 f 的系数的显式估计是一个非常困难的问题。如果 f 是一个归一化特征形式，则德利涅界表明 $|c(n)| \leq \sigma_0(n)n^{\frac{k-1}{2}}$。对于一般的尖点形式 f，空间 S_k 总是具有特征形式基这一事实意味着，存在某个常数 C_f，使得 $|c(n)| \leq C_f\sigma_0(n)n^{\frac{k-1}{2}}$。特别地，如果 f_1，.....，f_r 是 S_k 的特征形式基，且对于 $c_j \in \mathbb{C}$ 有 $f = c_1f_1 + \cdots + c_rf_r$，那么我们有 $C_f \leq \sum_{j=1}^{r} |c_j|$。尽管求得上界较为困难，但要证明在归一化尖点形式 f 中，只要空间 S_k 的维数大于 1，C_f 就可以取任意大的值，却相当直接。因此，我们只关注计算 C_f 的上界，该上界取决于 f 的某些性质。

文献中有多种方法可以得到 C_f 的界，关于部分参考文献列表，请参见 [18]。尽管许多文献只给出了不明确的估计，我们仍提及两个给出完全显式界的结果。其中一个结果来自 Schulze-Pilot 和 Yenirce 的工作 [18],，他们利用彼得森内积计算新形式的傅里叶系数的界。特别是，他们证明，如果

$$|c(n)| \leq 2\sqrt{\pi}e^{2\pi}\sqrt{\langle f, f\rangle}\sigma_0(n)n^{\frac{k-1}{2}},$$

其中，$\sigma_0(n)$表示 n 和 $\langle f$的因数个数，$g\rangle$ 是1级f与 $g \in S_k$ 的Petersson内积。我们简要指出，[18] 的完整结果是针对带有Nebentypus的 $\Gamma_0(N)$上的尖点形式给出的。Jenkins和Rouse [10], 提出了另一种截然不同的方法，他们用尖点形式的前 r个傅里叶系数对其傅里叶系数进行界定。特别地，他们证明了

$$|c(n)| \leq \sqrt{\log(k)}\left(11\sqrt{\sum_{m=1}^{r}\frac{|c(m)|^2}{m^{k-1}}} + \frac{e^{18.72}\,(41.41)^{k/2}}{k^{(k-1)/2}}\left|\sum_{m=1}^{r} c(m)e^{-7.288m}\right|\right)\sigma_0(n)n^{\frac{k-1}{2}}.$$

我们注意到，尽管 [10] 的公式只写在$SL_2(\mathbb{Z})$上，但其优点在于，在界定 C_f 时 N 所发挥的作用是完全明确的。结合对定理 1.2的适当改进，这可以用来研究在无穷远处具有较大消失阶的尖点形式。

5.3. ζ多项式。我们简要介绍周期多项式的单位模性在构造 Manin [14] 以及 Ono、Rolen 和 Sprung [15]意义下的 ζ多项式中的应用。

定义 5.1. ζ 多项式是一个多项式 $Z(s)$，它满足函数方程 $Z(s) = \pm Z(1-s)$，其所有零点都位于直线 $\mathrm{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ 上，并且具有算术几何解释。

在 [14], Manin 由周期多项式的奇部构造 ζ多项式，而 Ono、Rolen 和 Sprung 则由特征形式的完整周期多项式构造 ζ多项式。这些证明的关键要素是（奇部或完整）周期多项式的黎曼猜想，以及 Rodriguez-Villegas 的一个判据 [16] ，该判据将单位模多项式变换为 ζ 多项式。为说明相关结果，设 $U \in \mathbb{C}[x]$ 是一个次数为 d 的多项式，满足 $U(1) \neq 0$，并设 $U(x)$ 的 Rodriguez-Villegas 变换 $Z(s)$ 是满足以下条件的唯一多项式：

