arXiv:2305.03974v1 [math.AP] 6 May 2023

On elliptic problems with Choquard term and singular nonlinearity

Debajyoti Choudhuri[a], Dušan D. Repovš[b,*], Kamel Saoudi[c]a印度奥迪沙邦鲁尔克拉769008，鲁尔克拉国家理工学院数学系。电子邮箱：dc.iit12@gmail.comb斯洛文尼亚卢布尔雅那1000，卢布尔雅那大学教育学院和数学与物理学院，以及数学、物理与力学研究所。电子邮箱：dusan.repovs@guest.arnes.sic 沙特阿拉伯达曼34212，伊玛目阿卜杜勒拉赫曼·本·费萨尔大学基础与应用科学研究中心。电子邮箱：kmsaoudi@iau.edu.sa

摘要

利用变分方法，我们证明了由 Choquard 项和奇异非线性驱动的椭圆问题存在无穷多个解。我们进一步证明，如果该问题存在正解，那么该解在区域 Ω 上几乎处处有界，且具有 H¨older 连续性。

关键词：Choquard项、变分方法、对偶喷泉定理。数学主题分类：35R35、35Q35、35J20、46E35。

1 引言

我们将研究以下问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \mu(J_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{-\beta-1}u \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中

$$0 < \beta < 1, 0 < \alpha < N, \mu \in \mathbb{R}, \lambda > 0, p \in [2_\alpha, 2_\alpha^*], \quad 2_\alpha = \frac{N+\alpha}{N}, 2_\alpha^* = \frac{N+\alpha}{N-2},$$

并且 V 是一个连续的 函数（通常称为势阱），满足以下条件 ns

(V_1) $V: \Omega \to \mathbb{R}$ 连续，且存在常数 $V_0 > 0$ 使得 $V(x) > V_0$ 对所有 $x \in \Omega$ 都成立。这里，$N \geq 2$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界区域，

(V_2) $V: \Omega \to \mathbb{R}$ 满足可积性条件

$$\int_\Omega \frac{1}{V(x)} dx < \infty.$$

*通讯作者：dusan.repovs@guest.arnes.si

问题（1.1）中的符号（$*$）表示卷积。注意， 2_α 和 2_α^* 均小于$2^* = \frac{2N}{N-2}$，后者是Sobolev临界指数。Riesz势可描述为

$$J_\alpha(x) = \frac{A_\alpha(N)}{|x|^{N-\alpha}}, \quad A_\alpha(N) = \frac{\Gamma(N-\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)\pi^{N/2}2^\alpha}.$$

已有许多文章研究了在势函数 V 具有各种假设下、由 Choquard项驱动的椭圆型非局部问题。例如，读者可参阅 Moroz-Schaftingen [8]、 Carvalho et al. [1]、 Mukherjee-Sreenadh [9] 及其中的参考文献。关于在有界区域内带有奇异性和 Radon 测度的上临界Choquard项的研究，可参见 Panda et al [10]；该文建立了正解的存在性。由奇异非线性驱动的椭圆问题的系统研究始于四十年前 Lazer-McKenna [5] 的开创性工作。这为椭圆型偏微分方程领域的研究开辟了新的方向。关于奇异性驱动的椭圆问题的解的存在性，我们提及一些重要工作，如 Giacomoni et al. [2]、 Saoudi et al. [14] 及其中的参考文献。

1.1 所研究问题的意义

问题（1.1）涵盖了更广泛的问题类别，因为我们考虑了 $\mu \in \mathbb{R}$。这改进了现有研究，因为那些研究要求 Choquard项的系数严格为正。可以看出，如果问题（1.1）中的 $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $V(x) = c$, $N = 3$，那么我们有

$$-\Delta u + cu - \left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2(y) V(x-y) dy \right) u(x) = 0. \tag{1.2}$$

这里 V 是一个正函数。 Lions 在 [7] 中研究了无界区域 $\mathbb{R}^3$上的这个问题。因此，问题 (1.1) 的研究并非新鲜事，而且长期以来一直受到关注。
此外，当 $V(x) \equiv 0$, $\mu = 0$ 时，问题就化为与 Lazer-McKenna [5] 所研究的问题类似的经典问题。然而，将 Choquard项 与一个具有 $\mu \in \mathbb{R}$ 的奇异项结合起来，是一种新的思路。本文的主要结果陈述如下。

