NITEP 172，OCU-PHYS 581

N =4 超 Chern-Simons 理论中的 q-Painlevé VI 的40个双线性关系

Sanefumi Moriyama* 和 Tomoki Nosaka†

†中国科学院大学卡弗里理论科学研究所，中国北京 *100190*

*大阪公立大学理学研究科物理系，日本大阪 *558-8585*

*大阪公立大学南部阳一郎理论与实验物理研究所（*NITEP*），日本大阪 *558-8585*

*大阪公立大学大阪中央高级数学研究所（*OCAMI*），日本大阪 *558-8585*

arXiv:2305.03978v2 [hep-th] 1 Sep 2023

摘要

我们研究与 q 变形的 Painlev´e VI 方程相对应的圆形箭图超对称 Chern-Simons 理论的配分函数。对于最低秩消失、圆形箭图因此退化为线性箭图时的配分函数，我们找到了 40个双线性关系。若将这些配分函数视为逸度展开下巨正则配分函数的最低阶项，这些双线性关系便可自然推广到更高秩。此外，我们还表明，这些双线性关系是确定某些未知配分函数的有力工具。我们还详细阐述了其与此前一些关于 q-Painlev´e 方程的研究之间的联系。

*moriyama@omu.ac.jp

†nosaka@yukawa.kyoto-u.ac.jp

目录

1 引言 **2**

2 超陈-西蒙斯理论 **7**

2.1 膜构型与 Weyl群.7 2.2 配分函数的精确结果.12

3 逸度最低阶的双线性关系 14

4 高阶逸度的双线性关系 **20**

5 在Weyl群下的协变性 **22**

6 基本域以外的应用 **24**

7 与其他研究的比较 26

7.1 与 [63] 的比较.26 7.2 与 [60] 的比较.26 7.3 与 [69, 74] 的比较.27

8 结论 **29**

A 配分函数的计算 34^ ^ ^ ^ ^ ^A.1 迹$(D_1D_2)^n$ 和$\langle\langle t_{L,r}|d_1(D_2D_1)^n d_2|-t_{L,s}\rangle\rangle$.35 A.2 方法 I.37^ ^A.2.1 迹$(D_1D_2)^n$.37^ ^ ^ ^A.2.2 $\langle\langle t_{L,r}|d_1(D_2D_1)^n d_2|-t_{L,s}\rangle\rangle$.38 A.2.3 有效域.39 A.3 方法 II.41 A.3.1 $(k, L_1, L_2, L) = (1, 0, 0, 0)$.42 A.3.2 $(k, L_1, L_2, L) = (1, 1, 0, 0)$.43 A.3.3 $(k, L_1, L_2, L) = (1, 1, 1, 1)$.43

B 在 处的配分函数 $N = 0$ **45B.**
1 $k = 1$ **.45 B.2** $k = 2$ **.46C 更高秩的配分函数（适用于**
$k = 1$ **48D 已验证的双线性关系数值列表 50**

1 引言

具有扩展超对称性的规范理论在理解弦论的数学结构方面发挥着核心作用。由于拥有庞大的对称性，这些理论通常是可积的 [1]。这些可积结构使我们能够求解这些理论，而有时可解性又能帮助我们更深入地理解其可积性。本文聚焦于一种三维 $\mathcal{N} = 4$ 超对称 Chern-Simons 理论的可积性，它是 Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena（ABJM）理论 [2] 的推广。我们发现了一大组非平凡关系，可用于约束与 Painlev´e 方程 [3]相关的配分函数。在引言中，我们将在介绍该理论之后概述主要结果，并简述我们如何得出这些结果。

ABJM 理论 [2] 是具有规范群 $\mathrm{U}(N)_k \times \mathrm{U}(N)_{-k}$ 的三维 $\mathcal{N} = 6$超 Chern-Simons 理论（下标 $(k, -k)$ 表示 Chern-Simons 能级），包含两对双基本物质。有人提出，该理论描述了背景 $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ 上 N 个 M2 膜的世界体理论。这一描述源自 IIB 膜构型：D3 膜沿圆排列，一个 NS5 膜和一个 $(1, k)$5 膜分别置于不同位置，彼此垂直，并相对倾斜一个角度，以保持超对称性。

我们在此关注的理论是一种三维 $\mathcal{N} = 4$ 圆形夸克图类型的超 Chern-Simons 理论，其规范群为 $\mathrm{U}(N)_0 \times \mathrm{U}(N)_k \times \mathrm{U}(N)_0 \times \mathrm{U}(N)_{-k}$，相邻的规范群因子之间由双基本物质连接 [4]。该理论描述了背景 $[\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2]/\mathbb{Z}_k$ [5] 上 N M2 膜的世界体理论。膜构型由 D3 膜、两个 NS5 膜和两个 $(1, k)$5-膜组成。

从引力侧来看， [6], 人们预期 N M2 膜的自由度在大 N 极限下表现为 $N^{\frac{3}{2}}$。将配分函数的无限维路径积分约化为有限维矩阵模型 [7] ，并确认大 N

极限下的行为之后，根据 ABJM 理论的自由能， [8, 9], 人们发现 ABJM 配分函数 exp($N^{\frac{3}{2}}$) 的微扰修正之和可以写成艾里函数 [10]。随后，艾里函数的积分表示自然引出了巨正则系综, 其中巨配分函数表示为$\widehat{}$带有谱算子 H 和逸度 κ [11]的自由费米子的 Fredholm 行列式 Det($1+\kappa\widehat{H}^{-1}$)。费米气体形式的主要应用之一，是得到巨配分函数的完整非微扰表达式, 其中包括两类瞬子效应：世界面瞬子和膜瞬子 [12–15], ，其依据是从 Fredholm 行列式 [16,17]得到的精确值。结果由局部$\widehat{}$Calabi-Yau 三维流形上的精细化拓扑弦自由能 [15] 概括，其镜像曲线由 H的经典极限给出。

$\widehat{}$在费米气体形式中，ABJM 理论的谱算子 H 是通过分别将 NS5 膜映射为 $\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{X}^{\frac{1}{2}} + \widehat{X}^{-\frac{1}{2}}$、将 (1, k)5 膜映射为 $\widehat{\mathcal{P}} = \widehat{P}^{\frac{1}{2}} + \widehat{P}^{-\frac{1}{2}}$而构造的，其中正则算符 $\widehat{X} = e^{\hat{x}}$ 和 $\widehat{P} = e^{\hat{p}}$满足正则对易关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ ，普朗克常数 $\hbar$ 则通过 $\hbar = 2\pi k$与陈-西蒙斯层级相对应。费米气体形式还被推广[†1] 到各种超陈-西蒙斯理论 [11, 19], ，其中谱算子均按照相同的规则给出。

从几何上看，ABJM 理论的谱算子在经典层面上是代数曲线$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ，具有 A_1 Weyl群的对称性；其量子对应物 [20, 21] 进一步支配着物理量。对于我们的理论所对应的膜构型, 即包含两个 NS5 膜$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$和两个 (1， k)5-膜 [22, 23], ，因而包含两个 $\mathcal{X}$和两个 $\mathcal{P}$的构型，谱算子 H 由$\widehat{}$ $\widehat{}$若干项 $X^m P^n$ 组成，其中 m， $n = 1$, 0， -1。在经典层面上，这就是著名的代数曲线，具有 D_5 Weyl群的对称性，因此巨配分函数如预期那样由 D_5 特征 [24, 25] 概括。

圆形夸克图类型的超陈-西蒙斯理论可以推广到具有秩差 [26, 27], 的理论；这类理论可解释为 min(N_i) 个 M2 膜的世界体理论，其中还包含各种分数 M2 膜，且这些膜处于与秩均匀时相同的轨形背景上。在研究含分数膜的配分函数时，人们提出了两种分别与开弦 [28,29] 和闭弦 [30–34] 相关的形式，用于处理巨配分函数。对于开弦形式，我们通过乘上类似于环算符的量来修正 Fredholm 行列式；对于闭弦形式，我们则直接修改谱算子本身。实际上，要得到闭弦形式中的谱算子，利用 Hanany-Witten 跃迁 [37] 从不含分数膜 [35, 36] 的情形外推，会更为简便。正如 [35], 中所指出的，在外推过程中，我们需要在膜构型中确定一个禁止发生 Hanany-Witten 跃迁的区间

[†1]费米气体形式也推广到了其他超对称规范理论，例如 [18]。

并避免不加审慎地对谱算子使用相似变换。

将矩阵模型重新表述为谱算子后，人们提出了谱理论与拓扑弦之间的对应关系 [38]，将其视为 [15]的推广。只要（归一化的）[†2] 巨配分函数由谱$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$算子的 Fredholm 行列式给出，且该算子是 X 和 P的劳伦多项式，艾里函数或 $N^{\frac{3}{2}}$ 的微扰行为就总能得到保证。因此，自然可以认为，M2 膜由谱算子而非矩阵模型描述。从这一观点出发，M2 膜的配分函数与具有例外 Weyl群对称性的量子曲线之间的关系得到了阐明 [39, 40]。正如我们将在下文看到的，M2 膜配分函数的这些性质表明，它与 q-Painlev´e 方程存在联系。

Painlev´e 方程出现在许多有趣的物理系统中，例如 [41]。除了应用之外，Painlev´e 方程本身也有一段引人入胜的历史。它们起源于对满足无可动分支点条件的微分方程的分类。通过将时间导数提升为 q-差分 [42–44]，还可以构造 q-变形的 Painlev´e 方程，从而推广 Painlev´e 方程的概念。从现代观点来看，Painlev´e 方程还展现出更多有趣的方面。具体而言，鉴于它们与可积性的联系，人们也为 Painlev´e 方程引入了 tau函数，并将 Painlev´e 方程改写为关于 tau函数的双线性方程。此外，人们发现，Painlev´e 方程可以通过代数曲线 $[3, 45]$, 系统地分类，其中也自然地纳入了 q-变形。

按代数曲线对 Painlev´e 方程进行分类，暗示了这些方程会出现在由相同代数曲线刻画的物理系统中。事实上，一个尤为有趣的方面是 q-Painlev´e 方程与五维 $\mathcal{N} = 1$ SU(2) 超杨-米尔斯理论 [46–48], 之间的联系：其中 tau函数由规范理论的 Nekrasov 配分函数（Nekrasov-Okounkov 配分函数）的离散傅里叶变换给出。这些五维理论由具有例外 Weyl群 [49], 的属一曲线刻画，其中每条曲线都与相应 q-Painlev´e 方程关联的代数曲线完全一致。对于 $N_{\mathrm{f}} \leq 4$，这正是 Painlev´e 方程与四维 $\mathcal{N} = 2$SU(2) 超杨-米尔斯理论 [50, 51]之间联系的 q维提升。[†3]

[†2]注意，带有秩差的巨配分函数需要通过最低秩消失的配分函数进行归一化，而后者不一定具有群论结构。这一点对于后续研究巨配分函数的双线性关系至关重要。

[†3]对于具有一般规范群 G 的四（或五）维纯超杨-米尔斯理论，已知它们与可积系统也存在类似的联系；相应的可积系统是仿射 G 型 [53–56]的非自治（q-）Toda 链。

如上所述，M2 膜的配分函数由量子代数曲线刻画，因此自然可以预期，这些配分函数也与（q-）Painlev´e 方程存在联系。事实上，研究发现，ABJM 理论的巨配分函数（其对应曲线为 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$）满足第三个 q-Painlev´e 方程 tau函数的 Hirota 双线性方程 $q\mathrm{P}_{\mathrm{III}_3}$；该方程在 Sakai 分类 [57–59]中也与 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 相关。本文转而研究与具有 D_5 Weyl群对称性的曲线相关联的超 Chern-Simons 理论。这一次，对应的 Painlev´e 方程是第六个 q-Painlev´e 方程 $q\mathrm{P}_{\mathrm{VI}}$。与较简单的曲线 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$相比——关于其巨配分函数的双线性方程已有许多有趣研究由此展开——我们的曲线使我们能够探测双线性方程完整的群论结构。例如，在 [59], 中，配分函数取离散秩差对应的数值；而我们的配分函数也可视为连续 Fayet-Iliopoulos（FI）参数的函数，因此双线性关系可以接受更严格的检验。还要注意，在考虑 D_5 Weyl群之后，我们的 $q\mathrm{P}_{\mathrm{VI}}$ 双线性关系中会出现无法由 Weyl群确定的非平凡系数。

本文讨论上述超 Chern-Simons 理论中的双线性关系。如表 2 和表 3 所列（逸度 κ 的更高阶情形见第 4 节），我们发现了 40 个双线性关系。我们可以用符号形式概括巨配分函数的双线性关系如下：

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)} S\Xi^{(\mathrm{bilinear})}_{a_\pm b_\pm c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing}(\kappa) + e^{-\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)} S\Xi^{(\mathrm{bilinear})}_{a_\pm b_\mp c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing}(-\kappa) \\ + S\Xi^{(\mathrm{bilinear})}_{a_\varnothing b_\varnothing c_{\pm\sigma_1} d_{\pm\sigma_2} e_{\pm\sigma_3}}(\mp i\kappa) = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，$\Xi^{(\mathrm{bilinear})}$ 是巨配分函数的双线性形式，其参数的各种移位出现在下标中；S 是与 κ 无关的前置因子。这些双线性关系的详细信息将在表格附近进一步说明。

40个双线性关系的发现是现象学的。我们的分析很大程度上依赖于在 [60] 中计算巨配分函数，并结合与开弦和闭弦相关的两种形式体系。这个优美的表达式使我们能够计算任意 k取值下，逸度 κ 的最低阶巨配分函数，此时圆形箭图退化为线性箭图。借助计算机，我们可以针对各种秩差计算最低阶的所有项。首先，值得注意的是，该表达式仅在 [61,62], 提出的基本域内非零；在该基本域中，三维对偶级联被证明会唯一终止。特别是对于 $k=1$, 2，最低阶巨配分函数的精确表达式足够简单，使我们能够以启发式方式发现双线性关系 (1.1)。具体而言，我们按如下方式进行。我们假设双线性关系具有这样的结构：将双线性配分函数表示为】【。

通过已知的 $[47, 63]$，用剩余变量中的移位（1.1）表示两个变量中的两个正交平移。在此假设下，我们可以为前两项计算带有各种因子 S 的加法项；只有当我们有正确的 S因子时，结果才能化简。随后，我们可以除以第三项，求出双线性关系的表达式。我们还将讨论推广到更高秩，此时非零配分函数的定义域从原来的基本域扩展出去，并发现逸度 κ 需要像（1.1）中那样用简单的系数进行修正。

注意，参照 $[47]$ 中的 8 个双线性关系， $[60]$ 中也进行了类似的分析。不过，我们指出仍有一些改进空间。

- Fredholm 行列式被确定为 tau函数，并在 $[60]$中带有一个非平凡的整体因子。在这里，我们可以将该因子替换为最低秩消失的配分函数，这一因子具有合理的物理起源。

- 此外，尽管为更高秩引入了一个非平凡的相位因子，作为 κ 中 $[60]$, 的系数，但由于巨配分函数预期由谱算子的 Fredholm 行列式给出，而该谱算子在除以最低秩消失时的配分函数进行归一化后应在 Weyl群下保持不变，因此该相位也应在 Weyl群下保持不变。这有助于我们将 κ 的系数化简为（1.1）中的形式。

- 尽管双线性关系的结构可直接从群论观点 $[63]$, 确定，但这一约束并不适用于系数。因此，有必要进一步确定其余32个双线性关系中的系数。

- 此外，我们发现，从当前的三维超 Chern-Simons 理论中得到的系数，似乎比 $[47]$ 中五维超Yang-Mills理论的系数更为简单。我们希望，这里发现的结构也有助于理解它们与五维理论之间的关系。

本文内容安排如下。在下一节回顾三维$\mathcal{N} = 4$ 超 Chern-Simons 理论之后，我们将转而研究双线性关系。首先，在第 3 节中确定最低秩为零时配分函数所满足的双线性关系，并在第 4 节中进一步研究完整的巨配分函数。随后，我们在第 5 节中讨论 Weyl 群下的协变性，并在第 6 节中展示一些应用。在第 7 节讨论与以往一些工作的比较之后，最后在第 8 节列出未来方向并作总结。附录A专门介绍配分函数计算的技术细节，而附录B、C和D则给出了关于配分函数的各种结果。

2 超 Chern-Simons 理论

本节回顾本文所研究的三维 $\mathcal{N}=4$ 超 Chern-Simons 理论。我们首先介绍该理论及其膜构型，并讨论其 D_5 Weyl 群对称性。随后，我们将进行配分函数的计算。

2.1 膜构型与 Weyl 群

	0	1	2	6	3	7	4	8	5	9
D3 膜	−	−	−	−						
NS5 膜	−	−	−		−		−		−	
$(1,k)$5-膜	−	−	−		$[3,7]_k$		$[4,8]_k$		$[5,9]_k$	

表 1：各类膜延伸的方向。

我们回顾一下本文所考虑的膜构型。我们将 IIB 弦理论紧化在一个圆上，并在圆上的不同位置放置两个 NS5 膜和两个 $(1,\ k)$5 膜，这两种 5 膜之间相对倾斜一个 $\arctan k$ 角。此外，我们还添加 D3 膜，使其沿紧化方向连接不同的 5 膜对。各种膜延伸方向见表 1。讨论膜构型时，我们按照 [35][†4] 中的方式切开圆，用括号端点标示切口，并将 NS5 膜和 $(1,\ k)$5 膜分别简写为带有标签的 $\circ$ 和 $\bullet$。也就是说，我们所考虑的膜构型如下：

$$\langle N_1 \overset{4}{\underset{0}{\circ}} N_2 \overset{2}{\underset{i\zeta_1}{\bullet}} N_3 \overset{1}{\underset{0}{\bullet}} N_4 \overset{3}{\underset{i\zeta_2}{\circ}} \rangle = \langle N \overset{4}{\underset{0}{\circ}} N + L_1 \overset{2}{\underset{i\zeta_1}{\bullet}} N + L \overset{1}{\underset{0}{\bullet}} N + L_2 \overset{3}{\underset{i\zeta_2}{\circ}} \rangle. \tag{2.1}$$

这里，我们用[†5] N、L_1、L_2 和 L 表示各区间中的 D3 膜数量，且这些数量均为非负数。也就是说，假设第一个秩 $N_1=N$ 最小，而总秩 N 与其余相对秩（L_1，L_2，L）分开处理。此外，我们在 5-膜上方用阿拉伯数字标记 $\bullet$ 和 $\circ$，并在其下方标出正交位置 $i\zeta_1$，$i\zeta_2$。膜构型示意图见图 1。众所周知，通过对偶变换到 IIA 弦理论并提升到 M 理论，该系统描述了背景 $[\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2\times\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2]/\mathbb{Z}_k$ $[2,5]$ 上带有分数 M2 膜的 M2 膜。不过，这里我们仍采用 IIB 弦理论的图景。

[†4]如 [35]中所述，为避免讨论 Hanany-Witten 跃迁时电荷守恒关系产生歧义，必须将圆切割成一段。

[†5]为确定参数，我们通常将范围限制在 $L\le L_1$ 和 $L\le L_2$。

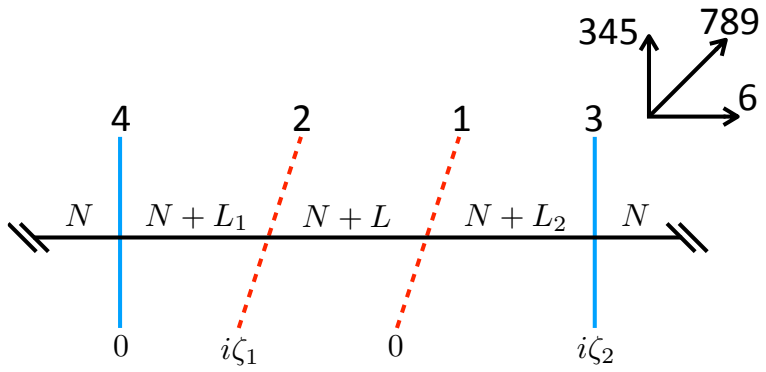


图 1：本文所考虑膜构型的示意图。蓝色实线表示 NS5 膜，红色倾斜虚线表示 (1，k)5-膜。

相应的 D3 膜上的有效理论（因此，在应用各种对偶变换后，也是 M2 膜上的有效理论）是具有规范群 [64, 65] 的三维 $\mathcal{N}=4$ 超 Chern-Simons 理论。

$$\begin{aligned}&\mathrm{U}(N_1)_{0,-i\zeta_2}\times\mathrm{U}(N_2)_{k,i\zeta_1}\times\mathrm{U}(N_3)_{0,-i\zeta_1}\times\mathrm{U}(N_4)_{-k,i\zeta_2}\\&=\mathrm{U}(N)_{0,-i\zeta_2}\times\mathrm{U}(N+L_1)_{k,i\zeta_1}\times\mathrm{U}(N+L)_{0,-i\zeta_1}\times\mathrm{U}(N+L_2)_{-k,i\zeta_2}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

这里，第一个下标表示规范群的层级，第二个下标表示 FI 参数。我们将规范理论的配分函数记为 $Z'_{k,\boldsymbol{M}}(N)$，其中相对秩（L_1，L_2，L）和 FI 参数（ζ_1，ζ_2）统记为 $\boldsymbol{M}$。通过应用局域化技术，由无限维路径积分定义的配分函数可化为有限维矩阵模型 [7, 66, 67]

$$\begin{aligned}Z'_{k,\boldsymbol{M}}(N)=&\frac{i^{-\frac{N_2^2}{2}+\frac{N_4^2}{2}}}{N_1!N_2!N_3!N_4!}\int\prod_{i=1}^{N_1}\frac{d\lambda_i^{(1)}}{2\pi}\prod_{i=1}^{N_2}\frac{d\lambda_i^{(2)}}{2\pi}\prod_{i=1}^{N_3}\frac{d\lambda_i^{(3)}}{2\pi}\prod_{i=1}^{N_4}\frac{d\lambda_i^{(4)}}{2\pi}\\&\times e^{\frac{ik}{4\pi}\sum_{i=1}^{N_2}(\lambda_i^{(2)})^2-\frac{ik}{4\pi}\sum_{i=1}^{N_4}(\lambda_i^{(4)})^2}e^{-i\zeta_1(\sum_{i=1}^{N_2}\lambda_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_3}\lambda_i^{(3)})-i\zeta_2(\sum_{i=1}^{N_4}\lambda_i^{(4)}-\sum_{i=1}^{N_1}\lambda_i^{(1)})}\\&\times\prod_{a=1}^{4}\frac{\prod_{i<j}^{N_a}(2\sinh\frac{\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)}}{2})^2}{\prod_{i=1}^{N_a}\prod_{j=1}^{N_{a+1}}2\cosh\frac{\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a+1)}}{2}},\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中 $N_5=N_1$ 和 $\lambda_j^{(5)}=\lambda_j^{(1)}$。如果考虑该配分函数的巨正则系综，那么除了 $N=0$处的配分函数外，N中的整个求和塔都由 Fredholm 行列式 [11, 23]给出

$$\sum_{N=0}^{\infty}Z'_{k,\boldsymbol{M}}(N)\kappa^N=Z'_{k,\boldsymbol{M}}(0)\,\mathrm{Det}(1+\kappa\widehat{H}_{k,\boldsymbol{M}}^{-1}),\tag{2.4}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$其中谱算子 $H_{k,\ \boldsymbol{M}}$ 是关于 X 和 P的劳伦多项式，

$$\widehat{H}_{k,\boldsymbol{M}} = \sum_{m,n=1,0,-1} c_{m,n} e^{-\frac{i\hbar}{2}mn} \widehat{X}^m \widehat{P}^n, \tag{2.5}$$

其中，$\widehat{X} = e^{\widehat{x}}$ 和 $\widehat{P} = e^{\widehat{p}}$ 是指数化正则算子，满足 $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar$，其中$\hbar = 2\pi k$。系数$c_{m,\ n}$ 是关于（L_1，L_2，L，ζ_1，ζ_2）的某些函数。由于 Fredholm 行列式中的谱算子$H_{k,\ \boldsymbol{M}}$ 的牛顿多边形与$\widehat{}$曲线的牛顿多边形相同，正如先前的研究 [24, 25], 所示，我们猜想谱算子$H_{k,\ \boldsymbol{M}}$ 在 Weyl群（相似变换意义下）作用下保持不变。因此，我们引入适用于 Weyl群的新变量（M_0，M_1，M_3，Z_1，Z_3），用以参数化膜构型。

$$\langle N \overset{1}{\underset{Z_1}{\bullet}} N + M_0 + M_1 + k \overset{2}{\underset{0}{\bullet}} N + 2M_0 + 2k \overset{3}{\underset{Z_3}{\circ}} N + M_0 + M_3 + k \overset{4}{\underset{0}{\circ}} \rangle, \tag{2.6}$$

并在之后将它们与（$L_1, L_2, L, \zeta_1, \zeta_2$）对应起来。

众所周知，曲线由 $X, P \to 0, \infty$ 处的八个渐近值刻画，它们受到韦达公式的一个约束，以及由平凡相似变换产生的两种缩放冗余。通过将渐近值从不含秩差的膜构型对应的渐近值线性外推，研究了具有不同相对秩和 FI 参数的膜构型 (2.6) 所对应的曲线；这些渐近值已由 [35] 找出。

$$\begin{aligned}
&\big(\infty, -\sqrt{m_0 m_1 z_1}\big), \quad \Big(\infty, -\sqrt{\frac{m_0}{m_1 z_1}}\Big), \quad \Big(-\sqrt{\frac{m_0 z_3}{m_3}}, \infty\Big), \quad \Big(-\sqrt{\frac{m_0 m_3}{z_3}}, \infty\Big), \\
&\Big(0, -\sqrt{\frac{z_1}{m_0 m_1}}\Big), \quad \Big(0, -\sqrt{\frac{m_1}{m_0 z_1}}\Big), \quad \Big(-\sqrt{\frac{m_3 z_3}{m_0}}, 0\Big), \quad \Big(-\frac{1}{\sqrt{m_0 m_3 z_3}}, 0\Big),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

（以符号形式见[†6] 图 2），其中

$$m_0 = e^{2\pi i M_0}, \quad m_1 = e^{2\pi i M_1}, \quad m_3 = e^{2\pi i M_3}, \quad z_1 = e^{2\pi i Z_1}, \quad z_3 = e^{2\pi i Z_3}. \tag{2.8}$$

请注意，如果平方根看起来过于繁琐，我们可以应用相似变换，沿各个方向移位渐近值以避免使用它们。曲线的 D_5 Weyl群对称性由渐近值上的反射生成

$$\begin{aligned}
s_1 &: (M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3) \mapsto (M_0, M_1, Z_3, Z_1, M_3), \\
s_2 &: (M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3) \mapsto (M_0, M_1, -Z_3, Z_1, -M_3),
\end{aligned}$$