$$\frac{U(x)}{(1-x)^{d+1}} = \sum_{n \geq 0} Z(-n)\, x^n.$$

在 [15, 定理 2.1], 中证明了，如果 $U(x)$ 是具有实系数的单位模多项式，那么 $Z(s)$ 的所有零点都位于 $\mathrm{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$，并且满足函数方程 $Z(s) = (-1)^d Z(1-s)$。利用上述判据，证明了在 [15, 公式 1.3] 中定义的某些多项式 $Z_f(s)$ 是 ζ 多项式。由于他们的方法中的每一步对于更一般的尖点形式都成立，因此我们可以看到，任何满足 $r_f(z)$ 具有黎曼猜想性质的 f 的尖点，都可以用来构造一个 ζ 多项式。

5.4. 猜想与开放问题。在 [5, 2] 确立了 $SL_2(\mathbb{Z})$ 模形式的奇周期多项式和完整周期多项式的黎曼猜想之后，文献中出现了许多相关的研究方向。在最后一节中，我们将讨论一系列自然源于已有结果及我们工作的研究成果、猜想和开放问题。

5.4.1. 其他模对象。将 [5, 2] 的结果推广到层为 $N > 1$ 且具有 Nebentypus χ 的尖点形式，是最自然的推广方向之一。对于权重为偶数 $k \geq 4$ 且 Nebentypus 平凡的新形式 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$，Jin、Ma、Ono 和 Soundararajan [9] 已完成这一推广；而 Liu、Park 和 Song [12] 则对任意权重 $k \geq 3$ 和任意 Nebentypus 的几乎所有新形式完成了推广。若能将本文的结果推广到空间 $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$，将会很有意义。这些论文还证明了，当 k 或 N 增大时，特征形式零点的等分布结果。自然地，我们也可以在更一般的情形下，探讨零点分布的类似问题。

鉴于 [5], ，研究一般尖点形式的周期多项式的奇部也很有意义；我们预期，对于大族尖点形式，这些奇部也应满足适当的黎曼猜想。

5.4.2. 尖点形式的特殊族。以往文献之所以着重研究特征形式和新形式的周期多项式，一个原因是它们是非常自然且优美的尖点形式例子。归一化新形式 $f(z) = \sum_{n\geq 1} c(n) q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ 的傅里叶系数具有乘法性，而数列 $\{c(p^n)\}_{n\geq 0}$ 满足二项线性递推关系。这些性质蕴含了许多非常优美的结果，其中之一是新形式的 L-函数 $L(f,s)$ 具有欧拉乘积， [9] 的作者利用这一点估计临界 L 值之比。研究其他特殊族的尖点形式，以确定它们的周期多项式（分别是奇周期多项式）是否满足黎曼猜想，将是很自然的做法；例如，可以考虑复乘形式或特征形式的幂。举例来说，尽管定理 1.2 不够精细，无法处理 $a \gg 0$ 的 Δ^a 的周期多项式，但对较小 a 下 $a \gg 0$ 的 Δ^a 的周期多项式进行的显式计算表明，这些多项式往往满足黎曼猜想。另一个自然的问题是，具有最大无穷远点处消失阶的模形式（在各自空间 S_k 中）是否具有幺模周期多项式。我们将这些问题留待未来研究。

5.4.3. 固定权下的概率。推论 4.3 告诉我们，对于一个整数，$\mathcal{P}_k(X) \to 1$ 当 $k \to \infty$ 时成立；也就是说，渐近而言，100% 的“由少数特征形式线性组合而成”的尖点形式都满足黎曼猜想。关于 $\mathcal{P}_k(X)$ 在 k 取较小值时或当 $X \to \infty$ 时的行为的问题也很自然。然而，我们的方法似乎不能立即用于证明这类结果。我们所能证明的最多是，对于 $k \gg 0$，$\liminf_{X\to\infty} \mathcal{P}_k(X) > 0$；这是推论 4.1 的推论。
我们提出两个与 $\mathcal{P}_k(X)$ 相关的问题，这些问题可作为有趣的未来研究方向。

问题 5.2。对于固定的整数 k，以下极限

$$\lim_{X\to\infty} \mathcal{P}_k(X)$$

是否存在？如果存在，它们是否等于 1?