定理 1.1. 对任意 $\lambda > 0$ 和 $\mu \in \mathbb{R}$，泛函 $I_{\lambda,\ \mu}$ 存在一个临界点序列 (u_n)，使得 $I_{\lambda,\ \mu}(u_n) < 0$ 且 $I_{\lambda,\ \mu}(u_n) \to 0$，当 $n \to \infty$时。
我们的第二个主要结果证明了问题 (1.1) 的正弱解的有界性。据我们所知，对于涉及 Choquard 项和奇异非线性的椭圆型偏微分方程，这一点此前尚未得到证明。

定理 1.2. 设 $0 < u \in X$ 是问题 (1.1) 的一个弱解。则 $u \in L^\infty(\Omega)$。

我们的第三个主要结果表明，这类正解不仅有界，而且还具有 H¨older 连续正则性。

定理1.3. 设 $u > 0$ 是问题 (1.1) 的一个弱解。则对于某个 $\theta \in (0, 1)$，有 $u \in C^\theta_{loc}(\Omega)$。

我们在本节最后介绍本文的结构。第2节讨论数学预备知识。第3节证明定理 1.1。第4节证明定理 1.2。第5节证明定理1.3。本文最后在第6节展示Choquard项的一个有趣应用。

2 预备知识

我们将在空间 X 中寻求一个解，其定义如下：

$$X = \{v \in H_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega V(x)v^2 dx < \infty\}.$$

并赋予范数

$$\|v\| = \left(\int_\Omega (|\nabla v|^2 + V(x)v^2)dx\right)^{1/2}.$$

我们在 X 上定义内积如下：

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_\Omega (\nabla\phi \cdot \nabla\psi + V(x)\phi\psi)dx \text{ where } \phi, \psi \in X. \tag{2.1}$$

由众所周知的嵌入定理可知，对于每个 $r \in [1, 2^*]$， $X \hookrightarrow L^r(\Omega)$。同样，对于 $r \in [1, 2^*$，嵌入 $X \hookrightarrow L^r(\Omega)$ 是紧的。
下面给出与问题 (1.1) 对应的能量泛函：

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu}{2p}\int_\Omega (J_\alpha * (u^+(x))^p)(u^+(x))^p dx - \frac{\lambda}{1-\beta}\int_\Omega (u^+(x))^{1-\beta}dx,\ u \in X. \tag{2.2}$$

然而， I 并非 C^1 泛函，因此无法使用变分方法前提中的结果。不过，我们将通过定义如下截断能量函数来克服这一困难：

$$\mathcal{C}(s) = \begin{cases} 1, \text{ if } |s| \le l \\ \eta \text{ is decreasing, if } l \le s \le 2l \\ 0, \text{ if } |s| \ge 2l. \end{cases}$$

显然， $0 \le \mathcal{C}(s) \le$ 对每个 $s \in \mathbb{R}$ 均成立。因此，我们考虑以下修正问题

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}): \qquad & -\Delta u + V(x)u = \mu g(u) + \lambda|u|^{-\beta-1}u \text{ in } \Omega \\ & u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

这里，

$$g(u(x)) = \{(J_\alpha * |u(x)|^p)|u(x)|^{p-2}u\}\mathcal{C}\left(\frac{\|u\|^2}{2}\right),$$
$$G(u(x)) = \frac{1}{2p}\{(J_\alpha * |u(x)|^p)|u(x)|^p\}\mathcal{C}\left(\frac{\|u\|^2}{2}\right).$$

因此，相应的能量泛函定义为

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu}{2p}\int_\Omega (J_\alpha * |u(x)|^p)|u(x)|^p dx - \lambda\int_\Omega G(u(x))dx,\ u \in X. \tag{2.3}$$

对应于 $I_{\lambda,\mu}$，我们如下定义问题 (1.1) 的一个修正版：

定义 2.1. 若函数 $u \in X$ 是 $(\mathcal{P})$ 的弱解，则称其为弱解。

$$\langle u, \phi\rangle - \mu \int_\Omega (J_\alpha * |u(x)|^p)|u(x)|^{p-2}u\phi(x)dx - \frac{\mu}{2p}\mathcal{C}'\left(\frac{\|u\|^2}{2}\right)\langle u, \phi\rangle \int_\Omega (J_\alpha * |u(x)|^p)|u(x)|^p\phi(x)dx \\ -\lambda \int_\Omega |u|^{-\beta-1}u\phi(x)dx = 0 \text{ for every } \phi \in X. \tag{2.4}$$

