具有局部标准作用的开环面流形的等变上同调环

YUESHAN XIONG 和 HAOZHI ZENG

Abstract. 环面流形这一概念由 A. Hattori 和 M. Masuda 引入。拟托里克流形、拟托里克流形、拓扑环面流形、托里克折纸流形和 b-辛托里克流形是具有局部标准作用的环面流形的典型例子。近期，L. Yu 为良好带角流形 Q 引入了一个很好的概念——拓扑面环 $\mathbf{k}[Q]$，它是 Stanley-Reisener 环的推广。L. Yu 运用 A. Bahri、M. Bendersky、F. Cohon 和 S. Gilter 开发的多面体积技术证明，在自由部分为平凡环面丛这一假设下，具有局部标准作用的开环面流形 M 的等变上同调环 $H_T^*(M)$ 与 M/T 的拓扑面环同构。本文通过另一种方法证明，Yu 的公式对任意具有局部标准作用的开环面流形均成立。此外，利用我们的方法，我们给出了具有局部标准作用的开环面流形的等变斯蒂费尔-惠特尼类和庞特里亚金类的显式公式。

arXiv:2305.03964v1 [math.AT] 6 May 2023

1. Introduction

环面流形的概念由 A. Hattori 和 M. Masuda 在 [10] 中提出。环面流形是一个维数为 $2n$ 的光滑连通闭流形 M，其上存在一个 n 维环面群 T 的有效光滑作用。若 M 上的 T 作用在局部看来与 $\mathbb{C}^n$. 上的标准 T^n 作用相同，我们就称该作用为局部标准。这里， $\mathbb{C}^n$ 上的标准 T^n 作用是指

$$(t_1, \ldots, t_n) \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (t_1 z_1, \ldots, t_n z_n),$$

其中 t_i、 $z_i \in \mathbb{C}$ 和 $|t_i| = 1$ 对于 $1 \leq i \leq n$. 在托里克拓扑中，有许多具有局部标准作用的环面流形实例，例如托里克流形 [6], [8], M. W. Davis 和 T. Januszkiewicz 引入的拟托里克流形 [7], 、A. Cannas da Silva、V. Guillemin 和 A. R. Pires 引入的余¨定向托里克折纸流形 [5], [11], 、H. Ishida、Y. Fukukawa 和 M. Masuda 引入的拓扑环面流形 [12], 、M. Poddar 和 S. Sarkar 引入的带孔拟托里克流形[15] ，以及 V. Guillemin、E. Miranda、A. R. Pires 和 G. Scott 引入的 b-辛托里克流形[9] 等。此外，M. Masuda 将环面流形推广应用于经典的 Pick 公式[13]，他的工作指出，将环面流形用于组合学研究前景广阔。

若 M 是具有局部标准作用的环面流形，则其轨道空间 $Q = M/T$ 是一个良好带角流形。粗略地说，良好带角流形在局部看起来像正锥 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$. 的一个开子集。根据 T. Yoshida 的工作，我们知道，可以从 Q 及额外数据重构 M，且重构结果在等变同胚意义下唯一。这里的额外数据指一个元素 $c \in H^2(Q; \mathbb{Z}^n)$，它确定了 Q上的一个主 T^n-丛 E，以及一个映射 λ: $\{F_1, \ldots, F_m\} \to \mathrm{Hom}(S^1, T)$，其中 $\{F_1, \ldots, F_m\}$ 是 Q 的面的集合。更多细节可见 [17]。因此，一个自然的问题是如何从三元组（Q， c， λ）中读取代数拓扑信息。对于托里克流形（见 [6] 或 [8]）、拟托里克流形 [7] 以及更一般的情形——即 Q 的每个面都是无圈的 [14], ——答案是众所周知的；但对于一般的具有局部标准作用的环面流形，答案尚不清楚。

最近，L. Yu 为良好带角流形 Q [16] 引入了一个良好的拓扑面环 $\mathbf{k}[Q]$，它是 Stanley-Reisener 环的推广。Yu 证明了：如果 M 是一个具有局部标准作用的开环面流形，并且假设作用的自由部分在 M 上是一个平凡环面丛，那么 $H_T^*(M) \cong \mathbf{k}[M/T]$。Yu 的证明基于并推广了由 A. Bahri、M. Bendersky、F. Cohon 和 S. Gilter 在 [2], 中发展的多面体积技术，因此该假设是必要的。然而， 下面的例子表明，存在许多具有局部标准

作用的环面流形，其环面作用的自由部分并非平凡环面丛。例如，将带有主 T^2 丛 P 的拟托里克流形 $\mathbb{CP}^2$ 沿一个主轨道与另一个空间作连通和，所得是一个具有局部标准作用的环面流形 M，但 T^2 作用的自由部分并非一个非平凡T^2 主丛。更确切地说，

$$M = \mathbb{CP}^2 \#_{T^2} P = \Big(\mathbb{CP}^2 \setminus (T^2(p) \times \mathring{\mathbb{D}}^2)\Big) \bigcup_{T^2 \times S^1} \Big(P \setminus (T^2_1 \times \mathring{\mathbb{D}}^2)\Big),$$

其中， $T^2(p) \cong T^2$ 是具有平凡各向同性群的点 $p \in \mathbb{CP}^2$ 的轨道空间，$T^2_1 \cong T^2$ 是主 T^2 丛 P在 T^2 上的一个纤维，且 $\mathring{\mathbb{D}}^2 \cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$。轨道空间 M/T^2 是一个良好带角流形（见图 1）。

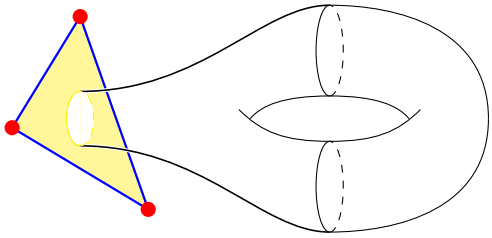


FIGURE 1.

受 Yu 的结果以及 Macpherson 对环面簇 [6], 的描述启发，本文采用一种不同的方法证明，对于任意具有局部标准作用的开环面流形，Yu 的结果 $H^*_T(M) \cong \mathrm{k}[M/T]$ 均成立。我们的主要结果基于以下观察。

观察 1：设 $q: \ M \to M/T$为商映射，且 $M_{\mathring{F}} := q^{-1}(\mathring{F})$，其中 $\mathring{F}$是 $Q = M/T$的一个开面（见定义 8 ）。那么

$$H^*_T(M_{\mathring{F}}) \cong H^*(F) \otimes H^*(BT_F),$$

其中， T_F 是 $M_{\mathring{F}}$. 的各向同性子群。在第 5.2 小节中，我们将给出详细说明。

观察 2：设 F 是 Q 的余维 k 面，则 F 是 $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_k}$ 的一个连通分支，其中 F_{i_j} 是 Q 的面。对于 $M_{\mathring{F}}$，存在 $X_{\mathring{F}}$ 的一个管状邻域 $M_{\mathring{F}}$，其位于 M 中，使得限制映射

$$H^*_T(X_{\mathring{F}}) \to H^*_T(X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}})$$

是满射，其核是由 $\tau_F|_{X_{\mathring{F}}}$ 生成的 $H^*_T(X_{\mathring{F}})$ 的理想。在这里， τ_F 是等变托姆类经过限制映射 $H^*_T(X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) \to H^*_T(X_{\mathring{F}})$ 后的像；为简化表述，我们也将 τ_F 称为等变托姆类。在引理 6.2 和引理 6.3 中，我们将给出详细说明。

观察 1 和观察 2 在托里克拓扑中或许广为人知，但它们源于我们的动机：用等变托姆类 τ_F 来表达 Yu 的拓扑面环。尽管我们在第 3 节根据 Q 的面和多项式给出了 Yu 的拓扑面环的一个等价定义，以强调拓扑面环的组合性质，但我们也在命题 5.2 中证明，它还可以用等变托姆类来表达。特别地，拓扑面环 $\mathrm{k}[M/T]$ 同构于 $\bigoplus_{F \in \mathcal{F}} H^*_T(M_{\mathring{F}})$ 的一个子环，其中 $\mathcal{F}$ 是 Q 的面集。

观察 3：限制映射

$$H^*_T(M) \to \bigoplus_{F \in \mathcal{F}} H^*_T(M_{\mathring{F}})$$

是单射的。这一观察受到 Yu 的结果以及 Macpherson 对环面簇的描述的启发。我们注意到，每个具有局部标准作用的开环面流形都可以通过以下过程获得。

°步骤 0： $M_0 := M_{\mathring{Q}}$，其中 Q 是 Q的相对内部部分。 M_0 上每个点的各向同性子群都是 T的单位元。

°步骤 1： $M_1 := M_0 \sqcup (M_{\mathring{F}_1} \sqcup \cdots \sqcup M_{\mathring{F}_m})$，其中 F_i均为 Q的余维一开面。 $M_{\mathring{F}_i}$ 上每个点的各向同性子群同构于 S^1。在此步骤中，我们考虑 Q 具有余维一面这一情形。

°步骤 2： $M_2 := M_1 \sqcup (\sqcup_{ij} M_{\mathring{F}_{ij}})$，其中 F_{ij}均为 Q的余维二开面。 $M_{\mathring{F}_i}$ 上每个点的各向同性子群同构于 $S^1 \times S^1$。在此步骤中，我们考虑 Q具有余维二面这一情形。

...

经过有限步后，我们得到 M。因此，我们可以利用归纳法（按 Q 的面数归纳）、Mayer-Vietoris 序列和观察 2 证明观察 3。详情见命题 6.4 的证明。

观察 4：限制映射的像

$$H_T^*(M) \to \bigoplus_{F \in \mathcal{F}} H_T^*(M_{\mathring{F}})$$

同构于拓扑面环 $\mathbf{k}[M/T]$.。我们利用归纳法（按 $\mathcal{F}$ 的基数归纳）、Mayer-Vietoris 序列，以及每个 $X_{\mathring{F}}/T$ 的面都与 $\mathring{F}$ 同伦等价这一观察来证明这一点。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾关于具有局部标准作用的开环面流形和良好的带角流形的一些必要定义和性质。第 3 节给出 Yu 的拓扑面环的一个等价定义。第 4 节回顾托里克拓扑中良好的带角流形的面的高维 corllar 邻域定理。第 5 节证明拓扑面环 $\mathbf{k}[M/T]$ 同构于 $\bigoplus_{F \in \mathcal{F}} H_T^*(M_{\mathring{F}})$ 的一个子环。第

第6节旨在证明我们的主定理，即 M 的等变上同调环与拓扑面环 $\mathbf{k}[M/T]$. 同构。第7节研究 $H_T^*(M)$ 的 $H^*(BT)$ 代数结构。第8节给出 M 的等变斯蒂费尔-惠特尼类和庞特里亚金类的显式公式。

致谢。我们感谢 Mikiya Masuda、Hiraku Abe、Tatsuya Horiguchi 和 Hideya Kuwata 与我们进行了富有成效的讨论并提出了宝贵意见。我们也感谢 Li Yu 向我们解释拓扑面环的概念。第一作者得到国家自然科学基金项目 11801186 的部分资助，第二作者得到国家自然科学基金项目 11901218 的部分资助。

2. Torus manifolds with locally standard action

本节回顾具有局部标准作用的环面流形及其轨道空间的一些必要定义和性质。更多细节可参见优秀著作 [4]的第7章。

2.1. 具有局部标准作用的环面流形。

定义 1. 环面流形是一个维数为 $2n$ 的光滑连通闭流形，其上有一个 n 维环面群 T 的有效光滑作用。[1]

[1]这里我们不需要 $M^T \neq \emptyset$，其中 M^T是 M在 T作用下的不动点集 .

定义 2. 我们将以下方式作用于 $\mathbb{C}^n$ 上的 T^n称为标准作用

$$(t_1,\dots,t_n)\cdot(z_1,\dots,z_n)=(t_1z_1,\dots,t_nz_n),$$

其中 t_i、 $z_i\in\mathbb{C}$ 和 $|t_i|=1$ 对于 $1\le i\le n$.

定义 3. 若每个点在 M 中都有一个 T-不变邻域 $\mathcal{U}$，且该邻域与 $W\subseteq\mathbb{C}^n$ 中的一个开子集弱等变微分同胚，其中该开子集在 $\mathbb{C}^n$上的标准 T-作用下保持不变，则称环面流形 M 为局部标准的。这里“弱”是指存在一个自同构 $\rho: T\to T$ 和一个微分同胚 $f:\mathcal{U}\to W$，使得

$$f(ty)=\rho(t)f(y)$$

对于所有 $t\in T$， $y\in\mathcal{U}$.

例。设 S^4 是 4维球面，它被识别为 $\mathbb{C}^2\times\mathbb{R}$的以下子集:

$$\{(z_1,z_2,h)\in\mathbb{C}^2\times\mathbb{R}:|z_1|^2|+|z_2|^2+h^2=1\}.$$

我们如下定义 S^4 上的 T-作用

$$(t_1,t_2)\cdot(z_1,z_2,h):=(t_1z_1,t_2z_2,h).$$

那么， S^4 上的这个 T-作用是局部标准的。

例. 设 $\mathbb{R}P^2$ 为实射影平面。那么， $\mathbb{R}P^2\times T^2$ 通过以下 T^2-作用成为环面流形

$$(t_1,t_2)\cdot\Big([z_0:z_1:z_2],(g_1,g_2)\Big):=\Big([z_0:z_1:z_2],(t_1g_1,t_2g_2)\Big).$$

这个 T-作用是局部标准的。因此，具有局部标准作用的环面流形可能是不可定向的。

例. 托里克流形、拓扑环面流形、拟托里克流形、co¨可定向托里克折纸流形、带孔拟托里克流形和 b-辛托里克流形，都是具有局部标准作用的环面流形的典型例子。

定义 4. 设 M 是一个具有局部标准作用的环面流形。我们称 M 的一个 T-不变开子集为具有局部标准作用的开环面流形。

例。带有由以下方式定义的 T 作用的复射影平面 $\mathbb{C}P^2$

$$(t_1,t_2)\cdot[z_0:z_1:z_2]=[z_0:t_1z_1:t_2z_2]$$

是一个具有局部标准作用的环面流形，并且

$$\mathbb{C}P^2\setminus\{[1:0:0],[0:1:0],[0:0:1]\}$$

是一个具有局部标准作用的开环面流形。

2.2. 良好带角流形。对于一个具有局部标准作用的 $2n$ 维环面流形，轨道空间 M/T 局部看起来像 $\mathbb{C}^n/T^n=\mathbb{R}^n_{\ge0}$ 的某个开子集，因此 M/T 具有由正锥 $\mathbb{R}^n_{\ge0}$. 的面结构诱导的面结构

2.2.1. $\mathbb{R}^n_{\ge0}$ 上的面结构。令 $\mathbb{R}^n_{\ge0}=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n: x_i\ge0$，其中 $i=1,\dots,n\}$.