[†6]这里我们更改了此前部分研究中使用的记号 [23, 61] 由 $m_0 = (m_1)^{[61]}$, $m_1 = (m_2/m_3)^{[61]}$, $m_3 = (1/(m_2 m_3))^{[61]}$。

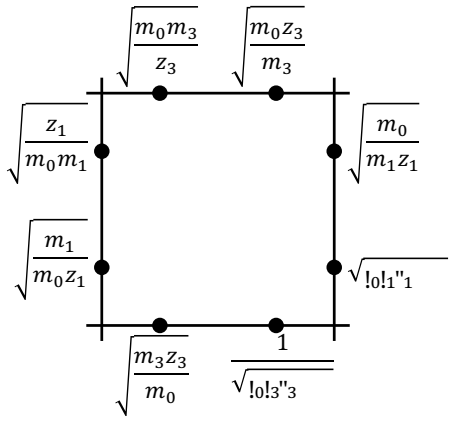


图 2：具有 D_5 Weyl群对称性的量子曲线渐近值点构型。

$$
\begin{aligned}
&s_3 : (M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3) \mapsto (M_3, M_1, M_0, Z_1, Z_3),\\
&s_4 : (M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3) \mapsto (-M_1, -M_0, M_3, Z_1, Z_3),\\
&s_5 : (M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3) \mapsto (M_0, Z_1, M_3, M_1, Z_3),\\
&s_0 : (M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3) \mapsto (M_0, -Z_1, M_3, -M_1, Z_3).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

现在，让我们通过 Hanany-Witten 跃迁将新的膜构型 (2.6) 与原始构型 (2.1) 联系起来，如下所示：[†7]

$$
\begin{aligned}
&\langle N \overset{4}{\underset{0}{\circ}} N + L_1 \overset{2}{\underset{i\zeta_1}{\bullet}} N + L \overset{1}{\underset{0}{\bullet}} N + L_2 \overset{3}{\underset{i\zeta_2}{\circ}} \rangle \\
&\qquad = \langle N \overset{1}{\underset{-i\zeta_1}{\bullet}} N + L_2 - L + k \overset{2}{\underset{0}{\bullet}} N + L_2 - L_1 + 2k \overset{3}{\underset{i\zeta_2}{\circ}} N - L_1 + 2k \overset{4}{\underset{0}{\circ}} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

通过比较这两种膜构型，我们可以将两组参数识别为

$$
\begin{aligned}
&L_1 - k = -M_0 - M_3, \quad L_2 - k = M_0 - M_3, \quad L - k = -M_1 - M_3, \quad \zeta_1 = iZ_1, \quad \zeta_2 = -iZ_3,\\
&M_0 = -\frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}, \quad M_1 = -L + \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}, \quad M_3 = k - \frac{L_1}{2} - \frac{L_2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

需要注意的是，变量（M_0，M_1，M_3，Z_1，Z_3）在讨论与 D_5 Weyl群相关的配分函数的性质时很有用，但在实际计算精确的

[†7]为了得到第二行，除了使用 Hanany-Witten 跃迁外，我们还利用了配分函数的对称性

$$
\langle N_1 \overset{}{\underset{Z_1}{\bullet}} N_2 \overset{}{\underset{Z_2}{\bullet}} N_3 \overset{}{\underset{Z_3}{\circ}} N_4 \overset{}{\underset{Z_4}{\circ}} \rangle = \langle N_1 \overset{}{\underset{Z_1+a}{\bullet}} N_2 \overset{}{\underset{Z_2+a}{\bullet}} N_3 \overset{}{\underset{Z_3+b}{\circ}} N_4 \overset{}{\underset{Z_4+b}{\circ}} \rangle, \tag{2.10}
$$

对于 N_1、N_2、N_3、N_4、Z_1、Z_2、Z_3、Z_4和 a、b的任意取值均成立。也就是说，总体移位 $a+b$无关紧要，因为 FI 参数取决于 Z_i之间的差值；而相对移位 $a-b$ 也无关紧要，因为它可以通过对（2.3）中的积分变量进行统一移位来吸收。

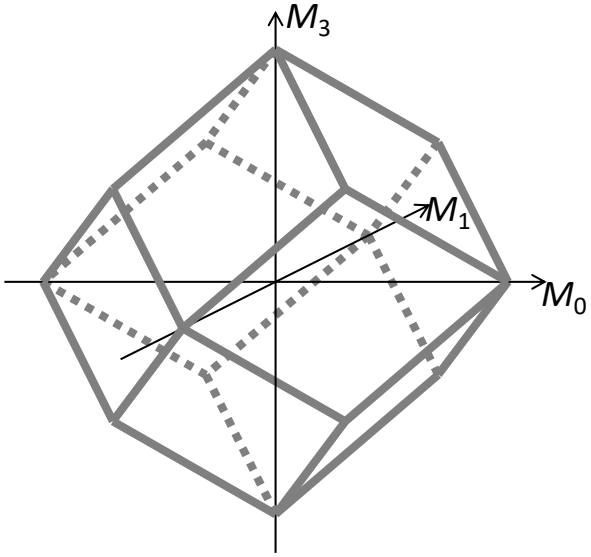


图3：本文所考虑的超 Chern-Simons 理论的超对称膜构型的基本域 (2.13) 是菱形十二面体。

取值时，变量（L_1、 L_2、 L、 ζ_1、 ζ_2）更为有用。因此，在本文余下部分，我们将根据上下文交替使用这两种约定。

注意，当总秩 N 为零时，并非所有秩 (M_0， M_1， M_3) 的取值都允许。事实上，[61,62] 中发现，由于 Hanany-Witten 跃迁会导致负秩出现，膜构型可能发生超对称性破缺，除非

$$\pm M_0 \pm M_1 \leq k, \quad \pm M_0 \pm M_3 \leq k, \quad \pm M_1 \pm M_3 \leq k. \tag{2.13}$$

另一方面，当总秩 N 足够大时，经过对偶级联后，我们会回到域 (2.13)。[68,69]讨论了三维超 Chern-Simons 理论的对偶级联。在 [61,62] 中，对偶级联被定义为以下过程。

- 选取一个最低秩作为参照。
- 任意施行 Hanany-Witten 跃迁，但不要跨越参照点。
- 若出现低于参考值的秩，则更改参考值。
- 遇到负秩时，统一增加总秩（因为我们考虑的是带有总秩源项的巨配分函数（2.4））。
- 重复最后三个步骤，直到不再出现更低的秩。

如文中所述，对于所有圆形夸克图类型的超陈-西蒙斯理论，无论初始的膜构型如何，对偶级联的终点总是唯一的。因此，

对偶级联最终到达的参数区域（即不再发生对偶级联的区域）称为对偶级联中超陈-西蒙斯理论的基本域。图3展示了我们所讨论情形的基本域 (2.13)。下文讨论配分函数时，除非另有明确说明，我们主要将讨论范围限制在基本域内。此外，根据 (2.6) 中对秩的参数化，(M_0、 M_1、 M_3) 必须全为整数或全为半整数。

2.2 配分函数的精确结果

文献 [60] 通过结合开弦和闭弦的观点研究了配分函数 (2.3)，并得到了一个简单的结果。该结果总结如下：

$$Z'_{k,\boldsymbol{M}}(N) = e^{i(\Theta'_{k,\boldsymbol{M}} - \Theta_{k,\boldsymbol{M}})} Z_{k,\boldsymbol{M}}(N), \tag{2.14}$$

with

$$\begin{aligned} Z_{k,\boldsymbol{M}}(N) = e^{i\Theta_{k,\boldsymbol{M}}} \frac{Z_k^{\mathrm{CS}}(L_1) Z_k^{\mathrm{CS}}(L_2)}{N!} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\mu_n}{2\pi} \\ \times \det \begin{pmatrix} [\langle \mu_m | \widehat{D}_1 \widehat{D}_2 | \mu_n \rangle]_{(m,n)} & [\langle \mu_m | \widehat{D}_1 \widehat{d}_2 | -t_{L,s} \rangle\!\rangle]_{(m,s)} \\ [\langle\!\langle t_{L,r} | \widehat{d}_1 \widehat{D}_2 | \mu_n \rangle]_{(r,n)} & [\langle\!\langle t_{L,r} | \widehat{d}_1 \widehat{d}_2 | -t_{L,s} \rangle\!\rangle]_{(r,s)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

这里，对于整体因子，我们引入了

$$\begin{aligned} \Theta'_{k,\boldsymbol{M}} &= \theta_k(L_1, 0) + \theta_k(L_1 - L, \zeta_1) - \theta_k(L_2, \zeta_2) - \theta_k(L_2 - L, 0), \\ \Theta_{k,\boldsymbol{M}} &= \frac{\pi}{k}(M_0 - M_1 - M_3) Z_1 Z_3 - \pi Z_1 Z_3 - 2\pi M_1 (Z_1 + Z_3), \\ \theta_k(n, \zeta) &= \frac{\pi}{k}\Big(\frac{n^3 - n}{12} - n\zeta^2\Big), \quad Z_k^{\mathrm{CS}}(n) = \frac{1}{k^{\frac{n}{2}}} \prod_{j<j'}^{n} 2\sin\frac{\pi(j'-j)}{k}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

注意，由于来源不同，这两个相位 $\Theta'_{k,\ \boldsymbol{M}}$ 和 $\Theta_{k,\ \boldsymbol{M}}$ 以不同的变量组表示：$\Theta'_{k,\ \boldsymbol{M}}$ 直接来自矩阵模型，而 $\Theta_{k,\ \boldsymbol{M}}$ 则是为了简化 $Z_{k,\ \boldsymbol{M}}(0)$ 所满足的双线性关系中的系数而引入的，具体列于后面的表 2 和表 3 中。(2.15) 中行列式里的 $(N+L)\times(N+L)$ 矩阵的矩阵元采用一维量子力学的记号书写，其中引入了位置 $\widehat{x}$ 和动量 $\widehat{p}$ 的正则算符，它们满足 $[\widehat{x}, \widehat{p}] = 2\pi i k$ ，以及归一化如下的本征态。

$$\langle x | x' \rangle = 2\pi\delta(x - x'), \quad \langle\!\langle p | p' \rangle\!\rangle = 2\pi\delta(p - p'), \quad \langle x | p \rangle\!\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{\frac{ixp}{2\pi k}}. \tag{2.17}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$然后，算符 D_1, D_2, d_1, d_2 写作

$$\widehat{D}_1 = e^{-\frac{i\zeta_1}{k}\widehat{x}} S_{L_1}(\widehat{x}) \frac{1}{2\cosh\frac{\widehat{p}-\pi i L}{2}} e^{\frac{i\zeta_1}{k}\widehat{x}} C_{L_1}(\widehat{x}), \quad \widehat{d_1} = e^{\frac{i\zeta_1}{k}\widehat{x}} C_{L_1}(\widehat{x}),$$
$$\widehat{D}_2 = C_{L_2}(\widehat{x}+2\pi\zeta_2) \frac{1}{2\cosh\frac{\widehat{p}+\pi i L}{2}} S_{L_2}(\widehat{x}+2\pi\zeta_2), \quad \widehat{d_2} = C_{L_2}(\widehat{x}+2\pi\zeta_2), \tag{2.18}$$

with

$$S_n(x) = i^n \frac{\prod_{r=1}^n 2\sinh\frac{x-t_{n,r}}{2k}}{2\cosh\frac{x+\pi i n}{2}}, \quad C_n(x) = \frac{1}{\prod_{r=1}^n 2\cosh\frac{x-t_{n,r}}{2k}}, \tag{2.19}$$

对于整数能级 k，满足 $S_n(x) = C_{k-n}(x)$。我们还引入了$\langle\langle t_{n,\ r}|$、$|-t_{n,\ r}\rangle\rangle$，其中 $t_{n,\ r}$ 定义为

$$t_{n,r} = 2\pi i\Big(\frac{n+1}{2} - r\Big), \quad (r = 1, 2, \cdots, n). \tag{2.20}$$

考虑到（2.14）中的相位变化，我们据此重新定义（2.4）中的巨配分函数，并去掉撇号，

$$\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa) = \sum_{N=0}^{\infty} Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)\kappa^N = Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)\,\mathrm{Det}(1+\kappa\widehat{H}_{k,\boldsymbol{M}}^{-1}). \tag{2.21}$$

注意，当 (2.21) 中的 $L = 0$, $\widehat{H}_k^{-1}{}_{,\boldsymbol{M}}$ 由 $\widehat{D}_1\widehat{D}_2$ 给出时，行列式仅简化为左上块。因此，(2.15) 我们可以通过计算逆矩阵 $\widehat{D}_2^{-1}\widehat{D}_1^{-1}$ [31,35,60] 直接获得曲线的参数。这与通过外推 (2.7) 得到的渐近值一致。此外，除了渐近值之外，还发现 [60] 系数 $c_{0,0}$ 以及 $H_{k,\boldsymbol{M}}$ 中的整体因子也与子空间 $L = 0$ 中的 Weyl群 D_5 相容。然而，最低秩消失的配分函数 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)$ 则不必保持不变。

从经验上看，配分函数在可积模型中充当 tau函数 [70,71]。对于我们的三维理论，预期 tau函数是巨正则系综中的配分函数。因此，巨配分函数应满足可积模型的双线性方程。事实上，正如 [59] 中发现的那样，ABJM 理论确实如此。然而，由于对称群是 A_1 Weyl群，且权空间只有一个方向，因此将双线性关系推广到我们的情形并非易事。参考 [47], 中的结果，我们预期，沿两个正交方向对两个变量进行移位所得到的双线性项，可以用对其余变量进行移位所得的项来表示。下一节中，我们将根据这一预期寻找双线性关系。

3 逸度最低阶的双线性关系

在上一节回顾了配分函数和 D_5 Weyl群之后，让我们利用配分函数的表达式来探究双线性关系。首先，我们只需要最低阶的巨配分函数，也就是最低秩取值为 $N=0$ 时的配分函数，其表达式为

$$Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)=e^{i\Theta_{k,\boldsymbol{M}}}Z_k^{\mathrm{CS}}(L_1)Z_k^{\mathrm{CS}}(L_2)\det\left([\langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1^{\mathrm{VI}}\widehat{d}_2^{\mathrm{VI}}|-t_{L,s}\rangle\!\rangle]_{(r,s)}\right), \tag{3.1}$$

对于 $L\leq L_1$ 和 $L\leq L_2$，这一点可由 (2.15) 直接看出。

请注意，在三个相对秩中，秩 L 在控制表达式的复杂度方面起着重要作用。也就是说，如果我们关注 $N=0$ (3.1) 处的配分函数，那么 L 就是行列式表达式中出现的矩阵大小。对于 $L=0$，线性箭图分裂为两部分，只留下纯 Chern-Simons 配分函数 $Z_k^{\mathrm{CS}}(L_1)Z_k^{\mathrm{CS}}(L_2)$。从物理角度看，在变量 (L_1,L_2,L) (2.12) 中，我们从 $(M_0,M_1,M_3)=(0,0,k)$ 展开配分函数；随着我们从边界 $-M_1-M_3+k=0$ 向内部层移动，矩阵大小 L 逐渐增大。请注意，存在多种适用的对应方式。例如，我们可以交换 NS5 膜的标记，或交换 $(1,k)$5-膜的标记。这些对应方式与同时交换 (M_1,Z_1) 或 (M_3,Z_3) 的符号的韦伊反射相关。此外，我们还可以互换 NS5 膜与 $(1,k)$5- 膜之间的对应方式。这是韦伊群的一个外自同构。根据所采用的对应方式，我们可以从 $(M_0,M_1,M_3)=(0,\pm k,0)$ 或 $(0,0,\pm k)$ 展开配分函数，而矩阵大小 L 的增长方式也各不相同。参见图4。这些图已表明，这与 Painlev´e 双线性方程有着深刻联系，其解由行列式给出，且每一层的矩阵大小各不相同（例如参见 [72]）。

将完备基组的恒等式$1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}|x\rangle\langle x|$ 插入各个矩阵元中，即可显式求得 $N=0$ (3.1)处的配分函数，如下所示：

$$\begin{aligned}Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)&=e^{i\Theta_{k,\boldsymbol{M}}}Z_k^{\mathrm{CS}}(L_1)Z_k^{\mathrm{CS}}(L_2)\\&\quad\times\det\left([I_{k,L_1+L_2}(L+1-r-s+i\zeta_1,\{t_{L_1,r'}\}_{r'=1}^{L_1}\cup\{-2\pi\zeta_2+t_{L_2,r'}\}_{r'=1}^{L_2})]_{(r,s)}\right),\end{aligned} \tag{3.2}$$

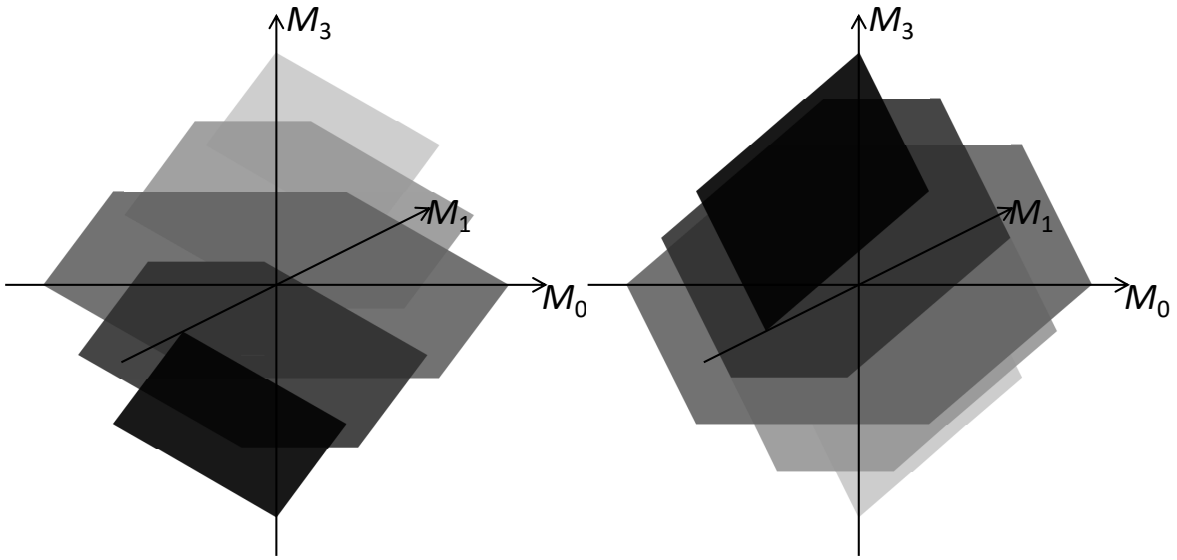


图4：随着我们远离边界，行列式的矩阵大小会增大。

其中$I_{k,\ n}(\alpha,\ \{\beta_a\})$表示积分[†8]

$$I_{k,n}(\alpha,\{\beta_a\})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi k}\frac{e^{\frac{\alpha x}{k}}}{\prod_{a=1}^{n}2\cosh\frac{x-\beta_a}{2k}}=\frac{1}{e^{-\pi i\alpha}-(-1)^n e^{\pi i\alpha}}\sum_{a=1}^{n}\frac{e^{\frac{\alpha\beta_a}{k}}}{\prod_{a'(\neq a)}2i\sinh\frac{\beta_a-\beta_{a'}}{2k}},\tag{3.4}$$

行列式中的积分 $I_{k,n}(\alpha,\{\beta_a\})$ 所对应的参数 α 和 β_a 由下式给出

$$\begin{aligned}&\alpha=L+1-r-s+i\zeta_1,\\&\beta_a=\begin{cases}2\pi i\big(\frac{L_1+1}{2}-a\big), & (a=1,2,\cdots,L_1),\\ -2\pi i Z_3+2\pi i\big(\frac{L_2+1}{2}-(a-L_1)\big), & (a=L_1+1,L_1+2,\cdots,L_1+L_2).\end{cases}\end{aligned}\tag{3.5}$$

特别是，通过这个表达式，我们可以研究 $N=0$ 处小整数 k时的配分函数，例如 $k=1$ 和 $k=2$。结果[†9] 列于附录 B。请注意，有时当整数能级为 k时，配分函数的表达式是不定的。对于这些

[†8]No请注意，积分 $I_{k,n}(\alpha,\{\beta_a\})$ (3.4) 仅在 $|\mathrm{Re}[\frac{\alpha}{k}]|<\frac{n}{2k}$ 时收敛，其中 – — is

$$L-\frac{L_1}{2}-\frac{L_2}{2}+|\mathrm{Im}[\zeta_1]|<1,\tag{3.3}$$

用 $(L_1,L_2,L,\zeta_1,\zeta_2)$ 表示。

[†9]我们必须承认，$k=2$、$L=4$ 的一些精确表达式难以求得，实际上是后来通过40个双线性关系确定的。不过，我们可以在 k取一般值时检验这些表达式的有效性。

在这些情况下，我们需要将层级移位至非整数值，并取极限

$$Z_{k,(M_0(k),M_1(k),M_3(k),Z_1,Z_3)}(0) = \lim_{k'\to k} Z_{k',(M_0(k),M_1(k),M_3(k),Z_1,Z_3)}(0), \tag{3.6}$$

之后。也就是说，尽管层级 k 也出现在将 (L_1， L_2， L) 中的变量变为 (M_0， M_1， M_3) 时的式 (2.12) 中，我们在移位使其偏离整数时仍将其保持不变。此外需要注意的是，严格来说，我们是在参数范围 $L \le L_1$ 和$L \le L_2$ 内得到表达式 (3.2) 的，而积分仅在满足 (3.3) 时收敛。尽管如此，我们有时仍会在有效范围之外应用该表达式，以求得附录 B 中的结果。这是因为，条件 $L \le L_1$ 和 $L \le L_2$ 的引入只是为了简化处理，而我们通常可以在不同范围内进行计算，并得到相同的结果。收敛条件也可以通过主值处方或其他正则化方法加以克服。因此，我们发现，在基本域之外，该表达式为零。尽管我们假定了其有效性范围，但这一点是一个非平凡的信号，表明我们的计算路径是正确的。

令人惊讶的是，由 D_5 Weyl群（通过应用 (3.2) 得到）联系起来的不同点 $\boldsymbol{M}$ 处的配分函数取值各不相同。也就是说，尽管以$Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)$归一化的巨配分函数可以改写为一个 Fredholm 行列式，且我们猜想其中的谱算子在 Weyl群作用下保持不变，但这一对称性并不适用于$Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)$。我们将在第 7.3 节回到这一问题。

有趣的是，请注意，附录 B 和 C 中的结果只有在用 Z_1 和 Z_3 表示时，才能简洁地仅由三角函数给出。例如，$Z_{k,\ \boldsymbol{M}}(0)$ 与 $k=1$ 和 $M_0=M_1=M_3=0$ （在 (B.5) 中记作 $Z^{(0)}_{0\,0\,,\ ,\ 0}$ ）若用 ζ_1 和 ζ_2 表示，则会同时包含三角函数和双曲函数。

使用 $k=1$ 和 $k=2$ 的表达式，我们可以按照第 1 节中的说明搜索双线性关系。我们发现，配分函数满足表 2 和表 3 中列出的 40个双线性关系。通常，双线性关系将三个双线性项联系起来，其中各项的自变量向相反方向移位至最近的格点。在当前情形中，三个项中的移位安排如下。我们使用变量 $\boldsymbol{M}=(M_0,M_1,M_3,Z_1,Z_3)$，并考虑配分函数 $Z_{M_0,M_1,M_3,Z_1,Z_3} = Z_{k,\boldsymbol{M}}(N=0)$；由于层级$k$ 为共同层级，且总秩 N 在本节的双线性关系中始终指最低的总秩 $N=0$ ，因此我们将其简写。于是，前两项中沿两个正交方向分别移位两个自变量后得到的配分函数之和，可表示为其余自变量均经过移位的第三项。当双线性关系中 Z_{M_0,M_1,M_3,Z_1,Z_3} 的某个自变量移位 $\pm 1/2$ 时，我们将其记为 $\pm$；否则记为 $\varnothing$。也就是说，例如，若双线性关系中的两个变量（M_1,M_3）经过移位，我们将它们记为

$$\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\pm\varnothing\varnothing} = Z_{M_0,M_1+\frac{1}{2},M_3+\frac{1}{2},Z_1,Z_3} Z_{M_0,M_1-\frac{1}{2},M_3-\frac{1}{2},Z_1,Z_3},$$

$(M_1,\ \ M_3)$	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0+Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\pm\varnothing\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0+Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\mp\varnothing\varnothing}+\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\pm\pm}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0-Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\pm\varnothing\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0-Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\mp\varnothing\varnothing}+\widetilde{Z}_{\mp\varnothing\varnothing\mp\pm}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0+Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\pm\varnothing\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0+Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\mp\varnothing\varnothing}+\widetilde{Z}_{\mp\varnothing\varnothing\pm\mp}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0-Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\pm\varnothing\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0-Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\mp\varnothing\varnothing}+\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\mp\mp}=0$
$(M_1,\ \ Z_1)$	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_3+Z_3)}S_1^+\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\pm\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_3+Z_3)}S_1^-\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\mp\varnothing}+S_3^+\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\pm\varnothing\pm}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_3+Z_3)}S_1^+\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\pm\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_3+Z_3)}S_1^-\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\mp\varnothing}+S_3^-\widetilde{Z}_{\mp\varnothing\mp\varnothing\pm}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_3-Z_3)}S_1^+\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\pm\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_3-Z_3)}S_1^-\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\mp\varnothing}+S_3^-\widetilde{Z}_{\mp\varnothing\pm\varnothing\mp}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_3-Z_3)}S_1^+\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\pm\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_3-Z_3)}S_1^-\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\mp\varnothing}+S_3^+\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\mp\varnothing\mp}=0$
(M_1, Z_3)	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_3+Z_1)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\varnothing\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_3+Z_1)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\varnothing\mp}+\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\pm\pm\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_3+Z_1)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\varnothing\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_3+Z_1)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\varnothing\mp}+\widetilde{Z}_{\mp\varnothing\mp\pm\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_3-Z_1)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\varnothing\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_3-Z_1)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\varnothing\mp}+\widetilde{Z}_{\mp\varnothing\pm\mp\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_3-Z_1)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\varnothing\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_3-Z_1)}\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\varnothing\mp}+\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\mp\mp\varnothing}=0$
$(M_3,\ \ Z_1)$	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\pm\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\mp\varnothing}+\widetilde{Z}_{\pm\pm\varnothing\varnothing\pm}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\pm\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\mp\varnothing}+\widetilde{Z}_{\mp\mp\varnothing\varnothing\pm}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\pm\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\mp\varnothing}+\widetilde{Z}_{\mp\pm\varnothing\varnothing\mp}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\pm\varnothing}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\mp\varnothing}+\widetilde{Z}_{\pm\mp\varnothing\varnothing\mp}=0$
$(M_3,\ \ Z_3)$	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_1+Z_1)}S_3^+\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\varnothing\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_1+Z_1)}S_3^-\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\varnothing\ \mp}+S_1^+\widetilde{Z}_{\pm\pm\varnothing\pm\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_1+Z_1)}S_3^+\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\varnothing\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_1+Z_1)}S_3^-\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\varnothing\mp}+S_1^-\widetilde{Z}_{\mp\mp\varnothing\pm\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_1-Z_1)}S_3^+\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\varnothing\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_1-Z_1)}S_3^-\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\varnothing\mp}+S_1^-\widetilde{Z}_{\mp\pm\varnothing\mp\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_1-Z_1)}S_3^+\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\varnothing\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_1-Z_1)}S_3^-\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\varnothing\mp}+S_1^+\widetilde{Z}_{\pm\mp\varnothing\mp\varnothing}=0$
$(Z_1,\ \ Z_3)$	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_1+M_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\varnothing\pm\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0+M_1+M_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\varnothing\pm\mp}+\widetilde{Z}_{\pm\pm\pm\varnothing\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_1+M_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\varnothing\pm\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0-M_1+M_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\varnothing\pm\mp}+\widetilde{Z}_{\mp\mp\pm\varnothing\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_1-M_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\varnothing\pm\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_0+M_1-M_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\varnothing\pm\mp}+\widetilde{Z}_{\mp\pm\mp\varnothing\varnothing}=0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_1-M_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\varnothing\pm\pm}+e^{\frac{\pi i}{2k}(M_0-M_1-M_3)}\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\varnothing\pm\mp}+\widetilde{Z}_{\pm\mp\mp\varnothing\varnothing}=0$

