arXiv:2305.03984v1 [physics.flu-dyn] 6 May 2023

# 含有破碎组分的多孔介质热力学一致变分理论

Fran.cois Gay-Balmaz[1] 和 Vakhtang Putkaradze[⋆2]

[2]阿尔伯塔大学数学与统计科学系，加拿大阿尔伯塔省埃德蒙顿，T6G 2G1；电子邮箱：putkarad@ualberta.ca，(⋆) 通讯作者[1] LMD - 巴黎高等师范学院 - 法国国家科学研究中心，75005，巴黎；电子邮箱：francois.gay-balmaz@lmd.ens.fr

2023年5月9日

**摘要**

当多孔介质因过度应力而受到损伤时，每个无穷小体积内的弹性基质都会分为“固体”和“破碎”两种组分。“固体”部分能够传递应力，而“破碎”部分则被动地随流运动，无法传递应力。以往的研究通过引入损伤参数来影响材料的弹性性质，从而研究损伤力学。本文采用更微观的视角，考察从能够传递机械应力的“固体”部分向不传递机械应力、由微观固体颗粒构成的“破碎”部分的转变。基于这一方法，我们运用近期在热力学中提出的变分原理，建立一种热力学一致的多孔介质动力学理论，其中包含“破碎”与“固体”组分之间的传递。该框架使我们能够推导出破碎速率的显式公式，即由“固体”相向“破碎”相的转变速率，该速率取决于各相的吉布斯自由能。利用这一表达式，我们推导出描述一维变形下材料破坏的约化变分模型。我们证明，材料会在有限时间内被破坏，并且在奇点处消失的“固体”丝束数量遵循幂律。我们还讨论了该理论与现有材料破坏实验的联系，以及向多相多孔介质的扩展。

**关键词**：变分方法、损伤模型、热力学、孔隙力学**声明与披露：**作者声明不存在任何利益冲突。

## 目录

**1 引言** **2**

**2 问题的设定：变量和拉格朗日量 4**
2.1 多孔介质变量的定义.5 2.1.1 观测密度与实际密度.5 2.1.2 流体和弹性组分的构形.5 2.1.3 空间坐标系中流体和弹性组分的速度 6 2.1.4 质量密度的连续性方程.6 2.2 拉格朗日函数.7

**3 具有热传导的黏性介质的变分表述 8**
3.1 拉格朗日量（材料）描述.8 3.2 欧拉（空间）描述.9

**4 具有破坏性弹性基质的多组分多孔介质热力学变分建模 11**
4.1 变分表述和一般方程.12 4.2 断裂链多孔介质热力学.13 4.2.1 运动方程.13 4.2.2 能量平衡.14 4.2.3 热力学考量.16

**5 Si多孔介质的简化变分模型、破碎与有限时间奇点 20**
5.1 单速度描述.21 5.2 干燥材料的准静态近似.22 5.3 均匀应变假设与约化动力学.24

**6 有限维约化变分模型 29**

**7 结论 31**

**A 涉及交叉现象的热传递和质量传递系数的替代表达式 37**

# 1 引言

许多用于生物和工程应用的材料都含有充满流体的多孔基质。在发生大变形或受到突发冲击时，构成基质的部分弹性连接可能会断裂，因此基质无法再通过破碎的连接传递应力。在生物材料中，基质还可能自我修复，从而增加局部弹性连接的数量。本文旨在为弹性基质可能发生破碎的多孔介质建立一种变分理论。原则上，我们的理论也适用于基质修复；不过，本文只关注基质不可逆损伤的过程及其后续动力学。

连续损伤力学（CDM）框架旨在处理固体因大变形和高应力而产生的损伤 [1, 2]。连续材料中存在许多不同类型的损伤，例如聚合物介质中的键断裂、木材损伤中的纤维素纤维脱胶、晶体介质中微裂纹和孔洞的出现，以及其他许多类型。CDM 是一个发展十分成熟的领域，并且

影响了多孔介质领域的相关研究。CDM 中一种特别的方法是引入裂纹密度张量 [3] ，用于各向异性材料，描述材料中微裂纹的体积演化；有关这项工作在脆性岩石中的应用，参见 [4] 。此前，在固体力学的背景下，人们也研究过采用连续损伤变量描述介质演化的变分方法，尤其参见 [5–9]。后来，CDM 的思想被用于孔弹性介质的研究。特别是， [10, 11]采用热力学方法推导了适用于地质材料的损伤参数和孔隙率演化的物理相关表达式。CDM 也被用于生物医学领域，例如支架腐蚀 [12] 以及骨水泥中的损伤累积 [13]。人们还认为，在许多实际应用中，以微观裂纹和孔洞形式表现出的损伤，其空间尺度不同于多孔介质中孔隙的尺度，因此方程需要具有非局部性[14]。[15] 基于对 Biot 原始固结方程 [16]的准静态扩展，提出了孔隙弹性中损伤参数的演化模型。损伤参数是一个介于 0 和 1 之间的无量纲数，它会导致应力—应变关系中的弹性系数退化，从而模拟微观裂纹和孔洞。

虽然已知类岩石材料的损伤是通过形成微裂纹和孔洞造成的，但充满流体的多孔生物材料的情况可能有所不同。构成多孔基质基础的聚合物在局部力的作用下被撕裂，形成无法再承受应力、悬浮于周围流体中的受损部分。如果聚合物破碎微粒足够小，就能在孔隙中被流体携带。因此，仅考虑局部孔隙率是不够的，因为它无法表明实际的局部含水量。实际上，必须考虑物质的三个组分：“固体”，能够承受弹性应力；“破碎体”，由基质中断裂链段产生的粒子组成；以及“流体”。

因此，在每个大于局部微观结构尺寸的无穷小体积内，我们考虑物质的三种状态：标记为 $f$ 的流体、标记为 $s$ 的固体，以及标记为 $b$ 的“破碎固体”。破碎的固体链表现得类似流体：作为孤立的材料链，它们只是在流体中像小固体粒子一样运动。固体组分在应力作用下会破碎；破碎组分则可以通过愈合重新变成固体，这一过程将在一般理论中加以处理，但不纳入具体应用的考虑范围。本文旨在建立一种热力学一致的变分理论，用于描述弹性基质的破碎以及随后三种组分的演化。在我们的理论中，破碎组分将发挥损伤参数的作用；局部弹性的变化则会自然地由拉格朗日量中破碎组分和固体组分的存在所导出，因为只有固体组分能够承载应力。值得注意的是，最近有研究 [17] 在准静态近似下，将损伤视为破碎组分向固体组分发生相变的过程，并对非多孔材料进行了表述。我们的工作通过考虑完全依赖时间的变分理论拓展了这些思想。具体而言，我们的方法将固相视为多孔基质，在变分原理中考虑流体的动力学，并纳入热力学效应，从而推导出固体组分与破碎组分之间转变的一致表达式。

我们的工作以不考虑损伤的多孔介质热力学变分方法 [18]，为基础，而该方法又基于对多孔介质运动的变分推导，并考虑纯力学效应 [19, 20]。在此详尽介绍多孔介质的不同模型并不现实，因此我们请读者参阅综述 [21, 22] ，尤其是基础论著 [23, 24]，以了解不同多孔介质建模方法的历史沿革与背景。由于多孔介质动力学涉及复杂的流固相互作用，变分方法在推导多孔介质力学运动理论方面尤为有用 [25–29]。本文尤其关注多孔介质变分宏观理论（VMTPM）的相关研究；该理论目前的形式于 [5, 30–39]，中提出，并在近期出版的一本著作 [40] 中有所总结。作者最近 [19]，在多孔介质力学的一致变分方法方面取得了进一步进展：将流体含量作为流体不可压缩性的约束，并将流体压力视为与不可压缩性相关的拉格朗日乘子。[19] 中的这一描述基于 Arnold 对不可压缩流体的经典描述，即将其运动视为测地线运动 [41]。[18]，将热力学效应纳入变分原理，从而实现总能量守恒，并运用热力学第二定律推导出热力学一致的运动定律，将多孔介质的 Darcy-Brinkman 模型推广开来 [42–45]。本文在这些研究的基础上，采用兼顾力学效应和热力学效应的变分方法，对多孔介质的破碎进行建模。

本文的组织结构如下。首先，在第2节中，我们介绍所需的变量以及具有物理意义的拉格朗日函数。在第3节中，我们介绍应用于不可逆过程的变分原理背景，分别采用拉格朗日（材料）描述和欧拉（空间）描述。在第4节中，我们推导含有破碎组分的多孔介质的运动方程，其中包括各组分（固体、破碎体、流体）的动量方程和密度方程，以及熵演化。基于熵不减等一般性考量，我们得到热力学一致的摩擦力和应力形式，以及弹性基质的破碎速率，即从固体组分向破碎组分转变的速率。在第5节中，我们将系统简化为一维空间运动，并推导出一些常微分方程的精确约化形式。这些约化形式给出了有关基质破碎的重要实验预测。第6节将展示，该约化系统可由离散变分方法导出；这种方法为推导符合热力学两大定律的约化模型提供了一般性的建模工具。

# 2 问题的设定：变量和拉格朗日量

本节介绍描述由流体和固体（未破碎和破碎组分）构成的多孔介质所需的变量。我们还给出各组分的守恒定律以及系统的总拉格朗日量。

## 2.1 多孔介质的变量定义

### 2.1.1 观测密度与实际密度

描述多孔介质时，必须区分给定体积内流体或固体的观测密度，与填充孔隙的流体或构成基质的弹性材料的实际密度。流体的观测密度（或称欧拉密度）定义为：给定的欧拉体积 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$（其中心位于空间点$\boldsymbol{x}$）所含流体质量与该体积之间的比例系数。破碎体和未破碎固体的定义也类似：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}m_f(t,\boldsymbol{x}) &= \rho_f(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \\ \mathrm{d}m_b(t,\boldsymbol{x}) &= \rho_b(t.\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \\ \mathrm{d}m_s(t,\boldsymbol{x}) &= \rho_s(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

流体和固体的实际密度，是填充孔隙的材料的密度（例如，流体所对应的孔隙中气体的密度），或者相应地，是构成基质的弹性材料的密度（例如橡胶）。实际密度将用带横线的符号 $\bar{\rho}_f$, $\bar{\rho}_s$, $\bar{\rho}_b$ 表示。

若 $\phi_s(t,\ \boldsymbol{x})$ 是流体的体积分数，$\phi_b(t,\ \boldsymbol{x})$ 是破碎固体的体积分数，并假设流体完全填充孔隙，则实际密度与欧拉密度之间的关系为

$$\rho_s = \phi_s\bar{\rho}_s\,,\quad \rho_b = \phi_b\bar{\rho}_b\,,\quad \rho_f = (1-\phi_s-\phi_b)\bar{\rho}_f\,. \tag{2}$$

### 2.1.2 流体与弹性组分的构形

设 $\mathcal{B}_s$、$\mathcal{B}_b$ 和 $\mathcal{B}_f$ 表示包含弹性标签 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 和流体标签 $\boldsymbol{Z}$ 的参考构形。未破裂和破裂弹性体（分别以 $s$ 和 $b$ 为索引）以及流体（以 $f$ 为索引）的运动由三个随时间变化的映射定义：

1. 固体部分粒子的拉格朗日映射：$\boldsymbol{\varphi}_s(t、\ ):\ \mathcal{B}_s \to \mathbb{R}^3$；2. 破碎体部分粒子的拉格朗日映射：$\boldsymbol{\varphi}_b(t、\ ):\ \mathcal{B}_b \to \mathbb{R}^3$；以及 3. 流体部分粒子的拉格朗日映射：$\bar{\varphi}_f(t、\ ):\ \mathcal{B}_f \to \mathbb{R}^3$。

随后定义空间变量如下

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_s(t,\boldsymbol{X}),\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_b(t,\boldsymbol{Y})\,,\quad \text{and}\quad \boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_f(t,\boldsymbol{Z})\,. \tag{3}$$

我们假设流体粒子或弹性体粒子均不会发生融合，因此映射$\boldsymbol{\varphi}_s$、$\boldsymbol{\varphi}_b$ 和$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_f$ 在所有时间 $t$内都是嵌入。我们还假设流体不能逸出多孔介质，也不能形成孔洞，因此在所有时间 $t$内，流体、破碎体和未破裂弹性体在空间中所占据的区域$\mathcal{B}_{t、\ k} = \boldsymbol{\varphi}_k(t、\ \mathcal{B}_k)$、$k = f、\ s、\ b$相重合：$\mathcal{B}_{t、\ k} = \mathcal{B}_t$。最后，为简单起见，我们假设区域 $\mathcal{B}_t$ 不随时间变化，并将其简单地称为 $\mathcal{B}$，因此 $\boldsymbol{\varphi}_k(t、\ ):\ \mathcal{B}_k \to \mathcal{B}$、$k = f、\ s、\ b$在所有时间 $t$内都是微分同胚。不失一般性，我们可以设定 $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}$，从而$\boldsymbol{\varphi}_k(t、\ ) \in \mathrm{Diff}(\mathcal{B})$是 $\mathcal{B}$ 在 $k = \bar{f}、\ s、\ b$下的微分同胚。