我们注意到，如果 $\|u\| \le \sqrt{2l}$ 并满足（2.4）中的恒等式，那么 u 也是问题（1.1）的弱解。下文中，我们将使用“解”一词来代替“弱解”。
我们还将提及一个称为 Hardy-Littlewood-Sobolev（HLS）不等式的重要不等式（见 [8,引理 2.1]），该不等式在文献中通常用于估计 Choquard项。在主要结果的证明过程中，我们将需要如下定义的最佳 Sobolev 常数：

$$S := \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)|^{2^*_\alpha}|u(y)|^{2^*_\alpha}}{|x-y|^{N-\alpha}}dxdy\right)^{1/2^*_\alpha}}.$$

关于其他所有预备知识，请读者参阅 Papa-georgiou et al. [13] 撰写的综合性专著。

3 定理 1.1 的证明

变分方法中涉及的第一步，是验证泛函是否具有临界点，即考察该泛函是否呈现山路几何。下面的引理对此进行了验证。

引理 3.1. 存在 $r > 0$，使得 $\inf_{\|u\|=r} I_{\lambda,\ \mu}(u) > 0.$

证明。我们从以下估计开始。

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu}{2p}\int_\Omega (J_\alpha * |u(x)|^p)|u(x)|^p dx - \lambda\int_\Omega G(u(x))dx \tag{3.1}$$

$$\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu}{2p}\int_\Omega (J_\alpha * |u(x)|^p)|u(x)|^p dx - \lambda\int_\Omega G(u(x))dx \tag{3.2}$$

$$\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C\mu}{2p}\|u\|^{2p} - C'\lambda\|u\|^{1-\beta}, \tag{3.3}$$

其中使用了 Sobolev 嵌入定理以及 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式。因此，对于充分小的正数 λ、r 、$= \|u\|$，我们有 $I_\lambda(u) > 0$ 对于任意$\|u\| = r$。

□

我们将采用 Bartsch-Willem 提出的对偶喷泉定理（参见 [15, 定理 3.18]），证明泛函 $I_{\lambda,\ \mu}$ 有无穷多个临界点。

定理 1.1 的证明。设 \((e_n)\) 是 \(X \) 的一列正交归一基，并令 \(X_n := \{ae_n : a \in \mathbb{R}\}\)。在证明中，我们将使用以下子空间：

$$Y_n := \bigoplus_{0\le k\le j} X_k, \quad Z_k := \overline{\bigoplus_{j\le k<\infty} X_k}.$$

我们进一步定义

$$B_n := \sup_{u\in Z_n,\|u\|=1} \int_\Omega |u|^{1-\beta}dx.$$

我们注意到，当 $l>0$、$0<R<l/2<1$ 足够小时，有

$$|\mu|\frac{C}{2p}\|u\|^{2p} \le \frac{1}{4}\|u\|^2. \tag{3.4}$$

我们进一步观察到，对于每个 n，$0<B_{n+1}\le B_n$，因此当 $n\to\infty$ 时 $B_n\to B$。根据 B_n 的定义，对于每个 $n\ge 1$，$u_n\in Z_n$，$\|u_n\|=1$，使得

$$\int_\Omega |u_n|^{1-\beta}dx > \frac{B_n}{2}.$$

此外，由于 $\|u_n\|=1$，我们有 $u_n \rightharpoonup 0$，当 $n\to\infty$ 时。由嵌入定理可知，$B_n\to 0$，当 $n\to\infty$ 时。

因此，由 (3.4) 可知，对于所有 $u\in Z_n$, $\|u\|\le R$，有

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(u) &\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\frac{|\mu|}{2p}\|u\|^{2p} - B_n^{1-\beta}\frac{\lambda}{1-\beta}\|u\|^{1-\beta} \\ &\ge \frac{1}{4}\|u\|^2 - B_n^{1-\beta}\frac{\lambda}{1-\beta}\|u\|^{1-\beta}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

我们定义 $\rho_n := (4\lambda B_n^{1-\beta})^{\frac{1}{1+\beta}} \to 0$ 为 $n\to\infty$。因此，存在 n_0 使得 $\|u\|\le R$ 对任意 $n\ge n_0$成立。因此，对于任意 $n\ge n_0$、$u\in Z_n$、$\|u\|=\rho_n$，我们有 $I_{\lambda,\mu}(u)\ge 0$。
由 (3.5) 可得

$$I_{\lambda,\mu}(u) \ge -\lambda B_n^{1-\beta}\|u_n\|^{1-\beta}/(1-\beta) \ge -\lambda B_n^{1-\beta}\rho_n^{1-\beta}/(1-\beta) \tag{3.6}$$