表 2：具有四个节点的圆形箭图的三维 $\mathcal{N}=4$ 超 Chern-Simons 理论中的 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)$ 的 40 个双线性关系。

$$\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\mp\varnothing\varnothing}=Z_{M_0,M_1+\frac{1}{2},M_3-\frac{1}{2},Z_1,Z_3}Z_{M_0,M_1-\frac{1}{2},M_3+\frac{1}{2},Z_1,Z_3},\tag{3.7}$$

而如果其余部分 $(M_0,\ \ Z_1,\ \ Z_3)$ 发生移位，我们记为

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\pm\pm}&=Z_{M_0+\frac{1}{2},M_1,M_3,Z_1+\frac{1}{2},Z_3+\frac{1}{2}}Z_{M_0-\frac{1}{2},M_1,M_3,Z_1-\frac{1}{2},Z_3-\frac{1}{2}},\\
\widetilde{Z}_{\mp\varnothing\varnothing\mp\pm}&=Z_{M_0-\frac{1}{2},M_1,M_3,Z_1-\frac{1}{2},Z_3+\frac{1}{2}}Z_{M_0+\frac{1}{2},M_1,M_3,Z_1+\frac{1}{2},Z_3-\frac{1}{2}},\\
\widetilde{Z}_{\mp\varnothing\varnothing\pm\mp}&=Z_{M_0-\frac{1}{2},M_1,M_3,Z_1+\frac{1}{2},Z_3-\frac{1}{2}}Z_{M_0+\frac{1}{2},M_1,M_3,Z_1-\frac{1}{2},Z_3+\frac{1}{2}},\\
\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\mp\mp}&=Z_{M_0+\frac{1}{2},M_1,M_3,Z_1-\frac{1}{2},Z_3-\frac{1}{2}}Z_{M_0-\frac{1}{2},M_1,M_3,Z_1+\frac{1}{2},Z_3+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

其结构　　这些双线性关系的系数相当明确。与.....的情形一样

(M_0, M_1)	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_3+Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\pm\varnothing\varnothing\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(M_3+Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\mp\varnothing\varnothing\varnothing} + S_3^+\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\pm\pm} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_3-Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\pm\varnothing\varnothing\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_3-Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\mp\varnothing\varnothing\varnothing} + S_3^-\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\mp\mp\pm} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_3+Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\pm\varnothing\varnothing\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_3+Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\mp\varnothing\varnothing\varnothing} + S_3^+\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\mp\pm\mp} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_3-Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\pm\varnothing\varnothing\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(M_3-Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\mp\varnothing\varnothing\varnothing} + S_3^-\widetilde{Z}_{\varnothing\varnothing\pm\mp\mp} = 0$
(M_0, M_3)	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_1+Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\pm\varnothing\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(M_1+Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\mp\varnothing\varnothing} + S_1^+\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\pm\pm} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_1-Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\pm\varnothing\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_1-Z_1+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\mp\varnothing\varnothing} + S_1^+\widetilde{Z}_{\varnothing\mp\varnothing\mp\pm} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_1+Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\pm\varnothing\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_1+Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\mp\varnothing\varnothing} + S_1^-\widetilde{Z}_{\varnothing\mp\varnothing\pm\mp} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_1-Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\pm\varnothing\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(M_1-Z_1-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\mp\varnothing\varnothing} + S_1^-\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\varnothing\mp\mp} = 0$
(M_0, Z_1)	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_1+M_3+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\pm\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(M_1+M_3+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\mp\varnothing} + S_3^+\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\pm\varnothing\pm} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_1-M_3+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\pm\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_1-M_3+Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\mp\varnothing} + S_3^-\widetilde{Z}_{\varnothing\mp\mp\varnothing\pm} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_1+M_3-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\pm\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_1+M_3-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\mp\varnothing} + S_3^-\widetilde{Z}_{\varnothing\mp\pm\varnothing\mp} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_1-M_3-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\pm\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(M_1-M_3-Z_3)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\mp\varnothing} + S_3^+\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\mp\varnothing\mp} = 0$
(M_0, Z_3)	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_1+M_3+Z_1)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\varnothing\pm} + e^{\frac{\pi i}{2k}(M_1+M_3+Z_1)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\varnothing\mp} + S_1^+\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\pm\pm\varnothing} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_1-M_3+Z_1)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\varnothing\pm} + e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_1-M_3+Z_1)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\varnothing\mp} + S_1^-\widetilde{Z}_{\varnothing\mp\mp\pm\varnothing} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(-M_1+M_3-Z_1)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\varnothing\pm} + e^{\frac{\pi i}{2k}(-M_1+M_3-Z_1)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\varnothing\mp} + S_1^+\widetilde{Z}_{\varnothing\mp\pm\mp\varnothing} = 0$
	$e^{-\frac{\pi i}{2k}(M_1-M_3-Z_1)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\varnothing\pm} + e^{\frac{\pi i}{2k}(M_1-M_3-Z_1)}\widetilde{Z}_{\pm\varnothing\varnothing\varnothing\mp} + S_1^-\widetilde{Z}_{\varnothing\pm\mp\mp\varnothing} = 0$

表 3：具有四个节点的圆形箭图三维 $\mathcal{N}=4$ 超 Chern-Simons 理论中的 $Z_{k,\ M}(0)$ 的 40个双线性关系（续）。

(M_1, M_3)、(M_1, Z_3)、(M_3, Z_3) 和 (Z_1, Z_3) 中，当我们对前两项中的两个变量进行移位，并通过对其余变量进行移位来表示结果时，前两项需要乘以一个指数相位因子，该因子取决于其余变量的移位。请注意，前两项中的两个指数因子的选取方式确保了方程~ ~的宇称守恒。也就是说，若将 (3.7) 中的两个双线性配分函数 $Z_{\varnothing\pm\pm\varnothing\varnothing}$ 和 $Z_{\varnothing\pm\mp\varnothing\varnothing}$ 分别记为偶项和奇项，则偶项和奇项分别乘以具有奇数个和偶数个负相位的相位因子，例如 $e^{-\frac{\pi i}{2k}M_0}$。虽然这也适用于其余情形，但当同时对 M_1 和 或同时对 和 M_3 进行移位时，我们还需要引入

$$S_1^{\pm} = 2\sin\frac{\pi(M_1 \pm Z_1)}{k}, \quad S_3^{\pm} = 2\sin\frac{\pi(M_3 \pm Z_3)}{k}, \tag{3.9}$$

额外的因子。引入这些因子的规则可追溯至图 2 中谱算子渐近值的点构型。在图中，两个变量 (M_1, Z_1)（以及 (M_3, Z_3)）分别对应竖直（以及水平）渐近值，而 M_0 则连接这两组变量。

根据从表 2 和表 3 中观察到的结构，我们可以将双线性

关系稍微改变记号后概括为

$$e^{-\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)} S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} \widetilde{Z}_{a_\pm b_\pm c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing} + e^{\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)} S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} \widetilde{Z}_{a_\pm b_\mp c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing} + S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} \widetilde{Z}_{a_\varnothing b_\varnothing c_{\pm\sigma_1} d_{\pm\sigma_2} e_{\pm\sigma_3}} = 0, \tag{3.10}$$

此处 (a,b,c,d,e) 是[†10] $(M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3)$ 的一个置换，而 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 是以下任一组：$(+,+,+)$、$(+,-,-)$、$(-,+,-)$、$(-,-,+)$。带有符号（$\pm$ 或 $\varnothing$）的下标 (a,b,c,d,e) 表示 Z 参数 $\boldsymbol{M} = (M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3)$ 的移位方向

$$\widetilde{Z}_{a_\pm b_\pm c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing} = \prod_\pm Z_{k,\boldsymbol{M}_\alpha \pm \frac{1}{2}(\delta^a_\alpha + \delta^b_\alpha)}, \quad \widetilde{Z}_{a_\pm b_\mp c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing} = \prod_\pm Z_{k,\boldsymbol{M}_\alpha \pm \frac{1}{2}(\delta^a_\alpha - \delta^b_\alpha)},$$
$$\widetilde{Z}_{a_\varnothing b_\varnothing c_{\pm\sigma_1} d_{\pm\sigma_2} e_{\pm\sigma_3}} = \prod_\pm Z_{k,\boldsymbol{M}_\alpha \pm \frac{1}{2}(\sigma_1\delta^c_\alpha + \sigma_2\delta^d_\alpha + \sigma_3\delta^e_\alpha)}. \tag{3.11}$$

因此，40个双线性关系由置换的前两个分量和三个符号（a，b；σ_1，σ_3，σ_3）进行标记。除了相位因子之外，我们还需要引入~系数 $S_{\boldsymbol{M}}$，如（3.9）所示，这些系数取决于 Z 的下标移位。注意，通过使用（M_0，M_1，M_3，Z_1，Z_3）中相应分量的名称来标记σ_1，σ_2，σ_3，例如 σ_{M_0}，我们可以将40个双线性关系中的系数写为

$$\begin{aligned}
(a,b) = (M_1, Z_1): &\quad S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} = S_1^+, \quad S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} = S_1^-, \quad S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} = S_3^{\sigma_{M_0}}, \\
(a,b) = (M_3, Z_3): &\quad S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} = S_3^+, \quad S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} = S_3^-, \quad S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} = S_1^{\sigma_{M_0}}, \\
(a,b) = (M_0, M_1): &\quad S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} = S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} = 1, \quad S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} = S_3^{\sigma_{Z_1}}, \\
(a,b) = (M_0, M_3): &\quad S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} = S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} = 1, \quad S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} = S_1^{\sigma_{Z_3}}, \\
(a,b) = (M_0, Z_1): &\quad S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} = S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} = 1, \quad S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} = S_3^{\sigma_{M_1}}, \\
(a,b) = (M_0, Z_3): &\quad S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} = S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} = 1, \quad S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} = S_1^{\sigma_{M_3}},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

以及 $S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} = S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} = S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} = 1$ 另一个（a，b）。

请注意，最初由 $Z'_{k,\ \boldsymbol{M}}(0)$ (2.14) 得到的双线性关系具有看似不规则的指数相位因子。为了将指数相位因子简化为表 2 和表 3 中所列的形式，我们需要乘上另一个不同于 $e^{i\Theta'_{k,\ \boldsymbol{M}}}$ 的相位因子$e^{i\Theta_{k,\ \boldsymbol{M}}}$ (2.16)，并使用 $Z_{k,\ \boldsymbol{M}}(0)$ 代替 $Z'_{k,\ \boldsymbol{M}}(0)$。

确定双线性关系后，我们可以对不同的能级k和秩（M_0, M_1, M_3）取值进行数值检验。我们甚至对一般的非有理数 k也进行了检验，这为系数的精确表达式提供了非常有力的验证。在下一节中，我们将说明双线性关系 (3.11) 可以自然地推广到巨配分函数，而上述配分函数则作为最低秩的情形。

[†10]这 e sho 不应将其与欧拉常数混淆；本文也用 e 表示欧拉常数。

4 高阶逸度的双线性关系

在本节中，我们研究最低秩消失的配分函数的双线性关系 (3.10)， $N=0$ 如何扩展到更高秩，即巨配分函数 $\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$ 的关系 (2.21)。

首先，让我们猜测提升后的双线性关系。我们假设双线性关系具有与最低阶情形（3.10）相同的结构，只需将$\widetilde{}$ $\widetilde{}$配分函数的双线性关系 Z(3.11) 替换为完整巨配分函数 $\Xi(\gamma_{\boldsymbol{M}},\ \kappa)$ 的双线性关系，如下所示。

$$
\begin{aligned}
&e^{-\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)} S^{(1)}_{\boldsymbol{M}} \widetilde{\Xi}_{a_\pm b_\pm c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing}(\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}},\kappa) + e^{\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)} S^{(2)}_{\boldsymbol{M}} \widetilde{\Xi}_{a_\pm b_\mp c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing}(\gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}},\kappa) \\
&\quad + S^{(3)}_{\boldsymbol{M}} \widetilde{\Xi}_{a_\varnothing b_\varnothing c_{\pm\sigma_1} d_{\pm\sigma_2} e_{\pm\sigma_3}}(\gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}},\kappa) = 0,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

with

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Xi}_{a_\pm b_\pm c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing}(\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}},\kappa) &= \prod_{\pm} \Xi_{k,\boldsymbol{M}_\alpha \pm \frac{1}{2}(\delta^a_\alpha+\delta^b_\alpha)}((\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}})^{\pm 1}\kappa), \\
\widetilde{\Xi}_{a_\pm b_\mp c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing}(\gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}},\kappa) &= \prod_{\pm} \Xi_{k,\boldsymbol{M}_\alpha \pm \frac{1}{2}(\delta^a_\alpha-\delta^b_\alpha)}((\gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}})^{\pm 1}\kappa), \\
\widetilde{\Xi}_{a_\varnothing b_\varnothing c_{\pm\sigma_1} d_{\pm\sigma_2} e_{\pm\sigma_3}}(\gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}},\kappa) &= \prod_{\pm} \Xi_{k,\boldsymbol{M}_\alpha \pm \frac{1}{2}(\sigma_1\delta^c_\alpha+\sigma_2\delta^d_\alpha+\sigma_3\delta^e_\alpha)}((\gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}})^{\pm 1}\kappa).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

这里的系数（$\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}}$， $\gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}}$， $\gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}}$）不会影响上一节在$\kappa=0$处的观测结果，而需要通过要求 κ 中更高阶的双线性关系来确定。原则上，对于40个方程中的每一个，（$\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}}$， $\gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}}$， $\gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}}$）不一定相同。然而，考虑到谱算子在 D_5 Weyl群下的（推测）不变性，它们不应当完全杂乱无章。

首先，我们根据配分函数 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 确定 $(\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}},\gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}},\gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}})$ 在 $k=1 \text{and} N=1$ 的取值，然后再看看这一选择是否适用于其他情形。如附录A所述，我们可以用两种方法，针对每一组 $k,L_1,L_2,L\in\mathbb{Z}$ 的取值，逐阶显式计算配分函数 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 以及 $\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$ 关于 κ 的展开系数。利用 A.3 节中的方法 II，我们可以显式计算配分函数。尽管即使对于 $k=1$，一般而言计算$\widehat{}$也颇为繁琐，但鉴于谱算子 $H_{k,\boldsymbol{M}}$ 在 D_5 Weyl群下的不变性，自然可以预期，对于基本域 (2.13) 中的 $N=1$ （或更一般地，任意 N），配分函数的所有取值都可归结为四种类型

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_0 &= \frac{Z^{(1)}_{-1,0,0}}{Z^{(0)}_{-1,0,0}} = \frac{Z^{(1)}_{0,-1,0}}{Z^{(0)}_{0,-1,0}} = \frac{Z^{(1)}_{0,0,-1}}{Z^{(0)}_{0,0,-1}} = \frac{Z^{(1)}_{0,0,1}}{Z^{(0)}_{0,0,1}} = \frac{Z^{(1)}_{0,1,0}}{Z^{(0)}_{0,1,0}} = \frac{Z^{(1)}_{1,0,0}}{Z^{(0)}_{1,0,0}}, \quad \mathcal{Z}_0 = \frac{Z^{(1)}_{0,0,0}}{Z^{(0)}_{0,0,0}}, \\
\mathcal{Y}_1 &= \frac{Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}{Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}} = \frac{Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = \frac{Z^{(1)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = \frac{Z^{(1)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}{Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{Y}_0 = \frac{Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = \frac{Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}{Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}} = \frac{Z^{(1)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}{Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}} = \frac{Z^{(1)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}. \tag{4.3}$$

这里在等式右边（附录 B 和 C 中也一样），我们采用简写记号

$$Z^{(N)}_{M_0,M_1,M_3} = e^{-i\Theta_{k,\boldsymbol{M}}} Z_{k,\boldsymbol{M}}(N) = e^{-i\Theta'_{k,\boldsymbol{M}}} Z'_{k,\boldsymbol{M}}(N). \tag{4.4}$$

也就是说，尽管式 (2.14) 通过去掉来自配分函数的相位 $e^{i\Theta'_{k,\boldsymbol{M}}}$，并适当地引入另一个相位 $e^{-i\Theta_{k,\boldsymbol{M}}}$ (2.16) 来简化双线性关系，但我们还是将两者都去掉了。此外，为简洁起见，我们省略层级 $k=1$ 和 FI 参数 Z_1, Z_3 的下标，并仅用上标 (N) 表示 N。注意，由于 D_5 Weyl 群在反射 $(M_3, Z_1) \to (-M_3, -Z_1)$ 下的不变性，只需改变 Z_1, $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_1|_{Z_1\to -Z_1}$ 的符号，即可轻易地由 $\mathcal{Y}_1$ 得到 $\mathcal{Y}_0$。在附录A.3中，我们计算了对应于 $(M_0, M_1, M_3) = (0, 0, 1)$、$(-1/2, 1/2, 1/2)$、$(0, 0, 0)$ 的 $(L_1, L_2, L) = (0, 0, 0)$、$(1, 0, 0)$、$(1, 1, 1)$ 的取值，并发现

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_0 &= \frac{1}{4} Z_1 Z_3 \csc(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3),\\
\mathcal{Y}_1 &= \frac{-1}{16\pi}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3)\Big(2 - 4\pi i Z_1 Z_3 + 2\pi\big(Z_1\tan(\pi Z_1) + Z_3\tan(\pi Z_3)\big)\\
&\quad + \pi i\tan(\pi Z_1)\tan(\pi Z_3) - e^{2\pi i Z_1 Z_3}\pi\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3)\Big),\\
\mathcal{Y}_0 &= \frac{-1}{16\pi}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3)\Big(2 + 4\pi i Z_1 Z_3 + 2\pi\big(Z_1\tan(\pi Z_1) + Z_3\tan(\pi Z_3)\big)\\
&\quad - \pi i\tan(\pi Z_1)\tan(\pi Z_3) - e^{-2\pi i Z_1 Z_3}\pi\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3)\Big),\\
\mathcal{Z}_0 &= \frac{-1}{4\pi}\csc(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\Big(\pi Z_1 Z_3 - \pi\cot(\pi Z_1)\cot(\pi Z_3) - \cot(\pi Z_1 Z_3)\\
&\quad + \pi\big(Z_1\cot(\pi Z_1) + Z_3\cot(\pi Z_3)\big)\cot(\pi Z_1 Z_3)\Big).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

利用这些精确值，我们发现，如果选择 $(\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}}, \gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}}, \gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}}) = (1, -1, -i)$，那么全部40个双线性关系在 κ 中的高阶项[†11] 上也成立。采用这一组 $(\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}}, \gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}}, \gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}})$，我们还在固定 $2\pi i\zeta_1 \in \mathbb{Z}$ 的情况下，利用附录A.2中说明的方法，检查了 $k > 1$ 在若干点 (L_1, L_2, L, ζ_1) 处的双线性关系，结果列于附录D。

总结中　我们提出的巨配分函数双线性关系为

$$\begin{aligned}
&e^{-\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)} S^{(1)}_{\boldsymbol{M}}\widetilde{\Xi}_{a_\pm b_\pm c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing}(1,\kappa) + e^{\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)} S^{(2)}_{\boldsymbol{M}}\widetilde{\Xi}_{a_\pm b_\mp c_\varnothing d_\varnothing e_\varnothing}(-1,\kappa)\\
&\quad + S^{(3)}_{\boldsymbol{M}}\widetilde{\Xi}_{a_\varnothing b_\varnothing c_{\pm\sigma_1} d_{\pm\sigma_2} e_{\pm\sigma_3}}(-i,\kappa) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

[†11]事实上，我们只检验了次低阶 $N=1$。

请注意，这里找到的系数 $(\gamma^{(1)}_{\boldsymbol{M}},\ \gamma^{(2)}_{\boldsymbol{M}},\ \gamma^{(3)}_{\boldsymbol{M}}) = (1,\ -1,\ -i)$ 让人联想到 [59]，中的系数，该处为 ABJM 理论找到了类似的双线性关系。由于 ABJM 理论只有一个相对秩，式 (4.6) 中前两个双线性项的两个因子退化为相同的因子。对于当前的 D_5 情形，我们可以通过增加相对秩解除这些退化，并确定式 (4.6) 中的完整表达式。

5 Weyl群下的协变性

在前两节中，我们发现巨配分函数满足40个双线性关系。由于存在额外因子（$S^{(1)}_{\boldsymbol{M}}$，$S^{(2)}_{\boldsymbol{M}}$，$S^{(3)}_{\boldsymbol{M}}$）（3.12），乍看之下，这些双线性关系并不具有关于 Weyl群的协变性。不过，由最低阶项归一化后的巨配分函数是谱算子 $\mathrm{Det}(1+\kappa\widehat{H}_k^{-1},\boldsymbol{M})$ 的 Fredholm 行列式，而该行列式（推测）在 Weyl群作用下保持不变（2.21），因此自然可以预期这些双线性关系具有协变性。本节将说明这种协变性是如何实现的。

我们将巨配分函数的双线性关系（4.1）视为 Fredholm 行列式 $\mathrm{Det}(1+\kappa\widehat{H}_k^{-1},\boldsymbol{M})$ 的双线性关系，并将其示意性地改写为

$$f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{1,\boldsymbol{M}}\prod_{\pm}\mathrm{Det}(1+\kappa\widehat{H}^{-1}_{k,\boldsymbol{M}_\alpha\pm\frac{1}{2}(\delta^a_\alpha+\delta^b_\alpha)})+f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{2,\boldsymbol{M}}\prod_{\pm}\mathrm{Det}(1-\kappa\widehat{H}^{-1}_{k,\boldsymbol{M}_\alpha\pm\frac{1}{2}(\delta^a_\alpha-\delta^b_\alpha)})$$
$$+f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{3,\boldsymbol{M}}\prod_{\pm}\mathrm{Det}(1\mp i\kappa\widehat{H}^{-1}_{k,\boldsymbol{M}_\alpha\pm\frac{1}{2}(\sigma_1\delta^c_\alpha+\sigma_2\delta^d_\alpha+\sigma_3\delta^e_\alpha)})=0. \tag{5.1}$$

这里 $f_{(a、\ b;\ \sigma_1、\ \sigma_2、\ \sigma_3)1、\boldsymbol{M}}$、 $f_{(a、\ b;\ \sigma_1、\ \sigma_2、\ \sigma_3)2、\boldsymbol{M}}$、 $f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}_{3\ \boldsymbol{M}})$、是 $Z_{k、\ \boldsymbol{M}'}(0)$ 的双线性关系

$$f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{1,\boldsymbol{M}}=e^{-\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)}S^{(1)}_{\boldsymbol{M}}\prod_{\pm}Z_{k,\boldsymbol{M}_\alpha\pm\frac{1}{2}(\delta^a_\alpha+\delta^b_\alpha)}(0),$$
$$f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{2,\boldsymbol{M}}=e^{\frac{\pi i}{2k}(\sigma_1 c+\sigma_2 d+\sigma_3 e)}S^{(2)}_{\boldsymbol{M}}\prod_{\pm}Z_{k,\boldsymbol{M}_\alpha\pm\frac{1}{2}(\delta^a_\alpha-\delta^b_\alpha)}(0),$$
$$f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{3,\boldsymbol{M}}=S^{(3)}_{\boldsymbol{M}}\prod_{\pm}Z_{k,\boldsymbol{M}_\alpha\pm\frac{1}{2}(\sigma_1\delta^c_\alpha+\sigma_2\delta^d_\alpha+\sigma_3\delta^e_\alpha)}(0). \tag{5.2}$$

注意， $\boldsymbol{M}'$ of $Z_{k、\ \boldsymbol{M}'}(0)$ 的自变量根据 $(a、\ b;\ \sigma_1、\ \sigma_2、\ \sigma_3)$ 从 $\boldsymbol{M}$ 发生了移位。如下文所示，Weyl 协变性通过 $Z_{k、\ \boldsymbol{M}}(0)$ 的非平凡四次恒等式得以实现。

从 Fredholm 行列式关系式 (5.1) 的角度来看，除了由 $(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 标记的原始关系式 (5.1) 外，我们还可以利用 D_5 Weyl群的每个元素生成另外一组 40 个关系式。例如，来看一下关系式 $(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) =$

(5.1) 中的 $(M_0, M_1; + + +)$ 在 $\boldsymbol{M} = (M_0, M_3, M_1, Z_1, Z_3)$ 处取值：

$$
\begin{aligned}
& f^{(M_0,M_1;+++)}_{1,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)} \prod_{\pm} \mathrm{Det}(1+\kappa \widehat{H}^{-1}_{k,(M_0\pm\frac{1}{2},M_3\pm\frac{1}{2},M_1,Z_1,Z_3)}) \\
& + f^{(M_0,M_1;+++)}_{2,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)} \prod_{\pm} \mathrm{Det}(1-\kappa \widehat{H}^{-1}_{k,(M_0\pm\frac{1}{2},M_3\mp\frac{1}{2},M_1,Z_1,Z_3)}) \\
& + f^{(M_0,M_1;+++)}_{3,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)} \prod_{\pm} \mathrm{Det}(1\mp i\kappa \widehat{H}^{-1}_{k,(M_0,M_3,M_1\pm\frac{1}{2},Z_1\pm\frac{1}{2},Z_3\pm\frac{1}{2})}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