我们需要指出，我们的理论框架也可推广到区域 $\mathcal{B}_{s、\ b、\ f}$ 彼此不重合的情况。例如，在水力

压裂过程中，孔洞是在狭窄区域内通过破碎弹性基质而形成的，因此破碎组分在最终被流体流动冲走之前，主要集中在该区域。本文为简单起见，将采用 $\mathcal{B}_{s、\,b、\,f} = \mathcal{B}$ 。另一种做法是将整个区域划分为由移动边界连接的子域，使流体和破碎组分与大部分未破碎的组分分隔开来。这两种方法与自由表面流模拟中使用的方法类似。本文将考虑三种组分都存在于体积各部分中的情况，其处理思路与流体体积法 [46] 类似。这种方法更易于进行解析处理，并可直接与该领域以往的研究文献进行比较。也可以采用将体积分隔为若干子体积的方法，我们将在后续研究中探讨。流体逸出边界的情况也可以推广处理，不过需要对变分原理作适当修改，这也将在未来的工作中加以研究。

### 2.1.3 空间坐标系中流体和弹性组分的速度

相对于固定坐标系测得的速度 $\boldsymbol{u}_k$，即欧拉描述中的速度，由下式给出

$$\boldsymbol{u}_k(t,\boldsymbol{x}) = \partial_t \boldsymbol{\varphi}_k\big(t, \boldsymbol{\varphi}_k^{-1}(t,\boldsymbol{x})\big)\,, k = f,s,b, \tag{4}$$

对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$ 均成立。注意，由于微分同胚 $\boldsymbol{\varphi}_k$、 $k = f,\ b,\ s$ 必须保持边界上的物质点不变，因此向量场 $\boldsymbol{u}_k$ 与边界相切，即

$$\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{n} = 0\,, \tag{5}$$

其中， $\boldsymbol{n}$ 是边界的单位法向量场。另一种做法是，指定边界上的 $\boldsymbol{\varphi}_k$（其中 $k$ 为某个值）。此时，对于这些 $k$，可得到无滑移边界条件：

$$\boldsymbol{u}_k|_{\partial\mathcal{B}} = 0\,. \tag{6}$$

### 2.1.4 质量密度的连续性方程

下面来看 $\rho_k(t,\ \boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ 的连续性方程，其中 $\rho_k$ 是组分 $k = f,\ s,\ b$ 的观测（欧拉）密度。

在最一般且详细的形式下，连续性方程可以写如下

$$\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \boldsymbol{u}_k) = \sum_\ell \left(q_{k\ell}^+ - q_{k\ell}^-\right)\,, \qquad k = f,s,b\,, \tag{7}$$

其中， $q_{k\ell}^+ \geq 0$ 是添加到组分 $k$中的组分 $\ell$ 的传递速率，而$q_{k\ell}^- \geq 0$ 是添加到组分 $k$中的组分 $\ell$ 的传递速率，它们是系统状态变量的函数。从 $\ell$ 到 $k$ 组分的总传递速率为 $q_{k\ell}$ : $= q_{k\ell}^+ - q_{k\ell}^-$。这种区分对于多组分转移很重要。总质量守恒由 $q_{k\ell}^+ = q_{\ell k}^-$ 得出，这意味着 $q_{k\ell} = -q_{\ell k}$。

本文仅考虑破碎组分与固体组分之间的传递，这使相关讨论大为简化。

在材料破裂的情况下，当受到过大的变形或应力作用时，纤维会破碎。在生物材料中，还可能存在固体基质修复过程，或破碎组分凝固并再次成为固体的过程。因此，流体粒子的数量不发生变化；由于固体基质的破碎，材料会以一定速率从固体组分传递至破碎组分$q_b := q_{bs}^{+} = q_{sb}^{-}$；此外，由于修复或凝固过程，材料也会以一定速率从破碎组分传递至固体组分 $q_r = q_{sb}^{+} = q_{bs}^{-}$。因此，在我们的公式中，组分之间的传递速率表示为

$$q_{fs} = q_{fb} = 0, \quad q_{sb} = q_r - q_b, \tag{8}$$

其中， $q_r$ 可由关于链束恢复作用的生物或化学条件给出，而断裂速率 $q_b$ 可以是弹性应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}}$ 或 Finger 变形张量 $b$的函数。由于凝固或破碎过程会产生或消耗热，因此热力学方程及其相应变分中将包含一项贡献，具体如下文所示。

下文将重点讨论仅可能发生破碎、而不会发生凝固或材料修复的材料，即 $q_b \geq 0$ 和 $q_r = 0$。凝固的情况可参照本文推导的理论进行类似处理，并将在未来的工作中探讨。

## 2.2 拉格朗日函数

多孔介质的拉格朗日量等于流体和弹性体（包括固体组分和破碎组分）的动能之和，减去每种材料的势能，表达式为:

$$\begin{aligned}
&\ell(\boldsymbol{u}_f, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{u}_b, \rho_f, \rho_s, \rho_b, s_f, s_s, s_b, b, \phi_s, \phi_b) \\
&= \int_{\mathcal{B}} \Big[ \frac{1}{2}\rho_f |\boldsymbol{u}_f|^2 - \rho_f e_f(\bar{\rho}_f, s_f/\rho_f) + \frac{1}{2}\rho_b |\boldsymbol{u}_b|^2 - \rho_b e_b(\bar{\rho}_b, s_b/\rho_b) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\rho_s |\boldsymbol{u}_s|^2 - \rho_s e_s(\bar{\rho}_s, s_s/\rho_s, b) \Big] \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \,,
\end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\rho_f$、 $\rho_s$、 $\rho_b$ 为观测质量密度，$s_f$、 $s_s$、 $s_f$ 为熵密度， $b$为固体组分的 Finger 变形张量。这里， $\bar{\rho}_f$、 $\bar{\rho}_s$、 $\bar{\rho}_b$ 分别是孔隙中流体以及构成弹性基质的材料的实际密度，如式（2）所定义；$e_f(\bar{\rho}_f,\ s_f/\rho_f)$、 $e_s(\bar{\rho}_s,\ s_s/\rho_s,\ b)$、 $e_b(\bar{\rho}_b,\ s_b/\rho_b)$分别是各组分的比内能。表达式（9）以简单且易于理解的物理术语，明确区分了各组分的贡献，这与我们在 [19]中的描述类似。

请注意，在（9）中，我们使用观测到的密度 $\rho_k$ 乘以比内能的数值，并在内能的泛函表达式中使用实际密度 $\bar{\rho}_k$。在内能中采用实际密度 $\bar{\rho}_k$ 进行描述，更便于热力学考量，因为对于给定材料， $\bar{\rho}_k$ 通过状态方程显式依赖于熵。为方便起见，我们还将固体的热能和弹性能合并为一个内能函数 $e_s(\bar{\rho}_s, s_s/\rho_s, b)$。尽管 $e_b$代表破碎固体组分的能量，但它不传递应力，因此不能依赖于变形张量。

# 3 黏性介质及热传导的变分表述

本节回顾单组分流体或弹性介质在热传导和黏度作用下的变分理论，该理论基于 [47–49] 中提出的变分热力学方法。 [18], 将这项工作推广到了多孔介质，其中弹性介质由单一组分构成。我们将在第4节中采用这一变分热力学框架，研究由两个组分（“固体”和“破碎体”）组成的弹性介质，其中还包括组分之间转变这一额外的不可逆过程，且两个组分都嵌入流体中。

## 3.1 拉格朗日量（物质）描述

在物质描述中，热力学的变分表述是连续介质力学中 Hamilton原理的扩展。出于教学目的，我们在此回顾物质描述，因为变分表述在此具有最简形式。空间（欧拉）描述中的变分表述随后由此推导得出，见下一节；结果表明，它是多孔介质建模的有用工具。

对于单组分流体或弹性介质，我们将拉格朗日量 $L$ 视为构形微分同胚 $\boldsymbol{\varphi}(t,\ \mathbf{X})$（见 §2.1.2）、材料速度$\boldsymbol{V}(t,\ \mathbf{X}) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t,\ \mathbf{X})$以及熵密度 $S(t,\ \boldsymbol{X})$的函数。它还参数依赖于密度 $\varrho_0(\boldsymbol{X})$以及参考构形上的黎曼度量 $G_0(\boldsymbol{X})$；当 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ 时，该度量可取为欧氏度量。度量 $G_0(\boldsymbol{X})$用于引入欧拉变形张量。

对于每个固定的 $\varrho_0(\mathbf{X})$ 和 $G_0(\mathbf{X})$，我们可以将拉格朗日量写成函数 $L{:}T\,\mathrm{Diff}_0(\mathcal{B}) \times \mathrm{Den}(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}$，其中 $\mathrm{Diff}_0(\mathcal{B}) \ni \boldsymbol{\varphi}$ 是逐点固定 $\mathcal{B}$ 的微分同胚群，对应于无滑移边界条件； $T\,\mathrm{Diff}_0(\mathcal{B}) \ni (\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}})$ 是其切丛，而 $\mathrm{Den}(\mathcal{B}) \ni S$ 是 $\mathcal{B}$ 上密度的空间。在物质描述中，一个标准表达式为

$$L(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, S) = \int_{\mathcal{B}} \left[ \frac{1}{2} \varrho_0 |\dot{\boldsymbol{\varphi}}| - \varrho_0\, \mathcal{E}(\nabla \boldsymbol{\varphi}, \varrho_0, S, G_0) \right] \mathrm{d}^3 \boldsymbol{X}\,, \tag{10}$$

其中 $\mathcal{E}$ 是物质描述中的内能，并满足通常的协变性假设， [50, 51]。特别地，由于材料协变性假设，内能可以用欧拉变量 $\rho, s, b$ 表示，参见 §3.2，形式为

$$\mathcal{E}(\nabla \boldsymbol{\varphi}, \varrho_0, S, G_0) = e(\rho, s, b) \circ \boldsymbol{\varphi}, \tag{11}$$

其中 $e$ 是欧拉描述中的比内能。

热力学的临界作用量原理需要引入两个额外变量： $\Sigma(t,\ \boldsymbol{X})$，它被定义为不可逆过程中产生的熵（不同于 $S(t,\ \mathbf{X})$，后者是总熵），以及 $\Gamma(t,\ \boldsymbol{X})$，它被定义为热位移 [48]。采用这一记号，导热黏性连续介质的临界作用量原理表示为 [47, 48]:

$$\delta \int_0^T \left[ L(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, S) + \int_{\mathcal{B}} (S - \Sigma) \dot{\Gamma}\, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{X} \right] \mathrm{d}t = 0\,, \tag{12}$$

受以下唯象约束

$$\frac{\delta L}{\delta S}\dot{\Sigma} = -\boldsymbol{P} : \nabla\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{J}_S \cdot \nabla\dot{\Gamma} \tag{13}$$

并且相对于变分 $\delta\boldsymbol{\varphi}$、 $\delta S$、 $\delta\Sigma$、 $\delta\Gamma$ ，满足变分约束

$$\frac{\delta L}{\delta S}\delta\Sigma = -\boldsymbol{P} : \nabla\delta\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{J}_S \cdot \nabla\delta\Gamma\,. \tag{14}$$

张量 $\boldsymbol{P}$ 是 Piola-Kirchhoff 黏性应力张量， $\boldsymbol{J}_S$ 是在拉格朗日表示下的熵通量密度，见 [48]。它们是拉格朗日对象，分别对应于更常用的欧拉黏性应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和欧拉熵通量密度 $\boldsymbol{j}_s$，见下文。

应用式 (12)–(14)，除了拉格朗日框架下的运动方程（此处不予列出）外，还可得到以下条件:

$$\dot{\Sigma} = \dot{S} + \mathrm{DIV}\,\boldsymbol{J}_S \quad \text{and} \quad \dot{\Gamma} = -\frac{\delta L}{\delta S} = T \tag{15}$$

其中 $T$为温度，见 [48], 。这里，DIV 表示参考框架中的散度算子，以区别于空间坐标系中的散度算子 div。这些条件赋予 $\Sigma$和 $\Gamma$上述物理意义。

由于描述不可逆过程熵的是 $\Sigma$ ，根据热力学第二定律，我们必须有

$$\dot{\Sigma} \geq 0\,, \tag{16}$$

，而 $S$ 不一定必须具有特定的符号。

**注 3.1（变分表述的结构）**注意，(12)–(14)是连续介质力学中 Hamilton原理 $\delta\int_0^T L(\boldsymbol{\varphi},\ \dot{\boldsymbol{\varphi}})\mathrm{d}t = 0$ 的扩展，其中涉及两类约束：临界曲线上的约束 (13)，以及计算该临界曲线时所用变分上的约束 (14)。对于每个不可逆过程，例如有限维系统中因摩擦力导致的不可逆过程 $F_i\dot{x}^i \rightsquigarrow F_i\delta x^i$ ，可通过形式上将时间变化率替换为 $\delta$-变分，从 (13) 得到 (14)，参见 [47–49]。这种变分表述让人联想到非完整力学中使用的 Lagrange-d'Alembert原理。第 6 节将把变分表述 (12)–(14) 的有限维版本用作建模工具。