定义 5。 $x\in\mathbb{R}^n_{\ge0}$ 的余维 $c(x)$ 是 x 中零坐标的个数。
例。对于 $n=2$，我们有 $c\Big((0,0)\Big)=2$、 $c\Big((0,2)\Big)=1$ 和 $c\Big((2,3)\Big)=0$.

定义 6. 我们称 $c^{-1}(k)$ 的一个连通分支为 $\mathbb{R}^n_{\ge0}$ 的一个余维 k 开面。 $\mathbb{R}^n_{\ge0}$ 的闭面（或简称面）是一个开面的闭包。

例. 对于 $n = 2$, $\{(x_1, 0) : x_1 > 0\}$ 和 $\{(0, x_2) : x_2 > 0\}$ 是 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 的余维一开面。$\{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\}$ 是 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 的一个余维一面。

2.2.2. 带角流形上的面结构。

定义 7. 带角流形（维数为 n）是一个带边界的拓扑流形 Q（边界 ∂Q 可以是空集），并带有由同胚 $\varphi_i : U_i \to W_i$到开子集 $W_i \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 构成的图册 (U_i, φ_i)，使得对所有i, j, $\varphi_i\varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$都是微分同胚。（如果开子集 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 之间的同胚可由 $\mathbb{R}^n$中开子集之间的某个微分同胚限制得到，则称其为微分同胚。）

注意，对于 $q \in Q$，其余维 $c(q)$是良定义的，其定义为 $c\Big((\varphi_i(q)\Big)$，其中 (U_i, φ_i) 是 q的局部坐标图。

定义 8. 设 Q 是一个 n 维带角流形。Q 的余维为 k 的一个开面是 $c^{-1}(k)$ 的一个连通分支。Q 的一个闭面（或简称面）是一个开面的闭包。面是余维为 1 的面。

定义 9. 如果每个余维为 k 的面都恰好包含于 k 个面中，则称带角流形是良好的。

命题 2.1（[4], 命题 7.4.13）。设 M 是一个具有局部标准作用的开环面流形，则轨道空间 M/T 是一个良好带角流形。

例。第 2.1 小节中赋予环面作用的 S^4 的轨道空间 Q 是一个良好带角流形（见图 2）。这里，F_1 和 F_2 是 Q 的面，而 p 和 q 是 Q 的 0 维面。$F_1 \setminus \{p, q\}$ 和 $Q \setminus （F_1 \cup F_2）$ 是 Q 的开面。

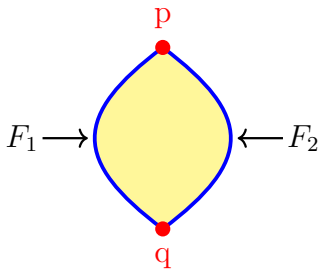


FIGURE 2.

2.2.3. 关于特征子流形。

定义 10. 设 M 是一个具有局部标准作用的环面流形。M 的连通余维二子流形称为特征的，如果它是 T 的某个圆子群逐点固定集的一个连通分支。

例. 设 T 按照第 2.1 小节中的方式作用在 S^4 上。那么，$\{(z_1, z_2, h) \in S^4 : z_1 = 0\}$ 和 $\{(z_1, z_2, h) \in S^4 : z_2 = 0\}$ 是 S^4. 的特征子流形

由于环面流形 M 是紧致的，M 的特征子流形数量是有限的，因此具有局部标准作用的开环面流形的特征子流形数量也是有限的。从局部标准作用可以不难得到以下事实：

- 如果 M_i 和 M_j 是 两个不同的特征子流形相交时，它们横截地相交 ;

• 余维为 k 的面 $F \subseteq Q$ 的原像 $M_F = q^{-1}(F)$ 是 M 的一个余维为 $2k$ 的闭 T-不变子流形，并且 M_F 是若干特征子流形交集的一个连通分支，其中 $q\colon M \to Q$ 是商映射。

以下结果在托里克拓扑中广为人知，但为方便读者，我们给出证明。

引理 2.2. 设 M 是具有局部标准作用的环面流形，且 M_i 是 M 的特征子流形。那么， M_i 在 M 中的法丛是 M_i 上的复线丛。

证明. 设 ν_i 是 M_i 在 M 中的法丛，且 M_i 被 T 的圆子群 $\lambda_i(S^1)$ 固定。由于 T 在 M 上有效作用， $\lambda_i(S^1)$ 在 ν_i 的每个纤维上都有效作用。对于任意 $v \in \nu_i$，定义 $Jv := \sqrt{-1}\cdot v$. 因此， ν_i 是 M_i. □ 上的复线丛。

对于 M 的每个特征子流形 M_i ，我们在 ν_i 上固定一个复结构。通过等变托姆同构，这确定了 $H^2_T(M, M_i)$ 中的一个元素 ϕ_i。从现在起，我们用 τ_i 表示 ϕ_i 在 $H^2_T(M)$ 中经限制映射得到的像

$$H^2_T(M, M_i) \to H^2_T(M).$$

3. Topological face ring

拓扑面环这一概念由 L. Yu 在 [16] 中引入。本节给出拓扑面环的一个等价定义，并回顾拓扑面环的一些性质。

设 Q 是一个良好带角流形。我们回顾一些记号

- $\mathcal{F} := \{$的面; 。
- $\mathcal{F} := \{$的开面。

设 $\{F_1, \dots, F_m\}$ 为 Q 的面集。由于 Q 是一个良好带角流形，对于 Q 的每个余维k面 F，其中 $k \geq 1$， F 是 $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$ 的一个连通分支。因此，我们可以将 Q 的每个面与 $[m]$. 的一个子集对应起来。也就是说，我们有一个映射

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{F} &\to 2^m \\ F &\mapsto \{i_1, \dots, i_k\}. \end{aligned}$$

若 E 是 F 的一个面，则有 $\Psi(F) \subseteq \Psi(E)$。

Let

$$A := \bigoplus_{F \in \mathcal{F}} H^*(F)[\mathbf{x}_F]$$

其中 $H^*(F)[\mathbf{x}_F]$ 表示 $H^*(F; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$， 且 $\{i_1, \dots, i_k\} = \Psi(F)$。对于每个元素 $\alpha \in A$, $\mathbf{k}$，我们将 α 的 F-分量记为 α_F。令 $\alpha_F = \sum a_{\mathbf{m},F}(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}}$， 其中 $a_{\mathbf{m},F} \in H^*(F)$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$， $(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}} = x_{i_1}^{m_1} \dots x_{i_k}^{m_k}$， 且 $\deg(\alpha_F) := \deg(a_{\mathbf{m},F}) + 2(m_1 + \cdots + m_k)$。对于有序面偶 (F, E), 我们定义一个态射 $\phi_{FE}\colon H^*(F)[\mathbf{x}_F] \to H^*(E)[\mathbf{x}_E]$ ，如下所示。

$$\phi_{FE}\left(\sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m},F}(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}}\right) = \begin{cases} \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m},F}|_E(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}} & \text{if } E \subseteq F \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $a_{\mathbf{m},\ F}|_E$ 是由包含映射 $E \subseteq F$.诱导的 E 上的 $a_{\mathbf{m},\ F}$ 的限制。

定义11. 设 F 是 Q 的一个面，且 $\Psi(F) = \{i_1, \dots, i_k\}$。若元素 $\alpha \in A$ 满足以下两个条件，则称其为 F-面元素:

- $\alpha_F = \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m},F}(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}}$ satisfying $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^k_{>0}$;
- $\alpha_E = \phi_{FE}(\alpha_F)$.

定义12. 由 A 的面元素生成的 k-子模称为拓扑面 k-模，记作 byk$[Q]$. 。即

$$\mathbf{k}[Q] = \mathrm{Span}_{\mathbf{k}}\langle \alpha : \alpha \text{ is a } F\text{-face element of } A \text{ for some } F \in \mathcal{F}\rangle.$$

Lem理 3.1. 设 α和 α'是 F-面元素，则 $\alpha\alpha'$也是一个 F-面元素。

证明. 由定义11以及以下观察可得此引理：对于任意有序对 (F, E)， ϕ_{FE} 都是一个环同态。□

设 (E, G) 是一个有序对，则对于任意 E-面元素 α，我们可以如下定义 A 的一个元素 $\Theta_{EG}(\alpha)$：对于 $F \in \mathcal{F}$

$$\Big(\Theta_{EG}(\alpha)\Big)_F = \phi_{GF}\Big(\phi_{EG}(\alpha_E)\Big). \tag{3.2}$$

引理 3.2. 设 (E, G) 是一个有序对，且 α 是一个 E-面元素，则 $\Theta_{EG}(\alpha)$ 是一个 G-面元素。

证明。情形 1： $G \nsubseteq E$。于是，根据 (3.1)， $\phi_{EG}(\alpha_E) = 0$ 。因此，由 (3.2) 可知，对每个 $F \in \mathcal{F}$，都有$\Big(\Theta_{EG}(\alpha)\Big)_F = 0$，这意味着 $\Theta_{EG}(\alpha) = 0$。特别地， $\Theta_{EG}(\alpha)$ 是一个 G-面元素。

情形 2： $G \subseteq E$。于是

$$\Big(\Theta_{EG}(\alpha)\Big)_G = \phi_{EG}(\alpha_E)$$

由 (3.2) 可知，这意味着 $\Theta_{EG}(\alpha)$ 满足定义11中关于 G-面元素的第一个条件。设 $F \in \mathcal{F}$。由 (3.2) 和最后一个等式可得

$$\Theta_{EG}(\alpha)_F = \phi_{GF}\Big(\Theta_{EG}(\alpha)_G\Big)$$

这意味着 $\Theta_{EG}(\alpha)$ 满足定义11中关于 G-面元素的第二个条件。因此， $\Theta_{EG}(\alpha)$ 是一个 G-面元素。□

命题 3.3。设 Q 是一个良好带角流形。则其拓扑面 k-模 $\mathbf{k}[Q]$ 是 A的一个子环。

证明。只需证明：若 α 和 β 分别是 A 的 E_1-面元素和 E_2-面元素，则 $\alpha\beta \in \mathbf{k}[Q]$.

情形 1： $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. 令 $F \in \mathcal{F}$，则 $F \nsubseteq E_1 \cap E_2$。因此， $F \nsubseteq E_1$ 或 $F \nsubseteq E_2$，这意味着 $\phi_{E_1F}(\alpha_{E_1}) = 0$ 或 $\phi_{E_2F}(\beta_{E_2}) = 0$。因此我们有

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)_F &= \alpha_F\beta_F \\ &= \phi_{E_1F}(\alpha_{E_1})\phi_{E_2F}(\beta_{E_2}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

这意味着在此情形下 $\alpha\beta = 0 \in \mathbf{k}[Q]$ 。

情形 2： $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. 于是 $E_1 \cap E_2 = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_h$，其中 G_i 是 Q. 的面。对于每个 $i \in \{1, \ldots, h\}$，根据引理 3.2， $\Theta_{E_1G_i}(\alpha)$ 和 $\Theta_{E_2G_i}(\beta)$ 都是 G_i-面元素，因此根据引理 3.1， $\Theta_{E_1G_i}(\alpha)\Theta_{E_2G_i}(\beta)$ 也是一个 G_i-面元素。我们断言

$$\alpha\beta = \sum_{i=1}^{h} \Theta_{E_1G_i}(\alpha)\Theta_{E_2G_i}(\beta).$$

只需证明

$$(\alpha\beta)_F = \sum_{i=1}^{h} (\Theta_{E_1G_i}(\alpha)\Theta_{E_2G_i}(\beta))_F \tag{3.3}$$

对任意 $F \in \mathcal{F}$. 均成立

情形 2-1： $F \nsubseteq E_1 \cap E_2$。通过对情形 1 使用相同的论证，我们得到

$$(\alpha\beta)_F = 0.$$

由于 $F \nsubseteq E_1 \cap E_2$，对于任意 $i \in \{1, \ldots, h\}$，我们有 $F \nsubseteq G_i$。因此，根据 (3.1)， G_i-面元素 $\Big(\Theta_{E_1G_i}(\alpha)\Theta_{E_2G_i}(\beta)\Big)$ 的 F 分量为 0。因此我们有

$$\sum_{i=1}^{h} \Big(\Theta_{E_1G_i}(\alpha)\Theta_{E_2G_i}(\beta)\Big)_F = 0.$$

因此，情形 2-2 中 (3.3) 成立。

情形 2-2： $F \subseteq E_1 \cap E_2$。于是存在 $i_0 \in \{1, \ldots, h\}$ 使得 $F \subseteq G_{i_0}.$，因此我们有

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)_F &= \alpha_F\beta_F \\
&= \phi_{E_1F}(\alpha_{E_1})\phi_{E_2F}(\beta_{E_2}) \\
&= \Big(\phi_{G_{i_0}F} \circ \phi_{E_1G_{i_0}}(\alpha_{E_1})\Big)\Big(\phi_{G_{i_0}F} \circ \phi_{E_2G_{i_0}}(\beta_{E_2})\Big) \\
&= \Big(\Theta_{E_1G_{i_0}}(\alpha)\Big)_F\Big(\Theta_{E_2G_{i_0}}(\beta)\Big)_F \\
&= \Big(\Theta_{E_1G_{i_0}}(\alpha)\Theta_{E_2G_{i_0}}(\beta)\Big)_F.
\end{aligned}$$