利用 Fredholm 行列式在 w 下的不变性：$(M_0, M_1, M_3, Z_1, Z_3) \to (M_0, M_3, M_1, Z_1, Z_3)$，我们可以将这一关系改写为

$$
\begin{aligned}
& f^{(M_0,M_1;+++)}_{1,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)} \prod_{\pm} \mathrm{Det}(1+\kappa \widehat{H}^{-1}_{k,(M_0\pm\frac{1}{2},M_1,M_3\pm\frac{1}{2},Z_1,Z_3)}) \\
& + f^{(M_0,M_1;+++)}_{2,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)} \prod_{\pm} \mathrm{Det}(1-\kappa \widehat{H}^{-1}_{k,(M_0\pm\frac{1}{2},M_1,M_3\mp\frac{1}{2},Z_1,Z_3)}) \\
& + f^{(M_0,M_1;+++)}_{3,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)} \prod_{\pm} \mathrm{Det}(1\mp i\kappa \widehat{H}^{-1}_{k,(M_0,M_1\pm\frac{1}{2},M_3,Z_1\pm\frac{1}{2},Z_3\pm\frac{1}{2})}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

作为 Fredholm 行列式的关系，这与（5.1）中带有移位 $(a, b; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (M_0, M_3; + + +)$ 的关系具有相同的形式，区别仅在于三个项的系数。由于这两个关系对于 κ 的所有阶数都成立，因此自然可以将这两个关系视为仅相差一个整体因子，这意味着

$$
\frac{f^{(M_0,M_3;+++)}_{1,(M_0,M_1,M_3,Z_1,Z_3)}}{f^{(M_0,M_1;+++)}_{1,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)}} = \frac{f^{(M_0,M_3;+++)}_{2,(M_0,M_1,M_3,Z_1,Z_3)}}{f^{(M_0,M_1;+++)}_{2,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)}} = \frac{f^{(M_0,M_3;+++)}_{3,(M_0,M_1,M_3,Z_1,Z_3)}}{f^{(M_0,M_1;+++)}_{3,(M_0,M_3,M_1,Z_1,Z_3)}}. \tag{5.5}
$$

由于 $f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{1,\boldsymbol{M}}$、$f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{2,\boldsymbol{M}}$、$f^{(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}_{3,\boldsymbol{M}}$ 是 $Z_{k,\boldsymbol{M}'}(0)$（5.2）的双线性关系，因此这些是在不同点 $\boldsymbol{M}'$ 处取值的 $Z_{k,\boldsymbol{M}'}(0)$ 之间的四次关系。通过对初始移位 $(a, b; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 以及 D_5 Weyl群中的元素 w 作不同选择，我们还可以得到关于 $Z_{k,\boldsymbol{M}'}(0)$ 的不同四次关系。我们利用通过公式（3.2）得到的 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)$ 在 (L_1, L_2, L) 的各种取值下的精确表达式，对若干个例子进行了检验，结果表明这些四次关系确实成立。

请注意，一旦我们假设这些四次关系以及表 2 和表 3 中关于 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)$ 的 40个双线性关系中的任意一个，就可以推导出关于 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)$ 的其余 39 个双线性关系，但反过来则不一定成立。从这个意义上说，我们或许可以认为四次关系（加上一条双线性关系）比式（4.6）中的 40个双线性关系更为基本。目前，我们还无法清楚解释这些关系如何从 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)$ 的定义中导出。

到目前为止，巨配分函数被认为只在基本域内定义。由于双线性关系在基本域的边界处也成立，我们可以认为巨配分函数自然延伸到了原基本域之外。下一节将明确展示这一点。

6 基本域之外的应用

我们发现，40个双线性关系适用于 $N = 0$ 第 3 节中的配分函数，并且在第 4 节中对更高秩也成立。这里我们想指出，40个双线性关系不仅优美，而且实用。虽然迄今为止我们主要给出了 $N = 0$ 处的配分函数，并发现它们在菱形十二面体的基本域内（图3）均不为零，但更高秩的配分函数可以在非零值区域呈现非平凡结构。我们已计算了第 4 节原始基本域内 $N = 1$ 处的配分函数。利用第 4 节提出的双线性关系，在 (L_1、 L_2、 L) 的一般点处，我们可以计算原始基本域之外的配分函数，并研究 $N = 1$处配分函数的基本域如何扩展。通常， $N = 1$ （以及更高的 N）对应的基本域比 $N = 0$对应的更大。我们将以 $k = 1$ 的情形说明这一计算，并给出原始基本域之外 $N = 1$ 处的配分函数。如第 7.3 节后文所述，结果呈现出与 Painlev´e 方程及对偶级联相符的图景。另请注意，40个双线性关系一般而言是超定的。它们不仅给出未知的配分函数，还提供非平凡的一致性检验。

在 $\boldsymbol{M} = (M_0,\ M_1,\ M_3,\ Z_1,\ Z_3)$ 处取值的双线性关系，将取值为不同移位后的最近格点的配分函数联系起来。因此，在原基本域的边界处取值时，双线性关系要求基本域之外的配分函数满足非平凡约束。例如，考虑在“基点”$(0,\ 1/2,\ 1/2)$ 处、移位为 $(M_1,\ M_3; +\,+\,+)$ 的双线性关系，三项分别是由第一项中 $(0,\ 1,\ 1)$、$(0,\ 0,\ 0)$ 处的配分函数构成的双线性关系，第二项中 $(0,\ 1,\ 0)$、$(0,\ 0,\ 1)$ 处的配分函数构成的双线性关系，以及第三项中 $(\pm 1/2,\ 1/2,\ 1/2)$ 处的配分函数构成的双线性关系，其中Z_1和 Z_3 的取值也经过了移位。由于其中只有 $(0,\ 1,\ 1)$ 处的配分函数位于原基本域之外且未知，因此我们可以利用双线性关系来确定其取值。也就是说，令我们将该双线性关系按 κ 展开。于是，由于第 3 节的结果，零阶项成立，因为 $(0,\ 1,\ 1)$ 处的配分函数为零，而双线性热在线精品

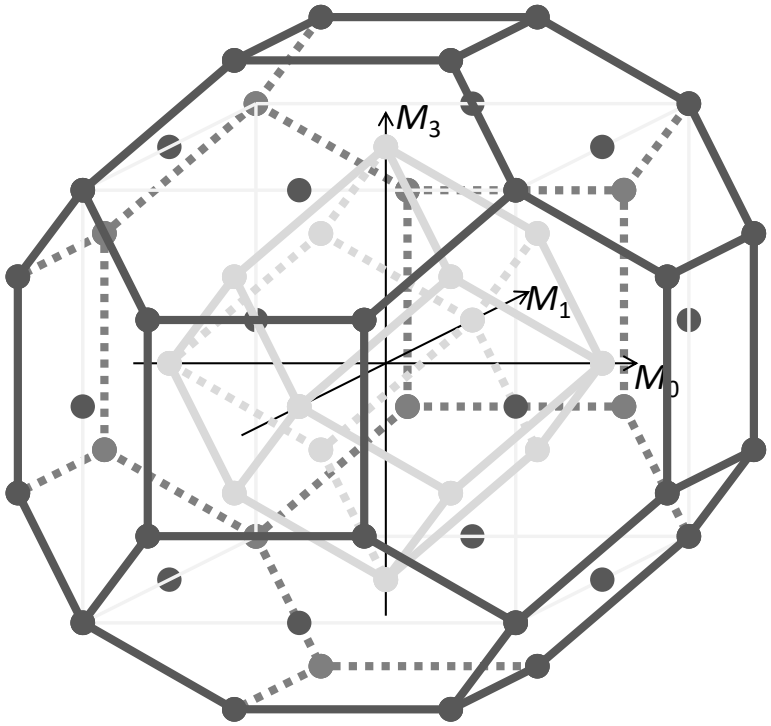


图5： $N=1$ 的配分函数非零的区域。 $N\geq 1$ 的配分函数在 $N=0$的菱形十二面体原始基本域之外也可能非零，该基本域以浅灰色显示。

κ 的一阶关系为

$$
\begin{aligned}
&e^{-\frac{\pi i}{2}(Z_1+Z_3)}Z_{0,0,0,Z_1,Z_3}(0)Z_{0,1,1,Z_1,Z_3}(1)\\
&-e^{\frac{\pi i}{2}(Z_1+Z_3)}Z_{0,1,0,Z_1,Z_3}(0)Z_{0,0,1,Z_1,Z_3}(0)\Big(\frac{Z_{0,1,0,Z_1,Z_3}(1)}{Z_{0,1,0,Z_1,Z_3}(0)}+\frac{Z_{0,0,1,Z_1,Z_3}(1)}{Z_{0,0,1,Z_1,Z_3}(0)}\Big)\\
&-i\prod_{\pm}Z_{\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},Z_1\pm\frac{1}{2},Z_3\pm\frac{1}{2}}(0)\Big(\frac{Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},Z_1+\frac{1}{2},Z_3+\frac{1}{2}}(1)}{Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},Z_1+\frac{1}{2},Z_3+\frac{1}{2}}(0)}-\frac{Z_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},Z_1-\frac{1}{2},Z_3-\frac{1}{2}}(1)}{Z_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},Z_1-\frac{1}{2},Z_3-\frac{1}{2}}(0)}\Big)=0. \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

这里我们省略了下标中的 k，因为我们只考虑 $k=1$。通过求解该方程，我们得到$Z_{0,1,1,Z_1,Z_3}$(1)，如式（C.6）所示。值得注意的是，尽管我们有多个关系式来确定同一个配分函数，且这些关系式构成了超定系统，但通过这种方式确定的配分函数彼此之间都是一致的。我们还可以进行相同的计算，以确定基本域外其他点处的$Z_{k,\boldsymbol{M}}(N=1)$。结果见附录C。

我们发现，巨配分函数 $\Xi_{k,\boldsymbol{M}}$ 在 κ （其中 $N=1$）中非零的次低阶对应的区域，较最低阶（其中 $N=0$）的原始基本域略有扩展。参见图5。结果与 $[61,62]$, 中所示的对偶级联图景相符，该图景表明，相对秩离原点越远，

非零配分函数所需的总秩 N 就越高。也就是说，我们发现，从 q-Painlev´e 方程的双线性关系得到的结果也与对偶级联相符。

7 与其他研究的比较

本节将讨论我们的结果与一些关于 q-Painlev´e 方程和超陈-西蒙斯理论的既有研究之间的联系。

7.1 与 [63] 的比较

需要指出的是，从 Painlev´e 方程的漫长发展史中 Weyl 群的视角来看，我们发现双线性关系并非全新。事实上， [63] 双线性方程[†12]

$$
\begin{aligned}
&q^{n_c+n_d+n_e}\tau^{ab}\tau_{ab} + q^{-n_c-n_d-n_e}\tau^{a}{}_{b}\tau_{a}{}^{b} - \tau^{cde}\tau_{cde} = 0,\\
&q^{-n_c-n_d+n_e}\tau^{ab}\tau_{ab} + q^{n_c+n_d-n_e}\tau^{a}{}_{b}\tau_{a}{}^{b} - \tau^{cd}{}_{e}\tau_{cd}{}^{e} = 0,
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

早已仅从 Weyl 群的角度提出。这里， τ 表示定义在五维格点上的 $q\mathrm{P}_{\mathrm{VI}}$ 的 tau函数，其指标方向在上标中表示正向移位，在下标中表示负向移位。也就是说，如果我们按照 [40,73], 构造仿射 D_5Weyl 群的表示，那么上述双线性方程便可由双线性方程中的三项线性相关这一事实推出。从这个意义上说，双线性方程的结构主要由仿射 D_5 Weyl 群确定。然而，Weyl 群无法解释双线性方程的系数，因为我们可以用任意函数对 τ函数重新缩放，而这会改变系数。

因此，相较而言，本文的发现可概括为以下两点：超 Chern-Simons 理论的配分函数满足 q-Painlev´e 方程$q\mathrm{P}_{\mathrm{VI}}$ ；而那些无法由 Weyl群确定的方程系数也得到了明确确定。值得注意的是，尽管这些系数无法由 Weyl群确定，却相当简单，仅包含 (3.12) 中的 S_M 因子。

7.2 与 [60] 的比较

本文研究了超 Chern-Simons 理论的巨配分函数所满足的双线性关系。关于与巨配分函数相关的 Fredholm

[†12]我们感谢 Yasuhiko Yamada 提供宝贵的讲解并参与讨论。

行列式 Det$(1+\kappa\widehat{H}_k^{-1},_{\boldsymbol{M}})$ 的类似研究始于$1+\kappa\widehat{H}_k^{-1}$，正如引言中所述。本文的研究在很大程度上依赖于他们的分析。下面我们将讨论其中的一些相似之处和差异。

在 [60] 中，仅针对 $L=0$计算了配分函数；而在这里，我们将计算推广到了通常的 L。若将范围限制为 $N=0$，则仍可得到通常的 L对应的配分函数显式表达式。如第 3 节所示，随着 L增加，行列式的矩阵大小也相应增大，这与 Painlev´e 方程 [72]的结构相似。

此外，在 [60] 中，我们通过参考 [47]中的 Nekrasov-Okounkov 配分函数的双线性关系，探求 Fredholm 行列式的双线性关系。结果发现，需要像$F_{k,\boldsymbol{M}}$Det$(1+\Omega_{k,\boldsymbol{M}}\kappa\widehat{H}_k^{-1},_{\boldsymbol{M}})$ 那样，引入一些因子（$F_{k,\boldsymbol{M}}$ 和 $\Omega_{k,\boldsymbol{M}}$），而不是使用原来的 Fredholm 行列式。不过，这些因子的物理起源或群论起源尚不明确。

我们的分析基于巨配分函数$\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$，而非 Fredholm 行列式，并且只参考 [47,63] 的指标结构，不涉及 [47]的系数。我们发现，在 [60] 中引入的因子$F_{k,\boldsymbol{M}}$，可由巨配分函数最低阶中出现的配分函数取代，而后者有可靠的物理起源。^此外，既然有猜想认为 Fredholm 行列式中的谱算子$H_{k,\boldsymbol{M}}$ 在 D_5 Weyl群作用下保持不变，那么在 [60]中发现一个在该群作用下非平凡变换的因子 $\Omega_{k,\boldsymbol{M}}$ 就令人费解。相比之下，考虑到 D_5 Weyl群，我们提出令 $(\gamma_{\boldsymbol{M}}^{(1)},\gamma_{\boldsymbol{M}}^{(2)},\gamma_{\boldsymbol{M}}^{(3)})=(1,-1,-i)$为常数，这一方案更为合理。所有这些修改使 [60]中的方案回归到类似于 [59]的形式，无论从物理还是群论角度来看都更令人信服。

此外，在 [60] 中仅提出了几个双线性关系。正如上一小节所强调的，由于系数在 Weyl群下并非不变量，因此有必要确定全部40个双线性关系的系数。我们在这方面取得了进展，并在(4.6)和(3.12)中总结了结果。

7.3 与 [69, 74]的比较

最后，本小节将比较以往关于 $[69,74]$ 中Hanany-Witten 跃迁和对偶级联的研究。

正如在 $[61,62]$, 对偶级联下，相对秩（M_0，M_1，M_3）会发生平移移位，同时总秩 N 逐渐降低，最终我们到达具有最低总秩 N的基本域（2.13）。然而，当相对秩位于其中时，情况较为微妙

在基本域的边界上，因为一侧边界上的相对秩会移位到对侧边界上的相对秩，因此两者应当平等对待。这里，我们先来研究对侧边界上配分函数之间的关系。

有趣的是，利用附录 B.2 中给出的配分函数，我们发现位于相对边界、并由对偶级联关联的 $k=2$ 的配分函数满足如下关系

$$
\begin{aligned}
&\frac{Z^{(0)}_{-M+1,M+1,M_3}}{Z^{(0)}_{-M-1,M-1,M_3}}\Bigg|^{k=2}_{-1\le M\le 1} = \{16\sin^4(\pi Z_1), 8\cos^3(\pi Z_1), -4\sin^2(\pi Z_1), 2\cos(\pi Z_1), 1\},\\
&\frac{Z^{(0)}_{M-1,M+1,M_3}}{Z^{(0)}_{M+1,M-1,M_3}}\Bigg|^{k=2}_{-1\le M\le 1} = e^{2\pi i Z_1 Z_3}\{16\sin^4(\pi Z_1), 8\cos^3(\pi Z_1), -4\sin^2(\pi Z_1), 2\cos(\pi Z_1), 1\},\\
&\frac{Z^{(0)}_{-M+1,M_1,M+1}}{Z^{(0)}_{-M-1,M_1,M-1}}\Bigg|^{k=2}_{-1\le M\le 1} = \{16\sin^4(\pi Z_3), 8\cos^3(\pi Z_3), -4\sin^2(\pi Z_3), 2\cos(\pi Z_3), 1\},\\
&\frac{Z^{(0)}_{M-1,M_1,M+1}}{Z^{(0)}_{M+1,M_1,M-1}}\Bigg|^{k=2}_{-1\le M\le 1} = e^{2\pi i Z_1 Z_3}\{16\sin^4(\pi Z_3), 8\cos^3(\pi Z_3), -4\sin^2(\pi Z_3), 2\cos(\pi Z_3), 1\},\\
&\frac{Z^{(0)}_{M_0,-M+1,M+1}}{Z^{(0)}_{M_0,-M-1,M-1}}\Bigg|^{k=2}_{-1\le M\le 1} = 16e^{2\pi i Z_1 Z_3}\\
&\qquad\times\{\sin^4(\pi Z_3), \cos(\pi Z_1)\cos^3(\pi Z_3), \sin^2(\pi Z_1)\sin^2(\pi Z_3), \cos^3(\pi Z_1)\cos(\pi Z_3), \sin^4(\pi Z_1)\},\\
&\frac{Z^{(0)}_{M_0,M-1,M+1}}{Z^{(0)}_{M_0,M+1,M-1}}\Bigg|^{k=2}_{-1\le M\le 1}\\
&\quad=\{\csc^4(\pi Z_1)\sin^4(\pi Z_3), \sec^3(\pi Z_1)\cos^3(\pi Z_3), \csc^2(\pi Z_1)\sin^2(\pi Z_3), \sec(\pi Z_1)\cos(\pi Z_3), 1\},
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

（步长为 $1/2$）。这里我们对配分函数采用了与第 6 节相同的缩写（4.4）。注意，结果仅取决于下标中出现的 $-1\le M\le 1$ 中的变量，而与其余变量无关。这里可以发现一种相当简洁的模式，其中$\big(2\sin(\pi Z+\frac{n\pi}{2})\big)^n$。

—

对于在附录 B.1 和 C 中得到的同时具有 $k=1$ 和 $N=0$ 以及 $N=1$ 的配分函数，其结构更加令人印象深刻。为了解释这一关系，我们首先定义最低阶的非零配分函数 $Z^{\text{low}}_{M_0}$、$_{M_1}$、$_{M_3}$，即使它们位于基本域之外。也就是说，正如第 3 节所解释的，在 $N=0$、$Z^{(0)}_{M_0}$、$_{M_1}$、$_{M_3}$处的配分函数仅在基本域内非零。在第 6 节和附录C中，我们研究了 $N=1$、$Z^{(1)}_{M_0}$、$_{M_1}$、$_{M_3}$处的配分函数，并发现基本域略有扩展。对于当前仅具有 $N=0$ 和 $N=1$、$Z^{\text{low}}_{M_0}$、$_{M_1}$、$_{M_3}$ 的情形，当相对秩$\boldsymbol{M}=$（M_0、M_1、M_3）位于基本域内时，$_{M_3}$ 表示 $Z^{(0)}_{M_0}$、$_{M_1}$、$_{M_3}$；而当 $\boldsymbol{M}$位于基本域之外时，$Z^{(1)}_{M_0}$、$_{M_1}$、$_{M_3}$表示

基本域之外，但位于图5中的多边形内。于是，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{Z^{\text{low}}_{M_0+\frac{1}{2},M_1+\frac{1}{2},M_3}}{Z^{\text{low}}_{M_0-\frac{1}{2},M_1-\frac{1}{2},M_3}}\Bigg|^{k=1}_{-1\le M_1\le 1} = \big\{8\cos^3(\pi Z_1),-4\sin^2(\pi Z_1),2\cos(\pi Z_1),1,\big(2\cos(\pi Z_1)\big)^{-1}\big\},\\
&\frac{Z^{\text{low}}_{M_0-\frac{1}{2},M_1+\frac{1}{2},M_3}}{Z^{\text{low}}_{M_0+\frac{1}{2},M_1-\frac{1}{2},M_3}}\Bigg|^{k=1}_{-1\le M_1\le 1} = e^{2\pi i Z_1 Z_3}\big\{8\cos^3(\pi Z_1),-4\sin^2(\pi Z_1),2\cos(\pi Z_1),1,\big(2\cos(\pi Z_1)\big)^{-1}\big\},\\
&\frac{Z^{\text{low}}_{M_0+\frac{1}{2},M_1,M_3+\frac{1}{2}}}{Z^{\text{low}}_{M_0-\frac{1}{2},M_1,M_3-\frac{1}{2}}}\Bigg|^{k=1}_{-1\le M_3\le 1} = \big\{8\cos^3(\pi Z_3),-4\sin^2(\pi Z_3),2\cos(\pi Z_3),1,\big(2\cos(\pi Z_3)\big)^{-1}\big\},\\
&\frac{Z^{\text{low}}_{M_0-\frac{1}{2},M_1,M_3+\frac{1}{2}}}{Z^{\text{low}}_{M_0+\frac{1}{2},M_1,M_3-\frac{1}{2}}}\Bigg|^{k=1}_{-1\le M_3\le 1} = e^{2\pi i Z_1 Z_3}\big\{8\cos^3(\pi Z_3),-4\sin^2(\pi Z_3),2\cos(\pi Z_3),1,\big(2\cos(\pi Z_3)\big)^{-1}\big\}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

请注意，与前一种仅在边界上的情形 $k=2$ (7.2) 相比，这里我们可以将其推广到对偶级联所关联的所有三维格点。也就是说，无论 (M_0, M_1, M_3) 中未指定变量取何值，关系式 (7.3) 都成立。

另一方面，[69,74] 已证明，Hanany-Witten 跃迁关联的配分函数是相同的。由于对偶级联可以视为连续应用 Hanany-Witten 跃迁 [61, 62], ，如果配分函数像 (7.2) 和 (7.3) 中那样在对偶级联下发生变化，似乎就会产生矛盾。这里我们注意到，[69,74] 中的计算始终针对交换两个不同类型的 5-膜，而非当前设定中所考虑的相同类型的 5-膜。第一个差异迹象已在第 3 节中显现：其中指出，由 Weyl群关联的配分函数并不相同。

尽管相同5-膜的情况存在歧义，我们的配分函数仍与图3中的基本域及其针对 $N=1$ 在图5中的推广相一致，也与40个双线性关系相一致。从这个意义上说，我们的配分函数符合迄今为止所有的预期和研究结果。

8 结论

本文研究了规范群为 U(N_1)$_{0,\ -i\zeta_2}$ ×U(N_2)$_{k,\ i\zeta_1}$ ×U(N_3)$_{0,\ -i\zeta_1}$ ×U(N_4)$_{-k,\ i\zeta_2}$ 的三维 $\mathcal{N}=4$ 超 Chern-Simons 理论的巨配分函数所满足的双线性关系。我们发现了 40个双线性关系，它们对任意能级和秩都成立。下面列出我们希望在未来继续探索的几个方向。

• 为了找到系数较为简单的双线性关系，我们将配分函数原有的总相位因子 $\Theta_{k,\ \boldsymbol{M}}$ 替换为另一个相位因子 $\Theta'_{k,\ \boldsymbol{M}}$ (2.16)。我们希望理解这一总相位因子变化的物理意义或群论意义。

• 在第 6 节中，我们研究了 $N=0$ 基本域之外的配分函数（见图5），并利用这些配分函数发现了第 7.3 节中配分函数之间的非平凡关系。尽管在第 6 节和第 7.3 节中我们重点研究了 $N=1$ 处的配分函数，但将分析扩展到 $N\geq 2$ 并考察我们发现的结构如何推广，将会很有意义。

• 在 [23] 中，人们观察到，对于某些秩的取值，配分函数会发散。在附录 B.2 的结果中，通过将 FI 参数 Z_1 和 Z_3 设为零，再次证实了这一点。我们希望理解这些发散的物理意义。在第 7.3 节中，我们还观察到，在 $Z_i\to 0$ 极限下配分函数发散的那些点，通过涉及同类型 5-膜交换的 Hanany-Witten 跃迁，与配分函数有限或弱发散的点相关。另一方面，众所周知，这类 Hanany-Witten 跃迁可以将良好理论 [75] 转化为丑陋/坏理论，并且通过添加质量/FI参数进行正则化的坏理论的配分函数，会在关闭正则化时发散 [76, 77]。综合这些事实，我们怀疑，所观察到的发散也可能表明，对于相应的秩，该超 Chern-Simons 理论是不良的 [78]。

• 如果将 D_5 Weyl群作用于不等式（2.13），我们还可以得到对 FI 参数 [61] 的约束。从计算角度来看，对 FI 参数的界限可能通过以下方式产生，尽管由此得到的界限似乎不同于 D_5 Weyl群所预言的界限。在矩阵模型（2.3）中，具有非零 Chern-Simons能级的节点上的 FI 项可以通过移位积分变量来吸收。当 $Z_1,\ Z_2\in i\mathbb{R}$ 时，这种移位不会改变积分路径。然而，当 $|\mathrm{Re}[Z_1]|$ 或 $|\mathrm{Re}[Z_3]|$ 大于 $k/2$时，积分路径会穿过双基本物质的单圈行列式的极点，因此新积分路径对应的矩阵模型可能不同于原来的矩阵模型。这意味着，从 $Z_1,\ Z_2\in i\mathbb{R}$ 通过解析延拓得到的解析表达式，仅在 $|\mathrm{Re}[Z_1]|$和 $|\mathrm{Re}[Z_3]|$ 小于临界值时才成立。然而，由此得到的界限似乎不同于 D_5 Weyl群所预言的界限。研究这两个界限之间的关系并理解其物理解释，是很有意义的。