## 3.2 欧拉（空间）描述

欧拉变量包括速度 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$、质量密度 $\rho(t,\boldsymbol{x})$、熵密度 $s(t,\boldsymbol{x})$以及Finger变形张量 $b(t,\boldsymbol{x})$，它们以通常方式由物质变量$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{X})$、 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t,\boldsymbol{X})$、 $\varrho_0(t,\boldsymbol{X})$、 $S(t,\boldsymbol{X})$和 $G_0(t,\boldsymbol{X})$定义。特别地，Finger变形张量是逆度量经构型微分同胚 $\boldsymbol{\varphi}$正推得到的:

$$b = \boldsymbol{\varphi}_* G_0^{-1}, \tag{17}$$

见 [50, 51]。当 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子集且 $G_0$ 是恒等张量时，Finger变形张量 $b$ 可用变形梯度张量$\mathbb{F}=\nabla\boldsymbol{\varphi}$ 表示为

$$b=\mathbb{F}\cdot\mathbb{F}^T\,,\quad b^{ij}(t,\boldsymbol{x})=\frac{\partial x^i}{\partial X^k}\frac{\partial x^j}{\partial X^k}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(t,\boldsymbol{x}))\,. \tag{18}$$

注意，由 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathrm{Diff}_0(\mathcal{B})$ 可知，我们有无滑移边界条件 $\boldsymbol{u}=0$ on $\partial\mathcal{B}$。我们还将热位移 $\gamma(t,\ \boldsymbol{x})$、内熵密度 $\sigma(t,\ \boldsymbol{x})$、柯西应力 $\boldsymbol{\sigma}(t,\ \boldsymbol{x})$ 和熵通量 $\boldsymbol{j}_s(t,\ \boldsymbol{x})$ 定义为与 $\Gamma(t,\ \boldsymbol{X})$、$\Sigma(t,\ \boldsymbol{X})$、$\boldsymbol{P}(t,\ \boldsymbol{X})$ 和 $\boldsymbol{J}_S(t,\ \boldsymbol{X})$ 相对应的欧拉量，见 [48]。

根据这些定义，式 (12)–(14) 的空间形式给出了变分表述。

$$\delta\int_0^T\Big[\ell(\boldsymbol{u},\rho,s,b)+\int_{\mathcal{B}}(s-\sigma)D_t\gamma\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\Big]\mathrm{d}t=0\,, \tag{19}$$

满足以下条件唯象约束

$$\frac{\delta\ell}{\delta s}\bar{D}_t\sigma=-\boldsymbol{\sigma}:\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{j}_s\cdot\nabla D_t\gamma \tag{20}$$

以及关于变分的内容

$$\delta\boldsymbol{u}=\partial_t\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla\boldsymbol{u},\quad \delta\rho=-\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{\eta}),\quad \delta b=-\pounds_{\boldsymbol{\eta}}b, \tag{21}$$

$\delta s,\ \ \delta\sigma$，以及 $\delta\gamma$ 受以下变分约束

$$\frac{\delta\ell}{\delta s}\bar{D}_\delta\sigma=-\boldsymbol{\sigma}:\nabla\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{j}_s\cdot\nabla D_\delta\gamma\,. \tag{22}$$

我们回顾一下，$\boldsymbol{\eta}(t,\boldsymbol{x})=\delta\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\varphi}^{-1}(t,\boldsymbol{x}))$ 表示欧拉参考系中流体轨迹的变分。在 $\delta b$ 的表达式中，$\pounds_{\boldsymbol{\eta}}b$ 表示对称逆变张量 $b$ 沿方向 $\boldsymbol{\eta}$ 的李导数，该结果由 (17) 得出。我们引入了以下记号

$$\begin{aligned} D_tf&=\partial_tf+\boldsymbol{u}\cdot\nabla f & \qquad D_\delta f&=\delta f+\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla f\\ \bar{D}_tf&=\partial_tf+\operatorname{div}(f\boldsymbol{u}) & \qquad \bar{D}_\delta f&=\delta f+\operatorname{div}(f\boldsymbol{\eta}) \end{aligned} \tag{23}$$

对于标量函数和密度的拉格朗日时间导数与拉格朗日变分。

直接应用变分原理（19）–（22），可得在欧拉坐标下，具有拉格朗日量 $\ell(\boldsymbol{u},\rho,s,b)$ 的导热黏性连续介质的一般运动方程为

$$\begin{cases} \partial_t\dfrac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}}+\pounds_{\boldsymbol{u}}\dfrac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}}=\rho\nabla\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho}+s\nabla\dfrac{\delta\ell}{\delta s}-\dfrac{\delta\ell}{\delta b}:\nabla b-2\operatorname{div}\left(\dfrac{\delta\ell}{\delta b}\cdot b\right)+\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\\ \dfrac{\delta\ell}{\delta s}(\bar{D}_ts+\operatorname{div}\boldsymbol{j}_s)=-\boldsymbol{\sigma}:\nabla\boldsymbol{u}-\boldsymbol{j}_s\cdot\nabla\dfrac{\delta\ell}{\delta s} \end{cases} \tag{24}$$

以及以下条件

$$\bar{D}_t\sigma=\bar{D}_ts+\operatorname{div}\boldsymbol{j}_s\qquad\text{and}\qquad \bar{D}_t\gamma=-\frac{\delta\ell}{\delta s}\,. \tag{25}$$

根据这两个条件， $D_t\sigma$ 被解释为总熵产生率密度， $D_t\gamma$ 为温度，因此 $\gamma$ 为热位移。 $\rho$ 和 $b$ 的方程为

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{and} \quad \partial_t b + \pounds_{\boldsymbol{u}} b = 0,$$

这些关系由 $\varrho_0$ 和 $G_0$定义 $\rho$ 和 $b$ 而得。此外，边界处的变分 $\delta\gamma$给出了边界 $\partial\mathcal{B}$上的绝热边界条件 $\boldsymbol{j}_s\cdot\boldsymbol{n} = 0$。在上述流体动量方程中， $\pounds_{\boldsymbol{u}}\frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}}$ 表示流体动量密度 $\frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}}$ 沿方向 $\boldsymbol{u}$的李导数，具体为 $\pounds_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{m} = \overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\boldsymbol{m} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}\operatorname{div}\boldsymbol{u}$。

使用拉格朗日量的标准表达式

$$\ell(\boldsymbol{u},\rho,s,b) = \int_{\mathcal{B}}\Big[\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2 - \rho e(\rho, s/\rho, b)\Big]\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,, \tag{26}$$

这是式 (10) 的欧拉形式，参见 [51], ，运动方程 (27) 给出以下适用于黏性且导热连续体的方程组

$$\begin{cases} \rho(\partial_t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) = -\nabla p + \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} + \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} \\ T(\bar{D}_t s + \operatorname{div}\boldsymbol{j}_s) = \boldsymbol{\sigma} : \nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{j}_s\cdot\nabla T, \end{cases} \tag{27}$$

其中 $p = \rho^2\frac{\partial e}{\partial\rho}$为压力， $T = \frac{\partial e}{\partial\eta}$为温度， $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} = 2\rho\frac{\partial e}{\partial b}\cdot b$为弹性应力。关于材料描述和空间描述中的变分表述，以及详细计算、若干应用与扩展，请参见 [47–49, 52]。

**注 3.2（变分表述的结构）**变分表述（19）–（22）继承了其拉格朗日量对应形式（12）–（14）的相同结构：变分约束（22）可通过形式上将时间变化率替换为 $\delta$-变分，从唯象约束（20）推导而来；此处采用欧拉描述，见 [47–49]。下文将把这种结构用作多组分多孔介质的建模工具。

# 4 含破碎弹性基质的多组分多孔介质热力学变分建模

本节通过扩展前文针对单组分介质回顾的变分表述，推导含有可破碎固体组分的多组分多孔介质热力学一般演化方程。该扩展包含与组分间过渡相关的不可逆过程。随后，我们将重点讨论特定的拉格朗日量（9），并讨论能量平衡和熵平衡。变分表述所得方程的形式将指导我们寻找可能的唯象关系，使热力学通量符合第二定律。

我们考虑组分间热交换这一不可逆过程、两个弹性组分之间的转变过程，以及

组分间的摩擦力和摩擦应力。我们假设组分之间的每一种转变都会产生或吸收热。例如，纤维束断裂会释放热。为简便起见，我们不考虑各组分内部的热传导，但可以像第3节对单组分连续介质所做的那样，轻松地将其纳入。

## 4.1 变分表述与一般方程

我们用 $\boldsymbol{f}_k$和 $\boldsymbol{\sigma}_k$, $k = s,\ b,\ f$表示作用于介质 $k$上的摩擦力和应力，并用 $J_{k\ell}, k \neq \ell, k, \ell \in \{f, s, b\}$ 表示与介质 $k$ 和 $\ell$之间热交换相关的通量。我们假设 $J_{k\ell} = J_{\ell k}$ 适用于 $k \neq \ell$，见 [18, 49]。转化率 $q_{k\ell}$（其中 $q_{k\ell} = -q_{\ell k}$）已在 §2.1.4 中引入。

遵循一般理论 [52], ，我们引入一组额外的物质输运变量 $w_k$，它们类似于此前为热输运引入的热位移 $\gamma_k$ 。这样，在从唯象约束转向变分约束时，便可使用关系式 $F_i\dot{x}^i \rightsquigarrow F_i\delta x^i$ ，见注释 3.1 和 3.2。

通过推导式（19）–（22）的类似形式，可以得到变分表述。为简洁起见，我们用上横线表示与介质中所有状态相关的一组类似量，例如，$\bar{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{u}_b, \boldsymbol{u}_f)$。为简洁起见，即使 $\phi_f = 1 - \phi_s - \phi_b$，我们仍使用记号 $\phi = (\phi_s, \phi_b, \phi_f)$。我们将记号（23）调整为适用于多个介质的情形，如下：

$$\begin{aligned} D_t^k f &= \partial_t f + \boldsymbol{u}_k \cdot \nabla f & \qquad D_\delta^k f &= \delta f + \boldsymbol{\eta}_k \cdot \nabla f \\ \bar{D}_t^k f &= \partial_t f + \operatorname{div}(f\boldsymbol{u}_k) & \qquad \bar{D}_\delta^k f &= \delta f + \operatorname{div}(f\boldsymbol{\eta}_k)\,, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $k = s,\ b,\ f$。由此得到变分表述：

$$\delta \int_0^T \Big[\ell(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\rho}, \bar{s}, b, \bar{\phi}) + \sum_k \int_{\mathcal{B}} \rho_k D_t^k w_k \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} + \sum_k \int_{\mathcal{B}} (s_k - \sigma_k) D_t^k \gamma_k \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\Big]\mathrm{d}t = 0\,, \tag{29}$$

受.....约束支配唯象约束

$$\frac{\delta \ell}{\delta s_k} \bar{D}_t^k \sigma_k = \underbrace{\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{u}_k}_{\substack{\text{friction}\\ \text{forces}}} - \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_k : \nabla \boldsymbol{u}_k}_{\substack{\text{friction}\\ \text{stresses}}} + \underbrace{\sum_\ell J_{k\ell} D_t^\ell \gamma_\ell}_{\text{heat exchange}} + \underbrace{\sum_\ell q_{k\ell} D_t^k w_k}_{\text{matter exchange}} \tag{30}$$

并且针对满足变分约束的变分

$$\frac{\delta \ell}{\delta s_k} \bar{D}_\delta^k \sigma_k = \underbrace{\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{\eta}_k}_{\substack{\text{friction}\\ \text{forces}}} - \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_k : \nabla \boldsymbol{\eta}_k}_{\substack{\text{friction}\\ \text{stresses}}} + \underbrace{\sum_\ell J_{k\ell} D_\delta^\ell \gamma_\ell}_{\text{heat exchange}} + \underbrace{\sum_\ell q_{k\ell} D_\delta^k w_k}_{\text{matter exchange}} \tag{31}$$

其中 $\delta\gamma_k$，且 $\boldsymbol{\eta}_k$ 在 $t = 0$、$T$、 $k = f$、 $s$、 $b$ 处趋于零，并满足 Euler-Poincaré 约束。

$$\delta \boldsymbol{u}_k = \partial_t \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{u}_k \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}_k - \boldsymbol{\eta}_k \cdot \nabla \boldsymbol{u}_k,\ \ k = f, s, b, \quad \delta b = -\pounds_{\boldsymbol{\eta}_s} b\,. \tag{32}$$

力 $\boldsymbol{f}_k$ 和应力 $\boldsymbol{\sigma}_k$ 源自摩擦，必须像 $q_{k\ell}$ 和 $J_{k\ell}$一样，通过现象学方法加以假设。正如我们将在下文看到的，变分原理有助于寻找这些表达式的精确形式。