由于对于 $i \in \{1, \ldots, h\} \setminus \{i_0\}$， $G_i \cap G_{i_0} = \emptyset$，我们有 $F \nsubseteq G_i$。因此，对于 $i \neq i_0$，我们有

$$\Big(\Theta_{E_1G_i}(\alpha)\Theta_{E_2G_i}(\beta)\Big)_F = 0.$$

因此，（3.3）在此情形下也成立。于是该断言成立，这意味着对于情形 2，有 $\alpha\beta \in \mathbf{k}[Q]$ 。□

定义13。我们将定义12中定义的 $\mathbf{k}[Q]$ 称为 Q 的拓扑面环。

4. Higher dimensional collar neighborhoods of faces

本节将详细介绍良好带角流形的面所对应的高维领域邻域定理。本节中的结果可能是众所周知的，但为方便读者，我们仍给出证明。

设 M 是一个带有局部标准作用的 $2n$ 维环面流形。设 $Q = M/T$ 是 M 的轨道空间。那么，Q 是一个良好带角流形，其面结构由环面作用在 M 上的轨道类型决定（见 [4, 命题7.4。13]）。以下是本节所需的记号。

- q： $M \to Q$ 为商映射。
- $\mathcal{F}$ 是 Q的面集。。
- $\mathcal{F}$ 是 Q的开面集合。。
- F 是一个开面，它是某个面 F 的相对内部。
- 对于 $F \in \mathcal{F}$、 $M_F := q^{-1}(F)$ 以及 $M_{\mathring{F}} := q^{-1}(\mathring{F})$

引理 4.1。 [3, 第六章中的定理 2.2] 对于 $F \in \mathcal{F}$，存在一个 T-不变开管状邻域 X_F ，它是 M_F 在 M 中的邻域，使得 X_F 与嵌入 $M_F \subset M$.的 T-等变法丛 ν_F 是 T-等变微分同胚。

因此，从现在起我们可以将 T-等变法丛 ν_F 与 M_F 在 M中的一个 T-不变管状邻域 X_F 等同起来。令 π_F： $X_F \to M_F$ 为由法丛 $\nu_F \to M_F$ 的投影映射诱导的投影，并且

$$X_{\mathring{F}} := \pi_F^{-1}(M_{\mathring{F}}). \tag{4.1}$$

°由于 F是 F的一个相对内部部分， $X_{\mathring{F}}$是 X_F的一个 T-不变开子集，这意味着$X_{\mathring{F}}$ 是一个具有局部标准作用的开环面流形。因此，轨道空间 $X_{\mathring{F}}/T$ 是一个良好带角流形（见 [4]）。我们注意到以下有用事实，它将在主定理的证明中用到。本节余下部分将用于证明以下命题。

命题 4.2. $X_{\mathring{F}}/T$ 的每个面都与 F 同伦等价。

引理 4.3. 开环面流形 $X_{\mathring{F}}$ 与 T 等变微分同胚： $\nu_{\mathring{F}} := \nu_F \quad |_{M_{\mathring{F}}}$.

证明。根据 $X_{\mathring{F}}$ 和 π_F 的定义，可以很容易地直接验证： $X_F \to M_F$。 □

该引理表明， $\nu_{\mathring{F}}$ 是一个具有局部标准作用的开环面流形，并且

$$X_{\mathring{F}}/T \cong \nu_{\mathring{F}}/T \tag{4.2}$$

作为良好的带角流形。

引理 4.4. 如果 F 是 $Q = M/T$ 的一个面，那么

(1) ν_F/T与 $F \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 作为带角流形同胚。(2) $\nu_{\mathring{F}}/T$的每个面都与 F 同伦等价。

证明。(1) 由于 F 是 $Q = M/T$ 的面， M_F 是 M 的特征子流形。因此，存在 T 的一个子群 H，使得 H 逐点固定 M_F，且 H 同构于 S^1。令 $\nu_F \xrightarrow{p_F} M_F$ 为嵌入 $M_F \subset M$ 的法丛，且 $S(\nu_F)$ 是 ν_F 相对于 ν_F. 上的一个 T-不变黎曼度量 g 的单位圆丛。则下图是交换的，

$$\begin{array}{ccc} S(\nu_F) & \xrightarrow{p_F} & M_F \\ {\scriptstyle \iota_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \nu_F & \xrightarrow{p_F} & M_F \end{array} \tag{4.3}$$

其中 ι_F 是自然包含映射， id 是恒等映射，并且该图中的所有映射都是 T-等变的。由于 T 在 M 上有效作用，而 H 在 M_F 上平凡作用，因此 H 在 ν_F 的纤维方向上忠实作用。因此， H 在 $S(\nu_F)$ 的纤维上自由作用。因此， $\overline{p_F}$: $S(\nu_F)/H \to M_F$ 是一个 T/H-等变同胚，其中 $\overline{p_F}$ 是由 (4.3) 中的 p_F 诱导的。因此存在一个 T/H-等变同胚 s': $M_F \to S(\nu_F)/H$，它是 $\overline{p_F}$ 的逆映射。注意，下图是交换的，

$$\begin{array}{ccc} S(\nu_F)/H & \xrightarrow{\overline{\iota_F}} & \nu_F/H \\ & \searrow^{\overline{p_F}} & \downarrow{\scriptstyle \overline{p_F}} \\ & & M_F \end{array}$$

其中， $\overline{\iota_F}$ 和 $\overline{p_F}$ 分别由式（4.3）中的 ι_F 和 p_F 诱导。令 s： $M_F \to \nu_F/H$ 为复合映射

$$M_F \xrightarrow{s'} S(\nu_F)/H \xrightarrow{\overline{\iota_F}} \nu_F/H.$$

因此，对于每个 $x \in M_F$， s（x）$\neq \overline{0}$，其中 $\overline{0} \in$（ν_F/H）$_x = \overline{p_F}^{-1}$（x）是 $0 \in$（ν_F）$_x = p_F^{-1}$（x）的像。因此，我们有以下 T/H-等变映射

$$\begin{aligned} \psi : \nu_F/H &\to M_F \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, \overline{v}) &\mapsto (x, \frac{||\overline{v}||}{||s(x)||}), \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中， T/H在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$上的作用是平凡的， $||\overline{v}|| := g(v, v)$。由于 g是ν_F上的一个 T-不变黎曼度量，因此 ψ是良定义的。此外，我们还有以下 T/H-等变映射。

$$\begin{aligned} \Gamma : M_F \times \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \nu_F/H \\ (x, t) &\mapsto (x, ts(x)). \end{aligned}$$

我们直接验证 $\psi = \Gamma^{-1}.$。因此， $M_F \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 ν_F/H 具有相同的轨道类型。因此，ν_F/T =$(\nu_F/H)/($ $T/H)$ 与 $(M_F \times \mathbb{R}_{\geq 0})/(T/H)$ $= \Big(M_F/(T/H)\Big) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ =$F \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 作为良好的带角流形是同胚的。

(2) 上述论证表明， $\nu_{\mathring{F}}/T$ 与 $(M_{\mathring{F}} \times \mathbb{R}_{\geq 0})/(T/H)$ $= M_{\mathring{F}}/(T/H)$ $\times \mathbb{R}_{\geq 0}$ $= F \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 同胚，作为良好的带角流形。因此， $\nu_{\mathring{F}}/T$ 的每个面都与 F 同伦$^{\circ}$ $^{\circ}$等价。
于是，由于 F 通过包含映射 $F \subseteq F.$与 F° 同伦等价，便得到此引理。

□

推论 4.5. 设 F 是 $Q = M/T$ 的一个余维 k 面，则
(1) ν_F/T作为带角流形与 $F \times \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ 同胚。(2) $\nu_{\mathring{F}}/T$的每个面 E都与$\mathring{F} \times \mathbb{R}^i_{\geq 0}$同胚，其中 $i =$ $\dim(E)$ $-\dim(F)$，且$\mathbb{R}^i_{\geq 0}$是 $\mathbb{R}^k_{\geq 0}$的一个维数为 i 的面。

证明。（1）由于 F 是 Q 的余维为 k 的面，因此 F 是 $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_k}$的一个连通分支，其中 $1 \leq j \leq k$ 对应的 F_{i_j} 是 Q 的面。因此， $M_F = q^{-1}(F)$ 是 $M_{F_{i_1}} \cap M_{F_{i_2}} \cap \cdots \cap M_{F_{i_k}}$ 的一个连通分支，其中 $M_{F_{i_j}} = q^{-1}(F_{i_j})$。设 g 是 M 上的一个 T-不变黎曼度量。于是，
$TM|_{M_{F_{i_j}}} \cong TM_{F_{i_j}} \oplus \nu_{F_{i_j}}$ 作为 T-不变向量丛，以及 $\nu_{F_{i_j}} \cong (TM_{F_{i_j}})^{\perp}$ 作为 T-不变向量丛。由于对于每个 $x \in M_F$， $M_{F_{i_1}}$， ....., $M_{F_{i_k}}$ 都在 x 处横截相交，我们有

$$\nu_F \cong \oplus_{j=1}^{k} \nu_{F_{i_j}}|_{M_F} \tag{4.5}$$

作为 T 不变的 ant 向量丛。此外，我们还有如下等变丛映射

$$\begin{array}{ccc} \nu_F & \longrightarrow & \nu_{F_{i_1}} \times \cdots \times \nu_{F_{i_k}} \\ {\scriptstyle p_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{F(i_1,\ldots,i_k)}} \\ M_F & \xrightarrow{\triangle} & M_{F_{i_1}} \times \cdots \times M_{F_{i_k}}, \end{array} \tag{4.6}$$

其中 $\triangle(x)$ =$(x, \cdots, x)$ $\in M_{F_{i_1}} \times \cdots \times M_{F_{i_k}}$对任意 $x \in M_F$和 $p_{F(i_1,\ldots,i_k)} = p_{F_{i_1}} \times \cdots \times p_{F_{i_k}}$.令 $T_{F_{i_j}}$ 为 T 的子群，使得 $T_{F_{i_j}}$ 逐点固定 $M_{F_{i_j}}$，且 $T_{F_{i_j}} \cong S^1$. 因此， M_F 是 M^{T_F}的一个连通分支，其中 $T_F = T_{i_1} \times \cdots \times T_{i_k}$且 $M^{T_F} = \{x \in M\colon\ t \cdot x = x, \forall t \in T_F\}$.因此，（4.6）导出以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \nu_F/T_F & \longrightarrow & \nu_{F_{i_1}}/T_{i_1} \times \cdots \times \nu_{F_{i_k}}/T_{i_k} \\ {\scriptstyle \overline{p_F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{p_{F(i_1,\ldots,i_k)}}} \\ M_F & \xrightarrow{\triangle} & M_{F_{i_1}} \times \cdots \times M_{F_{i_k}}, \end{array} \tag{4.7}$$

根据引理 4.4 证明中的（4.4），我们可以将 $\overline{p_{F_{i_j}}}$： $\nu_{F_{i_j}}/T_{i_j} \to M_{F_{i_j}}$ 与第一投影 $M_{F_{i_j}} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to M_{F_{i_j}}.$等同。因此，我们可以将 $\overline{p_F}$: $\nu_F/T_F \to M_F$与第一投影$M_F \times \mathbb{R}^k_{\geq 0} \to M_F.$等同。特别地， ν_F/T_F作为T/T_F-流形与 $M_F \times \mathbb{R}^k_{\geq 0}$等变同胚，其中 T/T_F在 $R^k_{\geq 0}$上的作用是平凡的。因此， $M_F \times \mathbb{R}^k_{\geq 0}$和 ν_F/T_F具有相同的轨道类型。因此， ν_F/T =$(\nu_F/T_F)/(T/T_F)$ 与 ($M_F \times \mathbb{R}^k_{\geq 0})/(T/T_F)$ =$\Big(M_F/(T/T_F)\Big) \times \mathbb{R}^k_{\geq 0} = F \times \mathbb{R}^k_{\geq 0}$作为良好的带角流形同胚。

(2) 上述论证表明， $\nu_{\mathring{F}}/T$与 $(M_{\mathring{F}} \times \mathbb{R}^k_{\geq 0})/(T/H)$ $= M_{\mathring{F}}/(T/H)$ $\times \mathbb{R}^k_{\geq 0} = \mathring{F} \times \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ 作为良好的带角流形同胚。根据 $\mathring{F} \times \mathbb{R}^k_{\geq 0}$的面结构，结论成立。

□

5. Topological face rings and equivariant Thom classes

在第 3 节中，我们用轨道空间和多项式表达了 Yu 的拓扑面环，但变量 x_1、.....、 x_m的含义并不显而易见。本节将 x_i与等变托姆类 τ_i 联系起来，后者在第 2 节末尾定义。作为本节的结论，我们证明拓扑面环 $\mathbf{k}[M/T]$ 可视为 $\bigoplus H_T^*(M_{\mathring{F}})$的一个子环，其中 $\mathcal{F}$是 Q的面$_{F\in\mathcal{F}}$集合。

5.1. 关于 $H_{T_F}^*(p)$。令 $\{F_1,\cdots,F_m\}$ 为 $Q=M/T$的面集合， F为Q的一个余维为 k 的面。由于 Q 是良好带角流形， F是 $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k}$的一个连通分支，其中 F_{i_j}是 Q的面。令 T_i 为 T 的子群，使得 T_i 逐点固定 M_{F_i} ，且 $T_{F_i}\cong S^1$，其中$M_{F_i}=q^{-1}(F_i)$。令 $T_F:=T_{i_1}\times\cdots\times T_{i_k}$. 由于 T在 M上的作用是局部标准的，对于任意 $p\in M_{\mathring{F}}$， p的各向同性子群为 T_F。我们将 $\tau_i|_{M_{\mathring{F}}}$记作 $\tau_i(M_{\mathring{F}})$，它是 $H_T^2(M_{\mathring{F}})$的一个元素，其中 $i=1$， 2 . . . , m.。对于 $p\in M_{\mathring{F}}$，我们将 $\mathrm{Res}_{T_F}(\tau_i)|_p$记作 $\Big(\mathrm{Res}_{T_F}(\tau_i)\Big)(p)$，其中 Res_{T_F}表示对任意带有 T 作用的拓扑空间 X，从$H_T^*(X)$到 $H_{T_F}^*(X)$的限制映射。我们将 $H_{T_F}^2(p)=H^2(BT_F)$与 $\mathrm{Hom}(T_F,S^1)$等同。由于 $T_F=T_{i_1}\times\cdots\times T_{i_k}$， $\mathrm{Hom}(T_F,S^1)\cong\mathrm{Hom}(T_{i_1},S^1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Hom}(T_{i_k},S^1)$，可将其与 $H^2(BT_{i_1})\oplus\cdots\oplus H^2(BT_{i_k})$等同。由 (4.5)，可得

$$\nu_F\cong\oplus_{j=1}^k(\nu_{F_{i_j}}|_{M_F}) \tag{5.1}$$

众所周知， T_{i_j}等变欧拉类 $\nu_{F_{i_j}}|_p$为 $\Big(\mathrm{Res}^{T_{ij}}(\tau_{ij})\Big)(p)$。由于 T在 M上有效作用， $\Big(\mathrm{Res}^{T_{ij}}(\tau_{ij})\Big)(p)$ 是 $H_{T_{i_j}}^2(p)$ 的 k-基。这意味着

$$\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_1}}(\tau_{i_1})\Big)(p),\cdots,\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_k}}(\tau_{i_k})\Big)(p)$$