• 在本文中　　我们已经检验了巨配分函数 (2.21) 满足

双线性关系 (4.6)，且对于不同的 k and$\boldsymbol{M}$，利用配分函数的精确值验证到了 κ 中次低阶（即 $N=1$）。更理想的做法是，在 k, $\boldsymbol{M}$ 中解析地推导所有 κ 阶的双线性关系 [†13]，将其视为秩不同的矩阵模型之间的新恒等式。据作者所知，这种证明目前仅针对 $q\mathrm{P}_{\mathrm{III}_3}$ 的矩阵模型，在微分极限（在 [59, 79] 中称为对偶四维极限） [57, 80] 下完成。一个较容易的问题是，仅在 $\kappa=0$ 阶（即 $N=0$）解析地推导 k, $\boldsymbol{M}$ 的双线性关系。在这一阶，双线性关系化为 $Z_{k,\,\boldsymbol{M}}(0)$ 的双线性关系 (3.10)。由于 $Z_{k,\,\boldsymbol{M}}(0)$ 本身就是一个矩阵模型，这个较简单的问题或许也能为寻找 $N\geq 0$ 处矩阵模型的恒等式提供一些线索，从而有助于证明双线性关系。此外，由于 $Z_{k,\,\boldsymbol{M}}(0)$ 可写成一个 $L\times L$ 行列式 (3.2)，双线性关系 (3.10) 令人联想到可积系统中的普吕克关系 [81–84]。我们的双线性关系或许可以基于普吕克关系或其推广来理解。此外，由于 $\boldsymbol{M}$ 是 D_5 曲线的参数，最终应将双线性关系 (3.2) 推广到 $\boldsymbol{M}$ 的一般复数取值情形。最关键的一步或许是为 $L\notin\mathbb{N}$ 定义 $Z_{k,\,\boldsymbol{M}}(0)$。

• 在 ABJM 理论中，也可以考虑巨正则系综下半 BPS 威尔逊环的期望值，它们同样具有非平凡的可积结构。在 [28,87,88] 中，人们发现威尔逊环的单点函数 [89,90]在修正的 Kadomtsev-Petviashvili 可积层级中满足各种 Pl¨ucker 关系。对于二点函数 [92]，这一结果甚至推广到了二维 Toda 晶格可积层级 [91]。由于该对应关系是在保持唯一的相对秩 M 不变的条件下建立的，因此可将其视为可积结构的开弦侧。相比之下，本文讨论的可积结构将不同相对秩 $\boldsymbol{M}$ 下的巨配分函数联系起来，应视为闭弦侧。通过开弦/闭弦对偶 [34, 93]联系可积结构的这两侧，将会是一个值得研究的问题。

• 我们可以假设，对于秩无界 N 的更一般的三维超对称规范理论，其巨正则配分函数也会满足类似的非线性 q-差分方程。若确实如此，我们或许可以像第 3 节中那样，通过计算 $N=0$ 处的配分函数来猜测各个模型对应的方程；这类配分函数通常更易处理。正如在我们当前的设定中所见，对偶网络也可能为我们提供有意义的线索。探索与之相关的 q-差分方程也很有趣，

[†13]在 $\mathcal{O}(\kappa^1)$ 处，针对 k、L_1 和 L_2 取任意值但 $L=0$ 的情形，证明了 $q\mathrm{P}_{\mathrm{VI}}$ [47] 的 40个双线性关系中的一部分。虽然该证明使用的系数 $F_{k,\boldsymbol{M}}$ 和 $\Omega_{k,\boldsymbol{M}}$与我们在第7.2节提出的系数不同，但其技巧本身或许仍然适用。

在这一策略下，其他 M2 膜理论，例如具有仿射 D 型箭图的超陈-西蒙斯理论 [94–96] [97]。

- 我们的结果或许能从以下角度为五维规范理论的研究带来新的启示。在 [47] 中，人们发现，含有 $N\mathrm{f}=4$ 个基本物质的五维 $\mathcal{N}=1$ SU(2) 超杨-米尔斯理论的 Nekrasov-Okounkov 配分函数，也满足一组关于 qPVI 的八个双线性 q-差分方程。实际上，若通过将曲线H_k的经典极限$\boldsymbol{M}$ (2.5)与五维理论的 Seiberg-Witten 曲线相等同，来建立五维理论与超 Chern-Simons$\widehat{}$理论的参数对应关系，我们会发现，[47] 中双线性关系里的五维参数，发生的移位与表 2 和表 3 中对应的 8 个关系里的移位相同。相反，每个方程中的三个双线性关系的系数 [47] 与表 2 和表 3 中的系数并不一致（另见 (3.12)）。这表明，[47] 中的 Nekrasov-Okounkov 配分函数 ZNO 与巨配分函数采用了不同的归一化方式，即 $Z\mathrm{NO}=F_{k,\boldsymbol{M}}\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$，并带有一个整体因子$F_{k,\boldsymbol{M}}$。值得注意的是，$Z$NO 与 Fredholm 行列式之间整体因子的类似求解尝试，曾针对 $L=0$ 在 [60], 中进行，详见第7.2节。然而在 [60], 中，缺少了从三维规范理论确定 $F_{k,\boldsymbol{M}}$ 的指导原则，因此也不清楚如何将结果推广到 $L\neq 0$。因此，我们认为这项新结果——在 $N=0$ 处将配分函数与 Fredholm 行列式相乘——是一个更合理的出发点。需要注意的是，仅凭这些要求无法唯一确定 $F_{k,\boldsymbol{M}}$，例如，将 $F_{k,\boldsymbol{M}}$ 乘以 $\boldsymbol{M}$ [46]的任意周期函数就会产生歧义。尽管如此，确定 $F_{k,\boldsymbol{M}}$ 仍然很有意义，因为一旦将其确定下来，我们或许就能利用 Fredholm 行列式，在五维理论中的标准分析难以适用的参数区域内计算 Nekrasov-Okounkov 配分函数 [53, 79]。具体而言，在五维理论中，ZNO 是对瞬子计数参数 t进行微扰计算的；而在超 Chern-Simons 理论中（其中 t 与五个参数 $\boldsymbol{M}$之一相对应），巨配分函数则可以在每个 κ阶上对 $\boldsymbol{M}$进行非微扰计算。

- 尽管我们提出巨配分函数 $\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$ 作为 Painlev´e 方程 $\tau^{q}{}_{\mathrm{PVI}}=\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$ 的 tau函数，为 qPVI 提供了一大类解，但这并未涵盖所有解。事实上，除 Painlev´e 方程的参数（t, $\theta_0,\theta_t,\theta_1,\theta_\infty$）之外，一般解还应包含两个任意参数，它们对应于 $q\to 1$ 极限下二阶微分方程的两个初始条件。在由四/五维 Nekrasov-Okounkov 配分函数（即 Nekrasov 配分函数的离散傅里叶变换）给出的解中，

这两个参数由库仑模量 σ 和傅里叶变换的动量s 体现。在我们的方案中， κ 对应于 σ，但没有与 s对应的参数。也就是说，对于我们的三维超陈-西蒙斯理论，正如艾里函数的积分表示所暗示的那样，为了将矩阵模型的结果与拓扑弦的自由能联系起来，我们需要准备无穷多个巨势副本，并将化学势 $\mu = \log \kappa$ 移位$2\pi i$ ，然后对这些副本求和 [12]。这一求和被确定为 Nekrasov-Okounkov 配分函数中傅里叶变换的求和。然而，由于 $\Xi_{k,M}(\kappa)$ 在 κ (2.21) 中的单值性，这一求和不会引入参数 s，换言之，会将其固定为 $s = 1$。在三维理论一侧纳入 s 是很有趣的。

•除了 q 变形外，我们还可以通过量子化 Painlev´ 方程 [98–100] 引入另一种变形。在五维 Nekrasov-Okounkov 配分函数中，两个变形参数恰好通过 Ω 背景 [101] 实现。将我们的三维巨配分函数推广为包含两个参数的形式，也很有意思。 [46, 52, 102, 103], 中对非交换参数上的仿射魏尔群作用的构造，或许能为这一方向提供一些线索。

• 五维 Nekrasov-Okounkov 配分函数 q-Painlev´e 方程ZNO 在自对偶 Ω 背景 Z SDNO 上，被认为是通过 Nakajima-Yoshioka 爆破方程 [52] 推导得到的。这一推导已在五维 $\mathcal{N} = 1$SU(2) 纯杨-米尔斯理论中得到明确实现，其中相应的 q-Painlev´e 方程为 qPIII$_3$ [102]。值得注意的是，直接从爆破方程得到的关系并非 qPIII3 方程本身，而是在一般非自对偶 Ω 背景下，用 ZNO 的双线性关系表示 ZSDNO 的几个不同表达式。随后，通过从这些表达式 [102] 中消去这些 ZNO，即可得到 qPIII3。在三维超陈-西蒙斯理论的框架下，对于 qPIII3 而言，该理论即为 ABJM 理论，其巨配分函数 $\Xi_{k,M}(\kappa)$ 对应于 ZSDNO，而一般 Ω 背景下 ZNO 的对应物目前仍不清楚。然而，有趣的是，即使在 ABJM 理论中，也观察到了几个类似于爆破方程的关系（称为类朗斯基关系） [58], ，它们将 Fredholm$\widehat{\ }$ 行列式本身表示为具有手征投影 $\Pi_\pm$ 的对象的双线性关系，$\mathrm{Det}(1 + \kappa \widehat{H}^{-1} \widehat{\Pi}_\pm)$。值得研究的是，对于本文研究的具有两个 NS5 膜和两个 $(1, k)$5-膜的理论，是否也存在此类关系，因为它们可能比 qPVI 更为基础。此外，由于此类关系将直接对应于爆破方程，因此它们也有助于推广 [102] 中的证明，从而明确表明 Z SDNO 对于$N\mathrm{f} = 4$ 满足 qPVI。

配分函数的计算

在本附录中，我们说明如何计算 $\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$ (2.21) 在 κ 中的展开系数。首先注意到，根据广义费米气体形式 (2.15)，$\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$ 由下式给出（见 [60]）

$$\begin{aligned}\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa) &= \sum_{N=0}^{\infty} \kappa^N Z_{k,\boldsymbol{M}}(N) \\ &= e^{i\Theta_{k,\boldsymbol{M}}} Z^{\mathrm{CS}}(L_1) Z^{\mathrm{CS}}(L_2) \mathrm{Det}(1+\kappa \widehat{D}_1 \widehat{D}_2) \det\left([\langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1 (1+\kappa \widehat{D}_2 \widehat{D}_1)^{-1} \widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle]_{(r,s)} \right).\end{aligned} \tag{A.1}$$

该表达式意味着，我们可以通过计算来得到 N 阶展开系数 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 的 $\Xi_{k,\boldsymbol{M}}(\kappa)$

$$\mathrm{Tr}(\widehat{D}_1 \widehat{D}_2)^n, \quad \langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1 (\widehat{D}_2 \widehat{D}_1)^n \widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle, \tag{A.2}$$

其中 $n \leq N$。

下面我们介绍两种不同的方法，用于计算 $\mathrm{Tr}(\widehat{D}_1 \widehat{D}_2)^n$ 和 $\langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1 (\widehat{D}_2 \widehat{D}_1)^n \widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$ 在 $k, L_1, L_2, L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及 $L_1, L_2 \leq k$ 时的精确值。第一种方法（方法 I）是在 [17] 中基于技巧 [104], 提出的方法；第二种方法（方法 II）则是在 [105] 中用于计算 $N = 2$ 处 ABJM 理论配分函数的积分技巧。[14] 方法 I 使我们能够通过系统的递归过程来组织 $\mathrm{Tr}(\widehat{D}_1 \widehat{D}_2)^n$ 和 $\langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1 (\widehat{D}_2 \widehat{D}_1)^n \widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$ 的计算，尽管该方法要求我们固定 ζ_1，使得 [15] $2i\zeta_1 \in \mathbb{Z}$ （也就是说，我们得到 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 作为 ζ_2 的函数，但只在 ζ_1 的离散点处取值）。方法 II 使我们能够将 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 计算为 ζ_1, ζ_2 的函数，但对于更高秩，要编写递归过程则更加困难。

请注意，在方法 I 中，我们通过假设 $\zeta_2 \in \mathbb{R}$ 进行计算，并将 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 对于 $\zeta_2 \in \mathbb{C}$ 定义为针对 $\zeta_2 \in \mathbb{R}$ 得到的解析表达式的延拓。在方法 II 中，我们假设 $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$，以获得 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 的解析表达式，并通过解析延拓将一般 $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ 情况下的 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 定义为其延拓。我们观察到，按照这种解析延拓方案计算得到的 $Z_{k,\boldsymbol{M}}(N)$ 的精确值 [16] 确实彼此一致，符合 $Z_{k,\boldsymbol{M}(N)}\ Z_{k,\boldsymbol{M}(0)}$ 在 Weyl群下的不变性，并满足 40个双线性关系 (4.6)。

---

[14] 两种方法（I 和 II）也分别用于 [22] 中计算带有 $L_1 = L_2 = L = \zeta_1 = \zeta_2 = 0$ 的配分函数，以及在 [106] 中计算更高秩的质量变形的 ABJM 理论 [26, 107] 的配分函数。

[15] 原则上可以将方法 I 推广到 $2i\zeta_1 \in \mathbb{Q}$，不过计算会变得繁琐。

[16] [106] 中也采用了相同的方案，针对质量变形的 ABJM 理论的质量参数，得到了广义的 q-Toda 双线性关系。

在本附录的其余部分，在详细阐述这两个量（A.2）之后，我们将采用附录A.2和附录A.3中的两种方法进行计算。

A.1 迹$(D_1D_2)^n$ 和$\langle\langle t_{L,\ r}|d_1(D_2D_1)^n d_2|-t_{L,\ s}\rangle\rangle$

为了说明这两种方法，我们将 (A.2) 中的两个量，即迹$(D_1D_2)^n$ 和$\langle\langle t_{L,\ r}|d_1(D_2D_1)^n d_2|-t_{L,\ s}\rangle\rangle$，改写为递归表达式。我们首先考虑共有的成分 D_1D_2。经过相似变换后，它可改写为

$$\widehat{D}_1\widehat{D}_2 \sim \widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2, \tag{A.3}$$

其中， $\widehat{\rho}_1$ 和 $\widehat{\rho}_2$ 由下式给出

$$\widehat{\rho}_1 = \sqrt{A(\widehat{x})}\frac{1}{2\cosh\frac{\widehat{p}}{2}}\sqrt{B(\widehat{x})}, \quad \widehat{\rho}_2 = \sqrt{B(\widehat{x})}\frac{1}{2\cosh\frac{\widehat{p}}{2}}\sqrt{A(\widehat{x})}, \tag{A.4}$$

with

$$\begin{aligned} A(x) &= e^{(-\frac{i\zeta_1}{k}-\frac{L}{k})x}\frac{1}{\prod_{r=1}^{k-L_1}2\cosh\frac{x-t_{k-L_1,r}}{2k}}\frac{1}{\prod_{r=1}^{k-L_2}2\cosh\frac{x-t_{k-L_2,r}+2\pi\zeta_2}{2k}}, \\ B(x) &= e^{(\frac{i\zeta_1}{k}+\frac{L}{k})x}\frac{1}{\prod_{r=1}^{L_1}2\cosh\frac{x-t_{L_1,r}}{2k}}\frac{1}{\prod_{r=1}^{L_2}2\cosh\frac{x-t_{L_2,r}+2\pi\zeta_2}{2k}}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

结构 (A.4) 使我们能够按以下方式组织 Tr$(D_1D_2)^n$ 的计算。

首先我们注意到 $\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2$ 满足

$$e^{\frac{\widehat{x}}{k}}\widehat{\rho}_1 + \widehat{\rho}_1 e^{\frac{\widehat{x}}{k}} = \sqrt{A(\widehat{x})}e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}|0\rangle\rangle\langle\langle 0|e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{B(\widehat{x})}, \quad e^{\frac{\widehat{x}}{k}}\widehat{\rho}_2 + \widehat{\rho}_2 e^{\frac{\widehat{x}}{k}} = \sqrt{B(\widehat{x})}e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}|0\rangle\rangle\langle\langle 0|e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{A(\widehat{x})}. \tag{A.6}$$

结合这两个关系，我们得到

$$e^{\frac{\widehat{x}}{k}}\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2 - \widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2 e^{\frac{\widehat{x}}{k}} = \sqrt{A(\widehat{x})}e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}|0\rangle\rangle\langle\langle 0|e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{B(\widehat{x})}\widehat{\rho}_2 - \widehat{\rho}_1\sqrt{B(\widehat{x})}e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}|0\rangle\rangle\langle\langle 0|e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{A(\widehat{x})}, \tag{A.7}$$

这还可以进一步推广为关于 $(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^n$ as 的关系。

$$\begin{aligned} &e^{\frac{\widehat{x}}{k}}(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^n - (\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^n e^{\frac{\widehat{x}}{k}} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^\ell\Big(\sqrt{A(\widehat{x})}e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}|0\rangle\rangle\langle\langle 0|e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{B(\widehat{x})}\widehat{\rho}_2 - \widehat{\rho}_1\sqrt{B(\widehat{x})}e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}|0\rangle\rangle\langle\langle 0|e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{A(\widehat{x})}\Big)(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^{n-1-\ell}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

对等式两边取矩阵元，得到

$$\langle x|(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^n|y\rangle = \frac{2e^{\frac{x+y}{2k}}\sqrt{A(x)A(y)}}{e^{\frac{x}{k}}-e^{\frac{y}{k}}}\sum_{\ell=0}^{n-1}\phi_{1,\ell}(x)\phi_{2,n-1-\ell}(y), \tag{A.9}$$

with

$$\phi_{1,\ell}(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{2k}}\sqrt{A(x)}}\langle x|(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^\ell\sqrt{A(\widehat{x})}e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}|0\rangle\!\rangle=\frac{1}{e^{\frac{x}{2k}}\sqrt{A(x)}}\langle\!\langle 0|e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{A(\widehat{x})}(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^\ell|x\rangle,$$
$$\phi_{2,\ell}(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{2k}}\sqrt{A(x)}}\langle x|(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^\ell\widehat{\rho}_1e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{B(\widehat{x})}|0\rangle\!\rangle=\frac{1}{e^{\frac{x}{2k}}\sqrt{A(x)}}\langle\!\langle 0|e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{B(\widehat{x})}\widehat{\rho}_2(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^\ell|x\rangle. \tag{A.10}$$

因此，迹$(\widehat{D}_1\widehat{D}_2)^n=$迹$(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^n$ 可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\widehat{D}_1\widehat{D}_2)^n&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\lim_{y\to x}\langle x|(\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2)^n|y\rangle\\&=k\int\frac{dx}{2\pi}A(x)\sum_{\ell=0}^{n-1}\Big(\frac{d\phi_{1,\ell}(x)}{dx}\phi_{2,n-1-\ell}(x)-\phi_{1,\ell}(x)\frac{d\phi_{2,n-1-\ell}(x)}{dx}\Big),\end{aligned} \tag{A.11}$$

一旦已知状态向量$\phi_{a,\ell}(x)$（其中 $a=1,2$ 和 $\ell=0,1,\cdots,n-1$），我们就可以计算它。此外，这些向量可以通过递推关系生成。

$$\begin{aligned}\phi_{a,\ell+1}(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2\pi}\frac{1}{e^{\frac{x}{2k}}\sqrt{A(x)}}\langle x|\widehat{\rho}_1|y\rangle e^{\frac{y}{2k}}\sqrt{B(y)}\widetilde{\phi}_{a,\ell}(y)=\frac{e^{-\frac{x}{2k}}}{k}\int\frac{dy}{2\pi}\frac{e^{\frac{y}{2k}}}{2\cosh\frac{x-y}{2k}}B(y)\widetilde{\phi}_{a,\ell}(y),\\\widetilde{\phi}_{a,\ell}(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2\pi}\frac{1}{e^{\frac{x}{2k}}\sqrt{B(x)}}\langle x|\widehat{\rho}_2|y\rangle e^{\frac{y}{2k}}\sqrt{A(y)}\phi_{a,\ell}(y)=\frac{e^{-\frac{x}{2k}}}{k}\int\frac{dy}{2\pi}\frac{e^{\frac{y}{2k}}}{2\cosh\frac{x-y}{2k}}A(y)\phi_{a,\ell}(y),\end{aligned} \tag{A.12}$$

连同初始数据

$$\begin{aligned}\phi_{1,0}(x)&=\langle x|0\rangle\!\rangle=\frac{1}{\sqrt{k}},\\\phi_{2,0}(x)&=\frac{1}{\sqrt{A(x)}e^{\frac{x}{2k}}}\langle x|\widehat{\rho}_1e^{\frac{\widehat{x}}{2k}}\sqrt{B(\widehat{x})}|0\rangle\!\rangle=\frac{e^{-\frac{x}{2k}}}{k\sqrt{k}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2\pi}\frac{e^{\frac{y}{2k}}}{2\cosh\frac{x-y}{2k}}B(y).\end{aligned} \tag{A.13}$$

同样地，我们可以组织对$\langle\!\langle t_{L,r}|d_1(D_2D_1)^nd_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$ 的计算，如下所示。

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1(\widehat{D}_2\widehat{D}_1)^n\widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\langle\!\langle t_{L,r}|x\rangle e^{(-\frac{L}{2k}+\frac{1}{2k})x}B(x)\lambda_{s,n}(x),\\&\lambda_{s,n+1}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2\pi k}\frac{e^{\frac{y}{k}}}{e^{\frac{x}{k}}+e^{\frac{y}{k}}}A(y)\widetilde{\lambda}_{s,n}(y),\quad\widetilde{\lambda}_{s,n}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2\pi k}\frac{e^{\frac{y}{k}}}{e^{\frac{x}{k}}+e^{\frac{y}{k}}}B(y)\lambda_{s,n}(y),\\&\lambda_{s,0}(x)=e^{(-\frac{L}{2k}-\frac{1}{2k})x}\langle x|-t_{L,s}\rangle\!\rangle.\end{aligned} \tag{A.14}$$

因此，我们可以由$\lambda_{s,n}(x)$ 计算$\langle\!\langle t_{L,r}|d_1(D_2D_1)^nd_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$，而后者又可以从初始数据$\lambda_{s,0}(x)$ 出发，在 n 中递归计算。

A.2 方法 I

在本小节中，我们说明如何在 $2i\zeta_1 \in \mathbb{Z}$时使用方法 I 进一步计算式 (A.2) 中的两个量，并阐明这些计算在何种条件下有效。利用这些结果，我们便可以检验附录 D 中的双线性关系 (4.6)。

A.2.1 迹$(\widehat{D}_1\widehat{D}_2)^n$

为进一步进行推导，令我们假设 $2i\zeta_1 \in \mathbb{Z}$ 并定义新变量 $u = e^{\frac{x}{2k}}$， $v = e^{\frac{y}{2k}}$由 $x, -y$从而将递归系统 (A.11)、(A.12)、(A.13) 写为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\widehat{D}_1\widehat{D}_2)^n = \frac{k}{2\pi}\int_0^\infty duA(u)\sum_{\ell=0}^{n-1}\Big(\frac{d\phi_{1,\ell}(u)}{du}\phi_{2,n-1-\ell}(u) - \phi_{1,\ell}(u)\frac{d\phi_{2,n-1-\ell}(u)}{du}\Big),\\
&\widetilde{\phi}_{a,\ell}(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dv\frac{v}{u^2+v^2}A(v)\phi_{a,\ell}(v), \quad \phi_{a,\ell+1}(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dv\frac{v}{u^2+v^2}B(v)\widetilde{\phi}_{a,\ell}(v),\\
&\phi_{1,0}(u) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \phi_{2,0}(u) = \frac{1}{\pi\sqrt{k}}\int_0^\infty dv\frac{v}{u^2+v^2}B(v),
\end{aligned} \tag{A.15}$$

其中 $A(u)$ 和 $B(u)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
A(u) &= e^{-\frac{\pi(k-L_2)\zeta_2}{k}}\frac{u^{2k-\Lambda}}{\prod_{r=1}^{k-L_1}(u^2+e^{\frac{1}{k}t_{k-L_1,r}})\prod_{r=1}^{k-L_2}(u^2+e^{\frac{1}{k}t_{k-L_2,r}-\frac{2\pi\zeta_2}{k}})},\\
B(u) &= e^{-\frac{\pi L_2\zeta_2}{k}}\frac{u^{\Lambda}}{\prod_{r=1}^{L_1}(u^2+e^{\frac{1}{k}t_{L_1,r}})\prod_{r=1}^{L_2}(u^2+e^{\frac{1}{k}t_{L_2,r}-\frac{2\pi\zeta_2}{k}})},
\end{aligned} \tag{A.16}$$

其中 $\Lambda = L_1 + L_2 + 2L + 2i\zeta_1 (\in \mathbb{Z})$。利用公式 [17]

$$\int_0^\infty duf(u)(\log u)^j = -\frac{(2\pi i)^{j+1}}{j+1}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathrm{Res}\Big[f(u)B_{j+1}\Big(\frac{\log^{(+)}u}{2\pi i}\Big), u\to w\Big], \tag{A.17}$$

其中， $f(u)$ 是关于 u 的任意无分支切割亚纯函数，$\log^{(+)}$ 是在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上具有分支切割的对数，而 $\{B_j(u)\}_j$ 是满足 $B_{j+1}(u+1)-B_{j+1}(u) = (j+1)u^j$ 的任意一组多项式，我们可以进一步将 (A.15) 中的积分写成留数和

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\widehat{D}_1\widehat{D}_2)^n = \frac{k}{2\pi}\sum_{j\geq 0}\Big(-\frac{(2\pi i)^{j+1}}{j+1}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathrm{Res}\Big[A(u)\Psi_{n,j}(u)B_{j+1}\Big(\frac{\log^{(+)}u}{2\pi i}\Big), u\to w\Big]\Big),\\
&\widetilde{\phi}_{a,\ell}(u) = \frac{1}{\pi}\sum_{j\geq 0}\Big(-\frac{(2\pi i)^{j+1}}{j+1}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathrm{Res}\Big[\frac{v}{u^2+v^2}A(v)\phi_{a,\ell,j}(v)B_{j+1}\Big(\frac{\log^{(+)}v}{2\pi i}\Big), v\to w\Big]\Big),\\
&\phi_{a,\ell+1}(u) = \frac{1}{\pi}\sum_{j\geq 0}\Big(-\frac{(2\pi i)^{j+1}}{j+1}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathrm{Res}\Big[\frac{v}{u^2+v^2}B(v)\widetilde{\phi}_{a,\ell,j}(v)B_{j+1}\Big(\frac{\log^{(+)}v}{2\pi i}\Big), v\to w\Big]\Big),
\end{aligned}$$

$$\phi_{1,0}(u)=\frac{1}{\sqrt{k}},\quad \phi_{2,0}(u)=\frac{1}{\pi\sqrt{k}}\Big(-2\pi i\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathrm{Res}\Big[\frac{v}{u^2+v^2}B(v)B_1\Big(\frac{\log^{(+)}v}{2\pi i}\Big),v\to w\Big]\Big),\tag{A.18}$$