对于任意 $n\ge n_0$、$u\in Z_n$、$\|u\|\le\rho_n$。此外，由于对于任意 $n\ge n_0$，ρ_n 均充分小，且 $\|u\|<\rho_n$，我们有 $I_{\lambda,\ \mu}(u)<0$。由于 $B_n\to 0$，$\rho_n\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时，便可推出

$$D_n := \inf_{u\in Z_n,\|u\|\le\rho_n} I_{\lambda,\mu}(u) \to 0$$

当 $n\to\infty$ 时。事实上，我们将 D_{n_0} 命名为序列 (D_n) 中的第一个元素，在该元素之后，所有的 D_n 最终均为负数。
现在，由于有限维空间 Y_n 中任意两个范数在拓扑上等价，存在充分小的 $r_n>0$，对于 $\lambda>0$，使得

$$\max_{u\in Y_n,\|u\|=r_n} I_{\lambda,\mu}(u) < 0. \tag{3.7}$$

现在我们证明泛函 $I_{\lambda,\mu}$ 满足 Palais-Smale 条件。我们首先设计一种机制，以便选取一个合适的序列，使得泛函 $I_{\lambda,\mu}$ 仍然有定义。设 $(u_n)\subset X$ 是一个最终为零的序列，则它收敛于 0。我们将舍弃该序列，因为泛函可能没有定义，而且这类序列无论如何都会收敛于零。此外，若 $(u_n)\subset X$是一个包含无限多个（或有限多个）零项的序列，则我们从 (u_n) 中选取一个仅包含非零项的子序列。因此，不失一般性，设 (u_n) 是一个满足以下条件的序列。

$u_n \neq 0$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$，并且在 $n \to \infty$时也不收敛于 X 中的零。我们将证明分为三种情况:

情形 1：假设 $p \in (2_\alpha, 2_\alpha^*)$。考虑

$$\begin{aligned} c + \sigma\|u_n\| + o(1) &= I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{2p}\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right)\|u_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{2p}\right)\int_\Omega |u_n|^{1-\beta}dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right)\|u_n\|^2 - \lambda B_0^{1-\beta}\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{2p}\right)\|u_n\|^{1-\beta}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

这意味着 (u_n) 有界，因此存在一个子列，仍记为 (u_n)，使得$u_n \rightharpoonup u$ 属于 X。由弱收敛性 $u_n \rightharpoonup u$ 以及嵌入定理可得 $\langle I'_{\lambda,\ \mu}u, u\rangle = 0$。此外，我们考虑以下

$$\begin{aligned} o(1) =& \langle I'_{\lambda,\mu}u_n, u_n - u\rangle \\ =& \|u_n\|^2 - \|u\|^2 - \mu\int_\Omega (J_\alpha * |u_n|^p)|u_n|^p dx + \mu\int_\Omega (J_\alpha * |u|^p)|u|^p dx \\ & - \lambda\int_\Omega |u_n|^{1-\beta}dx + \lambda\int_\Omega |u_n|^{-\beta-1}u_n u dx = \|u_n\|^2 - \|u\|^2. \end{aligned}$$

上述推导中再次结合使用了嵌入定理和埃戈罗夫定理。因此，$u_n \to u$ 属于 X，从而泛函 $I_{\lambda,\ \mu}$满足 (PS) 条件。

情形 2：假设 $p = 2_\alpha^*$。我们将证明 $I_{\lambda,\ \mu}$ 满足能量水平为 c 的 Palais–Smale $(PS)_c$ 条件

$$c < c^* := \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+2}{N+\alpha}\right)S^{\frac{N-2}{\alpha+2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{N+\alpha}{\alpha+2}\right)^{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\left(\lambda C\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)\right)^{\frac{2}{1+\beta}} \text{ for any } \lambda > 0.$$

我们再次考虑 $(u_n) \subset X$，使得 $I_{\lambda,\ \mu}(u_n) \to c < c^*$, $I'_{\lambda,\ \mu}(u_n) \to 0$。假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n - u\|^2 = l^2 >$趋于 0。那么

$$\begin{aligned} c + \sigma\|u_n\| + o(1) &= I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)\|u_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)\int_\Omega (u_n^+)^{1-\beta}dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)\|u_n\|^2 - \lambda B_0^{1-\beta}\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)\|u_n\|^{1-\beta}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