变分表述 (29)–(31) 得出一般方程组

$$
\begin{cases}
\partial_t \dfrac{\delta \ell}{\delta \boldsymbol{u}_f} + \pounds_{\boldsymbol{u}_f} \dfrac{\delta \ell}{\delta \boldsymbol{u}_f} = \rho_f \nabla \dfrac{\delta \ell}{\delta \rho_f} + s_f \nabla \dfrac{\delta \ell}{\delta s_f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{f}_f \\
\partial_t \dfrac{\delta \ell}{\delta \boldsymbol{u}_b} + \pounds_{\boldsymbol{u}_b} \dfrac{\delta \ell}{\delta \boldsymbol{u}_b} = \rho_b \nabla \dfrac{\delta \ell}{\delta \rho_b} + s_b \nabla \dfrac{\delta \ell}{\delta s_b} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_b + \boldsymbol{f}_b \\
\partial_t \dfrac{\delta \ell}{\delta \boldsymbol{u}_s} + \pounds_{\boldsymbol{u}_s} \dfrac{\delta \ell}{\delta \boldsymbol{u}_s} = \rho_s \nabla \dfrac{\delta \ell}{\delta \rho_s} + s_s \nabla \dfrac{\delta \ell}{\delta s_s} - \dfrac{\delta \ell}{\delta b} : \nabla b + \operatorname{div} \Big( \boldsymbol{\sigma}_s - 2 \dfrac{\delta \ell}{\delta b} \cdot b \Big) + \boldsymbol{f}_s \\
\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \boldsymbol{u}_k) = \sum\limits_{\ell} q_{k\ell} \,, \ k = f, s, b, \qquad \partial_t b + \pounds_{\boldsymbol{u}_s} b = 0 \\
\dfrac{\delta \ell}{\delta s_k} \bar{D}_t^k s_k = \boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{\sigma}_k : \nabla \boldsymbol{u}_k - \sum\limits_{\ell} q_{k\ell} \dfrac{\delta \ell}{\delta \rho_k} + J_{k\ell} \Big( \dfrac{\delta \ell}{\delta s_k} - \dfrac{\delta \ell}{\delta s_\ell} \Big) \,, \ k = f, s, b, \\
\dfrac{\delta \ell}{\delta \phi_k} = 0, \ \ k = s, b,
\end{cases}
\tag{33}
$$

以及以下条件

$$
\bar{D}_t^k s_k = \bar{D}_t^k \sigma_k + \sum_{\ell} J_{k\ell}, \quad D_t^k \gamma_k = -\frac{\delta \ell}{\delta s_k}, \quad D_t^k w_k = -\frac{\delta \ell}{\delta \rho_k}, \tag{34}
$$

$k = f, \ s, \ b$，这使得能够以类似于式（25）的方式在最终方程中消去 $\sigma_k$、 $\gamma_k$和 $w_k$。

在上述流体动量方程中，我们回顾一下，$\pounds_{\boldsymbol{u}_k} \frac{\delta \ell}{\delta \boldsymbol{u}_k}$ 表示沿 $\boldsymbol{u}_k$方向对流体动量密度 $\frac{\delta \ell}{\delta \boldsymbol{u}_k}$ 取的李导数，参见§3.2。将每个组分的温度写为

$$
T_k = -\frac{\delta \ell}{\delta s_k} \,, \tag{35}
$$

$k = f, \ s, \ b$，可推导出总熵方程

$$
\sum_k \bar{D}_t^k s_k = -\sum_k \boldsymbol{f}_k \cdot \frac{\boldsymbol{u}_k}{T_k} + \sum_k \boldsymbol{\sigma}_k : \frac{\nabla \boldsymbol{u}_k}{T_k} + \sum_{k,\ell} q_{k\ell} \frac{1}{T_k} \frac{\delta \ell}{\delta \rho_k} + \sum_{k,\ell} \frac{J_{k\ell}}{T_k} (T_k - T_\ell). \tag{36}
$$

由于系统是绝热封闭的，热力学第二定律指出$-\sum_k D_t s_k \geq 0$。基于这一要求，我们将通过为式（36）中的力 $\boldsymbol{f}_k$、应力 $\boldsymbol{\sigma}_k$、转变率 $q_{k\ell}$ 和通量 $J_{kl}$ 选择适当的表达式来满足热力学第二定律。

## 4.2 带有断裂链的多孔介质热力学

### 4.2.1 运动方程

多孔介质的拉格朗日量由表达式（9）给出，现重述如下:

$$
\begin{aligned}
&\ell(\boldsymbol{u}_f, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{u}_b, \rho_f, \rho_s, \rho_b, s_f, s_s, s_b, b, \phi_s, \phi_b) \\
&= \int_{\mathcal{B}} \Big[ \sum_{k=f,b,s} \frac{1}{2} \rho_k |\boldsymbol{u}_k|^2 - \sum_{k=f,b} \rho_k e_k \Big( \bar{\rho}_k, \frac{s_k}{\rho_k} \Big) - \rho_s e_s \Big( \bar{\rho}_s, \frac{s_s}{\rho_s}, b \Big) \Big] \, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \,,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

利用该拉格朗日量，动量方程，即（33）中的前三个方程，可以写成

$$\partial_t(\rho_k \boldsymbol{u}_k) + \operatorname{div}(\rho_k \boldsymbol{u}_k \otimes \boldsymbol{u}_k) = -\phi_k \nabla p_k + \delta_{ks} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{f}_k \,, \tag{38}$$

$k = f,\ \ s,\ \ b$，其中压力 $p_k$和弹性应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}}$由下式给出

$$p_k = \bar{\rho}_k^2 \frac{\partial e_k}{\partial \bar{\rho}_k} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} = 2\rho_s \frac{\partial e_s}{\partial b} \cdot b \,.$$

在（38）式中，弹性应力仅对 $k = s$ 出现，如克罗内克符号$\delta_{ks}$所示。

（33）式中的最后几个方程给出了等压条件

$$\frac{\delta \ell}{\delta \phi_s} = 0 \ \Leftrightarrow\ p_s = p_f \quad \text{and} \quad \frac{\delta \ell}{\delta \phi_b} = 0 \ \Leftrightarrow\ p_b = p_f \,. \tag{39}$$

因此，记 $p := p_s = p_b = p_f$ 为共同压力，并利用（33）式中的质量平衡方程，动量方程可写为

$$\rho_k(\partial_t \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{u}_k \cdot \nabla \boldsymbol{u}_k) = -\phi_k \nabla p + \delta_{ks} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{f}_k - \sum_\ell q_{k\ell} \boldsymbol{u}_k \,, \tag{40}$$

$k = f,\ \ s,\ \ b$，其中我们注意到与转变率 $q_{k\ell}$相关的项 $q_{k\ell}\boldsymbol{u}_k$。

在通常的光滑性假设下，公式（38）和（40）完全等价，以下我们将采用基于速度的公式（40）。将（40）式对每个组分展开，可得系统

$$\begin{cases} \rho_f(\partial_t \boldsymbol{u}_f + \boldsymbol{u}_f \cdot \nabla \boldsymbol{u}_f) = -(1-\phi_s-\phi_b)\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{f}_f - \sum_\ell q_{f\ell} \boldsymbol{u}_f \\ \rho_b(\partial_t \boldsymbol{u}_b + \boldsymbol{u}_b \cdot \nabla \boldsymbol{u}_b) = -\phi_b \nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_b + \boldsymbol{f}_b - \sum_\ell q_{b\ell} \boldsymbol{u}_b \\ \rho_s(\partial_t \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}_s \cdot \nabla \boldsymbol{u}_s) = -\phi_s \nabla p + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} + \boldsymbol{\sigma}_s) + \boldsymbol{f}_s - \sum_\ell q_{s\ell} \boldsymbol{u}_s \\ \partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \boldsymbol{u}_k) = \sum_\ell q_{k\ell} \,, \quad k = f,s,b, \qquad \partial_t b + \pounds_{\boldsymbol{u}_s} b = 0 \\ T_k \bar{D}_t^k s_k = -\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\sigma}_k : \nabla \boldsymbol{u}_k \\ \qquad\qquad + \sum_\ell q_{k\ell}\Big(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_k|^2 - g_k\Big) - \sum_\ell J_{k\ell}\,(T_\ell - T_k) \,, \quad k = f,s,b, \end{cases} \tag{41}$$

其中，我们引入了吉布斯自由能的记号 $g_k$：

$$g_k = \frac{\partial}{\partial \rho_k}(\rho_k e_k) = e_k + \bar{\rho}_k \frac{\partial e_k}{\partial \bar{\rho}_k} - \eta_k \frac{\partial e_k}{\partial \eta_k} = e_k + \frac{1}{\bar{\rho}_k} p_k - \eta_k T_k \,. \tag{42}$$

### 4.2.2 能量平衡

为了说明各个不可逆过程的影响，写出每种组分的内能平衡和总能量平衡很有启发性。给定如下形式的比内能函数

$$e_k\left(\frac{\rho_k}{\phi_k}, \frac{s_k}{\rho_k}, b\right),$$

我们将使用一般公式

$$\bar{D}_t^k(\rho_k e_k) = \left(e_k + \bar{\rho}_k \frac{\partial e_k}{\partial \bar{\rho}_k} - \eta_k \frac{\partial e_k}{\partial \eta_k}\right) \bar{D}_t^k \rho_k - \bar{\rho}_k^2 \frac{\partial e_k}{\partial \bar{\rho}_k} \bar{D}_t^k \phi_k + \rho_k \frac{\partial e_k}{\partial b} : D_t^k b + \frac{\partial e_k}{\partial \eta_k} \bar{D}_t^k s_k \,,$$

关于内能密度的拉格朗日时间变化率，参见 [18]。

利用式 (41) 中最后三个方程，我们得到组分 $k$ 的内能平衡:

$$\begin{aligned} \bar{D}_t^k(\rho_k e_k) = -p\bar{D}_t^k \phi_k + (\delta_{ks}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} + \boldsymbol{\sigma}_k) : \nabla \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{u}_k \\ + \sum_\ell q_{k\ell} \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}_k|^2 - \sum_\ell J_{k\ell}(T_\ell - T_k) \,, \end{aligned} \tag{43}$$

这里需要注意，在从熵平衡转到组分 $k$的内能平衡时，涉及吉布斯自由能的项已经相互抵消。式 (41) 中的动量方程给出了动能平衡

$$\bar{D}_t^k \Big(\frac{1}{2}\rho_k |\boldsymbol{u}_k|^2\Big) = (-\phi_k \nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_k + \delta_{ks} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} + \boldsymbol{f}_k) \cdot \boldsymbol{u}_k \,, \tag{44}$$

因此，组分 $k$ 的总能量平衡为

$$\begin{aligned} \bar{D}_t^k \Big(\frac{1}{2}\rho_k |\boldsymbol{u}_k|^2 + \rho_k e_k\Big) = \operatorname{div} \big((-\phi_k p\delta + \boldsymbol{\sigma}_k + \delta_{ks}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}}) \cdot \boldsymbol{u}_k\big) \\ - p\partial_t \phi_k - \sum_\ell J_{k\ell}(T_\ell - T_k) \,. \end{aligned} \tag{45}$$

需要注意的是，摩擦力 $\boldsymbol{f}_k$ 和转变率 $q_{k\ell}$ 的贡献已经相互抵消，这表明这些量只涉及各组分内部动能与内能之间的转换。最后，总能量平衡为

$$\sum_k \bar{D}_t^k \Big(\frac{1}{2}\rho_k |\boldsymbol{u}_k|^2 + \rho_k e_k\Big) = \operatorname{div} \big( \sum_k (-\phi_k p\delta + \boldsymbol{\sigma}_k) \cdot \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} \cdot \boldsymbol{u}_s \big) \,, \tag{46}$$

其中我们使用了 $\sum_k p\partial_t \phi_k = 0$ 和 $\sum_{k,\ \ell} J_{k\ell}(T_\ell - T_k) = 0$。

将组分 $k$ 的总能量定义为

$$E_k = \int_{\mathcal{B}} \Big[\frac{1}{2}\rho_k |\boldsymbol{u}_k|^2 + \rho_k e_k\Big] \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \,,$$

结合式（45）和（46）以及边界条件 $\boldsymbol{u}_k|_{\partial\mathcal{B}} = 0$，可得

$$\frac{d}{dt} E_k = -\int_{\mathcal{B}} p\partial_t \phi_k \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} + \sum_\ell \underbrace{\int_{\mathcal{B}} J_{k\ell}(T_k - T_\ell) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}_{=: P_{\mathrm{ex}}^{\ell \to k}} \,, \quad \frac{d}{dt} \sum_k E_k = 0 \,, \tag{47}$$

这使得能够识别从组分 $\ell$ 传递至组分 $k$的功率 $P_{\mathrm{ex}}^{\ell \to k}$。正如表达式（47）所示，不同组分之间的功率传递仅涉及热传递项，而这些项与温度差成正比。摩擦力 $\boldsymbol{f}_k$ 不参与这种功率交换。从物理上看，这一有趣现象可以解释如下。当相邻