问题 5.3. 设 $12 \leq k < 120$ 为一个整数，且 $f = c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r \in S_k$，其中 $c_j \geq 0$ 和 f_1，……，f_r 是 S_k 的归一化特征基。周期多项式 $r_f(z)$ 是否满足黎曼猜想?

使用我们的方法，关于这些问题能得出的结论并不多。对于第一个问题，可以由推论 4.3 推导出 $k \gg 0$ 的下极限 $\liminf_{X\to\infty} \mathcal{P}_k(X)$ 的下界，但这些下界可能并非最优，而且无法说明这些极限是否收敛。对于第二个问题，凡是 S_k 为一维的 k，答案都是肯定的 [2], ，但似乎除此之外别无所知。

References

[1] Babei A., Rolen L., Wagner I. 希尔伯特模形式周期多项式的黎曼猜想。《数论杂志》218 (2021), 44–61.[2] El-Guindy A., Raji W. 海克特征形式周期多项式零点的幺模性。《伦敦数学学会通报》46 (2014), 528-536.[3] Cohen H., Str¨omberg F. 模形式：经典方法。《数学研究生教程》179，美国数学学会，普罗维登斯，美国 (2017)..[4] Cohn A. 关于圆内代数方程根的数量。《数学时代》14 (1922), 110-148..[5] Conrey B., Farmer D., Imamoglu O. 模形式的周期多项式的非平凡零点位于单位圆上。《国际数学研究通知》20 (2013), 4758-4771.[6] Diamantis N., Rolen, L. 艾希勒上同调与 L 函数导数相关多项式的零点。《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔数学杂志）770 (2021), 1-25.[7] Diamantis N., Rolen L. 周期多项式、L函数导数与多项式的零点。《数学科学研究》5, 9 (2018).[8]Im, B. H., Kim, H. 与尖点形式的 L 函数导数相关的周期多项式的黎曼猜想，针对 $\Gamma_0(N)$。《数学分析与应用杂志》509 (2), 125971.[9] Jin S., Ma W., Ono K., Soundararajan K. 模形式周期多项式的黎曼猜想。《美国国家科学院院刊》113 (1), (2016), 2603-2608.[10] Jenkins P., Rouse, J. 尖点形式系数与极值格的界。《伦敦数学学会通报》43, (2011), 927-938.[11] Lal´ın M., Rogers M. 拉马努金多项式的变体及关于 $\zeta(2j+1)/\pi^{2j+1}$ 的评论。《函数逼近与数学评论》48, (2013), 91–111.[12] Liu Y., Park P.S., Song Z.Q. 几乎所有新形式的周期多项式都满足“黎曼猜想”。《数学科学研究》3, 31 (2016).[13] Manin Y. I. 抛物点的周期与 p-进海克级数。《数学文集》, (1973), 371–393.[14] Manin Y. I. Spec $\mathbb{Z}$ 下的局部ζ因子与几何。《俄罗斯科学院学报》80 (4), (2016), 751–758.[15] Ono K., Rolen L., Sprung F. (2017). 模形式周期的ζ多项式。《数学进展》306, 328-343.[16] Rodriguez-Villegas F. 关于某些多项式的零点。《美国数学会会刊》130(8), (2002), 2251–2254.[17] Rouse J. ∆函数幂的系数界。《伦敦数学学会通报》40 (6), (2008), 1081-1090.[18] Schulze-Pillot R., Yenirce A. 尖点形式空间基的彼得森内积与傅里叶系数的估计。《国际数论杂志》14 (8), (2018), 2277-2290.

Mathematical Institute, Universität zu Köln电子邮箱：wcraig@uni-koeln.de

Department of Mathematics at the American University of Beirut (AUB), Founder of Number Theory unit at Center for Advanced Mathematical Sciences (CAMS)电子邮箱：wr07@aub.edu.lb