由 (3.9) 可知，序列 (u_n) 在 X 中有界。因此，根据 X 的自反性，存在一个子序列，仍记作 (u_n)，使得 $u_n \rightharpoonup u$ as $n \to \infty$。容易证明，u 是修正问题 $(\mathcal{P})$ 的弱解，因此也是问题 (1.1) 的弱解，即 $\langle I'_\lambda$

此外，利用 $\langle {}_{,\mu}(u_n)\ u\rangle = 0$。$(u_n)$ 的弱收敛性、Brezis-Lieb 引理和嵌入定理

以及埃戈罗夫定理，我们可以得出如下观察。

$$\begin{aligned} o(1) =&\langle I_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle \\ =&\|u_n\|^2 - \mu\int_\Omega (J_\alpha * |u_n|^{2_\alpha^*})|u_n|^{2_\alpha^*}dx - \lambda\int_\Omega |u_n|^{1-\beta}dx \\ =&\|u_n-u\|^2 + \|u\|^2 - \mu\int_\Omega (J_\alpha * |u_n-u|^{2_\alpha^*})|u_n-u|^{2_\alpha^*}dx + \mu\int_\Omega (J_\alpha * |u|^{2_\alpha^*})|u|^{2_\alpha^*}dx \\ &- \lambda\int_\Omega |u|^{1-\beta}dx \\ =&\langle I_{\lambda,\mu}(u), u\rangle + \|u_n-u\|^2 - \mu\int_\Omega (J_\alpha * |u_n-u|^{2_\alpha^*})|u_n-u|^{2_\alpha^*}dx \\ =&\|u_n-u\|^2 - \mu\int_\Omega (J_\alpha * |u_n-u|^{2_\alpha^*})|u_n-u|^{2_\alpha^*}dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Let

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|^2 = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (J_\alpha * |u_n-u|^{2_\alpha^*})|u_n-u|^{2_\alpha^*}dx = l.$$

根据第2节中给出的最佳 Sobolev 常数的定义，我们有

$$S \le \frac{l}{l^{1/2_\alpha^*}}.$$

因此，对式 (3.9) 应用杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} c+o(1) \ge& \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)(l^2+\|u_n\|^2) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)\|u_n\|^2 \\ &- \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)^{-\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left(\lambda C\left(\frac{1}{1-\beta}-\frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)\right)^{\frac{2}{1+\beta}} \\ \ge& \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)S^{2\cdot\frac{N+\alpha}{\alpha+2}} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)^{-\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left(\lambda C\left(\frac{1}{1-\beta}-\frac{1}{2\cdot 2_\alpha^*}\right)\right)^{\frac{2}{1+\beta}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

这与定理假设中所考虑的能量水平范围相矛盾。因此，

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|^2 = 0.$$

情形3：当 $p = 2_\alpha$ 时，泛函 $I_{\lambda,\ \mu}$ 满足$(PS)_c$ 条件的证明与情形2类似。事实上，对

$$c < c^{**} := \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{N+\alpha}\right)S^{2\frac{N+\alpha}{\alpha}} - \frac{1}{2}\left(\frac{N+\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\left(\lambda C\left(\frac{1}{1-\beta}-\frac{1}{2p}\right)\right)^{\frac{2}{1+\beta}} \text{ for any } \lambda > 0.$$

因此，对于 $p = 2_\alpha, 2_\alpha^*$的临界情形，任意$\lambda > 0$时，(PS)条件均对 $c < \min\{c^*, c^{**}\}$ 成立。

由于对偶喷泉定理的所有假设均已满足，我们得出结论：存在一个收敛于 0 的负临界值序列。因此，$I_{\lambda,\ \mu}$ 具有无穷多个解，从而 (1.1) 也具有无穷多个解。

□

4 定理 1.2 的证明

我们将证明问题 (1.1) 的所有非负解都是有界的。证明思路如下（沿用 [9] 中论证的思路）。

定理 1.2 的证明。设 $u \in X$ 是满足 $|\{x \in \Omega : u(x) = 0\}| = 0$ 的非负解。我们将证明 $p = 2_{\alpha^*}$ 情形下的有界性。$p \in (2_\alpha, 2^*_\alpha)$ 和 $p = 2_\alpha$ 的情形可用相同的方法处理。我们定义 $w(x) := \frac{u(x)}{d}$，对于适当的 $d > 0$，它满足

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx + \int_\Omega V(x) u \phi dx \\ &\quad \leq |\mu| \int_\Omega (J_\alpha * (v(x))^{2^*_\alpha})(v(y))^{2^*_\alpha - 2} v(y)\phi(x) dx + \lambda \int_\Omega (v)^{-\beta} \phi dx\end{aligned} \tag{4.1}$$