其中 $\Psi_{n,j}(u)$, $\phi_{a,\ell,j}(u)$, $\widetilde{\phi}_{a,\ell,j}(u)$ 定义为

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=0}^{n-1}\Big(\frac{d\phi_{1,\ell}(u)}{du}\phi_{2,n-1-\ell}(u)-\phi_{1,\ell}(u)\frac{d\phi_{2,n-1-\ell}(u)}{du}\Big)=\sum_{j\geq 0}\Psi_{n,j}(u)(\log u)^j,\\&\phi_{a,\ell}(u)=\sum_{j\geq 0}\phi_{a,\ell,j}(u)(\log u)^j,\quad \widetilde{\phi}_{a,\ell}(u)=\sum_{j\geq 0}\widetilde{\phi}_{a,\ell,j}(u)(\log u)^j.\end{aligned}\tag{A.19}$$

在计算 $\phi_{a,\ell}(u)$ 和 $\widetilde{\phi}_{a,\ell}(u)$ 时，用于取留数的一组充分极点为 $\{iu,-iu\}$ 与

$$\begin{aligned}&\{e^{\frac{1}{2k}t_{L_1,r}},ie^{\frac{1}{2k}t_{L_1,r}},-e^{\frac{1}{2k}t_{L_1,r}},-ie^{\frac{1}{2k}t_{L_1,r}}\}_{r=1}^{L_1}\\&\quad\cup\{e^{\frac{1}{2k}t_{k-L_1,r}},ie^{\frac{1}{2k}t_{k-L_1,r}},-e^{\frac{1}{2k}t_{k-L_1,r}},-ie^{\frac{1}{2k}t_{k-L_1,r}}\}_{r=1}^{k-L_1}\\&\quad\cup\{e^{\frac{1}{2k}t_{L_2,r}-\frac{\pi\zeta_2}{k}},ie^{\frac{1}{2k}t_{L_2,r}-\frac{\pi\zeta_2}{k}},-e^{\frac{1}{2k}t_{L_2,r}-\frac{\pi\zeta_2}{k}},-ie^{\frac{1}{2k}t_{L_2,r}-\frac{\pi\zeta_2}{k}}\}_{r=1}^{L_2}\\&\quad\cup\{e^{\frac{1}{2k}t_{k-L_2,r}-\frac{\pi\zeta_2}{k}},ie^{\frac{1}{2k}t_{k-L_2,r}-\frac{\pi\zeta_2}{k}},-e^{\frac{1}{2k}t_{k-L_2,r}-\frac{\pi\zeta_2}{k}},-ie^{\frac{1}{2k}t_{k-L_2,r}-\frac{\pi\zeta_2}{k}}\}_{r=1}^{k-L_2},\end{aligned}\tag{A.20}$$

而计算 $\mathrm{Tr}(D_1D_2)$ 的一组充分极点就是式 (A.20) 本身。

A.2.2 $\langle\!\langle t_{L,r}|d_1(D_2D_1)^nd_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$

当 $2i\zeta_1\in\mathbb{Z}$ 我们可通过与 (A.18) 中相同的技巧计算 $\langle\!\langle t_{L,r}|d_1(D_2D_1)^nd_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1(\widehat{D}_2\widehat{D}_1)^n\widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle\\&\quad=\frac{\sqrt{k}}{\pi}\sum_{j\geq 0}\Big(-\frac{(2\pi i)^{j+1}}{j+1}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathrm{Res}\Big[u^{1-2r}B(u)\lambda_{s,n,j}(u)B_{j+1}\Big(\frac{\log^{(+)}u}{2\pi i}\Big),u\to w\Big]\Big),\\&\widetilde{\lambda}_{s,n}(u)=\frac{1}{\pi}\sum_{j\geq 0}\Big(-\frac{(2\pi i)^{j+1}}{j+1}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathrm{Res}\Big[\frac{v}{u^2+v^2}B(v)\lambda_{s,n,j}(v)B_{j+1}\Big(\frac{\log^{(+)}v}{2\pi i}\Big),v\to w\Big]\Big),\\&\lambda_{s,n+1}(u)=\frac{1}{\pi}\sum_{j\geq 0}\Big(-\frac{(2\pi i)^{j+1}}{j+1}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathrm{Res}\Big[\frac{v}{u^2+v^2}A(v)\widetilde{\lambda}_{s,n,j}(v)B_{j+1}\Big(\frac{\log^{(+)}v}{2\pi i}\Big),v\to w\Big]\Big),\\&\lambda_{s,0}(u)=\frac{1}{\sqrt{k}}u^{-2s},\end{aligned}\tag{A.21}$$

其中 $\lambda_{s,n,j}(u)$ 和 $\widetilde{\lambda}_{s,n,j}(u)$ 定义为

$$\lambda_{s,n}(u)=\sum_{j\geq 0}\lambda_{s,n,j}(u)(\log u)^j,\quad \widetilde{\lambda}_{s,n}(u)=\sum_{j\geq 0}\widetilde{\lambda}_{s,n,j}(u)(\log u)^j.\tag{A.22}$$

在计算 $\lambda_{s,n}(u)$ 和 $\lambda_{s,n}(u)$ 时，待选极点的一个充分集合为 $\{iu,-iu\}$ 与 (A.20) 的并集；而在计算 $\prec\ \prec\ \prec\ \prec\langle\langle t_{L,r}|d_1(D_2D_1)^n d_2|-t_{L,s}\rangle\rangle$ 时，极点的一个充分集合为 (A.20)。

A.2.3 有效域

注意，为确保方法 I 给出正确答案，参数k、 L_1、 L_2、 L、 ζ_1 必须满足以下条件。

- （A.1）的推导基于以下假设

$$k, L_1, L_2, L \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le L \le L_1, L_2 \le k. \tag{A.23}$$

- 在方法 I 中，我们假设 $2i\zeta_1 \in \mathbb{Z}$。
- 只有当原始积分在 $x \to \pm\infty$ 处收敛时，方法 I 中通过留数求和进行的积分计算才是可信的，对应于 $u \to 0,\ \infty$。

这里我们来考察计算 $Z_{k,\ M}(0)$ 和$Z_{k,\ M}(1)$ 所需满足的条件，这些计算涉及以下量的计算。

$$\phi_{2,0}(u), \quad \operatorname{Tr}\widehat{D}_1\widehat{D}_2, \quad \langle\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1\widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\rangle, \quad \widetilde{\lambda}_{0,s}(u), \quad \lambda_{1,s}(u), \quad \langle\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1\widehat{D}_2\widehat{D}_1\widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\rangle, \tag{A.24}$$

假设满足条件 (A.23)。首先来看对 $\phi_{2,0}(u)$ (A.15) 的积分，此时被积函数在 $v \to 0, \infty$ 处的行为为

$$\frac{1}{\pi\sqrt{k}}\frac{v}{u^2+v^2}B(v) \sim \begin{cases} v^{L_1+L_2+2L+2i\zeta_1}, & (v \to 0), \\ v^{-1-L_1-L_2+2L+2i\zeta_1}, & (v \to \infty). \end{cases} \tag{A.25}$$

为确保积分 $\int_0^\infty dv$ 收敛，被积函数在 $v \to 0$ 处必须表现为 $\sim v^p$ （其中$p > -1$），而在 $v \to \infty$处必须表现为 $\sim v^q$ （其中 $q < -1$）。因此，我们得到条件

$$L_1 + L_2 + 2L + 2i\zeta_1 > -2, \quad L_1 + L_2 - 2L - 2i\zeta_1 > 0, \tag{A.26}$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$关于 $\phi_{2,\ 0}(u)$ 的有效性。接下来我们来看 $\operatorname{Tr} D_1D_2$ (A.15) 的积分。假设 (A.26) 成立后，根据留数公式 (A.18)，我们得到 $\phi_{2,\ 0}(u)$ 的渐近形式：

$$\phi_{2,0}(u) \sim \begin{cases} u^{\min(L_1+L_2+2L+2i\zeta_1,0)}, & (u \to 0), \\ u^{\max(-L_1-L_2+2L+2i\zeta_1,-2)}, & (u \to \infty). \end{cases} \tag{A.27}$$

将其代入 (A.15)，并考察被积函数的渐近形式，最终得到以下条件：

$$L_1 + L_2 + 2L + 2i\zeta_1 < 2k, \quad L_1 + L_2 - 2L - 2i\zeta_1 < 2k + 2, \tag{A.28}$$

对于 $\mathrm{Tr}\, D_1 D_2$ 的有效性。

当 $L > 0$ 时，通过计算 $\langle\!\langle t_{L,r}|d_1 d_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$，$\lambda_{0,s}(u)$，$\lambda_{1,s}(u)$ 和 $\langle\!\langle t_{L,r}|d_1 D_2 D_1 d_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$ 可得到额外的约束。根据对 $\langle\!\langle t_{L,r}|d_1 d_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$ 的积分收敛性，该积分由积分

$$\langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1\widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi k} \frac{e^{\frac{1}{k}(L+1-r-s+i\zeta_1)x}}{\prod_{r=1}^{L_1} 2\cosh\frac{x-t_{L_1,r}}{2k} \prod_{r=1}^{L_2} 2\cosh\frac{x+2\pi\zeta_2-t_{L_2,r}}{2k}}, \tag{A.29}$$

条件

$$L + 1 - r - s + i\zeta_1 - \frac{L_1 + L_2}{2} < 0, \quad -L - 1 + r + s - i\zeta_1 - \frac{L_1 + L_2}{2} < 0, \quad (1 \le r, s \le L), \tag{A.30}$$

为保证在 $x \to \pm\infty$ 处收敛，必须满足该条件。由于第一条件（来自 $x \to \infty$）和第二条件（来自 $x \to -\infty$）分别在 $r = s = 1$ 和$r = s = L$处最为严格，因此只需在这些 r, s 值处要求满足条件 (A.30)。因此，我们可以将 (A.30) 化简为

$$L_1 + L_2 - 2L - 2i\zeta_1 > -2, \quad L_1 + L_2 - 2L + 2i\zeta_1 > -2. \tag{A.31}$$

一旦满足该条件（或更一般地，满足 (3.3)），$\langle\!\langle t_{L,r}|d_1 d_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$ 便可由公式 (3.4) 计算得到。根据对 $\lambda_{0,s}(u)$ (A.14) 的积分收敛性，我们得到以下条件

$$1 - 2s + L_1 + L_2 + 2L + 2i\zeta_1 > -1, \quad -1 - 2s - L_1 - L_2 + 2L + 2i\zeta_1 < -1, \tag{A.32}$$

其中，第一个条件保证 $v \to 0$ 处的收敛，第二个条件保证 $v \to \infty$处的收敛。同样，来自 $v \to 0$ 的条件对于 $s = L$ 最严格，而来自 $v \to \infty$ 的条件对于 $s = 1$最严格。因此，只需在 s的这两个取值处要求满足条件 (A.32)，即

$$L_1 + L_2 + 2i\zeta_1 > -2, \quad L_1 + L_2 - 2L - 2i\zeta_1 > -2. \tag{A.33}$$

$\lambda_{1,s}(u)$ 以及$\langle\!\langle t_{L,r}|d_1 D_2 D_1 d_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$ 的收敛条件也可以用类似的方法研究。虽然计算比迄今展示的更为复杂，但只需要求在 $u = 0$ 附近的收敛性仅对

$r=s=L$ 以及在 $u\to\infty$ 附近的收敛性仅对 $r=s=1$成立。这里仅展示最终结果

$$\begin{aligned}\lambda_{1,s}(u):&\quad L_1+L_2+4L+2i\zeta_1<2k+2,\quad L_1+L_2-2L-2i\zeta_1<2k+4,\\ \langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1\widehat{D}_2\widehat{D}_1\widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle:&\quad L_1+L_2+2i\zeta_1>-2,\quad L_1+L_2-2L-2i\zeta_1>-2.\end{aligned}\tag{A.34}$$

总而言之，方法 I 对于 $Z_{k,\ M}(0)$ 和 $Z_{k,\ M}(1)$ 可靠所需满足的条件为

$$\text{(A.26) AND (A.28) AND }\big[L=0\text{ OR }[\text{(A.31) AND (A.33) AND (A.34)}]\big],\tag{A.35}$$

这进一　步在条件 (A.23) 下化简。最后，我们得到以下条件

$$\begin{aligned}&k,L_1,L_2,L,2i\zeta_1\in\mathbb{Z},\quad 0\le L\le L_1,L_2\le k,\\ &2i\zeta_1>-\min(2k-L_1-L_2+2L,L_1+L_2-2L)-2,\\ &2i\zeta_1<\min(L_1+L_2-2L,2k-L_1-L_2+2-4L,2k-L_1-L_2).\end{aligned}\tag{A.36}$$

A.3 方法 II

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$　　~我们还可以计算附录 A.1 中的积分，例如 $\mathrm{Tr}(D_1D_2)^n$、$\phi_{a,\ \ell}(x)$、$\phi_{a,\ \ell}(x)$ 和
$\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }\quad\widehat{\ }$　　~$\langle\!\langle t_{L,\ r}|d_1(D_2D_1)^nd_2|-t_{L,\ s}\rangle\!\rangle$、$\lambda_{s,\ n}(x)$、$\lambda_{s,\ n}(x)$，而无需固定 ζ_1，如 [105, 106] 所示。

该方法是反复使用公式（该公式是积分公式 (3.4) 的推广）

$$\begin{aligned}I_{k,n}(\alpha,\{\beta_a+i\gamma_a\})&=\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi k}\frac{e^{\frac{\alpha x}{k}}}{\prod_{a=1}^n 2\cosh\frac{x-\beta_a-i\gamma_a}{2k}}\\ &=\frac{1}{e^{-\pi i\alpha}-(-1)^ne^{\pi i\alpha}}\Bigg(\sum_{\substack{a\\(\gamma_a>-\pi k)}}\frac{e^{\frac{\alpha(\beta_a+i\gamma_a)}{k}}}{\prod_{b(\neq a)}2\cosh\frac{\beta_a-\beta_b+i(\gamma_a-\gamma_b+\pi k)}{2k}}\\ &\quad+\frac{e^{-\pi i\alpha}+(-1)^ne^{\pi i\alpha}}{2}\sum_{\substack{a\\(\gamma_a=-\pi k)}}\frac{e^{\frac{\alpha\beta_a}{k}}}{\prod_{b(\neq a)}2\cosh\frac{\beta_a-\beta_b-i\gamma_b}{2k}}\Bigg),\end{aligned}\tag{A.37}$$

对应于（A.11）、（A.12）、（A.13）中的积分。这里，β_a，γ_a 为实数，满足 $-\pi k\le\gamma_a<\pi k$，符号 $\fint$ 表示采用主值处方进行的积分，其极点位于实轴上。需要注意的是，当某些 $\beta_a+i\gamma_a$ 重合时，我们必须在应用公式（A.37）之前，通过对 β_a 的重合值进行移位来消除简并，并在计算结束时取未消除简并的极限。类似地，当 $e^{-\pi i\alpha}-(-1)^ne^{\pi i\alpha}=0$ 时，我们

应先将 α 移位，应用公式 (A.37)，然后取极限使其回到原始值。

我们通过计算（$\phi_{2,0}$，$\mathrm{Tr}\, D_1 D_2$ 等）在 $(k, L_1, L_2, L) = (1,0,0,0), (1,1,0,0)$ 和 $(1,1,1,1)$ 处的配分函数，举例说明方法 II 的运作方式。

A.3.1 $(k, L_1, L_2, L) = (1, 0, 0, 0)$

首先，让我们 co 考虑情形 $(k, L_1, L_2, L) = (1, 0, 0, 0)$。由 (A.11) 和 (A.13) 可得 e

$$\mathrm{Tr}\, \widehat{D}_1 \widehat{D}_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} A(x) \frac{d\phi_{2,0}(x)}{dx}, \tag{A.38}$$

with

$$\phi_{2,0}(x) = e^{-\frac{x}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \frac{e^{\frac{y}{2}}}{2\cosh\frac{x-y}{2}} B(y), \tag{A.39}$$

$$A(x) = \frac{e^{-i\zeta_1 x}}{(2\cosh\frac{x}{2})(2\cosh\frac{x+2\pi\zeta_2}{2})}, \quad B(x) = e^{i\zeta_1 x}. \tag{A.40}$$

对于 $\phi_{2,\ 0}(x)$，我们可以立即应用公式 (A.37)（对于当前情况，也可以直接使用 (3.4)）来得到

$$\phi_{2,0}(x) = e^{-\frac{x}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \frac{e^{(i\zeta_1+\frac{1}{2})y}}{2\cosh\frac{y-x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} I_{1,1}\big(i\zeta_1 + \tfrac{1}{2}, \{x\}\big) = \frac{i e^{i\zeta_1 x}}{2\sinh\pi\zeta_1}. \tag{A.41}$$

将其代入 $\mathrm{Tr}\, D_1 D_2$ (A.38)，得到

$$\mathrm{Tr}\, \widehat{D}_1 \widehat{D}_2 = \frac{\zeta_1}{2\sinh\pi\zeta_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \frac{1}{(2\cosh\frac{x}{2})(2\cosh\frac{x+2\pi\zeta_2}{2})} = \frac{\zeta_1}{2\sinh\pi\zeta_1} I_{1,2}(0, \{0, -2\pi\zeta_2\}), \tag{A.42}$$

这又是（A.37）的形式。注意，此处我们假设 $\zeta_2 \in \mathbb{R}$。如上所述，$I_{1,\ 2}(0,\ \{0, -2\pi\zeta_2\})$ 应通过引入 $\alpha \neq 0$，然后在应用公式（A.37）后令 $\alpha \to 0$ 趋于.....的过程来理解，这给出

$$I_{1,2}(0, \{0, -2\pi\zeta_2\}) = \lim_{\alpha\to 0} I_{1,2}(\alpha, \{0, -2\pi\zeta_2\}) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1 - e^{-2\pi\alpha\zeta_2}}{4\sin\pi\alpha\sinh\pi\zeta_2} = \frac{\zeta_2}{2\sinh\pi\zeta_2}. \tag{A.43}$$

因此，我们最终得到

$$\mathrm{Tr}\, \widehat{D}_1 \widehat{D}_2 = \frac{\zeta_1\zeta_2}{4\sinh\pi\zeta_1\sinh\pi\zeta_2}. \tag{A.44}$$

A.3.2 $(k, L_1, L_2, L) = (1, 1, 0, 0)$

接下来考虑情形 $(k,\ L_1,\ L_2,\ L) = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$。与前一种情形一样，迹 $\mathrm{Tr}\, D_1 D_2$ 可通过（A.39）中的（A.38）计算，其中将（A.5）中的 $A(x)$ 和 $B(x)$ 替换为

$$A(x) = \frac{e^{-i\zeta_1 x}}{2\cosh\frac{x+2\pi\zeta_2}{2}}, \quad B(x) = \frac{e^{i\zeta_1 x}}{2\cosh\frac{x}{2}}. \tag{A.45}$$

同样，直接将公式（A.37）应用于 $\phi_{2,\ 0}(x)$（A.39）即可得到

$$\phi_{2,0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \frac{e^{-\frac{x}{2}+(i\zeta_1+\frac{1}{2})y}}{(2\cosh\frac{y-x}{2})(2\cosh\frac{y}{2})} = e^{-\frac{x}{2}} I_{1,2}\big(i\zeta_1 + \tfrac{1}{2}, \{x, 0\}\big) = \frac{1}{2\cosh\pi\zeta_1} \frac{e^{i\zeta_1 x} - e^{-\frac{x}{2}}}{2\sinh\frac{x}{2}}. \tag{A.46}$$

在将其代入 $\mathrm{Tr}\, D_1 D_2$ （A.38）之前，为了简化计算，我们对（A.38）分部积分，并将导数替换为 $\frac{dA_{\ (x)\ dx}}{} = (-i\zeta_1 + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\zeta_2})A(x)$；对于（A.45）中给出的 $A(x)$，此替换是成立的，因为

$$\mathrm{Tr}\, \widehat{D}_1 \widehat{D}_2 = \frac{1}{2\cosh\pi\zeta_1}\Big(-i\zeta_1 + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\zeta_2}\Big) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} A(x) \frac{e^{i\zeta_1 x} - e^{-\frac{x}{2}}}{2\sinh\frac{x}{2}}. \tag{A.47}$$

注意，尽管被积函数的每一项在 $x = 0$ 处都发散，但其总和在 $x = 0$ 处有限且光滑。这意味着积分（A.47）与将 $x = 0$ 按主值处方处理后的积分相同；后者可利用（A.37）中的 $I_{1,\ 2}(\alpha,\ \{\beta_a\})$ 对每一项分别计算，得到

$$\mathrm{Tr}\, \widehat{D}_1 \widehat{D}_2 = \frac{i}{2\cosh\pi\zeta_1}\Big(-i\zeta_1 + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\zeta_2}\Big)\big[I_{1,2}(0, \{-2\pi\zeta_2, -\pi i\}) - I_{1,2}(-i\zeta_1 - \tfrac{1}{2}, \{-2\pi\zeta_2, -\pi i\})\big]. \tag{A.48}$$

通过正则化 $\alpha = 0$ 来计算 $I_{1,2}(0, \{-2\pi\zeta_2, -\pi i\})$，最终得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\widehat{D}_1 \widehat{D}_2) &= \frac{1}{16\pi\cosh\pi\zeta_1\cosh\pi\zeta_2} \\ &\times \Big[-2 + \pi i(2\zeta_1 - i\tanh\pi\zeta_2)(2\zeta_2 - i\tanh\pi\zeta_1) + \frac{\pi e^{2\pi i\zeta_1\zeta_2}}{\cosh\pi\zeta_1\cosh\pi\zeta_2}\Big].\end{aligned} \tag{A.49}$$

A.3.3 $(k,\ L_1,\ L_2,\ L) = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$

最后，让我们来考察在 $N = 1$, $Z_{k,\boldsymbol{M}}(1)$ 处计算配分函数，其中 $(k, L_1, L_2, L) = (1, 1, 1, 1)$。由巨配分函数 (A.1) 可得，$Z_{k,\boldsymbol{M}}(1)$ 为

$$\frac{Z_{k,\boldsymbol{M}}(1)}{Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)} = \mathrm{Tr}\, \widehat{D}_1 \widehat{D}_2 - \frac{\langle\langle t_{1,1}|\widehat{d}_1 \widehat{D}_2 \widehat{D}_1 \widehat{d}_2|-t_{1,1}\rangle\rangle}{\langle\langle t_{1,1}|\widehat{d}_1 \widehat{d}_2|-t_{1,1}\rangle\rangle}. \tag{A.50}$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$分母$\langle\!\langle t_{1,1}|d_1d_2|-t_{1,1}\rangle\!\rangle$ 由公式 $I_{k,n}(\alpha,\{\beta_a\})$ (A.37) 计算得出，具体如下

$$\langle\!\langle t_{1,1}|\widehat{d}_1\widehat{d}_2|-t_{1,1}\rangle\!\rangle = I_{1,1}(i\zeta_1,\{0,-2\pi\zeta_2\}) = -\frac{i(1-e^{-2\pi i\zeta_1\zeta_2})}{(2\sinh\pi\zeta_1)(2\sinh\pi\zeta_2)}. \tag{A.51}$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$按照上述方法直接计算 $\mathrm{Tr}\, D_1D_2$，最终得到

$$\mathrm{Tr}\,\widehat{D}_1\widehat{D}_2 = \frac{-\zeta_1\zeta_2+i\zeta_2}{4\sinh\pi\zeta_1\sinh\pi\zeta_2}. \tag{A.52}$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }$为了计算$\langle\!\langle t_{1,\ 1}|d_1D_2D_1d_2|-t_{1,\ 1}\rangle\!\rangle$，我们在每对算符之间插入完备基组的恒等式，并得到[†17]

$$\langle\!\langle t_{1,1}|\widehat{d}_1\widehat{D}_2\widehat{D}_1\widehat{d}_2|-t_{1,1}\rangle\!\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\frac{e^{i\zeta_1x}}{2\cosh\frac{x}{2}}\frac{dy}{2\pi}\frac{1}{2\cosh\frac{y+2\pi\zeta_2}{2}}\langle x|\widehat{D}_2\widehat{D}_1|y\rangle, \tag{A.53}$$

with

$$\langle x|\widehat{D}_2\widehat{D}_1|y\rangle = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2\cosh\frac{x+2\pi i\zeta_2}{2}}\frac{e^{(i\zeta_1+\frac{1}{2})y}}{2\cosh\frac{y}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{2\pi}\langle x|\frac{1}{2\cosh\frac{\widehat{p}}{2}}|z\rangle e^{(-i\zeta_1-1)z}\langle z|\frac{1}{2\cosh\frac{\widehat{p}}{2}}|y\rangle. \tag{A.54}$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \langle x|D_2D_1|y\rangle$ (A.54) 中的 z 积分可利用公式 (A.37) 计算如下

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{2\pi}\langle x|\frac{1}{2\cosh\frac{\widehat{p}}{2}}|z\rangle e^{(-i\zeta_1-1)z}\langle z|\frac{1}{2\cosh\frac{\widehat{p}}{2}}|y\rangle\\ &\quad = I_{1,2}(-i\zeta_1-1,\{x,y\}) = -\frac{i}{2\sinh\pi\zeta_1}\frac{e^{(-i\zeta_1-1)x}-e^{(-i\zeta_1-1)y}}{2\sinh\frac{x-y}{2}}.\end{aligned} \tag{A.55}$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }$由于它在 $x=y$ 处是正则的，我们可以像在 (A.47) 中那样计算$\langle\!\langle t_{1,\ 1}|d_1D_2D_1d_2|-t_{1,\ 1}\rangle\!\rangle$。具体而言，将 (A.55) 代入 (A.53)，把积分替换为柯西主值积分，然后分别计算 (A.55) 中来自 $e^{(-i\zeta_1-1)x}$ 和 $-e^{(-i\zeta_1-1)y}$ 的两项。由于被积函数的其余部分在 $x\leftrightarrow y$ 下是反对称的，这两项实际上相同，因此得到