是.....的 k-基 $H_{T_F}^2(p)$。由于 $H_{T_F}^*(p)$ 是由次数为 $H_{T_F}^2(p)$ 的元素生成的多项式环，我们有 e

$$H_{T_F}^*(p)=\mathbf{k}\Big[\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_1}}(\tau_{i_1})\Big)(p),\ldots,\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_k}}(\tau_{i_k})\Big)(p)\Big].$$

5.2. $ET\times_T M_{\mathring{F}}$与 $(BT_F\times\{p\})\times F$之间的一个同伦等价。由于 T在 M上的作用是局部标准的，下面的正合列分裂。

$$1\to T_F\to T\to T/T_F\to 1,$$

其中 $T_F\to T$是包含映射， $T\to T/T_F$是商映射。因此我们有如下同构：

$$f:T\cong T_F\times T/T_F.$$

注意，对于任意 $p\in M_{\mathring{F}}$， p 的各向同性子群都是 T_F，因此 T/T_F 在 $M_{\mathring{F}}$. 上自由作用。因此，。$ET\times_T M_{\mathring{F}}$ 与 $BT_F\times F$. 同伦等价。下面我们说明这一同伦等价过程。令 $p\in M_{\mathring{F}}$。则映射

$$\begin{aligned}\sigma_p:M_{\mathring{F}}&\to\{p\}\times M_{\mathring{F}}\\ x&\mapsto(p,x)\end{aligned}$$

是一个 T-等变微分同胚，其中 T 通过上述同构 $T \xrightarrow{f} T_F \times T/T_F$. 作用于 $\{p\} \times M_{\mathring{F}}$。因此我们有

$$\begin{aligned} ET \times_T M_{\mathring{F}} &\sim ET \times_T (\{p\} \times M_{\mathring{F}}) \\ &\sim (ET_F \times_{T_F} \times\{p\}) \times (E(T/T_F) \times_{T/T_F} M_{\mathring{F}}) \\ &\sim (BT_F \times \{p\}) \times \mathring{F} \\ &\sim (BT_F \times \{p\}) \times F \end{aligned}$$

并将此同伦等价记为 $\psi_p \colon ET \times_T M_{\mathring{F}} \xrightarrow{\sim} (BT_F \times \{p\}) \times F$. 根据上述同伦等价过程，我们可以得到以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} ET \times_T M_{\mathring{F}} & \xrightarrow{\psi_p} & (BT_F \times \{p\}) \times F \\ \overline{q}\downarrow & & \downarrow p_2 \\ F & \xrightarrow{\text{identity map}} & F \end{array} \tag{5.2}$$

其中，$\overline{q}$ 由第二投影和包含映射经复合映射 $ET \times_T M_{\mathring{F}} \to F \to F$ 诱导， p_2 是第二投影映射。因此，对任意 $\alpha \in H^*(F)$，我们有

$$(\psi_p^*)^{-1}\overline{q}^*(\alpha) = p_2^*(\alpha). \tag{5.3}$$

引理 5.1. 设 F 是 $Q = M/T$ 的一个余维 k 面，且 F 是 $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$，其中 F_{i_j} 是 Q的面。对任意 $1 \le j \le k$，我们有

$$\Big((\psi_p^*)^{-1}(\tau_{i_j}(M_{\mathring{F}})\Big) = p_1^*\bigg(\Big(Res_{T_{i_j}}(\tau_{i_j})\Big)(p)\bigg) + p_2^*(\alpha_j),$$

其中 $p_1 \colon (BT_F \times \{p\}) \times F \to (BT_F \times \{p\})$ 是第一投影，且 $\alpha_j \in H^2(F)$。

证明。由 K¨unneth 定理可得环同构

$$H^*(F) \bigotimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}\bigg[\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_1}}(\tau_{i_1})\Big)(p), \ldots, \Big(\mathrm{Res}_{T_{i_k}}(\tau_{i_k})\Big)(p)\bigg] \to H^*\Big((BT_F \times \{p\}) \times F\Big)$$

因此

$$(\psi_p^*)^{-1}\Big(\tau_{i_j}(M_{\mathring{F}})\Big) = \sum_{l=1}^{k} \lambda_{jl} p_1^*\bigg(\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_l}}(\tau_{i_l})\Big)(p)\bigg) + p_2^*(\alpha_j) \tag{5.4}$$

对于某个 $\alpha_j \in H^2(F)$，其中 $\lambda_{jl} \in \mathbf{k}$、 p_1^* 和 p_2^* 由投影诱导。要证明此引理，只需证明

对于任意 $\alpha \in H^*(F)$，我们有 $\Big(\mathrm{Res}_{T_F}(\psi_p^* p_2^*(\alpha))\Big)\Big|_{BT_F \times \{p\}} = 0$。事实上，当 m 充分大时，我们有 $\alpha^m = 0$ ，但 $H^*(BT_F \times \{p\})$ 没有非零幂零元。因此，(5.4) 蕴含

$$\mathrm{Res}_{T_F}\Big(\tau_{i_j}(M_{\mathring{F}})\Big) = \sum_{l=1}^{k} \lambda_{jl} \cdot \mathrm{Res}_{T_F}\bigg(\psi_p^* p_1^*\Big(\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_l}}(\tau_{i_l})\Big)(p)\Big)\bigg). \tag{5.5}$$

注意，下图是交换图

$$\begin{array}{ccccc} ET_F \times_{T_F} \{p\} & \longrightarrow & ET_F \times_{T_F} M_{\mathring{F}} & \longrightarrow & ET \times_T M_{\mathring{F}} \\ \downarrow \text{identity map} & & & & \downarrow \psi_p \\ BT_F \times \{p\} & \xleftarrow[p_1]{} & & & (BT_F \times \{p\}) \times F \end{array}$$

其中 $ET_F \times_{T_F} \{p\} \to ET_F \times_{T_F} M_{\mathring{F}}$ 由 T_F-等变包含映射 $p \to M_{\mathring{F}}$给出， $ET_F \times_{T_F} M_{\mathring{F}} \to ET \times_T M_{\mathring{F}}$ 由 $ET_F \to ET$ 和 $(BT_F \times \{p\})$ 确定， $\times F \xrightarrow{p_1} BT_F \times \{p\}$ 是第一投影映射，因此我们得到下列交换图。

$$\begin{array}{ccccc} H^*(ET_F \times_{T_F} \{p\}) & \longleftarrow & H^*(ET_F \times_{T_F} M_{\mathring{F}}) & \longleftarrow & H^*(ET \times_T M_{\mathring{F}}) \\ \uparrow{\scriptstyle \text{identity map}} & & & & \uparrow{\scriptstyle \psi_p^*} \\ H^*(BT_F \times \{p\}) & & \xrightarrow{\quad p_1^* \quad} & & H^*((BT_F \times \{p\}) \times F) \end{array}$$

这表明，对于 $\Big(\mathrm{Res}^{T_i}(\tau_{i_l})\Big)(p) \in H^2(BT_F \times \{p\})$，我们有

$$\left(\mathrm{Res}_{T_F}\left(\psi_p^* p_1^*\left(\left(\mathrm{Res}_{T_{i_l}}(\tau_{i_l})\right)(p)\right)\right)\right)\Big|_{BT_F \times \{p\}} = \left(\mathrm{Res}_{T_{i_l}}(\tau_{i_l})\right)(p).$$

因此，将 (5.5) 两边限制到 $BT_F \times \{p\}$ 上，我们有

$$\left(\mathrm{Res}_{T_F}\left(\tau_{i_j}(M_{\mathring{F}})\right)\right)\Big|_{BT_F \times \{p\}} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_{jl}\left(\mathrm{Res}_{T_{i_l}}(\tau_{i_l})\right)(p).$$

由于 $\left(\mathrm{Res}_{T_F}\left(\tau_{i_j}(M_{\mathring{F}})\right)\right)\Big|_{BT_F \times \{p\}} = \Big(\mathrm{Res}^{T_{i_j}}(\tau_{i_j})\Big)(p)$ 和 $\Big(\mathrm{Res}^{T_{i_1}}(\tau_{i_1})\Big)(p)\ \cdots,\ \Big(\mathrm{Res}^{T_{i_k}}(\tau_{i_k})\Big)(p)$ 是 $H^2(BT_F \times \{p\})$ 的一组基，我们得到

$$\lambda_{jl} = \delta_{jl}.$$

这完成了该引理的证明。 □

注。 α_j 引理 5.1 中的内容与 Yoshida 针对具有局部标准作用的环面流形的构造 [17] 有关。

命题 5.2。环同态

$$\rho_F : H^*(F)[\mathbf{x}_F] \to H_T^*(M_{\mathring{F}})$$
$$\sum_{\mathbf{m}} \alpha(\mathbf{m})(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}} \mapsto \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(\alpha(\mathbf{m}))\left(\tau(M_{\mathring{F}})\right)^{\mathbf{m}},$$

是一个同构。其中 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$, $\alpha(\mathbf{m}) \in H^*(F)$, $(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}} = x_{i_1}^{m_1} \ldots x_{i_k}^{m_k}$, $\left(\tau(M_{\mathring{F}})\right)^{\mathbf{m}} = \Big(\tau_{i_1}(M_{\mathring{F}})\Big)^{m_1} \cdots \Big(\tau_{i_k}(M_{\mathring{F}})\Big)^{m_k}$ 以及 $\overline{q}^*$ 由复合映射 $\overline{q}\colon\ ET \times_T M_{\mathring{F}} \to \mathring{F} \to F$.诱导。

证明。由于 $\psi_p\colon\ ET \times_T M_{\mathring{F}} \to (BT_F \times \{p\}) \times F$ 是同伦等价的，只需证明 $(\psi_p^*)^{-1}\rho_F$ 是一个同构。首先证明 $(\psi_p^*)^{-1}\rho_F$ 是单射。如果

$$(\psi_p^*)^{-1}\rho_F\Big(\sum_{\mathbf{m}} \alpha(\mathbf{m})(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}}\Big) = 0$$

then

$$\sum_{\mathbf{m}} (\psi_p^*)^{-1}\left(\overline{q}^*(\alpha\Big(\mathbf{m}\Big)\right) \cup (\psi_p^*)^{-1}\left(\left(\tau(M_{\mathring{F}})\right)^{\mathbf{m}}\right) = 0.$$

因此，由 (5.3) 和引理 5.1 可得

$$p_2^*\Big(\alpha(\mathbf{m})\Big) \cup p_1^*\left(\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_1}}(\tau_{i_1})\Big)(p) + p_2^*(\alpha_1)\right)^{m_1} \cup \cdots \cup p_1^*\left(\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_k}}(\tau_{i_k})\Big)(p) + p_2^*(\alpha_k)\right)^{m_k} = 0$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in H^2(F)$ 由引理 5.1 确定。这意味着对于任意 $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$，我们有

$$\alpha(\mathbf{m}) = 0.$$

因此

$$\sum_{\mathbf{m}} \alpha(\mathbf{m})(\mathbf{x}_F)^{\mathbf{m}} = 0.$$

这意味着 ρ_F 是单射。

接下来我们证明 $(\psi_p^*)^{-1}\rho_F$ 是满射。由于对于任意 $\alpha \in H^2(F)$，我们有

$$(\psi_p^*)^{-1}\rho_F(\alpha) = p_2^*(\alpha)$$

这由（5.3）可得。由于

$$(\psi_p^*)^{-1}\rho_F(x_{i_j}) = (\psi_p^*)^{-1}\Big(\tau_{i_j}(M_{\mathring{F}})\Big) = p_1^*\bigg(\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_j}}(\tau_{i_j})\Big)(p)\bigg) + p_2^*(\alpha_j)$$

由此可得，其中第二个等式由引理 5.1 得出，

$$(\psi_p^*)^{-1}\rho_F(x_{i_j} - \alpha_j) = p_1^*\bigg(\Big(\mathrm{Res}_{T_{i_j}}(\tau_{i_j})\Big)(p)\bigg).$$

因此，满射

$$(\psi_p^*)^{-1}\rho_F : H^*(F)[\mathbf{x}_F] \to H^*\Big((BT_F \times \{p\}) \times F\Big)$$

由 K¨unneth 定理得出

由于 $(\psi_p^*)^{-1}\rho_F$ 既是单射又是满射，因此它是一个同构。这意味着 ρ_F 是一个同构。□

以下结论是上述命题的直接推论。

Co论 5.3。设 $\mathcal{F}$ 是 M/T的面集，则环同态

$$\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} \rho_F : \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H^*(F)[\mathbf{x}_F] \to \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H_T^*(M_{\mathring{F}})$$

是一个同构。因此，我们可以将拓扑面环 $\mathbf{k}[M/T]$ 视为 $\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H_T^*(M_{\mathring{F}})$ 中子环 $(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} \rho_F)\Big(\mathbf{k}[M/T]\Big)$。

因此，我们可以用轨道空间 M/T 和等变 Thom 类来表示拓扑面环 $\mathbf{k}[M/T]$。本节其余部分中，我们将用 $Q = M/T$ 和等变 Thom 类来表述第 3 节中定义的拓扑面环。

设设$\mathcal{F}$为 M/T的面的集合，且 设 $\{\mathring{F}_1, \ldots, F_m\}$ 为 M/T 的面的集合。由于 M/T 是一个良好带角流形，对于 M/T 的每个余维 k 的面 F，其中 $k \geq 1$、F 是 $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}$ 的一个连通分支。因此，我们可以将 M/T 的每个面与 $[m].$ 的一个子集对应起来。具体而言，我们有一个映射

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{F} &\to 2^m \\ F &\mapsto \{i_1, \ldots, i_k\}.\end{aligned}$$

Let

$$B := \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H_T^*(M_{\mathring{F}}).$$

对于每个元素 $\alpha \in B$，我们将 α 的 F 分量记为 α_F。令 $\alpha_F = \sum \mathbf{m}\overline{q}^*(a_{\mathbf{m},\ F})\Big(\tau(M_{\mathring{F}})\Big)^{\mathbf{m}}$，°其中 $a_{\mathbf{m},\ F} \in H^*(F)$，$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$，$\overline{q}^*$ 由映射 $ET \times_T M_{\mathring{F}} \to F \to F$ 诱导，且

$\left(\tau(M_{\mathring{F}})\right)^{\mathbf{m}} = \tau_{i_1}(M_{\mathring{F}})^{m_1} \dots \tau_{i_k}(M_{\mathring{F}})^{m_k}$. 对于一对面 (F, E)，我们定义一个态射ϕ_{FE}: $H_T^*(M_{\mathring{F}}) \to H_T^*(M_{\mathring{E}})$，如下所示。

$$\phi_{FE}\left(\sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},F})\left(\tau(M_{\mathring{F}})\right)^{\mathbf{m}}\right) = \begin{cases} \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},F|_E})\left(\tau(M_{\mathring{E}})\right)^{\mathbf{m}} & \text{if } E \subseteq F \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.6}$$

其中，$a_{\mathbf{m},\ F}|_E$ 是由包含映射 $E \subseteq F$. 诱导的 $a_{\mathbf{m},\ F}$ 在 E 上的限制

定义14. 设 F 是 M/T 的面，并且 $\Psi(F) = \{i_1, \dots, i_k\}$。如果元素 $\alpha \in B$ 满足以下两个条件，则称其为 F-面元素:

- $\alpha_F = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},F})\left(\tau(M_{\mathring{F}})\right)^{\mathbf{m}}$ satisfying $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^k_{>0}$;
- $\alpha_E = \phi_{FE}(\alpha_F)$.