来自不同组分 $k$ 和 $\ell$ 的微观粒子在紧邻区域以不同速度运动时，会产生摩擦力 $\boldsymbol{f}_{k\ell}$；对于两个组分而言，这些摩擦力大小相等、方向相反。每个摩擦力 $\boldsymbol{f}_k = \sum_\ell \boldsymbol{f}_{k\ell}$仅作用于组分$k$，因此只会对该特定组分的热产生贡献，见（43）。只有当摩擦力在某一给定组分中产生热，并被当前组分吸收后，这些热才可能传递给其他组分。

### 4.2.3 热力学考量

现在，我们将通过为外力 $\boldsymbol{f}_k$、应力 $\boldsymbol{\sigma}_k$、转变率 $q_{k\ell}$ 和通量$J_{kl}$选取适当的表达式，来落实热力学第二定律。不同于由固体和流体组成的双组分多孔介质，我们现在有三个组分：完全嵌入流体 $f$中的固体 $s$ 和破碎体 $b$ 状态。

当不同组分的相邻微观粒子之间存在速度差异时，不同组分之间便会产生摩擦。我们仅考虑两种摩擦作用。一种作用源于导致微观速度差异的力，记作摩擦力 $\boldsymbol{f}$。另一种摩擦作用源于速度梯度差异，我们称之为摩擦应力 $\boldsymbol{\sigma}$。作用于组分 $k$的摩擦力 $\boldsymbol{f}_k$可写为 $\boldsymbol{f}_k =\sum_\ell \boldsymbol{f}_{k\ell}$，其中 $\boldsymbol{f}_{k\ell} = -\boldsymbol{f}_{\ell k}$；应力的表达式类似，即 $\boldsymbol{\sigma}_k = \sum_\ell \boldsymbol{\sigma}_{k\ell}$，其中 $\boldsymbol{\sigma}_{k\ell} =-\boldsymbol{\sigma}_{\ell k}$。请注意，可以通过写成 $\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{visc}} + \sum_\ell \boldsymbol{\sigma}_{k\ell}$（其中 $\boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{visc}}$为黏性应力）来纳入黏度，但我们不予考虑。基于此，并利用 $q_{k\ell} = -q_{\ell k}$ 和$J_{k\ell} = J_{\ell k}$，总熵方程（36）可写为

$$
\begin{aligned}
\sum_k \bar{D}_t^k s_k = &- \sum_{k<\ell} \boldsymbol{f}_{k\ell} \cdot \Big( \frac{\boldsymbol{u}_k}{T_k} - \frac{\boldsymbol{u}_\ell}{T_\ell} \Big) + \sum_{k<\ell} \boldsymbol{\sigma}_{k\ell} : \Big( \frac{\nabla \boldsymbol{u}_k}{T_k} - \frac{\nabla \boldsymbol{u}_\ell}{T_\ell} \Big) \\
&+ \sum_{k<\ell} q_{k\ell} \Big( \frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_k|^2 - g_k}{T_k} - \frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_\ell|^2 - g_\ell}{T_\ell} \Big) \\
&+ \sum_{k<\ell} J_{k\ell} \Big( \frac{1}{T_\ell} - \frac{1}{T_k} \Big) (T_\ell - T_k) \, .
\end{aligned}
\tag{48}
$$

从式（48）的第一项可以自然地假设

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_f &= \mathbb{D}_{fs} \left( \frac{\boldsymbol{u}_s}{T_s} - \frac{\boldsymbol{u}_f}{T_f} \right) + \mathbb{D}_{fb} \left( \frac{\boldsymbol{u}_b}{T_b} - \frac{\boldsymbol{u}_f}{T_f} \right) \\
\boldsymbol{f}_b &= \mathbb{D}_{fb} \left( \frac{\boldsymbol{u}_f}{T_f} - \frac{\boldsymbol{u}_b}{T_b} \right) + \mathbb{D}_{bs} \left( \frac{\boldsymbol{u}_s}{T_s} - \frac{\boldsymbol{u}_b}{T_b} \right) \\
\boldsymbol{f}_s &= \mathbb{D}_{fs} \left( \frac{\boldsymbol{u}_f}{T_f} - \frac{\boldsymbol{u}_s}{T_s} \right) + \mathbb{D}_{bs} \left( \frac{\boldsymbol{u}_b}{T_b} - \frac{\boldsymbol{u}_s}{T_s} \right) ,
\end{aligned}
\tag{49}
$$

其中 $\mathbb{D}_{fs}$、 $\mathbb{D}_{fb}$ 和 $\mathbb{D}_{bs}$ 为三个正定对称张量。式（49）是[18]中推导的达西摩擦定律表达式的三组分扩展。

根据（48）式中的第二项，我们类似于 [18]„ 提出了以下假设。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_f &= \mathbb{C}_{fs} : \left(\frac{1}{T_f}\nabla \boldsymbol{u}_f - \frac{1}{T_s}\nabla \boldsymbol{u}_s\right) + \mathbb{C}_{fb} : \left(\frac{1}{T_f}\nabla \boldsymbol{u}_f - \frac{1}{T_b}\nabla \boldsymbol{u}_b\right) \\
\boldsymbol{\sigma}_b &= \mathbb{C}_{fb} : \left(\frac{1}{T_b}\nabla \boldsymbol{u}_b - \frac{1}{T_f}\nabla \boldsymbol{u}_f\right) + \mathbb{C}_{bs} : \left(\frac{1}{T_b}\nabla \boldsymbol{u}_b - \frac{1}{T_s}\nabla \boldsymbol{u}_s\right) \\
\boldsymbol{\sigma}_s &= \mathbb{C}_{fs} : \left(\frac{1}{T_s}\nabla \boldsymbol{u}_s - \frac{1}{T_f}\nabla \boldsymbol{u}_f\right) + \mathbb{C}_{bs} : \left(\frac{1}{T_s}\nabla \boldsymbol{u}_s - \frac{1}{T_b}\nabla \boldsymbol{u}_b\right),
\end{aligned} \tag{50}$$

其中 $\mathbb{C}_{fs}$、$\mathbb{C}_{fb}$ 和 $\mathbb{C}_{bs}$ 是正定的 (2,2) 型张量，这意味着对于所有分量为 $\mathbb{F}^i_j$ 的矩阵 $\mathbb{F}$，均有

$$\mathbb{F} : \mathbb{C} : \mathbb{F} = C^{jp}_{iq}\,\mathbb{F}^i_j\,\mathbb{F}^q_p \geq 0 \quad (\text{summation over repeated indices}). \tag{51}$$

文献 [18] 表明，基于三维空间中张量各向同性且均匀的假设，张量 $\mathbb{C}_{k\ell}$ 会在摩擦应力中产生类似纳维–斯托克斯方程的项。对于每个张量 $\mathbb{C}_{k\ell}$，我们可以采用各向同性、偏差和反对称分解，得到

$$\boldsymbol{\sigma}_{k\ell} = \zeta_{k\ell}\Big(\frac{1}{T_k}\operatorname{div}\mathbf{u}_k - \frac{1}{T_\ell}\operatorname{div}\mathbf{u}_\ell\Big)\mathrm{Id} + 2\mu_{k\ell}\Big(\frac{1}{T_k}\mathbb{F}^\circ_k - \frac{1}{T_\ell}\mathbb{F}^\circ_l\Big) + \nu_{k\ell}\Big(\frac{1}{T_k}\mathbb{A}_k - \frac{1}{T_\ell}\mathbb{A}_\ell\Big), \tag{52}$$

其中，$\mathbb{F}_k$ 和 $\mathbb{A}_k$ 分别是速度梯度的对称部分与反对称部分，而 $\mathbb{F}^\circ_k$ 是对称化速度的偏差（无迹）部分：

$$\mathbb{F}_k = \frac{1}{2}\big(\nabla \boldsymbol{u}_k + \nabla \boldsymbol{u}_k^{\mathsf{T}}\big), \quad \mathbb{A}_k = \frac{1}{2}\big(\nabla \boldsymbol{u}_k - \nabla \boldsymbol{u}_k^{\mathsf{T}}\big), \quad \mathbb{F}^\circ_k = \mathbb{F}_k - \frac{1}{3}\mathrm{Id}\ \operatorname{tr}\mathbb{F}_k. \tag{53}$$

参数 $\mu, \zeta, \nu$ 的条件为

$$\mu_{k\ell} \geq 0, \quad \zeta_{k\ell} \geq 0, \quad \nu_{k\ell} \geq 0. \tag{54}$$

正如文献 [18], 所示，将这些方程应用于经典双组分多孔介质时，它们将多孔介质的达西–布林克曼定律 [42, 43, 53]，推广了（另见 [44]）。

请注意，还可以推导出梯度 $\nabla\mathbf{u}_\ell/T_\ell$ 与应力 $\boldsymbol{\sigma}_\ell$ 之间更一般的线性关系，该关系并非基于写出 $\boldsymbol{\sigma}_k = \sum_\ell \boldsymbol{\sigma}_{k\ell}$。根据式 (36)，我们还可以假设

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{\sigma}_b \\ \boldsymbol{\sigma}_s \end{bmatrix} = \mathbb{L}\begin{bmatrix} \frac{\nabla \boldsymbol{u}_f}{T_f} \\ \frac{\nabla \boldsymbol{u}_b}{T_b} \\ \frac{\nabla \boldsymbol{u}_s}{T_s} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{L} = \big[\mathbb{A}_{k\ell}\big], \tag{55}$$

其中，（3,3）型张量 $\mathbb{A}_{k\ell}$ 满足 $\mathbb{L}$ 为正，且 $\boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_b$ 为对称的，这符合应力张量[54] 对称性的一般要求。本文将不重点讨论此类一般表达式，尽管它们可能与某些物理情形相关。

现在我们将注意力转向与 $q_{k\ell}$ 和 $J_{k\ell}$ 成正比的项，即式（48）中的最后两项。由于我们假设流体中没有弹性链溶解，也没有弹性链由流体生成，因此有 $q_{fs} = q_{fb} = 0$，所以唯一非零的转变

速率为 $q_{bs} = -q_{sb}$，参见 §2.1.4。因此，将第二定律应用于相应项可得条件

$$q_{sb}\Big(\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_s|^2 - g_s}{T_s} - \frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_b|^2 - g_b}{T_b}\Big) + \sum_{k<\ell} J_{k\ell}\Big(\frac{1}{T_\ell} - \frac{1}{T_k}\Big)(T_\ell - T_k) \geq 0. \tag{56}$$

如果 $J_{k\ell}$ 是状态函数，且满足

$$J_{k\ell} \leq 0\,, \tag{57}$$

并且我们假设

$$q_{sb} = \lambda\Big(\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_s|^2 - g_s}{T_s} - \frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_b|^2 - g_b}{T_b}\Big)\,, \tag{58}$$

对于某个状态函数 $\lambda \geq 0$。状态函数是指状态变量的函数，可能包括速度。注意，(57) 也可等价地写为

$$J_{k\ell}\Big(\frac{1}{T_\ell} - \frac{1}{T_k}\Big) = L_{k\ell}(T_\ell - T_k) \tag{59}$$

对于某个状态函数 $L_{k\ell} \geq 0$。(57)/(59) 和 (58) 是傅里叶定律和菲克定律的离散类比。对于一般的拉格朗日量 $\ell$，关系式 (58) 变为

$$q_{sb} = \lambda\Big(\frac{1}{T_s}\frac{\delta \ell}{\delta \rho_s} - \frac{1}{T_b}\frac{\delta \ell}{\delta \rho_b}\Big)\,. \tag{60}$$

应当指出，此处所述方法推导出了组分 $k$ 和 $\ell$ 之间总体转变率 $q_{k\ell}$ 的热力学一致表达式，且不受任何符号约束。该方法并不试图确定 $q_{k\ell} = q^+_{k\ell} - q^-_{k\ell}$ 中的详细转变率 $q^+_{k\ell} \geq 0$ 和 $q^-_{k\ell} \geq 0$，参见 §2.1.4。虽然一般情况下可以进行这种详细描述，但下文将考虑满足 $q^-_{k\ell} = 0$ 的特定情形$q_{k\ell} = q^+_{k\ell} - q^-_{k\ell}$，这将导出 (60) 的一个修订版本。

熵方程（48）的形式也为寻找交叉现象提供了指引，例如质量传递和热传递这两个标量过程之间出现的交叉现象，以及体积黏度；详情请参见附录 A。由此得到的公式与文献中先前用于描述损伤参数演化的唯象方程有些相似，参见例如 [11]。

**质量传递速率条件**（58）。下面通过一些具体示例，更详细地考察弹性基质破碎速率的条件（58）。在对固体进行热力学描述时，通常给定自由能 $\psi_s(\rho,\ T,\ b)$ 的表达式，而非内能 $e_s(\rho,\ \eta,\ b)$，因为通常用温度 $T$ 而非比熵 $\eta$ 来表示固体的性质。

假设比自由能具有如下形式

$$\psi_s(\rho, T, b) = f(\rho, T)\varepsilon(b)\,, \tag{61}$$

其中，$\varepsilon(b)$ 是某个弹性能函数，而 $f(\rho, T)$ 是一个取决于质量密度和温度的系数。然后，比熵为

$$\eta(\rho, T, b) = -\frac{\partial \psi_s}{\partial T}(\rho, T, b) = -\frac{\partial f}{\partial T}(\rho, T)\varepsilon(b)\,.$$