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle t_{1,1}|\widehat{d}_1\widehat{D}_2\widehat{D}_1\widehat{d}_2|-t_{1,1}\rangle\!\rangle\\ &= -\frac{i}{\sinh\pi\zeta_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(2\cosh\frac{x}{2})(2\cosh\frac{x+2\pi\zeta_2}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2\pi}\frac{e^{(i\zeta_1+\frac{1}{2})y}}{(2\cosh\frac{y}{2})(2\cosh\frac{y+2\pi\zeta_2}{2})}\frac{1}{2\sinh\frac{x-y}{2}}.\end{aligned} \tag{A.56}$$

现在，积分 可以利用公式 (A.37) 一步一步地进行。我们得到

$$\langle\!\langle t_{1,1}|\widehat{d}_1\widehat{D}_2\widehat{D}_1\widehat{d}_2|-t_{1,1}\rangle\!\rangle = \frac{1}{4\sinh^2\pi\zeta_1}$$

[†17]这里我们采用一种不同的计算方法来处理$\langle\!\langle t_{L,r}|\widehat{d}_1\widehat{D}_2\widehat{D}_1\widehat{d}_2|-t_{L,s}\rangle\!\rangle$ 对于 $(k,L_1,L_2,L)=\widetilde{}(1,1,1,1)$ 而言，与 (A.14) 中解释的 $\lambda_{s,0}(u)\,\lambda_{s,0}(u)\,\lambda_{s,1}(u)$ 的递归计算相比，这种方法似乎更为简单。

$$\times\Big[\frac{1}{\sinh\pi\zeta_2}\big(I_{1,3}(-\tfrac{1}{2},\{0,0,-2\pi\zeta_2\})-e^{-(i\zeta_1+\frac{1}{2})2\pi\zeta_2}I_{1,3}(-\tfrac{1}{2},\{0,-2\pi\zeta_2,-2\pi\zeta_2\})\big)$$
$$+2i\cosh\pi\zeta_1 I_{1,4}(i\zeta_1,\{0,0,-2\pi\zeta_2,-2\pi\zeta_2\})\Big]. \tag{A.57}$$

将此式连同 (A.51)、(A.52) 代入 (A.50)，最终得到

$$\frac{Z_{k,\boldsymbol{M}}(1)}{Z_{k,\boldsymbol{M}}(0)}=\frac{\pi^{-1}\sinh\pi\zeta_1\sinh\pi\zeta_2\cos\pi\zeta_1\zeta_2+\cosh\pi\zeta_1\cosh\pi\zeta_2\sin\pi\zeta_1\zeta_2}{4\sinh^2\pi\zeta_1\sinh^2\pi\zeta_2\sin\pi\zeta_1\zeta_2}$$
$$-\frac{\zeta_1\cosh\pi\zeta_1\cos\pi\zeta_1\zeta_2}{4\sinh^2\pi\zeta_1\sinh\pi\zeta_2\sin\pi\zeta_1\zeta_2}-\frac{\zeta_2\cosh\pi\zeta_2\cos\pi\zeta_1\zeta_2}{4\sinh\pi\zeta_1\sinh^2\pi\zeta_2\sin\pi\zeta_1\zeta_2}-\frac{\zeta_1\zeta_2}{4\sinh\pi\zeta_1\sinh\pi\zeta_2}. \tag{A.58}$$

B 配分函数（ $N=0$）

我们在本附录中总结巨配分函数的最低阶项。两个小节分别讨论 $k=1$ 和 $k=2$ 的情况。我们将最低阶项记为

$$Z^{(0)}_{M_0,M_1,M_3}=e^{-i\Theta_{k,M}}Z_{k,\boldsymbol{M}}(N=0)=e^{-i\Theta'_{k,M}}Z'_{k,\boldsymbol{M}}(N=0). \tag{B.1}$$

此处，为了使表达式简洁，我们去除了配分函数$e^{i\Theta'_{k,M}}$所产生的相位，以及为简化双线性关系而引入的相位$e^{i\Theta_{k,M}}$。此外，在左端，我们仅用上标 (0) 表示 $N=0$，并省略层级 k 和 FI 参数 Z_1，Z_3 的下标，因为每个小节中的层级均相同，且结果显然取决于 FI 参数。

请注意，当 $N=0$ 位于基本域之外的格点时，配分函数恒为零，因此我们将讨论范围限制在基本域内。另一个有趣的现象是，只有当以下结果以及附录C中的结果以 Z_1 和 Z_3 表示时，才能得到简洁的三角函数形式（而不是三角函数与双曲函数的混合形式）。例如，参见 $Z^{(0)}_{0\,0\,,,0}$ 中的 $k=1$ (B.5)。这可能与我们在附录 A.1 前面讨论过的 FI 参数的实性条件有关。

B.1 $k=1$

在本小节中，我们列出 $k=1$ 的配分函数精确值。对于 $M_0=\pm1$，它们为

$$Z^{(0)}_{-1,0,0}=1,\quad Z^{(0)}_{1,0,0}=e^{-2\pi iZ_1Z_3}. \tag{B.2}$$

对于 $M_0 = \pm\frac{1}{2}$，它们为

$$Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3), \qquad Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sec(\pi Z_1),$$
$$Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sec(\pi Z_3), \qquad Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 1, \tag{B.3}$$

and

$$Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3), \qquad Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{2}\sec(\pi Z_1),$$
$$Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{2}\sec(\pi Z_3), \qquad Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 1. \tag{B.4}$$

最后，对于 $M_0 = 0$，它们为

$$Z^{(0)}_{0,-1,0} = -\frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4}\csc^2(\pi Z_1), \qquad Z^{(0)}_{0,0,-1} = -\frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4}\csc^2(\pi Z_3),$$
$$Z^{(0)}_{0,0,0} = \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{2}\csc(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\sin(\pi Z_1 Z_3), \qquad Z^{(0)}_{0,0,1} = 1, \qquad Z^{(0)}_{0,1,0} = 1. \tag{B.5}$$

B.2 $k = 2$

在本小节中，我们列出 $k = 2$ 的配分函数的精确值。为简化结果，我们引入以下函数。

$$X^{\pm} = e^{\mp\frac{\pi i}{4}} e^{\mp\pi i Z_1 Z_3} e^{-\frac{\pi i}{2}(Z_1+Z_3)}\left(1 \pm i e^{\pi i Z_1} \pm i e^{\pi i Z_3} + e^{\pi i (Z_1+Z_3)}\right) - 2. \tag{B.6}$$

$\underline{M_0 = -2}$

$$Z^{(0)}_{-2,0,0} = 1. \tag{B.7}$$

$\underline{M_0 = -\frac{3}{2}}$

$$Z^{(0)}_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_2}}{4\sqrt{2}}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sec(\pi Z_1),$$
$$Z^{(0)}_{-\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sec(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{B.8}$$

$\underline{M_0 = -1}$

$$Z^{(0)}_{-1,-1,-1} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{16}\csc^2(\pi Z_1)\csc^2(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{-1,-1,0} = -\frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{16}\csc^2(\pi Z_1)\sec\frac{\pi Z_3}{2},$$
$$Z^{(0)}_{-1,-1,1} = -\frac{1}{4}\csc^2(\pi Z_1), \quad Z^{(0)}_{-1,0,-1} = -\frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{16}\sec\frac{\pi Z_1}{2}\csc^2(\pi Z_3),$$

$$Z^{(0)}_{-1,0,0} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{2}Z_1Z_3}}{4}\csc(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\sin\frac{\pi Z_1Z_3}{2}, \quad Z^{(0)}_{-1,0,1} = \frac{1}{4}\sec\frac{\pi Z_1}{2},$$
$$Z^{(0)}_{-1,1,-1} = -\frac{1}{4}\csc(\pi Z_3)^2, \quad Z^{(0)}_{-1,1,0} = \frac{1}{4}\sec\frac{\pi Z_3}{2}, \quad Z^{(0)}_{-1,1,1} = 1. \tag{B.9}$$

$\underline{M_0 = -\frac{1}{2}}$

$$Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{16\sqrt{2}}\sec^3(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi iZ_1Z_3}}{8\sqrt{2}}\sec^3(\pi Z_1),$$
$$Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{16\sqrt{2}}\sec(\pi Z_1)\sec^3(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{32\sqrt{2}}\sec^2(\pi Z_1)\sec^2(\pi Z_3)X^-,$$
$$Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{16\sqrt{2}}\sec^2(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3)X^+, \quad Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sec(\pi Z_1),$$
$$Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}} = \frac{e^{-\pi iZ_1Z_3}}{8\sqrt{2}}\sec^3(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16\sqrt{2}}\sec(\pi Z_1)\sec^2(\pi Z_3)X^+,$$
$$Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi iZ_1Z_3}}{8\sqrt{2}}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3)X^-, \quad Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sec(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{B.10}$$

$\underline{M_0 = 0}$

$$Z^{(0)}_{0,-2,0} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{16}\csc^4(\pi Z_1), \quad Z^{(0)}_{0,-1,-1} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{32}\csc^2(\pi Z_1)\csc^2(\pi Z_3),$$
$$Z^{(0)}_{0,-1,0} = -\frac{e^{-\frac{3\pi i}{2}Z_1Z_2}}{16}\csc\frac{\pi Z_1}{2}\csc^2(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\sin\frac{\pi Z_1Z_3}{2}, \quad Z^{(0)}_{0,-1,1} = -\frac{e^{-\pi iZ_1Z_3}}{8}\csc^2(\pi Z_1),$$
$$Z^{(0)}_{0,0,-2} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{16}\csc^4(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{0,0,-1} = -\frac{e^{-\frac{3\pi i}{2}Z_1Z_3}}{16}\csc(\pi Z_1)\csc\frac{\pi Z_3}{2}\csc^2(\pi Z_3)\sin\frac{\pi Z_1Z_3}{2},$$
$$Z^{(0)}_{0,0,0} = -\frac{e^{-\pi iZ_1Z_3}}{16}\csc^2(\pi Z_1)\csc^2(\pi Z_3)$$
$$\times\Big(1+\cos(\pi Z_1)+\cos(\pi Z_3)-\cos(\pi Z_1)\cos(\pi Z_3)-2\cos(\pi Z_1Z_3)\Big),$$
$$Z^{(0)}_{0,0,1} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{2}Z_1Z_3}}{4}\csc(\pi Z_1)\csc\frac{\pi Z_3}{2}\sin\frac{\pi Z_1Z_3}{2}, \quad Z^{(0)}_{0,0,2} = 1, \quad Z^{(0)}_{0,1,-1} = -\frac{e^{-\pi iZ_1Z_3}}{8}\csc^2(\pi Z_3),$$
$$Z^{(0)}_{0,1,0} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{2}Z_1Z_3}}{4}\csc\frac{\pi Z_1}{2}\csc(\pi Z_3)\sin\frac{\pi Z_1Z_3}{2}, \quad Z^{(0)}_{0,1,1} = \frac{1}{2}, \quad Z^{(0)}_{0,2,0} = 1. \tag{B.11}$$

$\underline{M_0 = \frac{1}{2}}$

$$Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{16\sqrt{2}}\sec^3(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{8\sqrt{2}}\sec^3(\pi Z_1),$$
$$Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}} = \frac{e^{-2\pi iZ_1Z_3}}{16\sqrt{2}}\sec(\pi Z_1)\sec^3(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi iZ_1Z_3}}{32\sqrt{2}}\sec^2(\pi Z_1)\sec^2(\pi Z_3)X^+,$$

$$
\begin{aligned}
&Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{16\sqrt{2}} \sec^2(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3) X^-, \quad Z^{(0)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{2\sqrt{2}} \sec(\pi Z_1),\\
&Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{8\sqrt{2}} \sec^3(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{16\sqrt{2}} \sec(\pi Z_1)\sec^2(\pi Z_3) X^-,\\
&Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3) X^+, \quad Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
&Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{2\sqrt{2}} \sec(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{B.12}
$$

$\underline{M_0 = 1}$

$$
\begin{aligned}
&Z^{(0)}_{1,-1,-1} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{16} \csc^2(\pi Z_1)\csc^2(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{1,-1,0} = -\frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{16} \csc^2(\pi Z_1)\sec\frac{\pi Z_3}{2},\\
&Z^{(0)}_{1,-1,1} = -\frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4} \csc^2(\pi Z_1), \quad Z^{(0)}_{1,0,-1} = -\frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{16} \sec\frac{\pi Z_1}{2}\csc^2(\pi Z_3),\\
&Z^{(0)}_{1,0,0} = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{2} Z_1 Z_3}}{4} \csc(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\sin\frac{\pi Z_1 Z_3}{2}, \quad Z^{(0)}_{1,0,1} = \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{4} \sec\frac{\pi Z_1}{2},\\
&Z^{(0)}_{1,1,-1} = -\frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4} \csc^2(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{1,1,0} = \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{4} \sec\frac{\pi Z_3}{2}, \quad Z^{(0)}_{1,1,1} = 1.
\end{aligned} \tag{B.13}
$$

$\underline{M_0 = \frac{3}{2}}$

$$
\begin{aligned}
&Z^{(0)}_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4\sqrt{2}} \sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{2\sqrt{2}} \sec(\pi Z_1),\\
&Z^{(0)}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{2\sqrt{2}} \sec(\pi Z_3), \quad Z^{(0)}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{B.14}
$$

$\underline{M_0 = 2}$

$$
Z^{(0)}_{2,0,0} = e^{-2\pi i Z_1 Z_3}. \tag{B.15}
$$

C $k = 1$的更高秩配分函数

在本附录中，我们列出 $N = 1$ 处 $k = 1$的配分函数精确值。我们将它们记为

$$
Z^{(1)}_{M_0,M_1,M_3} = e^{-i\Theta_{k,M}} Z_{k,\boldsymbol{M}}(N = 1) = e^{-i\Theta'_{k,M}} Z'_{k,\boldsymbol{M}}(N = 1). \tag{C.1}
$$

如附录 B 中对 $N = 0$ 所做的处理，我们去除相位，并且在等式左侧仅用上标 **(1)** 表示 $N = 1$ ，省略层级 k 和 FI 参数 Z_1， Z_3。基本域中格点处的配分函数，其与

$N=0$ 处的那些在 Weyl群作用下不变，由（4.5）固定。我们仅列出相对秩（M_0，M_1，M_3）位于基本域之外的项。

$\underline{M_0=-\frac{3}{2}}$

$$Z^{(1)}_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3),\quad Z^{(1)}_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sec(\pi Z_1),$$
$$Z^{(1)}_{-\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sec(\pi Z_3),\quad Z^{(1)}_{-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=e^{2\pi i Z_1Z_3}. \tag{C.2}$$

$\underline{M_0=-1}$

$$Z^{(1)}_{-1,-1,-1}=\frac{e^{-2\pi i Z_1Z_3}}{16}\csc^2(\pi Z_1)\csc^2(\pi Z_3),\quad Z^{(1)}_{-1,-1,1}=-\frac{1}{4}\csc^2(\pi Z_1),$$
$$Z^{(1)}_{-1,1,-1}=-\frac{1}{4}\csc^2(\pi Z_3),\quad Z^{(1)}_{-1,1,1}=e^{2\pi i Z_1Z_3}, \tag{C.3}$$

$$Z^{(1)}_{-1,-1,0}=-\frac{e^{-\pi i Z_1Z_3}}{8}\csc^3(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\sin(\pi Z_1Z_3),$$
$$Z^{(1)}_{-1,0,-1}=-\frac{e^{-\pi i Z_1Z_3}}{8}\csc(\pi Z_1)\csc^3(\pi Z_3)\sin(\pi Z_1Z_3),$$
$$Z^{(1)}_{-1,0,1}=\frac{e^{\pi i Z_1Z_3}}{2}\csc(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\sin(\pi Z_1Z_3),$$
$$Z^{(1)}_{-1,1,0}=\frac{e^{\pi i Z_1Z_3}}{2}\csc(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\sin(\pi Z_1Z_3). \tag{C.4}$$

$\underline{M_0=-\frac{1}{2}}$

$$Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}=\frac{e^{-2\pi i Z_1Z_3}}{32}\sec^4(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3),\quad Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}=\frac{e^{-2\pi i Z_1Z_3}}{16}\sec^4(\pi Z_1),$$
$$Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}=\frac{e^{-2\pi i Z_1Z_3}}{32}\sec(\pi Z_1)\sec^4(\pi Z_3),\quad Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3),$$
$$Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}=\frac{e^{-2\pi i Z_1Z_3}}{16}\sec^4(\pi Z_3),\quad Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}}=\frac{e^{2\pi i Z_1Z_3}}{2}\sec(\pi Z_3),$$
$$Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\sec(\pi Z_1)\sec(\pi Z_3),\quad Z^{(1)}_{-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}}=\frac{e^{2\pi i Z_1Z_3}}{2}\sec(\pi Z_1). \tag{C.5}$$

$\underline{M_0=0}$

$$Z^{(1)}_{0,-1,-1}=\frac{e^{-3\pi i Z_1Z_3}}{32}\csc^3(\pi Z_1)\csc^3(\pi Z_3)\sin(\pi Z_1Z_3),$$
$$Z^{(1)}_{0,-1,1}=-\frac{e^{-\pi i Z_1Z_3}}{8}\csc^3(\pi Z_1)\csc(\pi Z_3)\sin(\pi Z_1Z_3),$$
$$Z^{(1)}_{0,1,-1}=-\frac{e^{-\pi i Z_1Z_3}}{8}\csc(\pi Z_1)\csc^3(\pi Z_3)\sin(\pi Z_1Z_3),$$

$$Z^{(1)}_{0,1,1} = \frac{e^{\pi i Z_1 Z_3}}{2} \csc(\pi Z_1) \csc(\pi Z_3) \sin(\pi Z_1 Z_3). \tag{C.6}$$

$\underline{M_0 = \frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} &= \frac{e^{-4\pi i Z_1 Z_3}}{32} \sec^4(\pi Z_1) \sec(\pi Z_3), \quad Z^{(1)}_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{16} \sec^4(\pi Z_1), \\
Z^{(1)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}} &= \frac{e^{-4\pi i Z_1 Z_3}}{32} \sec(\pi Z_1) \sec^4(\pi Z_3), \quad Z^{(1)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \sec(\pi Z_1) \sec(\pi Z_3), \\
Z^{(1)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}} &= \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{16} \sec^4(\pi Z_3), \quad Z^{(1)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sec(\pi Z_3), \\
Z^{(1)}_{\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \sec(\pi Z_1) \sec(\pi Z_3), \quad Z^{(1)}_{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sec(\pi Z_1).
\end{aligned} \tag{C.7}$$

$\underline{M_0 = 1}$

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}_{1,-1,0} &= -\frac{e^{-3\pi i Z_1 Z_3}}{8} \csc^3(\pi Z_1) \csc(\pi Z_3) \sin(\pi Z_1 Z_3), \\
Z^{(1)}_{1,0,-1} &= -\frac{e^{-3\pi i Z_1 Z_3}}{8} \csc(\pi Z_1) \csc^3(\pi Z_3) \sin(\pi Z_1 Z_3), \\
Z^{(1)}_{1,0,1} &= \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{2} \csc(\pi Z_1) \csc(\pi Z_3) \sin(\pi Z_1 Z_3), \\
Z^{(1)}_{1,1,0} &= \frac{e^{-\pi i Z_1 Z_3}}{2} \csc(\pi Z_1) \csc(\pi Z_3) \sin(\pi Z_1 Z_3),
\end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}_{1,-1,-1} &= \frac{e^{-4\pi i Z_1 Z_3}}{16} \csc^2(\pi Z_1) \csc^2(\pi Z_3), \quad Z^{(1)}_{1,-1,1} = -\frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4} \csc^2(\pi Z_1), \\
Z^{(1)}_{1,1,-1} &= -\frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{4} \csc^2(\pi Z_3), \quad Z^{(1)}_{1,1,1} = 1.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

$\underline{M_0 = \frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= \frac{e^{-4\pi i Z_1 Z_3}}{4} \sec(\pi Z_1) \sec(\pi Z_3), \quad Z^{(1)}_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{2} \sec(\pi Z_1), \\
Z^{(1)}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= \frac{e^{-2\pi i Z_1 Z_3}}{2} \sec(\pi Z_3), \quad Z^{(1)}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = e^{-2\pi i Z_1 Z_3}.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

D 双线性关系检验值列表

在本附录中，我们列出一些点（L_1， L_2， L， ζ_1），在这些点处，我们可以通过计算方法 I（见 A.2 节所述）得到的精确值，检验 40个双线性关系 (4.6) 在 κ 阶的情形。除了方法 II 之外，我们还采用方法 I 进行研究，原因是附录 A.2.3 中讨论了收敛条件；在那里，计算是在更合理的

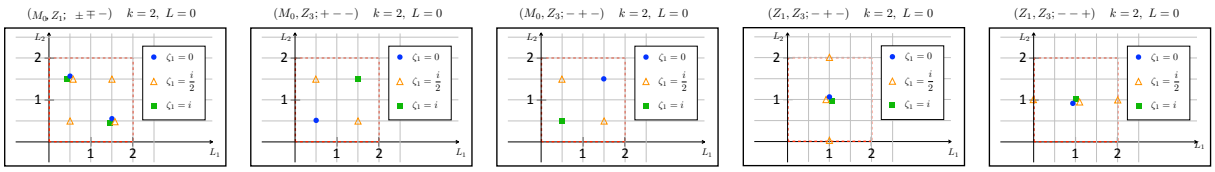


图 6：我们在阶数为 κ 时，针对点集 (k、 L_1、 L_2、 L、 ζ_1)，将 (D.1) 中的双线性关系与精确值进行显式核对。请注意，所有数据点均位于网格上$2L_1$、 $2L_2 \in \mathbb{Z}$，但为了便于观察，其中一些点绘制时进行了轻微偏移。红色虚线表示每个切片上基本域 (2.13) 的边界。

参数下进行的。为此，我们必须选择层级 k和基点（L_1， L_2， L， ζ_1），使 (4.6) 中的六个移位点都满足条件 (A.36)。从 (A.36) 可以看出，要使这样的点存在， k 必须足够大。特别是，标记为

$$(a,b;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = (M_0,Z_1;+--),\,(M_0,Z_1;-+-),\,(M_0,Z_3;+--),\,(M_0,Z_3;-+-),\\ (Z_1,Z_3;-+-),\,(Z_1,Z_3;--+), \tag{D.1}$$

可核对 f 或者仅当 $k \geq 2$ 时，可核对点集 (L_1、 L_2、 L、 ζ_1) 中的多个点，以及那些标记为

$$(M_0,M_1;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),\,(M_0,M_3;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),\,(M_1,Z_1;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),\,(M_1,Z_3;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),\\ (M_3,Z_1;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),\,(M_3,Z_3;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3), \tag{D.2}$$

可以核对点集 (L_1、 L_2、 L、 ζ_1) 中的多个点，仅当 $k \geq 3$ 时；而其余标记为的双线性关系

$$(M_0,Z_1;+++),\,(M_0,Z_1;--+),\,(M_0,Z_3;+++),\,(M_0,Z_3;--+),\\ (M_1,M_3;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),\,(Z_1,Z_3;+++),\,(Z_1,Z_3;+--), \tag{D.3}$$

只有当 $k \geq 5$ 时才能核对。在图 6、图 7 和图 8 中，我们列出了满足约束的所有点 (L_1、 L_2、 L、 ζ_1)，在这些点处，我们分别可以核对 (D.1) 中关于 $k = 2$、(D.2) 中关于 $k = 3$ 以及 (D.3) 中关于 $k = 5$ 的双线性关系。我们已经核实，(D.1)–(D.3) 中的双线性关系确实在这些点处成立。

致谢

我们感谢 Giulio Bonelli、Yasuaki Hikida、Masazumi Honda、Yosuke Imamura、Hi- roshi Itoyama、Hiroaki Kanno、NaotakaKubo、Kimyeong Lee、Kazunobu Maruyoshi、Shun'ya

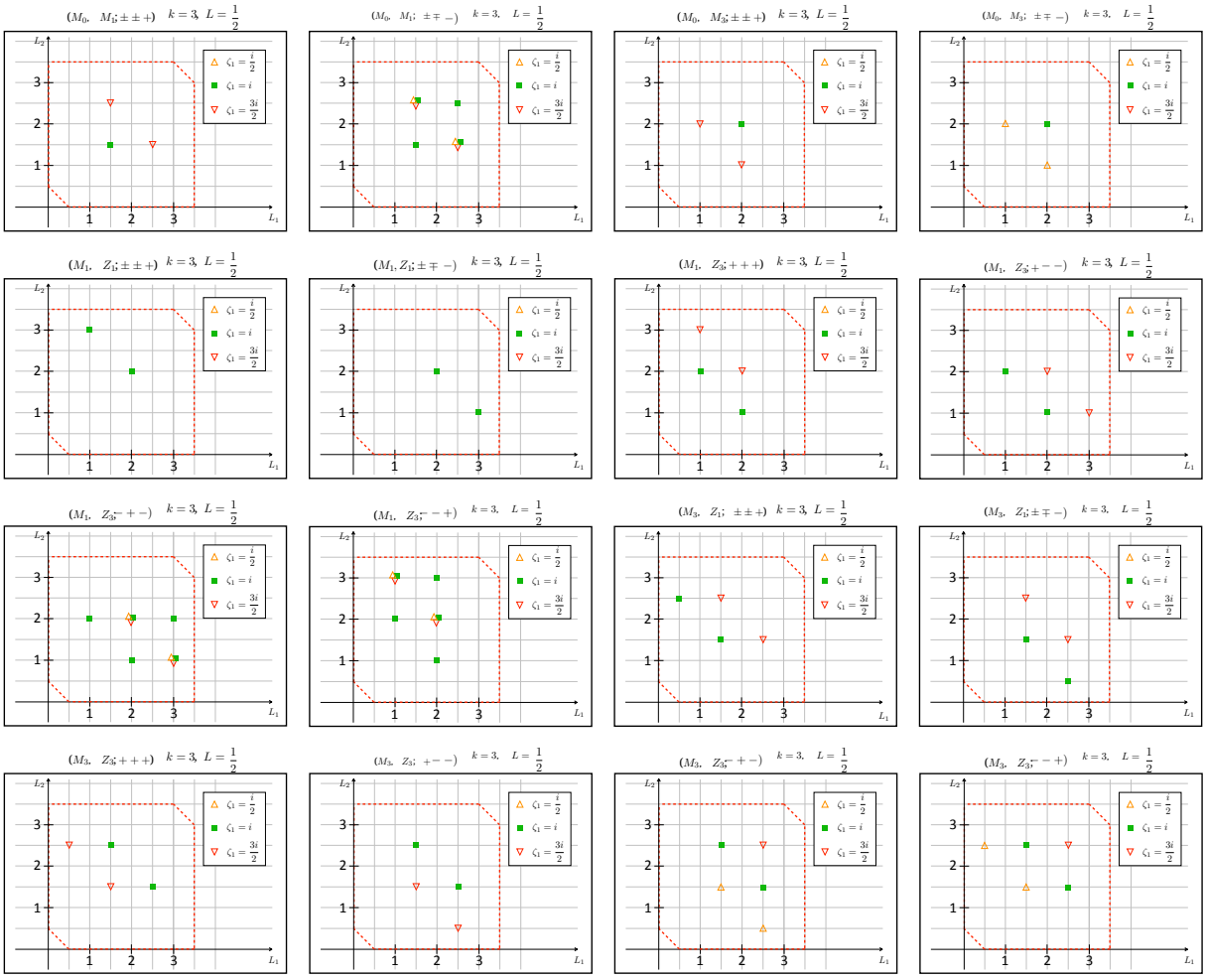


图 7：我们已在阶数 κ 下，将点 $(k, L_1, L_2, L, \zeta_1)$ 处的双线性关系 (D.2) 与精确值进行逐一核对。

Mizoguchi、Takahiro Nishinaka、Tadakatsu Sakai、Alessandro Tanzini、Yasuhiko Yamada、Shintarou Yanagida 和 Shuichi Yokoyama 富有价值的讨论和意见。S. M. 的工作得到 JSPS 科学研究补助金（C）#19K03829 和 #22K03598 的资助。S. M. 谨向京都大学汤川理论物理研究所致以谢意，感谢其热情接待。用于检验双线性关系（4.6）的部分精确值，是借助汤川理论物理研究所提供的高性能计算设施（Sushiki 服务器）获得的。本文的初步结果曾在多个国际会议上报告，包括在日本茨城举办的“KEK 理论研讨会 2022”、在越南岘港举办的“第六届全息、弦论与时空国际会议”，以及在日本大阪举办的“量子场论与表示论”。我们感谢会议组织者，并感谢与会者进行的各种宝贵讨论。