定义 15. 由 B 的面元素生成的 B 的子环称为拓扑面环，记作 $\mathbf{k}[M/T]$. 。也就是说

$$\mathbf{k}[M/T] = \mathrm{Span}_{\mathbf{k}}\langle \alpha : \alpha \text{ is a } F\text{-face element of } B \text{ for some } F \in \mathcal{F}\rangle.$$

6. Relation between $H_T^*(M)$ and topological face rings

在本节中，我们证明主要结果：等变上同调环 $H_T^*(M)$ 同构于拓扑面环 $\mathbf{k}[M/T]$，其中 M/T 是 M 的轨道空间。

6.1. 单射映射 $H_T^*(M) \to \bigoplus H_T^*(M_{\mathring{F}})$. 一般而言，对于具有局部标准作用的环面流形，限制映射 $H_T^*(M) \to H_T^*(M^T)$ 不一定是单射。例如，若 M 是一个可定向的托里克折纸流形，且 M/T 的每个真面都是无圈的，而 M/T 不是无圈的，则 $H_T^*(M) \to H_T^*(M^T)$ 不是单射（见 [1]）。然而，限制映射

$$H_T^*(M) \to \bigoplus_{F \in \mathcal{F}} H_T^*(M_{\mathring{F}})$$

是一个单射，我们将在本小节中证明这一点。我们通过对 M/T的面数进行归纳法来证明这一单射。

引理 6.1. 假设 $\sharp\mathcal{F} \geq 2$，并且 $F_\bullet$ 是 $Q = M/T$ 的一个极小面。则下列陈述成立:

- $F_\bullet = \mathring{F}_\bullet$;
- $M(1) := M \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}$ 是一个具有局部标准作用的开环面流形;
- $\sharp\mathcal{F}(1) \leq^\sharp \mathcal{F} - 1$，其中 $\mathcal{F}(1)$ 是 $Q(1)$ 的面集：$= M(1)/T$.

证明。由于 $F_\bullet$ 是 Q 的一个极小面，因此不存在面 $E \in \mathcal{F}$ 使得 $E \subsetneq F_\bullet$. ，我们有 $F_\bullet = \mathring{F}_\bullet$。于是本引理的第一个陈述成立。

本引理的第二个陈述意味着 $M_{\mathring{F}_\bullet} = M_{F_\bullet}$是 M中的一个闭 T不变子流形。因此， $M(1) = M \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}$是 M中的一个开 T不变子流形，这意味着 $M(1)$是一个具有局部标准作用的环面流形。这证明了引理的第二个结论。

注意， $\mathcal{F}(1) = \{F \setminus F_\bullet : \ F \in \mathcal{F}\}$，因此我们有 $\sharp\mathcal{F}(1) \leq \sharp\mathcal{F} - 1$.这证明了引理的第三个结论。□

令 $\mathring{F}$ 为 M/T 和 $M_{\mathring{F}} = q^{-1}(\mathring{F})$ 的一个开面，其中 $q: \ M \to M/T$ 是商映射。令 $X_{\mathring{F}}$ 为在（4.1）中定义的 $M_{\mathring{F}}$ 的一个 T-不变管状邻域。

引理 6.2。限制映射

$$\kappa_{\mathring{F}} : H_T^*(X_{\mathring{F}}) \to H_T^*(X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}})$$

是满射。

证明。考虑关于这对空间 $(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}})$ 的长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \to H_T^i(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) \to H_T^i(X_{\mathring{F}}) \xrightarrow{\kappa_{\mathring{F}}} H_T^i(X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) \\ \to H_T^{i+1}(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) \to \cdots \end{aligned} \tag{6.1}$$

为了证明 $\kappa_{\mathring{F}}$ 是满射，只需证明

$$H_T^i(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) \to H_T^i(X_{\mathring{F}})$$

是单射。设 $\Psi(F) = \{i_1, \ldots, i_k\}$，也就是说，$F$ 是 $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$ 的一个连通分支，其中 F_{i_j} 是 Q 的面。考虑如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} H_T^i(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) & \longrightarrow & H_T^i(X_{\mathring{F}}) \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi_{\mathring{F}}^*} \\ H_T^{i-2k}(M_{\mathring{F}}) & \xrightarrow{\cup e^T} & H_T^i(M_{\mathring{F}}) \end{array}$$

其中 $H_T^{i-2k}(M_{\mathring{F}}) \to H_T^i(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}})$ 是等变托姆同构，e^T 是法丛 $\nu_{\mathring{F}}$ 的 T-等变欧拉类，该法丛对应于 $M_{\mathring{F}}$ 在 M 中的嵌入，其全空间可与 $X_{\mathring{F}}$ 识别，而 $\pi_{\mathring{F}}^*$ 由投影 $\pi_{\mathring{F}}$: $X_{\mathring{F}} \to M_{\mathring{F}}$. 诱导

由于 $\pi_{\mathring{F}}^*$是一个同构，要证明 $H_T^i(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) \to H_T^i(X_{\mathring{F}})$ 是单射，只需证明

$$H_T^{i-2k}(M_{\mathring{F}}) \xrightarrow{\cup e^T} H_T^i(M_{\mathring{F}})$$

是单射。根据分解 (5.1)，我们有 $\nu_{\mathring{F}} \cong \bigoplus_{j=1}^k (\nu_{F_{i_j}}|_{M_{\mathring{F}}})$，这意味着 $e^T = \prod_{j=1}^k \tau_{i_j}(M_{\mathring{F}})$，其中 $\tau_{i_j}(M_{\mathring{F}})$ 定义于第 5.1 小节开头。因此，由命题 5.2 可知，映射 $H_T^{i-2k}(M_{\mathring{F}}) \xrightarrow{\cup e^T} H_T^i(M_{\mathring{F}})$ 是单射。引理得证。□

设 F是 M/T的一个余维 k面，且 $\tau_F(X_{\mathring{F}})$ 是由复合映射给出的 1 的像

$$H_T^0(M_F) \to H_T^{2k}(M) \to H_T^{2k}(X_{\mathring{F}}), \tag{6.2}$$

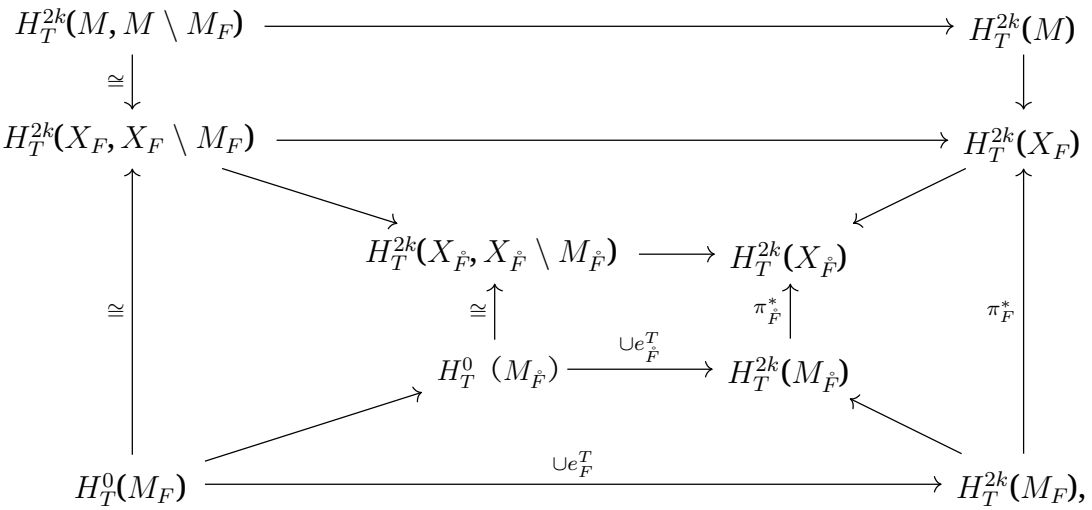
其中，第一个同态是等变吉森映射，第二个同态由包含映射 $X_{\mathring{F}} \subseteq M$. 诱导

引理 6.3. $\kappa_{\mathring{F}}$ 的核: $H_T^*(X_{\mathring{F}}) \to H_T^*(X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}})$ 是 $\left(\tau_F(X_{\mathring{F}})\right)$，其中 $\left(\tau_F(X_{\mathring{F}})\right)$ 是由 $\tau_F(X_{\mathring{F}})$ 生成的 $H_T^*(X_{\mathring{F}})$ 的理想。

证明. 根据长正合列 (6.1)，只需证明 $H_T^*(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) \to H_T^*(X_{\mathring{F}})$ 的像是 $\left(\tau_F(X_{\mathring{F}})\right)$。由引理 6.2 的证明中的论证可知，$H_T^*(X_{\mathring{F}}, X_{\mathring{F}} \setminus M_{\mathring{F}}) \to H_T^*(X_{\mathring{F}})$ 的像恰为 $\pi_{\mathring{F}}^*\left((e_{\mathring{F}}^T)\right)$，其中 $(e_{\mathring{F}}^T)$ 是法丛 $\nu_{\mathring{F}}$（其属于 M 中的 $M_{\mathring{F}}$）的 T-等变欧拉类，而 $(e_{\mathring{F}}^T)$ 是由 $(e_{\mathring{F}}^T)$ 生成的 $H_T^*(M_{\mathring{F}})$ 的理想。因此，只需证明

$$\pi_{\mathring{F}}^*(e_{\mathring{F}}^T) = \tau_F(X_{\mathring{F}}).$$

考虑以下交换图



其中，(e_F^T) 是 M 中 M_F 的法丛 ν_F 的 T-等变欧拉类，$2k$ 是 ν_F 作为实向量丛的秩，交换图中的同构来自切除定理和 Thom 同构。因此，$\pi_{\mathring{F}}^*(e_{\mathring{F}}^T)$ 是 $1 \in H_T^0(M_F)$ 经复合映射后的像

$$H_T^0(M_F) \to H_T^{2k}(M_F) \to H_T^{2k}(M_{\mathring{F}}) \to H_T^{2k}(X_{\mathring{F}}).$$

根据 (6.2) 和上述交换图，$\tau_F(X_{\mathring{F}})$ 是 $1 \in H_T^0(M_F)$ 经复合映射所得的像

$$H_T^0(M_F) \to H_T^{2k}(X_F, X_F \setminus M_F) \to H_T^{2k}(M, M \setminus M_F) \to H_T^{2k}(M) \to H_T^{2k}(X_F) \to H_T^{2k}(X_{\mathring{F}}).$$

因此

$$\pi_{\mathring{F}}^*(e_{\mathring{F}}^T) = \tau_F(X_{\mathring{F}}).$$

□

命题 6.4. 设 M 是一个具有局部标准作用的开环面流形。则限制映射

$$\bigoplus_{F \in \mathcal{F}} r_{\mathring{F}} : H_T^*(M) \to \bigoplus_{F \in \mathcal{F}} H_T^*(M_{\mathring{F}})$$

是单射，其中 $\mathcal{F}$ 是 Q 的面的集合，且 $r_{\mathring{F}}$: $H_T^*(M) \to H_T^*(M_{\mathring{F}})$ 是由包含映射 $M_{\mathring{F}} \subseteq M.$ 诱导的限制映射

证明。我们对 $\sharp\mathcal{F}$（$\mathcal{F}$ 的元素个数）使用归纳法来证明这个命题

当 $\sharp\mathcal{F} = 1$ 时，$Q = M/T$ 没有真面，因此 $M = M_{\mathring{Q}}$。于是 $H_T^*(M) = H_T^*(M_{\mathring{Q}})$，这意味着限制映射

$$r_{\mathring{Q}} : H_T^*(M) \to H_T^*(M_{\mathring{Q}})$$

是恒等映射。特别地，$r_{\mathring{Q}}$ 是单射。

假设 $\sharp\mathcal{F} \geq 2$。设 $F_\bullet$ 是 $Q = M/T$ 的一个极小面，且 $M(1) := M \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}$。于是由引理 6.1，得到 $\sharp\mathcal{F}(1) \leq^\sharp \mathcal{F} - 1$，其中 $\mathcal{F}(1)$ 是 $Q(1) := M(1)/T.$ 的面集。因此，根据归纳假设，我们有单射

$$\bigoplus_{F \in \mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}} : H_T^*(M(1)) \to \bigoplus_{F \in \mathcal{F}(1)} H_T^*(M_{\mathring{F}}). \tag{6.3}$$

由于 $M = M(1) \cup X_{\mathring{F}_\bullet}$ 且 $M(1) \cap X_{\mathring{F}_\bullet} = X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}$，我们得到 Mayer–Vietoris 正合序列

$$\begin{aligned} \cdots \to & H_T^i(M) \to H_T^i(M(1)) \oplus H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet}) \to H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}) \\ & \to H_T^{i+1}(M) \to \cdots \end{aligned} \tag{6.4}$$