该函数可以进行反演，从而得到温度作为函数 $T = T(\rho,\ \eta,\ b)$。因此，我们得到固体的比内能函数，其将以如下形式用于拉格朗日量中。

$$e_s(\rho,\eta,b) = \psi_s(\rho,T,b) + T\eta \quad \text{with} \quad T = T(\rho,\eta,b)\,. \tag{62}$$

吉布斯能，见式（42），可写为

$$g_s = \psi_s + \frac{p}{\rho} = f(\rho,T)\varepsilon(b) + \frac{p}{\rho}\,, \tag{63}$$

其中，所有组分的压力 $p$ 均相同，见式（39）。这一表达式说明，式（58）中的破碎速率 $q_{sb}$ 明确涉及弹性能函数 $\varepsilon(b)$。需要指出的是，将式（63）代入式（58）时，必须使用实际密度 $\bar{\rho}_k$，而非观测密度 $\rho_k$。

基质开始发生破碎的条件为 $q_{sb} \le 0$，即，

$$\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_s|^2 - g_s}{T_s} \le \frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_b|^2 - g_b}{T_b}\,. \tag{64}$$

式（63）说明，Finger变形张量 $b$ 出现在条件（64）左侧。

除了式（61）外，也可以考虑如下形式的自由能：$\psi_s(\rho,\ T,\ b) = \psi_{s0}(\rho,\ T) + \varepsilon(b)$。由此得到 $e_s(\rho,\ \eta,\ b) = e_{s0}(\rho,\ \eta) + \varepsilon(b)$ 和 $g_s = g_{s0} + \varepsilon(b)$，并将其用于条件（64）。

如果条件 (64) 不成立，就不可能发生净破碎，但仍可能发生凝固。因此，在不存在凝固的情况下，断裂速率由 (60) 的修正版给出

$$q_{sb} = \begin{cases} \lambda\Big(\dfrac{1}{T_s}\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_s} - \dfrac{1}{T_b}\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_b}\Big)\,, & \text{if } \dfrac{1}{T_s}\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_s} \le \dfrac{1}{T_b}\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_b} \\ 0 & \text{if } \dfrac{1}{T_s}\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_s} \ge \dfrac{1}{T_b}\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_b} \end{cases} \tag{65}$$

该修正版也满足第二定律，见条件 (56)。在这种情况下，我们有 $q_{sb} = -q_{sb}^- = -q_{bs}^+$。条件 (65) 似乎是唯一符合物理实际且不发生愈合的情形，即不存在从破碎相向固体组分的传递。事实上，如果在条件 (64) 不成立时，仍允许少量物质从固体组分传递到破碎相，就会导致违反热力学第二定律，这是不可能的。因此，当 (64) 不成立时，传递速率必须严格为零。

对于凝固的情况，式（58）的物理含义可以解释如下。凝固后，破碎组分的粒子融合在一起，成为固体组分，并以与固体相同的速度运动。自由能包含应力张量 $b$：粒子融合时，必须立即开始传递与“旧”固体相当的应力，因为“旧”固体与“新”固体之间并无差别。因此，新形成的物质粒子弹性链必须立即发生变形，以承载应力，从而具有弹性能。同时，我们假设，根据连续介质假设，粒子融合时会获得周围固体的热力学特性。这意味着，必须有足够的自由能供粒子完成融合与变形，从而立即适应固体基质。

在下文将要讨论的受应力破碎的具体应用中，我们始终处于式（60）有效的区域，因此可以使用式（58）给出的较简单的断裂速率形式。

也可以将条件 (60) 理解为损伤力学中 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件的推广，参见例如 [8]。在我们的情形中，条件 (56) 源于热力学第二定律，它保证熵不会减少，其中$\rho_b$ 起到损伤参数的作用。进一步探讨这种联系将会很有意思，我们将在后续工作中进行研究。

**方程的简化。** 当只有一种转变，即上述从固体到破碎组分的转变时，系统 (41) 可大幅简化。在这种情况下，由于

$$q_{sb} = -q_{bs} = q\,, \quad q_{fs} = q_{sf} = 0\,, \quad q_{fb} = q_{bf} = 0\,, \tag{66}$$

可得

$$\begin{cases} \rho_f(\partial_t \boldsymbol{u}_f + \boldsymbol{u}_f \cdot \nabla \boldsymbol{u}_f) = -(1-\phi_s-\phi_b)\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{f}_f \\ \rho_b(\partial_t \boldsymbol{u}_b + \boldsymbol{u}_b \cdot \nabla \boldsymbol{u}_b) = -\phi_b \nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_b + \boldsymbol{f}_b - q\boldsymbol{u}_b \\ \rho_s(\partial_t \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}_s \cdot \nabla \boldsymbol{u}_s) = -\phi_s \nabla p + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} + \boldsymbol{\sigma}_s\right) + \boldsymbol{f}_s + q\boldsymbol{u}_s \\ \partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \boldsymbol{u}_k) = \pm q,\ (k=b,s) \quad \partial_t \rho_f + \operatorname{div}(\rho_f \boldsymbol{u}_f) = 0 \\ \partial_t b + \pounds_{\boldsymbol{u}_s} b = 0 \\ T_f \bar{D}_t^f s_f = -\boldsymbol{f}_f \cdot \boldsymbol{u}_f + \boldsymbol{\sigma}_f : \nabla \boldsymbol{u}_f - \displaystyle\sum_{\ell} J_{f\ell}\,(T_\ell - T_f) \\ T_k \bar{D}_t^k s_k = -\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\sigma}_k : \nabla \boldsymbol{u}_k \\ \qquad\qquad \pm q\Big(\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}_k|^2 - g_k\Big) - \displaystyle\sum_{l} J_{k\ell}\,(T_\ell - T_k)\,,\ (k=b,s)\,, \end{cases} \tag{67}$$

在每处出现 $\pm q$ 的位置，对 $k=s$ 取正号，对$k=b$取负号。

**备注 4.1（关于流体与固体的不可压缩性）** 当流体和/或固体不可压缩时，方程 (41) 和 (67) 保持其函数形式不变，尽管此时压力的含义有所不同。在这些情况下，方程由作用量原理 (29) 推导而来，并附加流体和/或固体的不可压缩条件，具体做法见 [18, 19]。此时，压力表示不可压缩约束的拉格朗日乘子，而非热力学表达式。变分原理还会导出压力相等的附加方程，并且必须加入不可压缩条件，才能使系统 (67) 封闭。

# 5 简化的变分模型、破碎与有限时间奇点

为了将我们的理论与实验联系起来，并深入分析材料在应力作用下的行为，让我们考虑某一特定类型的

材料形变，由一维应力引起。这些变形在物理上将把我们的理论与若干实验联系起来，在这些实验中，均匀材料块受到一维变形，通常沿着块体的最长轴方向。

从数学上讲，通过对模型作出若干简化假设，我们将能够得到解析解，并展示有限时间奇异性的发生。我们假设动力学可仅由一个速度和一个温度来描述，并且拉格朗日量中可以忽略动能，因此所有量随时间缓慢演化，且方程在每一时刻均处于准静态平衡态。我们还将详细说明，对于某类内能表达式，如何在变分过程中从各相的熵转为单一的有效熵变量。最后，我们聚焦于均匀介质的一维拉伸，并精确求解方程；其变分性质和热力学一致性将在第 6 节进一步探讨。

## 5.1 单速度描述

现在我们来考虑一种简化的运动模型，其中拉格朗日量中只包含一个特征速度：$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_b = \boldsymbol{u}_f = \boldsymbol{u}$。从物理上看，这意味着时间尺度足够长，弹性基质可以拖动流体，使速度差异 $\boldsymbol{u}_s$ 和$\boldsymbol{u}_f$ 几乎瞬间达到平衡。类似地，当基质破碎时，流体会在远短于弹性介质相关动力学时间尺度的时间内，使破碎部分减速直至完全停止。在这种情况下，摩擦力作用的时间尺度非常短，但达到平衡后不存在相对运动，因此体力中的摩擦部分消失： $\boldsymbol{f}_k = 0$对于 $k = s, b, f$。

此外，在运动过程中，热交换非常迅速，因此温度达到平衡所需的时间尺度远短于弹性介质运动的时间尺度。与此相一致，我们假设系统可用单一熵来描述。单一熵变量这一假设可如下论证：若材料的相对运动很快达到平衡，且热交换非常迅速，$\boldsymbol{u}_f = \boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_b = \boldsymbol{u}$, $T_f = T_s = T_b = T$，则熵变化率的三个方程（67）可简化为

$$T\bar{D}_t s_f = 0, \qquad T\bar{D}_t s_s = q\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 - g_s\right), \qquad T\bar{D}_t s_b = -q\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 - g_b\right). \tag{68}$$

因此，定义总熵 $s := s_f + s_b + s_s$，我们有

$$T\bar{D}_t s = q\left(\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 - g_s\right) - \left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 - g_b\right)\right). \tag{69}$$

¯当 $q$ 由（58）给出时， $TDs \geq 0$ 因此取 $s = s_b + s_f + s_s$ 在热力学上是一致的。下文将针对一类特定的拉格朗日量，论证如何从多个熵变量过渡到单一熵变量。

**变分表述**。 基于前述考量，我们将采用适用于具有单一速度和单一熵的多组分流体、但包含转换率 [52] 的变分表述。对于给定的拉格朗日量 $\ell =$

$\ell(\boldsymbol{u},\ \rho_s,\ \rho_b,\ s,\ b)$ 和外部体力 $\boldsymbol{f}$（其可能并非源于摩擦）可表述如下：

$$\delta\int_0^T\left[\ell(\boldsymbol{u},\rho_s,\rho_b,s,b)+\int_{\mathcal{B}}(\rho_s D_t w_s+\rho_b D_t w_b)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\right]\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}t=0 \quad (70)$$

满足约束

$$\begin{aligned}\frac{\delta\ell}{\delta s}\bar{D}_t s&=q_{sb}D_t w_s+q_{bs}D_t w_b\\ \frac{\delta\ell}{\delta s}\bar{D}_\delta s&=q_{sb}D_\delta w_s+q_{bs}D_\delta w_b\,,\end{aligned} \quad (71)$$

以及针对 $\delta\boldsymbol{u}$ 和 $\delta b$的通常欧拉-庞加莱变分约束，见式 (32)。对于一般的拉格朗日量，原理 (70)–(71) 给出单速度模型：

$$\begin{cases}(\partial_t+\pounds_{\boldsymbol{u}})\dfrac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}}=\rho_s\nabla\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_s}+\rho_b\nabla\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_b}+s\nabla\dfrac{\delta\ell}{\delta s}-\dfrac{\delta\ell}{\delta b}:\nabla b-2\,\mathrm{div}\left(\dfrac{\delta\ell}{\delta b}\cdot b\right)+\boldsymbol{f}\\ \partial_t\rho_s+\mathrm{div}(\rho_s\boldsymbol{u})=q_{sb}=q\\ \partial_t\rho_b+\mathrm{div}(\rho_b\boldsymbol{u})=q_{bs}=-q\\ \partial_t b+\pounds_{\boldsymbol{u}}b=0\\ \dfrac{\delta\ell}{\delta s}\bar{D}_t s=q_{sb}\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_b}+q_{bs}\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_s}=q\left(\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_b}-\dfrac{\delta\ell}{\delta\rho_s}\right).\end{cases} \quad (72)$$

## 5.2 干燥材料的准静态近似

为进一步简化问题，我们假设流体在动力学中的作用可以忽略。由于我们关注的是破碎动力学，而且上述式 (69) 等熵表达式只涉及材料的破碎相和固相，因此假设可以从拉格朗日量中去掉流体项。从物理上看，可以设想随着流体从材料中移除，固相与破碎相之间因相对运动而产生的摩擦会在速度不一致时急剧增大。随着材料“干燥”，固相和破碎相的速度必须一致，才能消除方程中的巨大摩擦力。

为进一步简化计算并获得解析解，我们假设拉格朗日量（37）中的材料动能可以忽略，并专门关注作用于材料上的力所产生的结果。在拉格朗日量中忽略动能，意味着所有物理量都缓慢演化，且在每一时刻，方程均处于准静态平衡态。

**简化的拉格朗日量。** 拉格朗日量于是就只是内能，我们聚焦于该表达式

$$\ell(\boldsymbol{u},\rho_s,\rho_b,s,b)=-\int_{\mathcal{B}}\left[\rho_b e_t\Big(\bar{\rho}_b,\frac{s_b}{\rho_b}\Big)+\rho_s e_t\Big(\bar{\rho}_s,\frac{s_s}{\rho_s}\Big)+\rho_s e_{\mathrm{el}}(b)\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \quad (73)$$