对于每个非负的 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$。我们进一步定义如下：

$$D_n := 1 - 3^{-n},\ w_n := w - D_n,\ v_n := w_n^+,\ V_n := \|v_n\|_{2^*}. \tag{4.2}$$

因此 $0 \leq |w| + D_n \leq |w| + 1$。当然，由于 Ω 有界，$|w| + 1 \in L^2(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$。此外，$\lim_{n\to\infty} v_n = (w-1)^+$。由控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \left(\int_\Omega [(w-1)^+]^{2^* dx} \right)^{1/2^*}. \tag{4.3}$$

根据上述定义，我们作出如下观察：

$$D_n < D_{n+1},\ \text{which implies } v_{n+1} \leq v_n \text{ a.e. in } \Omega. \tag{4.4}$$

此外，我们定义了

$$B_n := \frac{D_{n+1}}{D_{n+1} - D_n} = (1/2)(3^{n+1} - 1) < (3^{n+1} - 1) \ \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

我们作出与 [9] 中相似的观察，即

$$w < B_n v_n \text{ on } \{v_{n+1} > 0\}. \tag{4.5}$$

结合使用 (4.1)、(4.5) 以及 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_{n+1}|^2 dx &\leq \int_\Omega \nabla v_{n+1} \cdot \nabla v_{n+1}^+ \leq \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v_{n+1}^+ dx \\ &\leq B_n^{2^*_\alpha - 1} |\mu| \int_{\{v_{n+1}>0\}} \int_\Omega \frac{(v(y))^{2^*_\alpha} |v_n(x)|^{2^*_\alpha - 1} v_{n+1}(x)}{|x-y|^{N-\alpha}} dy dx + \lambda B_n \int_{\{v_{n+1}>0\}} |v_n|^2 dx \\ &\leq B_n^{2^*_\alpha - 1} |\mu| \int_{\{v_{n+1}>0\}} \int_\Omega \frac{(v(y))^{2^*_\alpha} |v_n(x)|^{2^*_\alpha}}{|x-y|^{N-\alpha}} dy dx + \lambda B_n \|v_n\|_{2^*}^{1-\beta} |\{v_{n+1} > 0\}|^{\frac{N+2+\beta(N-2)}{2N}}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

我们将右侧的第一个积分拆分为两个积分之和，并据此进行估计：

$$\begin{aligned}&\int_{\{v_{n+1}>0\}}\int_{\Omega}\frac{(v(y))^{2_\alpha^*}|v_n(x)|^{2_\alpha^*}}{|x-y|^{N-\alpha}}dydx\\&\quad\le\left(\int_{\{v_{n+1}>0\}}\int_{\{v(y)\le D_{n+1}\}}+\int_{\{v_{n+1}>0\}}\int_{\{v(y)>D_{n+1}\}}\right)\frac{(v(y))^{2_\alpha^*}|v_n(x)|^{2_\alpha^*}}{|x-y|^{N-\alpha}}dydx:=\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2.\end{aligned}\tag{4.7}$$

HLS 不等式和 H¨older 不等式给出

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1\le&B_n^{2_\alpha^*}C(N,\alpha)\|v_n\|_{2^*}^{2\cdot2_\alpha^*}\\\mathcal{I}_2\le&CB_{n+1}^{2_\alpha^*}|\{v_{n+1}>0\}|^{(N-\alpha)/2N}\|v_n\|_{2^*}^{2_\alpha^*}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

嵌入定理结合 (4.6) 和 (4.8) 得到如下结果：

$$\begin{aligned}S\|v_{n+1}\|_{2^*}^2\le&B_n^{2_\alpha^*-1}\Big(\mu B_n^{2_\alpha^*}C(N,\alpha)\|v_n\|_{2^*}^{2\cdot2_\alpha^*}+\mu CD_{n+1}^{2_\alpha^*}|\{v_{n+1}>0\}|^{(N-\alpha)/2N}\|v_n\|_{2^*}^{2_\alpha^*}\\&+\lambda B_n3^{n+1}\|v_n\|_{2^*}^{1-\beta}|\{v_{n+1}>0\}|^{\frac{N+2+\beta(N-2)}{2N}}\Big),\end{aligned}\tag{4.9}$$

其中

$$S=\inf_{u\in X\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2dx}{(\int_\Omega|u|^{2^*}dx)^{2/2^*}}.$$