由引理 6.2 可知，对任意 $i \geq 0$

$$H_T^i(M(1)) \oplus H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet}) \to H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet})$$

是满射的，因此

$$H_T^i(M) \to H_T^i(M(1)) \oplus H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet})$$

是单射的。注意，下面的图是交换图

$$\begin{array}{ccc} H_T^i(M) & \longrightarrow & H_T^i(M(1)) \bigoplus H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet}) \\ \Big\downarrow \bigoplus\limits_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}} & & \Big\downarrow (\bigoplus\limits_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}) \oplus (\pi^*_{\mathring{F}_\bullet})^{-1} \\ \bigoplus\limits_{F\in\mathcal{F}} H_T^i(M_{\mathring{F}}) & \xrightarrow{=} & \Big(\bigoplus\limits_{F\in\mathcal{F}(1)} H_T^i(M(1)_{\mathring{F}})\Big) \bigoplus H_T^i(M_{\mathring{F}_\bullet}). \end{array} \tag{6.5}$$

由于映射 (6.3) 根据归纳假设是单射的， $H_T^i(M) \to H_T^i(M(1)) \oplus H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet})$ 是单射的，这一点我们已经证明，而 $(\pi^*_{\mathring{F}})^{-1}$ 是同构，因此我们得到

$$\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}} : H_T^i(M) \to \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H_T^i(M_{\mathring{F}})$$

由上述交换图可知是单射的。这就完成了命题 6.4 的证明。 □

6.2. 限制映射 $H_T^*(M) \to \bigoplus H_T^*(M_{\mathring{F}})$ 的像。在上一小节中，我们证明了$_{F\in\mathcal{F}}$限制映射 $\bigoplus r_{\mathring{F}}$: $H_T^*(M) \to \bigoplus H_T^*(M_{\mathring{F}})$ 是单射的，因此 $H_T^*(M)$ 同构于$_{F\in\mathcal{F}}$ $_{F\in\mathcal{F}}$Im($\bigoplus r_{\mathring{F}}$)。在本小节中，我们证明 Im($\bigoplus r_{\mathring{F}}$) 同构于拓扑面环$_{F\in\mathcal{F}}$ $_{F\in\mathcal{F}}$k$[M/T]$. 我们将证明分为两部分，即 k$[M/T] \subseteq$Im($\bigoplus r_{\mathring{F}}$) 和 Im($\bigoplus r_{\mathring{F}}$) $\subseteq$k$[M/T]$。

$_{F\in\mathcal{F}}$ $_{F\in\mathcal{F}}$

令 $F_\bullet$ 为 4.1 中定义的 $Q = M/T$、 $M_{\mathring{F}} = q^{-1}(\mathring{F})$ 和 $X_{\mathring{F}} = \pi_F^{-1}(M_{\mathring{F}})$ 的极小面

引理 6.5. 限制映射

$$r : H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}) \to \bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H_T^i(M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet})$$

是单射。

证明. 我们断言，若 $F_\bullet \not\subseteq F$，则 $M_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet} = \emptyset$. 。事实上，若 $p \in X_{\mathring{F}_\bullet}$，则由引理 4.3 和推论 4.5 可知， p 的各向同性子群是 $T_{F_\bullet}$的子群。然而，对于 $q \in M_{\mathring{F}}$， q 的各向同性子群是 T_F，而它不是 $T_{F_\bullet}$的子群。这意味着 $M_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet} = \emptyset$，因此该断言成立。

因此，我们得到如下 T-轨道分解

$$X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet} = \bigsqcup_{F\in\mathcal{F}(1), F_\bullet \subsetneq F} (M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet}).$$

由于 $M_F \cap X_{F_\bullet}$ 可与 M_F 中 $M_{F_\bullet}$ 的法丛同一，因此 $M_F \cap X_{F_\bullet}$ 是连通的。注意，$M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{F_\bullet}$ 是从 $M_F \cap X_{F_\bullet}$ 中去除一些余维至少为 3 的子流形后得到的，因此 $M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{F_\bullet}$ 也是连通的。因此， $X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}$ 的开面的集合是精确的

$$\{M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet})/T : F \in \mathcal{F}(1), F_\bullet \subsetneq F\}.$$

因此，该引理可由命题 6.4 得出。 □

根据前面的论证，我们可以看到，Mayer–Vietoris正合列 (6.4) 可以分解为短正合列

$$0 \to H_T^*(M) \to H_T^*(M(1)) \oplus H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet}) \xrightarrow{r_1-\kappa_{\mathring{F}_\bullet}} H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}) \to 0. \tag{6.6}$$

其中，$r_1\colon H_T^*(M(1)) \to H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet})$ 和 $\kappa_{\mathring{F}_\bullet}\colon H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet}) \to H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet})$ 是由包含映射 $X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet} \subseteq M(1)$ 和 $X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet} \subseteq X_{\mathring{F}_\bullet}$ 分别诱导的限制映射。此外，我们有如下交换图，后文将用到:

$$\begin{array}{ccc} H_T^i(M(1)) \oplus H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet}) & \xrightarrow{r_1-\kappa_{\mathring{F}_\bullet}} & H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}) \\ \downarrow{\scriptstyle (\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}) \oplus id} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H_T^i(M(1)_{\mathring{F}})\Big) \bigoplus H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet}) & \xrightarrow{\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} (h^1_{\mathring{F}} - h^2_{\mathring{F}})} & \bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H_T^i(M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet}) \end{array} \tag{6.7}$$

其中所有映射均由包含映射诱导，$h^1_{\mathring{F}}\colon H_T^*(M(1)_{\mathring{F}}) \to H_T^*(M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet})$，以及 $h^2_{\mathring{F}}\colon H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet}) \to H_T^*(M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet})$。

推论6.6. 令 $\mathcal{R}$ 为映射的核

$$r_1 - \kappa_{\mathring{F}_\bullet} : H_T^*(M(1)) \oplus H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet}) \to H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet})$$

Then

$$\Big((\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}) \oplus id\Big)(\mathcal{R}) = \ker\Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} (h^1_{\mathring{F}} - h^2_{\mathring{F}})\Big) \cap Im\Big((\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}) \bigoplus id\Big).$$

证明. 注意到上述交换图中的两个垂直映射都是单射，因此通过直接验证可得以下推论。□

令 $\alpha \in \bigoplus H_T^i(M_{\mathring{F}})$和 $\widehat{\alpha}$为 α经同构$_{F\in\mathcal{F}}$的像

$$\Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H_T^i(M(1)_{\mathring{F}})\Big) \bigoplus H_T^i(M_{\mathring{F}_\bullet}) \to \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H_T^i(M(1)_{\mathring{F}})\Big) \bigoplus H_T^i(X_{\mathring{F}_\bullet}).$$

引理 6.7. 令 E 为 M/T 的一个面，且 α 是一个 E-面元素。则

$$\widehat{\alpha} \in \ker\Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} (h^1_{\mathring{F}} - h^2_{\mathring{F}})\Big).$$

证明. 令 $\beta = \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}}{}_{(1)} (h^1_{\mathring{F}} - h^2_{\mathring{F}})\Big)(\widehat{\alpha})$。则对任意 $F \in \mathcal{F}(1)$，有

$$\beta_F = h^1_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_F) - h^2_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_{F_\bullet}) = h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) - h^2_{\mathring{F}}\Big(\pi^*_{\mathring{F}_\bullet}(\alpha_{F_\bullet})\Big)$$

其中 α_F、β_F和 $\widehat{\alpha}_F$分别表示 α、β和 $\widehat{\alpha}$的 F-分量。

情形 1：$F_\bullet \nsubseteq E$。根据面元素的定义（见定义14），我们有 $\alpha_{F_\bullet} = 0$，这意味着

$$h^2_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_{F_\bullet}) = h^2_{\mathring{F}}\Big(\pi^*_{\mathring{F}}(\alpha_{F_\bullet})\Big) = 0.$$

由于 $F_\bullet$ 是 Q 的极小面，我们有 $F_\bullet \cap E = \emptyset$. 。如果 F 是 E 的面，那么 $F \cap F_\bullet = \emptyset$，这意味着 $h^1_{\mathring{F}} = 0$。因此 $h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) = 0$。如果 F 不是 E 的面，那么根据面元素的定义，我们有 $\alpha_F = 0$。此外，我们还得到

$$h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) = 0.$$

因此，对于这种情形，我们有

$$\beta_F = h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) - h^2_{\mathring{F}}(\alpha_{F_\bullet}) = 0.$$

情形 2： $F_\bullet \subseteq E_\circ$。

情形 2-1： F 不是 E 的面。根据 E-面元素的定义，我们有 $\alpha_F = 0$。因此我们有

$$h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) = 0.$$

由于 α 是一个 E-面元素，我们有 $\alpha_E = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},E})\Big(\tau(M_{\mathring{E}})\Big)^{\mathbf{m}}$，其中 $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^k_{>0}$ 且 $a_{\mathbf{m},E} \in H^*(E)_\circ$。因此 $\alpha_{F_\bullet} = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},E}|_{F_\bullet})\Big(\tau(M_{\mathring{F}_\bullet})\Big)^{\mathbf{m}}$ 且 $\widehat{\alpha}_{F_\bullet} = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},E}|_{F_\bullet})\Big(\tau(X_{\mathring{F}_\bullet})\Big)^{\mathbf{m}}$。由于 F 不是 E 的面，存在 $i \in \Psi(E) \setminus \Psi(F) \subseteq \Psi(F_\bullet)$。这表明 $i \notin \Psi(F) \cap \Psi(F_\bullet)$。由 $h^2_{\mathring{F}}$ 的定义可得 $h^2_{\mathring{F}}\Big(\tau_i(X_{\mathring{F}})\Big) = 0$。因此，对于任意 $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^k_{>0}$，我们有 $h^2_{\mathring{F}}\left(\Big(\tau(X_{\mathring{F}})\Big)^{\mathbf{m}}\right) = 0$，这意味着

$$h^2_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_{F_\bullet}) = 0.$$

在这种情况下，我们有

$$\beta_F = h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) - h^2_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_{F_\bullet}) = 0.$$

情形 2-2： F 是 E 的面，但 $F_\bullet \nsubseteq F$。由于 $F_\bullet$ 是极小面， $F_\bullet \cap F = \emptyset$，这意味着 $h^1_{\mathring{F}} = 0$ 和 $h^2_{\mathring{F}} = 0$。因此，对于这种情形，我们有

$$\beta_F = h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) - h^2_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_{F_\bullet}) = 0.$$

情形 2-3： F 是 E 和 $F_\bullet \subseteq F$ 的面。取满足 $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^k_{>0}$ 的 $\alpha_E = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},E})\Big(\tau(M_{\mathring{E}})\Big)^{\mathbf{m}}$。则 $\alpha_F = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},E}|_F)\Big(\tau(M_{\mathring{F}})\Big)^{\mathbf{m}}$，其中 $\overline{q}^*$ 由复合映射诱导。

$$ET \times_T M_{\mathring{F}} \to \mathring{F} \to F.$$

因此

$$h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*\left(a_{\mathbf{m},E}\Big|_{(M_F \cap X_{F_\bullet})/T}\right)\left(\tau(M_{\mathring{F}})\Big|_{M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet}}\right)^{\mathbf{m}},$$

其中，滥用记号的 $\overline{q}^*$ 是由该映射诱导得到的。

$$ET \times_T (M_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet}) \to (M_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet})/T \to (M_F \cap X_{F_\bullet})/T.$$

由相同的论证可得 $\alpha_{F_\bullet} = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*(a_{\mathbf{m},E}|_{F_\bullet})\Big(\tau(M_{\mathring{F}_\bullet})\Big)^{\mathbf{m}}$ 并且

$$h^2_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_{F_\bullet}) = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*\Big(\mathbf{P}^*(a_{\mathbf{m},E}|_{F_\bullet})\Big)\left(\tau(X_{\mathring{F}_\bullet})\Big|_{M_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet}}\right)^{\mathbf{m}}.$$

这里，$\mathbf{P}^*$ 由复合映射诱导

$$\mathbf{P} : (M(1)_F \cap X_{F_\bullet})/T \to X_{F_\bullet}/T \xrightarrow{\overline{\pi_{F_\bullet}}} M_{F_\bullet}/T = F_\bullet$$

其中，$\overline{\pi_{F_\bullet}}$： $X_{F_\bullet}/T \to M_{F_\bullet}/T = F_\bullet$ 由 $\pi_{F_\bullet}$： $X_{F_\bullet} \to M_{F_\bullet}$ 和$\overline{q}^*$诱导；滥用记号，$\overline{\pi_{F_\bullet}}$ 由该映射诱导

$$ET \times_T (M_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet}) \to (M_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet})/T \to (M_F \cap X_{F_\bullet})/T.$$

由于$(M_F \cap X_{F_\bullet})/T$是良好的带角流形 $X_{F_\bullet}/T$的一个面。根据推论 4.5，映射

$$(M_F \cap X_{F_\bullet})/T \xrightarrow{\mathbf{P}} F_\bullet \to (M_F \cap X_{F_\bullet})/T,$$

其中 $F_\bullet \to (M_F \cap X_{F_\bullet})/T$ 是包含映射，与恒等映射同伦等价

$$(M_F \cap X_{F_\bullet})/T \to (M_F \cap X_{F_\bullet})/T.$$

这意味着 $\mathrm{P}^*(a_{\mathbf{m},\ E}|_{F_\bullet}) = a_{\mathbf{m},\ E}\Big|_{(M_F\cap X_{F_\bullet})/T}$. 因此我们有

$$h^2_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_{F_\bullet}) = \sum_{\mathbf{m}} \overline{q}^*\left(a_{\mathbf{m},E}\Big|_{(M_F\cap X_{F_\bullet})/T}\right)\left(\tau(X_{\mathring{F}_\bullet})\Big|_{M_{\mathring{F}}\cap X_{\mathring{F}_\bullet}}\right)^{\mathbf{m}}.$$

于是我们有

$$\beta_F = h^1_{\mathring{F}}(\alpha_F) - h^2_{\mathring{F}}(\widehat{\alpha}_{F_\bullet}) = 0$$

对于这种情况。

上述论证表明 $\beta = 0$，这意味着该引理成立。 □

引理 6.8. 设 $\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}$: $H^*_T(M) \to \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H^*_T(M_{\mathring{F}})$ 是由包含映射诱导的限制映射。那么

$$\mathbf{k}[M/T] \subseteq Im(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}).$$

证明。我们对 $\sharp\mathcal{F}$进行归纳法，其中 $\mathcal{F}$是 $Q = M/T$的面集。当$\sharp\mathcal{F} = 1$, $M = \mathring{M}$. 因此我们有

$$H^*_T(M) = H^*_T(M_{\mathring{Q}}) = \mathbf{k}[Q].$$

因此，该引理对 $\sharp\mathcal{F} = 1$ 成立。

假设 $\sharp\mathcal{F} \geq 2$。令 $F_\bullet$ 为 $Q = M/T$ 的极小面，并且 $M(1) := M \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}$ 根据引理 6.1，我们有 $\sharp\mathcal{F}(1) \leq^\sharp \mathcal{F} - 1$，其中 $\mathcal{F}(1)$ 是 $Q(1)$ 的面的集合: $= M(1)/T$. 因此，根据归纳假设，我们有

$$\mathbf{k}[Q(1)] \subseteq \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}).$$

设 E 是 Q 的一个面，且 α 是 $\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H^*_T(M_{\mathring{F}})$ 中的 E-面元素，因此只需证明 $\alpha \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})$

情形 1: $F_\bullet \nsubseteq E$. 在这种情形下 $\alpha_{F_\bullet} = 0$. 因此我们可以将 α 视为 $\mathbf{k}[Q(1)]$. 中的一个元素。根据归纳假设，我们有

$$\alpha \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}) \subseteq \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}),$$

其中，最后一个包含关系由以下事实得出: $M(1)_{\mathring{F}} = M_{\mathring{F}}$对于 $F \in \mathcal{F}(1)$.