其中，我们选择 $e_b(\bar{\rho}_b,\ s_b/\rho_b)=e_t(\bar{\rho}_b,\ s_b/\rho_b)$ 和 $e_s(\bar{\rho}_s,\ s_s/\rho_s,\ b)=e_t(\bar{\rho}_s,\ s_s/\rho_s)+e_{\mathrm{el}}(b)$，对应某个特定的热能函数 $e_t$。这一表达式成立，是因为假设固体和破碎体是相同的，因此热能对比熵的依赖关系也相同。我们可以假设微观密度

$\bar{\rho}_b$ 和 $\bar{\rho}_s$ 在断裂过程中变化不大，因此可以忽略内能对这些变量的依赖，从而得到

$$\ell(\boldsymbol{u}, \rho_s, \rho_b, s, b) = -\int_{\mathcal{B}} \Big[\rho_b e_t\Big(\frac{s_b}{\rho_b}\Big) + \rho_s e_t\Big(\frac{s_s}{\rho_s}\Big) + \rho_s e_{\mathrm{el}}(b)\Big] \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,. \tag{74}$$

弹性能的形式表明，它与完好的弹性链剩余数量成正比（因此与 $\rho_s$ 成正比），并通过函数 $e_{\mathrm{el}}(b)$ 表示每条弹性链的变形。一般而言，弹性能 $e_{\mathrm{el}}$ 还可能取决于固体有效密度 $\bar{\rho}_s$，从而产生热力学压力。然而，对于不可压缩材料，这种依赖关系很可能可以忽略。可以考虑式 (74) 中更一般的内能情形，但这个简单情形已能提供充分的物理见解，且不会带来额外的数学复杂性。

接下来需要说明如何用总熵密度 $s$ 表示拉格朗日量的被积函数。这一步将用到假设 $T_s = T_b = T$ 以及总质量密度 $\rho_s + \rho_b$ 守恒。对于 $k = b,\ s$，固体相和破碎相的温度分别写作 $T_k = e_t'(\eta_k)$，其中 $\eta_k = s_k/\rho_k$ 表示相应相的比熵，与前文定义相同。由温度相等 $T_s = T_b = T$ 可得比熵相等 $\eta_s = \eta_b = \eta$。如果假设材料的初始密度在空间中为常数，则材料的总密度按如下方式守恒：

$$\rho_s + \rho_b = \varrho_0 J(b)\,, \quad J(b) := \det(\nabla\boldsymbol{\varphi})^{-1} \circ \varphi^{-1} = (\det b)^{-1/2}. \tag{75}$$

因此，内能（74）可进一步简化为

$$\ell(\boldsymbol{u}, \rho_s, \rho_b, s, b) = -\int_{\mathcal{B}} \Big[\varrho_0 J(b) e_t(\eta) + \rho_s e_{\mathrm{el}}(b)\Big] \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,. \tag{76}$$

现在，我们可以将总熵写作 $s = s_b + s_s = \eta(\rho_b + \rho_s) = \eta\varrho_0 J(b)$，由此可以在拉格朗日量（76）中用变量 $s$ 和 $b$ 来表示 $\eta$。

**运动方程**。运动方程由一般系统（72）推导得出。令 $\epsilon(\rho_s,\ b,\ s)$ 表示拉格朗日量（76）的被积函数，则系统（72）化为

$$\begin{cases} 0 = -\nabla\left(\rho_s \dfrac{\partial\epsilon}{\partial\rho_s} + s\dfrac{\partial\epsilon}{\partial s} - \epsilon\right) + 2\,\mathrm{div}\left(\dfrac{\partial\epsilon}{\partial b}\cdot b\right) + \boldsymbol{f} \\ \partial_t\rho_s + \mathrm{div}(\rho_s\boldsymbol{u}) = q, \qquad \partial_t\rho_b + \mathrm{div}(\rho_b\boldsymbol{u}) = -q \\ \partial_t b + \pounds_{\boldsymbol{u}} b = 0, \qquad T\bar{D}_t s = -q\dfrac{\partial\epsilon}{\partial\rho_s}\,, \end{cases} \tag{77}$$

其中 $T = \frac{\partial\epsilon}{\partial s}$ 为温度。由此，并根据第二定律，我们选取 $q = -\frac{\lambda}{T}\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_s}$，其中 $\lambda \geq 0$。在（77）中，$-\boldsymbol{f}$是作用于固体材料体材料部分的外力。我们将只考虑边界力，因此在后续讨论中令 $\boldsymbol{f} = 0$。

有趣的是，对于由（74）给出的依赖于比熵的一般形式的势能，应力方程（77）会大大简化，正如下文所示。我们使用以下引理。

**引理 5.1（关于雅可比行列式 $J(b)$ 的导数）**对于 $J(b)$ 由（75）定义的，

$$2\frac{\partial J}{\partial b}\cdot b = -J(b)\mathrm{Id}_{3\times 3}\,, \tag{78}$$

其中 $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ 是 $3\times 3$ 单位矩阵。

**证明**。 我们使用行列式求导的标准规则对雅可比行列式求导：

$$J(b)=\frac{1}{\sqrt{\det b}}\,,\quad \frac{\partial J}{\partial b^{ij}}=-\frac{(\mathrm{adj}\, b)_{ji}}{2(\det b)^{3/2}}\,,\quad \frac{\partial J}{\partial b}=-\frac{\left(b^{-1}\right)^{T}}{2\sqrt{\det b}}\,, \tag{79}$$

因为对于任意可逆矩阵 $A$，$A^{-1}_{ij}=\mathrm{adj}\, A_{ij}/\det A$。将（79）式右乘 $\frac{\partial J}{\partial b}\, b$，并利用 $b$ 是对称的这一事实，即可得到结果（78）。 ∎

利用结果（78），我们得到表达式 $2\frac{\partial \epsilon}{\partial b}\cdot b = -(\rho_s+\rho_b)e_t\mathrm{Id}_{3\times 3}+se_t'(\eta)\,\mathrm{Id}_{3\times 3}+2\frac{\partial e_{\mathrm{el}}}{\partial b}\cdot b$，因此（77）式第一式中的总应力张量大大简化：

$$\sigma_{\mathrm{tot}}=-\left(\rho_s\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_s}+s\frac{\partial \epsilon}{\partial s}-\epsilon\right)\mathrm{Id}_{3\times 3}+2\frac{\partial \epsilon}{\partial b}\cdot b = 2\rho_s\frac{\partial e_{\mathrm{el}}(b)}{\partial b}\cdot b. \tag{80}$$

因此，我们得出了一个有些令人惊讶的物理结果：尽管材料动力学中的应力张量确实包含来自热能的项，但对于一大类内能，这些项会恰好抵消，实际观测到的应力仅由弹性项贡献。系统（77）简化为

$$\begin{cases} 0=\mathrm{div}\,(\sigma_{\mathrm{el}})\,, \qquad \sigma_{\mathrm{el}}=2\rho_s\dfrac{\partial e_{\mathrm{el}}}{\partial b}\cdot b \\ \partial_t\rho_s+\mathrm{div}(\rho_s\boldsymbol{u})=q, \qquad \partial_t\rho_b+\mathrm{div}(\rho_b\boldsymbol{u})=-q \\ \partial_t b+\pounds_{\boldsymbol{u}}b=0, \qquad T\bar{D}_t s=-q\,e_{\mathrm{el}}\,, \end{cases} \tag{81}$$

转换率为 $q=-\frac{\lambda}{T}e_{\mathrm{el}}$, $\lambda\geq 0$。 –

注 5.2 我们将式 (76) 中拉格朗日量的被积函数视为函数 $\epsilon(\rho_s,b,s) = \varrho_0 J(b)e_t(s/\varrho J(b)) + \rho_s e_{\mathrm{el}}(b)$，其中对 $\rho_b$ 的依赖已完全用其他变量表示。然而，我们也可以将该被积函数视为函数 $\epsilon(\rho_s,\rho_b,b,s) = (\rho_s+\rho_b)e_t(s/(\rho_s+\rho_b)) + \rho_s e_{\mathrm{el}}(b)$ 或 $\epsilon(\rho_s,b,s) = \varrho_0 J(b)\, e_t(s/(\rho_b+\rho_s)) + \rho_s e_{\mathrm{el}}(b)$，从而显式包含对 $\rho_b$ 的依赖。对这些替代依赖关系一致地应用方程 (72)，最终会得到相同的方程 (81)。

## 5.3 均匀应变假设和约化动力学

我们考虑由式 (81) 描述的材料的约化运动，情形为一个均匀块体受到施加于边界的外力 $F(t)$，并向相反方向拉伸。我们假设破碎组分和固体组分的所有粒子都沿一维轨迹运动，并忽略横向运动，但势能除外。实际上，在这种变形下，还会存在

一个横向速度分量，但由于我们将在拉格朗日量中忽略动能，这个速度分量不会对动力学产生影响。之后，我们将通过适当形式的弹性能纳入变形的横向分量。由于施加在块体两侧的力 $x = \pm L$ 大小相等、方向相反，因此自然可以假设所有变形均关于原点 $x = 0$呈反对称。这一假设自然导出以下试探形式：

$$\begin{aligned} x(t,X) &= \big(D(t)+1\big)X \quad\Longrightarrow\quad u_s(t,x) = \frac{\dot D(t)}{D(t)+1}x \\ b(t,x) &= (D+1)^2 = b(t) \quad\Longrightarrow\quad \sigma_{\rm el} = \sigma_{\rm el}(D(t)) \\ s(t,x) &= s(t) \quad\Longrightarrow\quad T(t,x) = T(t) \\ \rho_s(t,x) &= \rho_s(t)\,. \end{aligned} \tag{82}$$

在上述系统的第一个方程中，我们定义了 $x = (D+1)X$，因此 $D = 0$ 对应于平衡态，而当偏离平衡态的程度较小时， $D$ 也很小。

将 (81) 在固体的体积上积分后，体积内部的各项相互抵消，而边界上的各项必须与施加在边界面积 $A$上的边界力 $f_b$相匹配。为简便起见，记 $F = f_b/A$ ，则在边界上有

$$\sigma_{\rm el} = \rho_s \frac{\partial e_{\rm el}}{\partial D}(D+1) = F \tag{83}$$

拉伸力 $F$ 是给定的，其具体形式由作用于材料的物理装置确定。利用 (82)，系统 (81) 与 (83) 联立可得以下代数—微分耦合方程：

$$\begin{cases} \dot\rho_s + \dfrac{\dot D}{D+1}\rho_s = q\,, \qquad q = -\lambda\dfrac{e_{\rm el}(D)}{T}\,, \\ T\Big(\dot s + \dfrac{\dot D}{D+1}s\Big) = -q e_{\rm el}(D)\,, \\ \rho_s \dfrac{\partial e_{\rm el}}{\partial D}(D+1) = F\,, \qquad s = \eta(T)J(D)\varrho_0\,, \end{cases} \tag{84}$$

在最后一个方程中，我们使用了 $s = \eta(\rho_b + \rho_s) = \eta J(D)\varrho_0$，并通过求逆关系 $T = e_t'(\eta)$计算出 $\eta(T)$。第 6 节将以类似于 (81) 的方式说明，(84) 也可由变分表述导出。

下面我们将探讨在两种唯象系数 $\lambda$ 选择下，系统 (84) 中有限时奇异性的出现，即 $\lambda = \lambda_0 T$ 和 $\lambda = \text{const}$。

**能量守恒**。 我们注意到，总能量是守恒的，如下计算所示：

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{d}{dt}\big((\rho_s+\rho_b)e_t(\eta) + \rho_s e_{\rm el}(D)\big) \\ &= -e_t(\eta)(\rho_s+\rho_b)\frac{\dot D}{D+1} + e_{\rm el}(D)\Big(-\frac{\dot D}{D+1}\rho_s + q\Big) \\ &\quad + \rho_s\frac{\partial e_{\rm el}}{\partial D}\dot D + (\rho_s+\rho_b)T\dot\eta = -\epsilon\frac{\dot D}{D+1} + F\frac{\dot D}{D+1}\,, \end{aligned} \tag{85}$$

给出了空间坐标系中的能量平衡

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\dot{D}}{D+1}\epsilon = \frac{\dot{D}}{D+1}F\,. \tag{86}$$

左侧各项是能量的全导数，包括对流项；右侧项则是边界处外力所做的功。事实上，该项仅等于边界上的 $F \cdot u$ 乘积。关于这种能量平衡形式的进一步论证，请参见 §6。

$e_{\mathrm{el}}(D)$ **Ogden 材料的函数形式**。 具体而言，我们考虑一种类似 Ogden 的材料，其弹性能 $e_{\mathrm{el}}(D)$ 用主伸长表示。例如，对于 $N$ 项 Ogden 材料，我们有

$$e_{\mathrm{el}}(D) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{2\alpha_k}\,, \tag{87}$$

另请参见 [55], ，以及近期关于将这些模型应用于脑组织力学的论文 [56–58]。

一维情况下的主伸长简单地表示为 $\lambda_1 = (D+1)$。对于均匀材料在拉伸作用下的另外两个方向，我们有 $\lambda_2 = \lambda_3$。例如，假设材料接近不可压缩，且块体垂直于 $y$和 $z$ 轴的侧面均为自由面，则 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ ，因此 $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$ 。因此，对于单项 Ogden 模型，我们得到

$$e_{\mathrm{el}}(D) = \frac{\mu}{\alpha}(D+1)^{2\alpha} + 2\frac{\mu}{\alpha}(D+1)^{-\alpha}\,. \tag{88}$$