再次，按照 [9]，中的证明，我们得到

$$\{v_{n+1}>0\}\subset\{v_n>1/3^{n+2}\}.\tag{4.10}$$

因此，由 (4.10) 可得

$$V_n^{2^*}=\|v_n\|_{2^*}\ge\int_{\{v_n>3^{-n-2}\}}v_n^{2^*}dx\ge3^{-n-2}|\{v_{n+1}>0\}|.\tag{4.11}$$

and

$$\begin{aligned}S\|v_{n+1}\|_{2^*}^2\le&B_n^{2_\alpha^*-1}\Big(\mu B_n^{2_\alpha^*}C(N,\alpha)\|v_n\|_{2^*}^{2\cdot2_\alpha^*}+\mu CD_{n+1}^{2_\alpha^*}3^{(n+2)(N-\alpha)/2N}\|v_n\|_{2^*}^{2^*}\\&+\lambda B_n3^{n+2}\|v_n\|_{2^*}^{2^*}2^{(n+1)\frac{N+2+\beta(N-2)}{2N}}\Big)\le3^{(2_\alpha^*-1)(n+2)}\mathcal{C}(\|v_n\|_{2^*}^{2\cdot2_\alpha^*}+\|v_n\|_{2^*}^{2^*}),\end{aligned}\tag{4.12}$$

其中

$$\mathcal{C}:=\max\{3^{2_\alpha^*(n+2)}C(N,\alpha),3^{(n+2)(N-\alpha)/2N}C+3^{(n+2)(3N+2+\beta(N-2))/2N}\}.$$

因此，由 (4.2) 中 V_n 的定义可得

$$V_{n+1}=\mathcal{D}^{n+2}(V_n^{2_\alpha^*}+V_n^{2^*/2}),\tag{4.13}$$

其中 $\mathcal{D}=(1+\sqrt{\mathcal{C}^{1/n+2}})>1$。我们选择足够小的 $\epsilon>0$，使得

$$\epsilon^{2/N-2}<\frac{1}{(3^{2_\alpha^*}\mathcal{D})^{N-2/2}}.\tag{4.14}$$

固定 $\gamma \in \left(\epsilon^{2/N-2}, \frac{1}{3^{2^*_\alpha}\mathcal{D}^{N-2/2}}\right)$ 后，我们得出 $\gamma \in (0,1)$，因为 $N/N-2, \mathcal{D} > 1$。此外

$$\epsilon^{2/N-2} \leq \gamma, 3^{2^*_\alpha}\mathcal{D}\gamma^{N/N-2} \leq 1. \tag{4.15}$$

可以通过归纳法证明,

$$V_{n+1} \leq 2\epsilon\gamma^{n+1}. \tag{4.16}$$

由 $\gamma \in (0,1)$ 这一事实以及 (4.16)，我们看到 $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$。因此，由 (4.3) 可知，$(w-1)^+ = 0$ 在 Ω 中几乎处处成立。这意味着 $0 \leq w \leq 1$ 在 Ω 中几乎处处成立。故 $0 \leq u \leq d$ 在 Ω 中几乎处处成立。因此 $\|u\|_\infty \leq c$。 □

5 定理 1.3 的证明

最后，我们证明问题 (1.1) 的正解的正则性结果。

˜定理1.3的证明。令 Ω ⋐ Ω。因此，对于任意 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$，由 u 的有界性，我们有如下结果:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\phi + V(x)u\phi)dx =& \mu\int_{\tilde{\Omega}} (J_\alpha * (u(x))^{2^*_\alpha})(u(x))^{2^*_\alpha - 2}u(x)\phi(x)dx + \lambda\int_{\tilde{\Omega}} u^{-\beta}\phi dx \\ \leq& |\mu|\int_{\tilde{\Omega}} (J_\alpha * (u(x))^{2^*_\alpha})(u(x))^{2^*_\alpha - 2}u(x)\phi(x)dx + \lambda\int_{\tilde{\Omega}} u^{-\beta}\phi dx \\ \leq& C\int_{\tilde{\Omega}} \phi dx.\end{aligned}$$

这里我们使用了如下事实：对于任意紧集 $K \subset \Omega$，$u \geq C_K > 0$ a.e.。否则，含奇异项的积分˜将不再存在。因此，$(-\Delta)u + V(x)u$ 在 Ω 中是弱有界的。
根据 Iannizzotto et al. [4, 定理 4.4] ，并对 [4,推论 5.5] 中的不等式应用覆盖论证，我们得到一个 $\theta \in (0,1)$，使得对于任意 ˜Ω ⋐ Ω，都有 $u \in C^\theta$(˜Ω)。因此 $u \in C^\theta_{\text{loc}}$(˜Ω)。 □