情形 2: $F_\bullet \subseteq E$. 令 $\widehat{\alpha}$ 表示 α 通过同构得到的像

$$\Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H^i_T(M(1)_{\mathring{F}})\Big)\bigoplus H^i_T(M_{\mathring{F}_\bullet}) \to \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H^i_T(M(1)_{\mathring{F}})\Big)\bigoplus H^i_T(X_{\mathring{F}_\bullet})$$

并令 $\alpha(1)$表示从 α中移除 $F_\bullet$分量后得到的 $\mathbf{k}[Q(1)]$ 中的元素，因此我们将 $\widehat{\alpha}$ 表示为 $\Big(\alpha(1)\ \pi^*_{\mathring{F}_\bullet}(\alpha_{F_\bullet})\Big)$.根据归纳假设，存在元素 $\gamma \in H^*_T(M(1))$，使得

$$\Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}\Big)(\gamma) = \alpha(1). \tag{6.8}$$

由于根据引理 6.7, $\Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)}(h^1_{\mathring{F}} - h^2_{\mathring{F}})\Big)\Big(\alpha(1)\ \pi^*_{\mathring{F}_\bullet}(\alpha_{F_\bullet})\Big) = 0$，我们有

$$r \circ (r_1 - \kappa_{\mathring{F}_\bullet})\Big(\gamma, \pi^*_{\mathring{F}_\bullet}(\alpha_{F_\bullet})\Big) = 0$$

这由交换图（6.7）可得。根据引理 6.5, r 是单射，s o

$$(r_1 - \kappa_{\mathring{F}_\bullet})\Big(\gamma, \pi^*_{\mathring{F}_\bullet}(\alpha_{F_\bullet})\Big) = 0.$$

根据短正合列 6.6，我们有

$$\Big(\gamma, \pi^*_{\mathring{F}_\bullet}(\alpha_{F_\bullet})\Big) \in \mathrm{Im}\Big(H^*_T(M) \to H^*_T(M(1)) \oplus H^*_T(X_{\mathring{F}_\bullet})\Big).$$

应用交换图 (6.5)，我们有

$$\left(\Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}\Big)(\gamma), (\pi^*_{\mathring{F}_\bullet})^{-1}\Big(\pi^*_{\mathring{F}_\bullet}(\alpha_{F_\bullet})\Big)\right) \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}).$$

根据 (6.8)，我们有 $(\alpha(1)\ \alpha_{F_\bullet}) \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})$。也就是说 $\alpha \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})$。

总结上述论证，对于任意面元素 α 我们有

$$\alpha \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}),$$

因此，该引理由 $\mathbf{k}[M/T]$ 由面元素生成这一事实得证。 □

引理 6.9。设 $\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}\colon H^*_T(M) \to \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H^*_T(M_{\mathring{F}})$ 为由包含映射诱导的限制映射。那么

$$Im(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}) \subseteq \mathbf{k}[M/T].$$

证明。我们对 $\sharp\mathcal{F}$ 进行归纳法来证明此引理，其中 $\mathcal{F}$ 是 $Q = M/T$ 的面集。当 $\sharp\mathcal{F} = 1$ 时， $M = \mathring{M}$. 因此我们有

$$H^*_T(M) = H^*_T(M_{\mathring{Q}}) = \mathbf{k}[Q].$$

因此，此引理对 $\sharp\mathcal{F} = 1$ 成立。

假设 $\sharp\mathcal{F} \geq 2$。令 $F_\bullet$ 为 $Q = M/T$ 的一个极小面，且 $M(1) := M \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}$.。由引理 6.1，我们有 $\sharp\mathcal{F}(1) \leq \sharp\mathcal{F} - 1$，其中 $\mathcal{F}(1)$ 是 $Q(1)$ 的面集：$= M(1)/T$.。因此，由归纳假设可得

$$\mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}) \subseteq \mathbf{k}[Q(1)].$$

这一包含关系意味着

$$\mathrm{Im}\Big((\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}) \bigoplus id\Big) \subseteq \mathbf{k}[Q(1)] \bigoplus H^*_T(X_{\mathring{F}_\bullet}),$$

其中

$$(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}) \bigoplus id : H^i_T(M(1)) \oplus H^i_T(X_{\mathring{F}_\bullet}) \to \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H^i_T(M(1)_{\mathring{F}})\Big) \bigoplus H^i_T(X_{\mathring{F}_\bullet}).$$

通过从 α 中移除 $F_\bullet$-$F\in\mathcal{F}$ $F\in\mathcal{F}$ $\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)}$分量，令 $\alpha(1)$ 为 $\mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})$ 中满足 $\alpha \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}) \subseteq \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H^*_T(M_{\mathring{F}})$ 的元素，其中 $\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}}\colon H^*_T(M(1)) \to \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H^*_T(M(1)_{\mathring{F}})\Big)$.因此，我们可以将 α 表示为$\alpha = \Big(\alpha(1)\ \alpha_{F_\bullet}\Big)$. 然后，根据归纳假设，我们有

$$\alpha(1) \in \mathbf{k}[Q(1)].$$

Set

$$\alpha(1) = \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \theta(F),$$

其中 $\theta(F)$ 是 $\Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}}{}^{(1)} H_T^*(M(1)_{\mathring{F}})\Big)$. 中的一个 F-面元素。注意，我们可以将 $\theta(F)$ 唯一地扩展为 $\mathbf{k}[Q]$ 中的一个 F-面元素 $\theta(F)$，如下所示。

$$\widetilde{\theta(F)} = \Big(\theta(F), \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big)\Big)$$

其中 $\theta(F)_F$ 是 $\theta(F)$ 的 F 分量，而 $\phi_{FF_\bullet}$ 由式 (5.6) 给出。因此我们有

$$\begin{aligned}\Big(\alpha(1), \alpha_{F_\bullet}\Big) - \sum_{\mathring{F}\in\mathring{\mathcal{F}}(1)} \widetilde{\theta(F)} &= (\alpha(1), \alpha_{F_\bullet}) - \Big(\sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \theta(F), \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big)\Big) \\ &= \Big(0, \alpha_{F_\bullet} - \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big)\Big).\end{aligned} \tag{6.9}$$

引理 6.8 表明 $\sum_{\mathring{F}\in\mathring{\mathcal{F}}(1)} \theta(F) \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})$，所以我们有

$$\Big(0, \alpha_{F_\bullet} - \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big)\Big) \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}).$$

考虑下面这个由交换图 (6.5) 和 (6.7) 合并而成的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
H_T^*(M) & \longrightarrow & H_T^*(M(1)) \oplus H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet}) & \xrightarrow{r_1-\kappa_{\mathring{F}_\bullet}} & H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet} \setminus M_{\mathring{F}_\bullet}) \\
\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle (\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} r_{\mathring{F}})\oplus id} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\
\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} H_T^*(M_{\mathring{F}}) & \longrightarrow & \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H_T^*(M(1)_{\mathring{F}})\Big) \bigoplus H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet}) & \xrightarrow{\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} (h^1_{\mathring{F}} - h^2_{\mathring{F}})} & \bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} H_T^*(M(1)_{\mathring{F}} \cap X_{\mathring{F}_\bullet}),
\end{array}$$

我们有

$$\Big(0, \pi^*_{\mathring{F}_\bullet}\Big(\alpha_{F_\bullet} - \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big)\Big)\Big) \in \ker \bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} (h^1_{\mathring{F}} - h^2_{\mathring{F}}),$$

由于该交换图的上行是正合的，因此我们有

$$(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}(1)} h^2_{\mathring{F}}) \Big(\pi^*_{\mathring{F}_\bullet}\Big(\alpha_{F_\bullet} - \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big)\Big)\Big) = 0,$$

这意味着

$$\Big(\pi^*_{\mathring{F}_\bullet}\Big(\alpha_{F_\bullet} - \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big)\Big)\Big)\Big|_{X_{\mathring{F}_\bullet}\setminus M_{\mathring{F}_\bullet}} = 0.$$

由引理 6.3，我们得到

$$\Big(\pi^*_{\mathring{F}_\bullet}\Big(\alpha_{F_\bullet} - \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big)\Big)\Big) \in \Big(\tau_{F_\bullet}(X_{\mathring{F}_\bullet})\Big),$$

其中 $\Big(\tau_{F_\bullet}(X_{\mathring{F}_\bullet})\Big)$ 是由 $\tau_{F_\bullet}(X_{\mathring{F}_\bullet})$ 生成的 $H_T^*(X_{\mathring{F}_\bullet})$ 的理想。因此我们有

$$\alpha_{F_\bullet} - \sum_{F\in\mathcal{F}(1)} \phi_{FF_\bullet}\Big(\theta(F)_F\Big) = \Big(\tau_{F_\bullet}(M_{\mathring{F}_\bullet})\Big)$$

这表明 $\left(0, {}^{\alpha_{F_\bullet}} - \sum_{F\in\mathcal{F}} {}^{(1)}\phi_{FF_\bullet}\left(\theta(F)_F\right)\right)$ 是一个 $F_\bullet$-面元素。这意味着根据（6.9）， $\alpha \in \mathbf{k}[M/T]$，因此 $\mathrm{Im}(\bigoplus r_{\mathring{F}}) \subseteq \mathbf{k}[M/T]_{F\in\mathcal{F}}$

□

定理 6.10. 设 M 是一个带有局部标准作用的 $2n$维开环面流形。那么

$$\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}} : H_T^*(M) \to \mathbf{k}[M/T]$$

是一个同构，其中 $\mathcal{F}$ 是 M/T.的面集

证明. 由命题 6.4，得

$$H_T^*(M) \cong \mathrm{Im}\left(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}\right).$$

由引理 6.8 和引理 6.9，得

$$\mathrm{Im}\left(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}}\right) = \mathbf{k}[M/T],$$

因此得到同构

$$H_T^*(M) \cong \mathbf{k}[M/T].$$

□

7. Towards to $H^*(BT)$-algebra structure of $H_T^*(M)$

本节研究 $H_T^*(M)$ 的 $H^*(BT)$-代数结构。由于 $H^*(BT)$ 由$H^2(BT)$生成，因此只需研究 $u \in H^2(BT)$ 的 $\pi^*(u)$，其中 π^* 由 Borel 构造中的投影映射$\pi\colon\ ET \times_T M \to BT$诱导。根据命题 6.4，只需研究 $(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})\left(\pi^*(u)\right)$。应用定理 6.10，可得

$$(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})\left(\pi^*(u)\right) = \sum_{F\in\mathcal{F}} \theta(F)$$

其中 $\theta(F)$ 是 $\mathbf{k}[M/T]$. 中的 F-面元素。注意，若 F 的余维大于 1，则 $\deg(u) = 2$ 且 $\deg(\theta(F)) \geq 4$，因此我们有

$$(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})\left(\pi^*(u)\right) = \theta(Q) + \sum_{i=1}^{m} \theta(F_i)$$

其中 F_1、.....、F_m 是 $Q = M/T$的所有面。根据面元素的定义，我们有 $\theta(Q)_Q \in H_T^2(M_{\mathring{Q}}) \cong H^2(\mathring{Q}) \cong H^2(Q)$，且 $\theta(F_i)_{F_i} = a_i\tau_i(M_{\mathring{F}_i})$，其中 $a_i \in \mathbf{k}$ 且 $\tau_i(M_{\mathring{F}_i}) = \tau_i|_{M_{\mathring{F}_i}}$。注意，$\theta(Q)_Q$ 和 a_i 在 u 上线性相关，其中 $i \in \{1, \cdots, m\}$，因此我们将上述论证总结为以下命题。

命题 7.1. 设 $\{F_1, \ldots, F_m\}$ 是 M/T 的面集。对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，存在唯一的元素 $v_i \in H_2(BT; \mathbf{k})$，使得对于任意 $u \in H^2(BT; \mathbf{k})$，都有

$$(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} r_{\mathring{F}})\left(\pi^*(u)\right) = \theta(Q) + \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, u\rangle \tau_i(M_{\mathring{F}_i}),$$

其中 $\theta(Q)_Q \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^2(BT)\ H^2(\mathring{Q}))$，且 $\langle , \rangle$ 是上同调与同调之间的自然配对。

注。 $\theta(Q)$$Q$ 上述命题中的内容反映了主 T-丛 $M_{\mathring{Q}} = M \to M/T$，这是由以下交换图所致。

$$\begin{array}{ccccc} ET \times M & \longleftarrow & ET \times \mathring{M} & \longrightarrow & \mathring{M} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ET \times_T M & \longleftarrow & ET \times_T \mathring{M} & \longrightarrow & \mathring{M}/T \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ BT & = & BT & & \end{array}$$