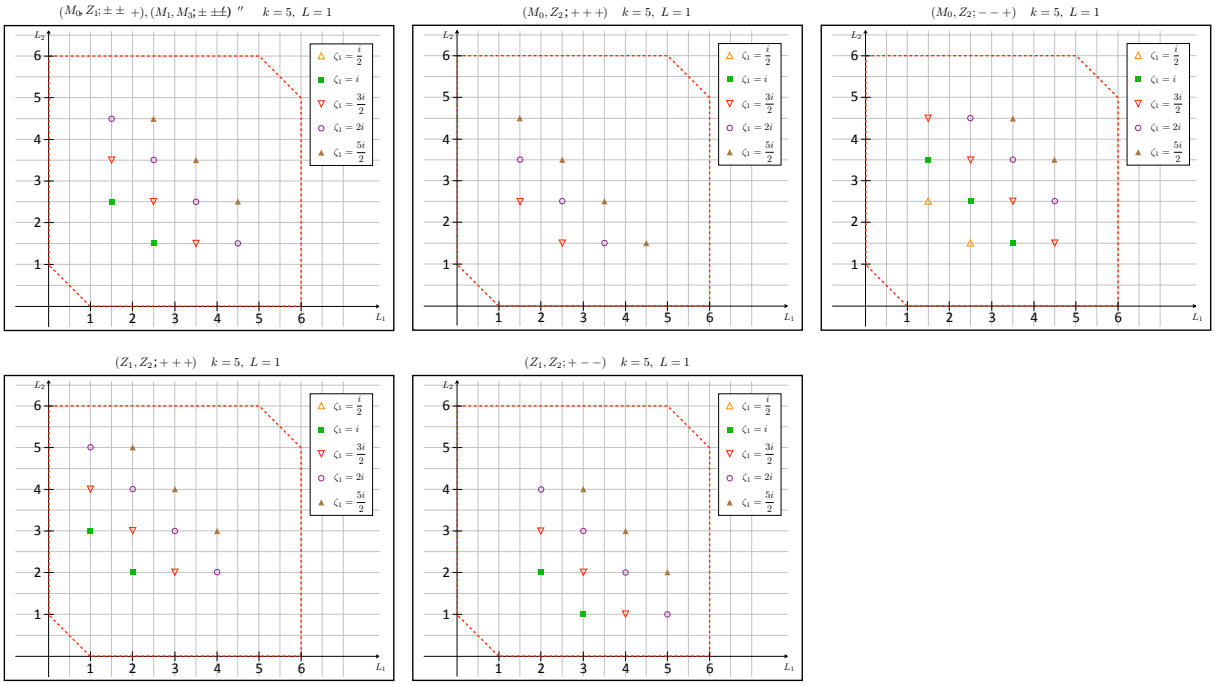


图 8：我们在此检验了 (D.3) 中双线性关系的点列表（k, L_1, L_2, L, ζ_1），并在 κ 阶将其与精确值进行了明确对照。

参考文献

[1] R. Donagi 和 E. Witten，《超对称杨–米尔斯理论与可积系统》，Nucl. Phys. B 460 (1996), 299-334 [arXiv:hep-th/9510101 [hep-th]].[2] O. Aharony、O. Bergman、D. L. Jafferis 和 J. Maldacena，《N=6超共形陈–西蒙斯物质理论、M2 膜及其引力对偶》，JHEP 10 (2008), 091[arXiv:0806.1218 [hep-th]].[3] K. Kajiwara、M. Noumi 和 Y. Yamada，《Painlev´e 方程的几何方面》，Journal of PhysicsA: Mathematical and Theoretical 50 (2017) 073001 [arXiv:1509.08186[nlin.SI][4] D. Gaiotto 和 E. Witten，《Janus 构型、陈–西蒙斯耦合与 N=4超杨–米尔斯理论中的 theta 角》，JHEP 06 (2010), 097 [arXiv:0804.2907[hep-th]].[5] Y. Imamura 和 K. Kimura，《椭圆 Maxwell–陈–西蒙斯理论的模空间》，《理论物理进展》120 (2008), 509-523 [arXiv:0806.3727 [hep-th]].

[6] I. R. Klebanov 和 A. A. Tseytlin, 《近极端黑色 p 膜的熵》, Nucl. Phys. B 475 (1996), 164-178 [arXiv:hep-th/9604089 [hep-th]].[7] A. Kapustin、B. Willett 和 I. Yaakov, 《含物质超共形陈–西蒙斯理论中 Wilson 环的精确结果》, JHEP 03 (2010), 089 [arXiv:0909.4559[hep-th]].[8] N. Drukker、M. Marino 和 P. Putrov, 《从弱耦合到强耦合的 ABJM 理论》, 《数学物理通讯》306 (2011), 511-563 [arXiv:1007.3837 [hep-th]].[9] N. Drukker、M. Marino 和 P. Putrov, 《ABJM 理论的非微扰方面》, JHEP 11 (2011), 141 [arXiv:1103.4844 [hep-th]].[10] H. Fuji、S. Hirano 和 S. Moriyama, 《求和 ABJM 矩阵模型的所有亏格自由能》, JHEP 08 (2011), 001 [arXiv:1106.4631 [hep-th]].[11] M. Marino 和 P. Putrov, 《作为费米气体的 ABJM 理论》, J. Stat. Mech. 1203 (2012), P03001 [arXiv:1110.4066 [hep-th]].[12] Y. Hatsuda、S. Moriyama 和 K. Okuyama, 《通过费米气体方法研究 ABJM 理论中的瞬子效应》, JHEP 01 (2013), 158 [arXiv:1211.1251 [hep-th]].[13] F. Calvo 和 M. Marino, 《来自半经典 TBA 的膜瞬子》, JHEP 05 (2013), 006 [arXiv:1212.5118 [hep-th]].[14] Y. Hatsuda、S. Moriyama 和 K. Okuyama, 《ABJM 理论中的瞬子束缚态》, JHEP 05 (2013), 054 [arXiv:1301.5184 [hep-th]].[15] Y. Hatsuda、M. Marino、S. Moriyama 和 K. Okuyama, 《非微扰效应与精细化拓扑弦》, JHEP 09 (2014), 168 [arXiv:1306.1734 [hep-th]].[16] Y. Hatsuda、S. Moriyama 和 K. Okuyama, 《ABJM 费米气体的精确结果》, JHEP 10 (2012), 020 [arXiv:1207.4283 [hep-th]].[17] P. Putrov 和 M. Yamazaki, 《通过 TBA 得到的 ABJM 精确配分函数》, Mod. Phys. Lett. A 27 (2012), 1250200 [arXiv:1207.5066 [hep-th]].[18] J. Bourdier、N. Drukker 和 J. Felix, 《来自自由费米子的 $\mathcal{N} = 2$ Schur 指标》, JHEP 01 (2016), 167 [arXiv:1510.07041 [hep-th]].[19] S. Moriyama 和 T. Nosaka, 《通过费米气体方法求超共形陈–西蒙斯理论的配分函数》, JHEP 11 (2014), 164 [arXiv:1407.4268 [hep-th]].

[20] A. Mironov 和 A. Morozov，《Nekrasov 函数与精确 Bohr-Zommerfeld 积分》，JHEP 04 (2010)，040 [arXiv:0910.5670 [hep-th]]。[21] M. Aganagic、M. C. N. Cheng、R. Dijkgraaf、D. Krefl 和 C. Vafa，《精化拓扑弦的量子几何》，JHEP 11 (2012)，019 [arXiv:1105.0630 [hep-th]]。[22] S. Moriyama 和 T. Nosaka，《从拓扑弦得到超共形 Chern-Simons 理论的精确瞬子展开》，JHEP 05 (2015)，022 [arXiv:1412.6243 [hep-th]]。[23] S. Moriyama、S. Nakayama 和 T. Nosaka，《从拓扑弦得到秩变形超共形 Chern-Simons 理论中的瞬子效应》，JHEP 08 (2017)，003[arXiv:1704.04358 [hep-th]]。[24] S. Moriyama、T. Nosaka 和 K. Yano，《来自 del Pezzo 几何的超共形 Chern-Simons 理论》，JHEP 11 (2017)，089 [arXiv:1707.02420 [hep-th]]。[25] N. Kubo、S. Moriyama 和 T. Nosaka，《量子曲线与超 Chern–Simons 矩阵模型中的对称性破缺》，JHEP 01 (2019)，210 [arXiv:1811.06048 [hep-th]]。[26] K. Hosomichi、K. M. Lee、S. Lee、S. Lee 和 J. Park，《N=5,6 超共形 Chern-Simons 理论与轨形上的 M2 膜》，JHEP 09 (2008)，002 [arXiv:0806.4977[hep-th]]。[27] O. Aharony、O. Bergman 和 D. L. Jafferis，《分数 M2 膜》，JHEP 11 (2008)，043 [arXiv:0807.4924 [hep-th]]。[28] S. Matsumoto 和 S. Moriyama，《ABJ Wilson 环中的 ABJ 分数膜》，JHEP 03 (2014)，079 [arXiv:1310.8051 [hep-th]]。[29] M. Honda 和 K. Okuyama，《ABJ 理论与精化拓扑弦的精确结果》，JHEP 08 (2014)，148 [arXiv:1405.3653 [hep-th]]。[30] M. Honda，《“镜像”ABJ 配分函数的直接推导》，JHEP 12 (2013)，046 [arXiv:1310.3126 [hep-th]]。[31] R. Kashaev、M. Marino 和 S. Zakany，《由算符和拓扑弦得到的矩阵模型，2》，Annales Henri Poincare 17 (2016) no.10, 2741-2781 [arXiv:1505.02243 [hep-th]]。[32] S. Moriyama 和 T. Suyama，《正交辛 Chern-Simons 矩阵模型与手征性

y Proj节”，JHEP04 (2016)，132 [arXiv:1601.03846 [高能物理理论]].

[33] S. Moriyama 和 T. Nosaka，《定向投影ABJM矩阵模型：手征投影与世界面瞬子》，JHEP 06 (2016)，068 [arXiv:1603.00615 [高能物理理论]]。[34] K. Kiyoshige 和 S. Moriyama，《ABJM矩阵模型中的对偶性：闭弦视角》，JHEP 11 (2016)，096 [arXiv:1607.06414 [高能物理理论]]。[35] N. Kubo 和 S. Moriyama，《量子曲线中的 Hanany-Witten 跃迁》，JHEP 12 (2019)，101 [arXiv:1907.04971 [高能物理理论]]。[36] T. Furukawa、S. Moriyama 和 T. Nakanishi，《来自例外群的膜跃迁》，Nucl. Phys. B 969 (2021)，115477 [arXiv:2010.15402 [高能物理理论]]。[37]A. Hanany 和 E. Witten，《IIB型超弦、BPS磁单极子与三维规范动力学》，Nucl. Phys. B 492 (1997), 152-190 [arXiv:hep-th/9611230[高能物理理论]]。[38] A. Grassi、Y. Hatsuda 和 M. Marino，《来自量子力学的拓扑弦》，Annales Henri Poincare 17 (2016) no.11, 3177-3235 [arXiv:1410.3382 [高能物理理论]]。[39] S. Moriyama，《del Pezzo几何上的谱理论与拓扑弦》，JHEP 10 (2020)，154 [arXiv:2007.05148 [高能物理理论]]。[40] S. Moriyama 和 Y. Yamada，《仿射Weyl群的量子表示与相关量子曲线》，SIGMA 17 (2021)，076 [arXiv:2104.06661 [math.QA]]。[41] B.M. McCoy 和 T.T. Wu，《二维伊辛模型》，Courier Corporation，2014。[42] B. Grammaticos、A. Ramani 和 V. Papageorgiou，《可积映射是否具有 Painlevé 性质？》，Phys. Rev. Lett. 67 (1991), 1825-1828。[43] A. Ramani、B. Grammaticos 和 J. Hietarinta，《Painlevé 方程的离散版本》，Phys. Rev. Lett. 67 (1991), 1829-1832。[44] M. Jimbo 和 H. Sakai，《第六个 Painlevé 方程的 q类比》，Letters in Mathematical Physics 38 (1996) 145-154 [arXiv:chao-dyn/9507010 [nlin.CD]]。[45] H. Sakai，《与仿射根系相关的有理曲面与 Painlevé 方程的几何》，《数学物理通讯》220 (2001) 165-229。[46] M. A. Bershtein 和 A. I. Shchechkin，《q变形 Painlevé 函数与 q变形共形块》，J. Phys. A 50 (2017) no.8, 085202 [arXiv:1608.02566 [math-ph]]。

[47] M. Jimbo、H. Nagoya 和 H. Sakai, 《q-Painlev´e VI 方程的共形场论方法》, J. Integrab. Syst. 2 (2017) no.1, 1[48] Y. Matsuhira 和 H. Nagoya, 《q-Painleve V 和 III 方程的 τ 函数的组合表达式》, SIGMA 15 (2019), 074 [arXiv:1811.03285 [math-ph]].[49] N. Seiberg, 《五维超对称场论、非平凡不动点与弦动力学》, Phys. Lett. B 388 (1996), 753-760 [arXiv:hep-th/9608111 [hep-th]].[50] O. Gamayun、N. Iorgov 和 O. Lisovyy, 《Painlev´e VI 的共形场论》, JHEP 10 (2012), 038 [勘误: JHEP 10 (2012), 183] [arXiv:1207.0787 [hep-th]].[51] N. Iorgov、O. Lisovyy 和 J. Teschner, 《由 Liouville 共形块得到的等单值 tau 函数》, 《数学物理通讯》336 (2015) no.2, 671-694 [arXiv:1401.6104[hep-th]].[52] H. Nakajima 和 K. Yoshioka, 《爆破上的瞬子计数。II. K理论配分函数》, Transformation groups 10 (2005) no.3, 489-519.[53]G. Bonelli、A. Grassi 和 A. Tanzini, 《非微扰弦理论中的新结果》, Annales Henri Poincare 19 (2018) no.3, 743-774 [arXiv:1704.01517[hep-th]].[54] G. Bonelli、F. Globlek 和 A. Tanzini, 《通过表面算子重整化群流计数杨-米尔斯瞬子》, Phys. Rev. Lett. 126 (2021) no.23, 231602[arXiv:2102.01627 [hep-th]].[55] G. Bonelli、F. Globlek 和 A. Tanzini, 《SYM中表面缺陷的Toda方程与经典李群的瞬子计数》, J. Phys. A 55 (2022) no.45, 454004[arXiv:2206.13212 [hep-th]].[56] P. Gavrylenko、A. Grassi 和 Q. Hao, 《通过非自主Toda方程连接拓扑弦与谱理论》, [arXiv:2304.11027 [hep-th]].[57] A. B. Zamolodchikov, 《Painleve III 与二维聚合物》, Nucl. Phys. B 432 (1994), 427-456 [arXiv:hep-th/9409108 [hep-th]].[58] A. Grassi、Y. Hatsuda 和 M. Marino, 《ABJ(M)理论中的量子化条件与函数方程》, J. Phys. A 49 (2016) no.11, 115401 [arXiv:1410.7658 [hep- th]].

[59] G. Bonelli、A. Grassi 和 A. Tanzini, 《量子曲线与 q-变形Painlev´e方程》, 《数学物理快报》109 (2019) no.9, 1961-2001 [arXiv:1710.11603 [hep-th]].[60] G. Bonelli、F. Globlek、N. Kubo、T. Nosaka 和 A. Tanzini, 《M2 膜与 q-Painlev´e方程》, 《数学物理快报》112 (2022) no.6, 109 [arXiv:2202.10654 [hep-th]].[61] T. Furukawa、K. Matsumura、S. Moriyama 和 T. Nakanishi, 《对偶级联与仿射Weyl群》, JHEP 05 (2022), 132 [arXiv:2112.13616 [hep-th]].[62] T. Furukawa、S. Moriyama 和 H. Sasaki, 《对偶级联与平行多面体》, J. Phys. A 56 (2023) no.16, 165401 [arXiv:2205.08039 [hep-th]].[63] Y. Ohta, RIMS Kokyuroku 1098 (1999), 130-137, 日文。[64] T. Kitao、K. Ohta 和 N. Ohta, 《从含(p,q)-五膜的膜构型得到的三维规范动力学》, Nucl. Phys. B 539 (1999), 79-106 [arXiv:hep-th/9808111[hep-th]].[65] O. Bergman、A. Hanany、A. Karch 和 B. Kol, 《三维规范理论中的膜与超对称性破缺》, JHEP 10 (1999), 036 [arXiv:hep-th/9908075 [hep- th]].[66] D. L. Jafferis, 《精确超共形R对称性使Z取极值》, JHEP05 (2012),159 [arXiv:1012.3210 [hep-th]].[67] N. Hama、K. Hosomichi 和 S. Lee, 《三维球面上超对称规范理论札记》, JHEP 03 (2011), 127 [arXiv:1012.3512 [hep-th]].[68] J. Evslin 和 S. Kuperstein, 《ABJ(M)与带有分数M2荷的分数M2》, JHEP 12 (2009), 016 [arXiv:0906.2703 [hep-th]].[69] M. Honda 和 N. Kubo, 《三维超对称规范理论中对偶级联的非微扰检验》, JHEP 07 (2021), 012 [arXiv:2010.15656 [hep-th]].[70] E. Witten, 《二维引力与模空间上的交叉理论》, Surveys Diff. Geom. 1 (1991), 243-310[71] S. Kharchev、A. Marshakov、A. Mironov、A. Orlov 和 A. Zabrodin, 《可积理论中的矩阵模型：受迫层级与算子形式主义》, Nucl. Phys. B366 (1991), 569-601.[72] K. Kajiwara、T. Masuda、M. Noumi、Y. Ohta 和 Y. Yamada, 《Toda方程与离散Toda方程的行列式公式》, Funkcialaj Ekvacioj 44 (2001) 291-307.

[73] T. Tsuda 和 T. Masuda，“源于 q-UC 层级的 q-Painlev´e VI 方程”，《数学物理通讯》262（2006），595-609。[74] B. Assel，“矩阵模型中的 Hanany-Witten 效应与 SL(2, $\mathbb{Z}$) 对偶变换 ”，JHEP 10 （ 2014 ）， 117 [arXiv:1406.5194 [hep-th]]。[75] D. Gaiotto 和 E. Witten，“N=4 超杨-米尔斯理论中边界条件的 S 对偶”，Adv. Theor. Math. Phys. 13（2009）第3期，721-896 [arXiv:0807.3720 [hep-th]]。[76] I. Yaakov，“拯救坏理论”，JHEP 11（2013）， 189 [arXiv:1303.2769 [hep-th]]。[77] T. Nosaka 和 S. Yokoyama，“最小 $\mathcal{N} = 4$ Chern-Simons-物质理论中的完全因式分解”，JHEP 01（2018）， 001 [arXiv:1706.07234 [hep-th]]。[78] T. Nosaka 和 S. Yokoyama，“最小 $\mathcal{N} = 4$ Chern-Simons-物质理论的指标与对偶性”，JHEP 06（2018）， 028 [arXiv:1804.04639 [hep-th]]。[79] G. Bonelli、A. Grassi 和 A. Tanzini，“作为费米气体的 Seiberg-Witten 理论”，《数学物理快报》107（2017）第1期，1-30 [arXiv:1603.01174 [hep-th]]。[80] C. A. Tracy 和 H. Widom，“Fredholm 行列式与 mkdv/sinh-gordon 层级”，《数学物理通讯》179（1996），1-9 [arXiv:solv-int/9509006 [nlin.SI]]。[81] M. Sato 和 Y. Mori，RIMS Kokyuroku 388（1980），183-204，日文。[82] M. Sato，“作为无限维 Grassmann 流形上动力系统的孤子方程（随机系统与动力系统）”，RIMS Kokyuroku 439（1981），30-46。[83] V. A. Kazakov，“Hirota 方程的一个矩阵模型解”， [arXiv:hep-th/9711019[hep-th]]。[84] K. Kajiwara、M. Noumi 和 Y. Yamada，“关于第四个 q-Painlev´e 方程的研究”，J. Phys. A: Math. Gen. **34** 8563 [arXiv:nlin/0012063 [nlin.SI]]。[85] N. Drukker 和 D. Trancanelli，“用于 N=6 超 Chern-Simons-物质理论的超矩阵模型”，JHEP 02（2010）， 058 [arXiv:0912.3006 [hep-th]]。[86] M. Marino 和 P. Putrov，“从拓扑弦得到的 ABJM 理论精确结果”，JHEP 06（2010）， 011 [arXiv:0912.3074 [hep-th]]。[87]S. Matsuno 和 S. Moriyama，“超 Chern-Simons 矩阵模型中的 Giambelli 恒等式”，J. Math. Phys. 58（2017）第3, 032301 [期，04124 [arXiv:1603.]]hep-th。

[88] T. Furukawa 和 S. Moriyama，“超 Chern-Simons 矩阵模型中的 Jacobi–Trudi 恒等式”，SIGMA 14（2018），049 [arXiv:1711.04893 [hep-th]]。[89]A. Klemm、M. Marino、M. Schiereck 和 M. Soroush，“费米气体方法中的 Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena Wilson 环”，Z. Naturforsch. A 68（2013），178-209 [arXiv:1207.0611 [hep-th]]。[90] Y. Hatsuda、M. Honda、S. Moriyama 和 K. Okuyama，“任意表示下的 ABJM Wilson 环”，JHEP 10（2013），168 [arXiv:1306.4297 [hep-th]]。[91] T. Furukawa 和 S. Moriyama，“ABJM 矩阵模型与二维 Toda 格层级”，JHEP 03（2019），197 [arXiv:1901.00541 [hep-th]]。[92] N. Kubo 和 S. Moriyama，“ABJM 矩阵模型中的二点函数”，JHEP 05（2018），181 [arXiv:1803.07161 [hep-th]]。[93] Y. Hatsuda 和 K. Okuyama，“ABJ Wilson 环与开闭对偶的精确结果”，JHEP 10（2016），132 [arXiv:1603.06579 [hep-th]]。[94] D. R. Gulotta、J. P. Ang 和 C. P. Herzog，“具有 ADE 分类的超对称 Chern-Simons 理论的矩阵模型”，JHEP 01（2012），132 [arXiv:1111.1744[hep-th]]。 ˆ[95] B. Assel、N. Drukker 和 J. Felix，“由一维自由费米子得到的三维 D-夸克及其镜像对偶的配分函数”，JHEP 08（2015），071 [arXiv:1504.07636 [hep-th]]。[96] S. Moriyama 和 T. Nosaka，“由费米气体得到的仿射 D 型夸克的超共形 Chern-Simons 配分函数”，JHEP 09（2015），054 [arXiv:1504.07710 [hep- th]]。[97] G. Bonelli、F. Globlek、N. Kubo、T. Nosaka 和 A. Tanzini，研究进行中。[98] K. Hasegawa，“Painlev´e 方程的 B¨acklund 变换的量子化与量子离散 Painlev´e VI 方程”，[arXiv:math/0703036 [math.QA]]。[99] M. Bershtein、P. Gavrylenko 和 A. Marshakov，“簇可积系统、q-Painlev´e 方程及其量子化”，JHEP 02（2018），077 [arXiv:1711.02063 [math-ph]]。[100] H. Awata、K. Hasegawa、H. Kanno、R. Ohkawa、S. Shakirov、J. Shiraishi 和 Y. Yamada，“非定常差分方程、仿射 Laumon 空间与离散 Painlev’e 方程的量子化 ”，[arXiv:2211.16772 [nlin.SI]]。

[101] N. Nekrasov 和 A. Okounkov，《Seiberg-Witten 理论与随机分拆》，《数学进展》**244 (2006)**, 525-596 [arXiv:hep-th/0306238 [hep-th]].[102] M. Bershtein 和 A. Shchechkin，《由 Nakajima-Yoshioka 爆破关系导出的 Painlev´e 方程》，《数学物理快报》**109 (2019)** 第 **11** 期，2359-2402 [arXiv:1811.04050 [math-ph]].[103] J. Kim、S. S. Kim、K. H. Lee、K. Lee 和 J. Song，《来自爆破的瞬子》，**JHEP11 (2019)**, 092 [勘误: **JHEP06 (2020)**, 124] [arXiv:1908.11276 [hep-th]].[104] C. A. Tracy 和 H. Widom，《与热力学 Bethe Ansatz 相关的两个猜想的证明》，《数学物理通讯》**179 (1996)**, 667-680 [arXiv:solv-int/9509003[nlin.SI]].[105] K. Okuyama，《关于 ABJM 理论在 S^3 上的配分函数的注记》，《理论物理进展》**127 (2012)**, 229-242 [arXiv:1110.3555 [hep-th]].[106] T. Nosaka，《质量变形 ABJM 理论中的 SU(N) q-Toda 方程》，**JHEP 06(2021)**, 060 [arXiv:2012.07211 [hep-th]].[107] J. Gomis、D. Rodriguez-Gomez、M. Van Raamsdonk 和 H. Verlinde，《M2 膜理论方案的深入研究》，**JHEP 09 (2008)**, 113 [arXiv:0807.1074 [hep-th]].