我们以以下评注结束本节。

评注 5.1. 我们注意到，若 $u > 0$ 是方程 (1.1) 的一个解，则 $-u < 0$ 也是一个有界且 Hölder 连续的解。

6 Choquard项的应用

在其开创性工作中， Lieb [6] 指出，Choquard 曾使用这一项来近似组分等离子体的 Hartree-Fock 理论。对于

$$N = 3, \alpha = 2, p = 2, \lambda = 0, V(x) \equiv 0,$$

Peker [11] 曾利用问题 (1.1) 研究静止极化子的量子理论。得益于 Gross [3] ， Choquard项也应用于多粒子系统；在量子力学中也有应用Penrose [12]。

对于问题 (1.1) 的每个解，我们定义 $\phi(t,x) = e^{it}u(x)$，称其为波函数，其中$i = \sqrt{-1}$。这里 ϕ 是聚焦型含时 Hartree 方程的孤立波:

$$-i\phi_t - \Delta\phi + W(x)\phi - (J_\alpha * |\phi|^p)|\phi|^{p-2}\phi - \lambda|u|^{q-2}u = 0 \text{ in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,$$

其中 $W(x) = V(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}^N$。因此，问题 (1.1) 可解释为定态非线性 Hartree 方程。

致谢

第一作者感谢印度科学与工程研究委员会（SERB）通过 MATRICS 计划提供的资助，[资助编号为 MTR/2018/000525]。第二作者感谢斯洛文尼亚研究署提供的资助，[P1-0292、J1-4031、J1-4001、N1-0278、N1-0114、N1-0083]。

参考文献

[1] Carvalho, M.L.M.，Da Silva, EdCarlos D., Goulart, C.，凹凸型非线性项下通过非线性 Rayleigh 商研究 Choquard 方程，《纯粹与应用数学通讯》，20(10)，3445–3479，2021。[2] Giacomoni, J, Schindler, I, Tak´aˇc, P.，Sobolev 局部极小化子与 Hölder 局部极小化子的比较，以及奇异拟线性方程多个解的存在性，《比萨高等师范学校科学类年刊》(第5辑)，6(1)，117–158，2007。[3] Gross, E.P.，《多粒子系统物理学》，第1卷，Gordon Breach，纽约，1996。[4] Iannizzotto, A., Mosconi, S., Squassina, M.，分数阶 p-Laplacian 的全局 Hölder 正则性，《伊比利亚数学杂志》，32(4)，1353–1392，2016。[5] Lazer, A.C., McKenna, P.J.，关于一个奇异非线性椭圆边值问题，《美国数学会会刊》，111(3)，721–730，1991。[6] Lieb, E.H.，Choquard 非线性方程极小化解的存在性与唯一性，《应用数学研究》，57(2)，93–105，1977。[7] Lions, P.L.，Choquard 方程及相关问题，《非线性分析》，4(6)，1063–1072，1980。[8] Moroz, V., Van Schaftingen, J.，Choquard 方程指南，《不动点理论与应用杂志》，19(1)，773–813，2017。[9] Mukherjee, T., Sreenadh, K.，具有临界非线性项的分数阶 Choquard 方程，《非线性微分方程与应用》，24，63，2017。doi.org/10.1007/s00030-017-0487-1[10] Panda, A., Choudhuri, D., Saoudi, K，涉及奇异非线性和 Radon 测度的临界分数阶 Choquard 问题，《伪微分算子应用杂志》，12(1)，文章编号：22，19页，2021。[11] Peker, S.，《晶体电子理论研究》，Akademie Verlag，柏林，1954。[12] Penrose, R.，论引力在量子态约化中的作用，《广义相对论与引力》，28，581–600，1996。[13] Papageorgiou, N.S., Rˇadulescu, V.D., Repovˇs, D.D.：《非线性分析——理论与方法》。Springer 数学专著丛书。Springer，查姆，2019。[14] Saoudi, K., Ghosh, S., Choudhuri, D，涉及奇异性的非局部椭圆偏微分方程解的多重性与 Hölder 正则性，《数学物理杂志》，60(10)，文章编号：101509，28页，2019。[15] Willem, M.，《极大极小定理》，Birkh¨auser，1996。