其中， $ET \times_T M \to M/T$ 是一个同伦等价。

8. On equivariant characteristic classes of M

在本节中，我们用 $H^*(M/T)$和 τ_i来表示 M 的等变斯蒂费尔-惠特尼类和庞特里亚金类。

引理 8.1. 设 $\overline{q}$ ： $ET \times_T M_{\mathring{F}} \to \mathring{F}$ 是 Borel 构造[2]中的第二投影。于是

$$w^T(M_{\mathring{F}}) = \overline{q}^* w(\mathring{F})$$

其中， $w^T(M_{\mathring{F}})$ 和 $w(\mathring{F})$ 分别表示 $M_{\mathring{F}}$的等变全 Stiefel–Whitney 类和 F 的全 Stiefel–Whitney 类。

证明。由于 $q\colon M_{\mathring{F}} \to F$ 是一个主 T/T_F 纤维丛，因此有

$$TM_{\mathring{F}} \cong q^* T\mathring{F} \oplus \nu_f,$$

其中， ν_f 是沿纤维方向的 TM_F 子向量丛。上述丛同构是T-等变的。事实上， T在 q^*TF的纤维部分上平凡作用，而在 ν_f上通过投影$T \to T/T_F$作用。注意， ν_f是到一个平凡丛的 T-等变同构。事实上，我们可以如下沿 $M_{\mathring{F}}$的纤维方向赋予 T-不变向量场。设 v_1、 $\cdots$、 v_l是 Lie(T/T_F) 的一组基，其中 Lie(T/T_F) 表示 T/T_F的李代数。对每个 $p \in M_{\mathring{F}}$，定义

$$\widetilde{v_i}(p) := \frac{d(\exp(tv_i) \cdot p)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

那么， $\widetilde{v_i}$是沿纤维方向的 T不变向量场。这意味着

$$w^T(\nu_f) = 1.$$

由于 T 在 q^*TF 的纤维方向上平凡作用，因此我们有

$$w^T(q^* T\mathring{F}) = \overline{q}^* w(\mathring{F}).$$

因此

$$w^T(M_{\mathring{F}}) = w^T(q^* T\mathring{F}) \cdot w^T(\nu_f) = \overline{q}^* w(\mathring{F}).$$

□

[2]本节中 $\overline{q}$ 的定义与前几节略有不同

推论 8.2. 设 F 是 M/T 的余维 k 面，且是 $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k}$ 的一个连通分支，其中 F_{i_j} 是 M/T 的面。那么

$$w^T(X_{\mathring{F}})=(\pi^*_{\mathring{F}}\circ\overline{q}^*)\Big(w(\mathring{F})\Big)\cdot(1+\tau_{i_1}|_{X_{\mathring{F}}})\cdots(1+\tau_{i_k}|_{X_{\mathring{F}}}),$$

其中，$\pi^*_{\mathring{F}}$ 由映射 $\pi_{\mathring{F}}\colon X_{\mathring{F}}\to M_{\mathring{F}}$ 诱导，$\overline{q}^*$ 由 $\overline{q}\colon ET\times_T M_{\mathring{F}}\to F$（Borel 构造中的第二投影）诱导。

证明。由于我们可以将 T-等变法丛 ν_F 与 M 中 $M_{\mathring{F}}$ 的一个 T-不变管状邻域 $X_{\mathring{F}}$ 等同，因此有 T-等变分解 $TX_{\mathring{F}}\cong\pi^*_{\mathring{F}}(TM_{\mathring{F}})\oplus\pi^*_{\mathring{F}}(\nu_{\mathring{F}})$。于是我们有

$$w^T(X_{\mathring{F}})=\pi^*_{\mathring{F}}\Big(w^T(M_{\mathring{F}})\Big)\cdot\pi^*_{\mathring{F}}\Big(w^T(\nu_{\mathring{F}})\Big).$$

由于对每个 $p\in M_F$，$M_{F_{i_1}}$，.....，$M_{F_{i_k}}$ 在 p 处横截相交，因此 $\nu_F\cong\oplus_{j=1}^k(\nu_{F_{i_j}}|_{M_F})$ 是 T-不变向量丛。因此 $\nu_{\mathring{F}}\cong\oplus_{j=1}^k(\nu_{F_{i_j}}|_{M_{\mathring{F}}})$，这意味着

$$w^T(\nu_{\mathring{F}})=(1+\tau_{i_1}|_{M_{\mathring{F}}})\cdots(1+\tau_{i_k}|_{M_{\mathring{F}}}).$$

由于 $\pi_{\mathring{F}}\colon X_{\mathring{F}}\to M_{\mathring{F}}$ 是一个 T-等变同伦等价，我们有

$$\pi^*_{\mathring{F}}\Big(w^T(\nu_{\mathring{F}})\Big)=(1+\tau_{i_1}|_{X_{\mathring{F}}})\cdots(1+\tau_{i_k}|_{X_{\mathring{F}}}).$$

由引理 8.1，我们有

$$w^T(M_{\mathring{F}})=\overline{q}^*w(\mathring{F}).$$

因此等式

$$w^T(X_{\mathring{F}})=(\pi^*_{\mathring{F}}\circ\overline{q}^*)\Big(w(\mathring{F})\Big)\cdot(1+\tau_{i_1}|_{X_{\mathring{F}}})\cdots(1+\tau_{i_k}|_{X_{\mathring{F}}})$$

可由上述计算得出。 □

设 $\mathring{M}$为 M上作用的自由部分。也就是说，$\mathring{M}=q^{-1}(\mathring{Q})$，其中 $\mathring{Q}$是 $Q=M/T$ 的相对内部部分，且 Q 与 Q同伦等价。于是，我们可以用 $w(M/T)$ 和 τ_i's 表示 M的等变 Stiefel-Whitney类，其中 τ_i 在第 2 节末给出。

定理 8.3. 设 M是一个带有局部标准作用的开环面流形，$\{F_1,\cdots,F_m\}$ 是 M/T的面的集合。那么

$$w^T(M)=h^*_M\Big(w(\mathring{M}/T)\Big)\cdot(1+\tau_1)\cdot(1+\tau_2)\cdots(1+\tau_m),$$

其中，$h^*_M=\overline{q}^*\circ(\iota^*)^{-1}$、$\overline{q}^*$ 由 $\overline{q}$ 诱导：$ET\times_T M\to M/T$ 博雷尔构造中的第二投影，而 ι^* 由包含映射 ι 诱导：$M/T\to M/T$。

证明。我们对 $\sharp\mathcal{F}$使用归纳法来证明此定理

当 $\sharp\mathcal{F}=1$、$M=\mathring{M}$时。由于 M是 M/T上的主 T丛，因此我们有

$$w^T(M)=w^T(\mathring{M})=\overline{q}^*w(\mathring{Q})=h^*_M\Big(w(\mathring{M}/T)\Big).$$

假设 $\sharp\mathcal{F}\geq 2$。设 $F_\bullet$为 $Q=M/T$的一个极小面，且 $M(1):=M\setminus M_{\mathring{F}_\bullet}$。根据引理 6.1，我们有 $\sharp\mathcal{F}(1)\leq^\sharp\mathcal{F}-1$，其中 $\mathcal{F}(1)$是 $M(1)/T$.的面集合。集合

$$\eta=h^*_M\Big(w(\mathring{M}/T)\Big)\cdot(1+\tau_1)\cdot(1+\tau_2)\cdots(1+\tau_m).$$

为了证明 $\eta=w^T(M)$，只需证明：

$$\eta|_{M(1)}=w^T(M(1))\quad\text{and}\quad\eta|_{X_{F_\bullet}}=w^T(X_{F_\bullet}) \tag{8.1}$$

由于

$$H^*_T(M)\to H^*_T(M(1))\bigoplus H^*_T(X_{F_\bullet})$$

由短正合列 (6.6) 可知其为单射。由于 $M(1)/T$ 的面数小于 M/T，根据归纳假设，我们有

$$w^T(M(1)) = h^*_{M(1)}\Big(w\Big(\mathring{M(1)}/T\Big)\Big)\cdot\Big(1+\tau_1|_{M(1)}\Big)\cdot\Big(1+\tau_2|_{M(1)}\Big)\cdots\Big(1+\tau_m|_{M(1)}\Big)$$

其中 $h^*_{M(1)}$ 的定义与 h^*_M类似。另一方面,

$$\eta|_{M(1)}= h^*_M\Big(w(\mathring{M}/T)\Big)\Big|_{M(1)_T}\cdot(1+\tau_1|_{M(1)})\cdots(1+\tau_m|_{M(1)}),$$

其中 $M(1)_T$是 $M(1)$ 的 Borel 构造。由下列交换图

$$\begin{array}{ccccc} ET\times_T \mathring{M} & \longrightarrow & ET\times_T M(1) & \longrightarrow & ET\times_T M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathring{M}/T & \longrightarrow & M(1)/T & \longrightarrow & M/T, \end{array}$$

我们有

$$h^*_M\Big(w(\mathring{M}/T)\Big)\Big|_{M(1)_T} = h^*_{M(1)}\Big(w(\mathring{M}/T)\Big) = h^*_{M(1)}\Big(w\Big(\mathring{M(1)}/T\Big)\Big)$$

其中第二个等式由 $M(1) = M$ 得出。因此我们有

$$\eta|_{M(1)}= w^T(M(1)).$$

接下来我们证明 $\eta|_{X_{F_\bullet}}= w^T(X_{F_\bullet})$。令 $F_\bullet$为 $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k}$ 的一个连通分支，其中 F_{i_j} 是 M/T 的面。于是

$$\begin{aligned}\eta|_{X_{F_\bullet}} &= h^*_M\Big(w(\mathring{M}/T)\Big)\Big|_{X_{F_\bullet}}\cdot(1+\tau_1|_{X_{F_\bullet}})\cdots(1+\tau_m|_{X_{F_\bullet}})\\ &= h^*_M\Big(w(\mathring{M}/T)\Big)\Big|_{X_{F_\bullet}}\cdot(1+\tau_{i_1}|_{X_{F_\bullet}})\cdots(1+\tau_{i_k}|_{X_{F_\bullet}}).\end{aligned}$$

根据以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} ET\times_T \mathring{X}_{F_\bullet} & & \longrightarrow & & ET\times_T X_{F_\bullet} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & \mathring{X}_{F_\bullet}/T & \longrightarrow & X_{F_\bullet}/T & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & \mathring{M}/T & \longrightarrow & M/T & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ ET\times_T \mathring{M} & & \longrightarrow & & ET\times_T M, \end{array}$$

我们有

$$h^*_M\Big(w(\mathring{M}/T)\Big)\Big|_{X_{F_\bullet}} = h^*_{X_{F_\bullet}}\Big(w(\mathring{M}/T)\Big|_{\mathring{X}_{F_\bullet}/T}\Big) = h^*_{X_{F_\bullet}}\Big(w(\mathring{X}_{F_\bullet}/T)\Big),$$

其中 $X_{F_\bullet}$ 是 $X_{F_\bullet}$上 T-作用的自由部分。因此我们得到

$$\eta|_{X_{F_\bullet}}= w^T(X_{F_\bullet}).$$

上述论证表明 (8.1) 成立，这意味着 $\eta = w^T(M)$。

□

令 $p^T(M)$ 为 M 的等变总庞特里亚金类，并令 $p(\mathring{M}/T)$ 为 M/T 的总庞特里亚金°类。通过相同的论证，我们可以得到如下 M 的等变庞特里亚金类公式。

定理 8.4. 设 M 是一个具有局部标准作用的开环面流形，$\{F_1, \cdots, F_m\}$ 是 M/T 的面集。则

$$p^T(M) = h_M^*\Big(p(\mathring{M}/T)\Big) \cdot (1+\tau_1^2) \cdot (1+\tau_2^2) \cdots (1+\tau_m^2),$$

其中 $h_M^* = \overline{q}^* \circ (\iota^*)^{-1}$，$\overline{q}^*$ 由 $\overline{q}$ 诱导：$ET \times_T M \to M/T$ Borel°构造中的第二投影，而 ι^* 由包含映射 ι 诱导：$M/T \to M/T$。

References

[1] A. Ayzenberg、M. Masuda、S. Park 和 H. Zeng，具有无环真面的托里克折纸流形的上同调，《Journal of Symplectic Geometry》15（2017），第 3 期，645–685。[2] A. Bahri、M. Bendersky、F. Cohen 和 S. Gitler，多面体积函子：矩-角复形、配置及相关空间的计算方法，《Advances in Mathematics》225（2010），第 3 期，1634–1668。[3] G.E. Bredon，《紧变换群导论》，Academic Press，纽约–伦敦，1972。[4] V. M. Buchstaber 和 T. E. Panov，《托里克拓扑》，《Mathematical Surveys and Monographs》，204，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015[5] A. Cannas da Silva、V. Guillemin 和 A. R. Pires，《辛折纸》，《International Mathematics Research Notices》2011（2011），4252–4293。[6] D. A. Cox、J. B. Little 和 H. K. Schenck，《环面簇》，《Graduate Studies in Mathematics》，124，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011。[7] M. W. Davis 和 T. Januszkiewicz，凸多胞体、考克斯特轨形与环面作用，《Duke Mathematical Journal》62（1991），第 2 期，417–451。[8] W. Fulton，《环面簇导论》，《Annals of Mathematics Studies》，113，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。[9] V. Guillemin、E. Miranda、A.R. Pires 和 G. Scott，b-辛流形上的托里克作用，《International Mathematics Research Notices》14（2015），5818–5848。[10] A. Hattori 和 M. Masuda，多重扇理论，《Osaka Journal of Mathematics》40（2003），1–68。[11] T. Holm 和 A. R. Pires，环面折纸流形的拓扑，《数学研究快报》20（2013），第 2 期，885–906。[12] H. Ishida、Y. Fukukawa 和 M. Masuda，拓扑环面流形，《Moscow Mathematical Journal》13（2013），第 1 期，57–98。[13] M. Masuda，酉环面流形、多重扇与等变指标，《Tohoku Mathematical Journal》51（1999），第 2 期，237–265。[14] M. Masuda 和 T. Panov，环面流形的上同调，《Osaka Journal of Mathematics》43（2006），711–746。[15] M. Poddar 和 S. Sarkar，一类具有非凸轨道空间的环面流形，《美国数学会会刊》143（2015），1797–1811。[16] L. Yu，具有不可缩轨道空间的矩-角流形推广，arXiv:2011.10366v6。[17] T. Yoshida，由标准表示建模的局部环面作用，《Advances in Mathematics》227（2011），1914–1955。

School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074, P.R. China电子邮箱：yueshan xiong@yahoo.com

School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074, P.R. China电子邮箱地址：zenghaozhi@icloud.com