于是，

$$e'_{\mathrm{el}}(D) = 2\mu\left[(D+1)^{2\alpha} - (D+1)^{-\alpha}\right]$$

并且对于任意 $\alpha > 0$， $D = 0$ 都是一个平衡态。内部弹性能 $e_{\mathrm{el}}(D)$具有唯一的最小值；当 $D \to -1$ 时发散，并且当 $D \to +\infty$时， $D^p$ 也发散。

**有限时奇异性与破碎：一个简化案例**。方程（84）构成一个封闭的微分—代数系统，对于任意给定的热能 $e_t(\eta)$，都可以通过数值方法求解。我们将关注杆发生灾难性失效的情形，即 $\rho_s \to 0$。在（60）中，我们可以取 $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_0(T_s + T_b) \simeq \lambda_0 T$ ，这与热力学一致。于是， $q = -\lambda_0 e_{\mathrm{el}}(D)$，方程（84）的热力学部分随之解耦，得到：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\rho_s(D+1)\right] = -\lambda_0 e_{\mathrm{el}}(D)(D+1) \\ \rho_s \dfrac{\partial e_{\mathrm{el}}}{\partial D}(D+1) = F\,. \end{cases} \tag{89}$$

该系统可以化为关于 $D(t)$ 的单个方程，并可通过求积法求解：

$$\dot{D} = \frac{\lambda_0}{F}\frac{e_{\mathrm{el}}(D)(D+1)\left[e'_{\mathrm{el}}(D)\right]^2}{e''_{\mathrm{el}}(D)}\,. \tag{90}$$

对于由 (88) 描述的 Ogden 材料， $e_{\mathrm{el}}(D) > 0$ 和 $e''_{\mathrm{el}}(D) > 0$ 对于 $\alpha > 1$，因此对于所有伸展力 $F > 0$，右侧均非负。此外， $e'_{\mathrm{el}}(D) = 0$

仅对于 $D=0$，因此 $D=0$ 是方程 (90) 的唯一临界点。因此，对于所有初始条件 $D>0$，所有轨迹都会发散至 $+\infty$。此外，发散会在有限时间内发生。事实上，由于 $e_{\mathrm{el}}(D)\sim D^{2\alpha}$ 当 $D\to\infty$时，(90) 的右侧会在 $D^{4\alpha+1}$时发散，而解 (90) 的奇点 $F>0$ 呈现如下形式：

$$D\sim\left(\frac{\lambda_0}{F}(t_*-t)\right)^{\frac{1}{4\alpha}}. \tag{91}$$

根据力平衡方程，固体材料的量会依照平方根定律在有限时间内降至零：

$$\rho_s=F\left[e'_{\mathrm{el}}(D)(D+1)\right]^{-1}\sim D^{2\alpha}\sim\left(\frac{\lambda_0}{F}\right)^{\frac{1}{4\alpha}}(t_*-t)^{1/2}. \tag{92}$$

**完整方程中的解析解、运动积分与奇点** (84)。 有趣的是，完整方程 (84) 也可以通过求积法求解，其中 $\lambda=$ 为常数。

假设我们指定 $e_t(\eta)$，其中 $T=e'_t(\eta)$。反转这一关系，可得 $\eta=\eta(T)$，目前暂将其保留为一般形式。总熵 $s$ 随后可推导为 $s=(\rho_s+\rho_b)\eta(T)=\varrho_0 J(D)\eta(T)$。由于 $J(D)=1/(D+1)$，方程 (84) 现在给出

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{F}{e'_{\mathrm{el}}(D)}\right)=-\lambda\dfrac{e_{\mathrm{el}}(D)}{T}(D+1)\\[2ex] \varrho_0 T\eta'(T)\dfrac{dT}{dt}=\lambda\dfrac{e_{\mathrm{el}}(D)^2}{T}(D+1)\end{cases} \tag{93}$$

而 $\rho_s(D)$ 由力平衡给出，即方程 (84) 的第三个方程。结合上述方程，我们注意到可以分离变量，并通过以下关系将 $D$ 与 $T$ 联系起来：

$$F\frac{e''_{\mathrm{el}}(D)e_{\mathrm{el}}(D)}{\left[e'_{\mathrm{el}}(D)\right]^2}\frac{dD}{dt}=\varrho_0\eta'(T)T\frac{dT}{dt}, \tag{94}$$

由此得到如下形式的第一积分

$$F\Phi(D)=\varrho_0\Psi(T)+C,$$
$$\Phi(D):=\int\frac{e''_{\mathrm{el}}(D)e_{\mathrm{el}}(D)}{\left[e'_{\mathrm{el}}(D)\right]^2}\mathrm{d}D,\quad \Psi(T):=\int T\eta'(T)\mathrm{d}T.$$

如果我们假设 $e_t(\eta)=ce^{\kappa\eta}$, $c=\mathrm{const}$，这也是比熵对内能的依赖关系中最常用的情况，那么我们得到$\Psi(T)=T/\kappa$。需要注意的是，该表达式是精确的，并且对所有 $T$ 都有效，而不仅仅适用于较大的 $T$。接下来，$T=F\kappa\Phi(D)/\varrho_0$，其中我们将由初始条件产生的常数吸收到函数 $\Phi(D)$ 的定义中。因此，我们得到关于 $D$ 的单个方程：

$$\dot D=\frac{\lambda\varrho_0}{\kappa F^2}\frac{e_s(D)[e'_{\mathrm{el}}(D)]^2(D+1)}{e''_{\mathrm{el}}(D)\Phi(D)}. \tag{95}$$

再次，假设 Ogden 材料由 (88) 描述，则有 $e_{\mathrm{el}}(D)\sim D^{2\alpha}$ 和$\Phi(D)\to D$，如 $D\to\infty$ 所示。由此得到以下奇异性表达式：

$$D\sim\left(\frac{\lambda\varrho_0}{\kappa F^2}(t_*-t)\right)^{\frac{1}{4\alpha-1}},\quad \rho_s\sim\left(\frac{\lambda\varrho_0}{\kappa F^2}(t_*-t)\right)^{\frac{2\alpha}{4\alpha-1}}. \tag{96}$$

**关于断裂定律的实验验证** (91)**和** (96)。 请注意，根据 (96)， $\rho_s \to 0$ 比 (91) 给出的平方根定律更慢，因为 $t_* - t$ 的幂总是大于 $1/2$。此外，在 (91) 和 (96) 中，密度对所施加外力 $F$ 的依赖关系不同。这为实验验证本节给出的预测提供了机会。目前，我们尚未发现通过施加恒定 外力使均匀材料杆断裂的相关实验。不过，已有一些关于周期性外力作用下断裂的实验。现在我们来考察这些实验，并将其与本文推导的理论联系起来。

**重复载荷造成的长期损伤**。现在我们来考察另一种极限情形，即文献中常见的一种循环载荷实验，用于实验分析材料的磨损和损伤。具体而言，假设施加的力 $F(t)$ 是周期函数，例如 $F(t) = F_0 \cos \omega t$。还假设在载荷周期 $\Delta t = 2\pi/\omega$ 内，温度能够达到平衡，因此 $T \simeq T_*$。将 (84) 的第一个方程乘以 $(D+1)$，并记 $k\Delta t := t_k$，则 (84) 的第一个方程在第 $k$ 个周期给出

$$\rho_s(t_{k+1})(1+D(t_{k+1})) - \rho_s(t_k)(1+D(t_k)) = \lambda_0 \int_{t_k}^{t_{k+1}} e_{\rm el}(D(t))(1+D(t))\mathrm{d}t\,, \quad (97)$$

其中我们考虑了先前处理过的情形 $\lambda = \lambda_0 T$。

由于这些方程具有准静态特性，力平衡——即 (84) 的第三个方程——在所有时刻都成立，因此上面的方程 (97) 可化简为

$$\frac{F}{e'_{\rm el}(D(t_{k+1}))} - \frac{F}{e'_{\rm el}(D(t_k))} = -\lambda_0 \int_{t_k}^{t_{k+1}} e_{\rm el}(D(t))(1+D(t))\mathrm{d}t\,. \quad (98)$$

在实验中，每个外力周期都会导致 $\Delta D_k = D(t_{k+1}) - D(t_k)$发生微小变化。将 (98) 两边除以 $\Delta t$，并对左侧在 $\Delta D_k$ 较小时进行线性化，可得

$$\frac{e''_s(D)}{[e'_s(D)]^2}\frac{\Delta D}{\Delta t} \simeq \frac{\lambda_0}{F} e_s(D)(1+D)\,, \quad (99)$$

此处的变量现在理解为在外力周期内真实变量的平均值。(98) 式与 (90) 式完全一致，因此根据 (91)，我们得到 $D(t)$ 的幂律奇点。根据 (92)，固相的密度 $\rho_s$ 在有限时间内按平方根 $\rho_s \simeq (t_* - t)^{1/2}$ 趋于零；或者，用加载循环次数表示，则为 $\rho_s \simeq (N_* - N)^{1/2}$。

将我们理论的这些预测与实验结果进行比较会很有意思。针对生物医学应用中的丙烯酸基骨水泥 [59] 和真空混合骨水泥 [13] 开展的实验，采用了失效概率随循环次数变化的 Weibull 型分布 $P_f \sim e^{-(N_f/b)^a}$，其中 $N_f$ 是失效前的疲劳循环次数， $k$, $m$ 是根据实验数据拟合得到的一些正常数 [60]。由于分析预测（91）的性质，我们的工作或许有助于更好地理解疲劳行为。按照 [13, 59], 损伤累积 $\rho_b = \rho_0 - \rho_s$，由（91）描述的 $\rho_s$ 是循环次数 $N = t_N/\Delta t$的非线性函数，单调递增，并在破坏点 $N = N_*$处呈现奇点。

# 6 有限维约化变分模型

本节将说明，通过用表征材料的量的典型值进行近似，可以直接从该问题的“离散变分”方法推导出方程（84）。我们认为，详细介绍这一推导很有价值，因为在描述材料表述或空间表述中的各个量时必须格外谨慎，即使我们讨论的是离散近似下的系统。这种区别体现在标量及密度的时间变化率形式，以及两种表述中的能量平衡和熵平衡形式上；这对于热力学考量至关重要。为简单起见，我们考虑第5节的单速度方法，但本文给出的变分推导也可扩展到第4节所述的完整多速度模型。

回顾一下，我们关注如下形式的一维线性形变： $\varphi(t,X) = (D(t)+1)X$。与前文相同，我们假设物质坐标系中的质量密度和熵密度不依赖于 $X$，即 $\varrho_k(t,X) = \varrho_k(t)$，且 $S(t,X) = S(t)$。因此，对于连续体模型的标准拉格朗日量 $L(\varphi,\dot{\varphi},\varrho_k,S)$，可以关联一个有限维拉格朗日量 $L(D,\dot{D},\varrho_k,S)$。下面我们利用物质坐标系和欧拉参考系下热力学变分表述的有限维版本推导运动方程，并说明如何通过适当选择 $L$，直接得到式 (84) 中的模型。

**离散物质表示**。热力学介质的有限维变分表述给出 [47]:

$$\delta\int_0^T \left[L(D,\dot{D},\varrho_k,S)+\varrho_k\dot{W}^k\right]\mathrm{d}t+\int_0^T F^*\delta D\,\mathrm{d}t=0 \tag{100}$$

满足唯象约束和变分约束

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial S}\dot{S}&=\sum_{k,\ell}Q_{k\ell}\dot{W}^k\\ \frac{\partial L}{\partial S}\delta S&=\sum_{k,\ell}Q_{k\ell}\delta W^k\,,\end{aligned} \tag{101}$$

其中， $Q_{k\ell}$ 为转化率， $F^*$ 和外力。它是前文在连续体情形中所采用的变分表述的有限维类比。这一变分原理给出了运动方程

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{D}}-\dfrac{\partial L}{\partial D}=F^*\\ \dot{\varrho}_k=\displaystyle\sum_\ell Q_{k\ell}\\ \dfrac{\partial L}{\partial S}\dot{S}=-\displaystyle\sum_{k,\ell}Q_{k\ell}\frac{\partial L}{\partial\varrho_k}=\sum_{k<\ell}Q_{k\ell}\left(\frac{\partial L}{\partial\varrho_\ell}-\frac{\partial L}{\partial\varrho_k}\right),\end{cases} \tag{102}$$

以及条件 $-\frac{\partial L}{\partial \varrho_k} = \dot{W}^k$。对于由 $E_{\mathrm{tot}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{D}}\dot{D} - L$ 定义的一般拉格朗日量，总能量守恒可表示为

$$\frac{d}{dt}E_{\mathrm{tot}} = F^*\dot{D}\,. \tag{103}$$

对于标准连续介质理论，可得到如下形式的有限维拉格朗日量

$$L(D,\dot{D},\varrho_k,S) = \frac{1}{2}M\varrho\dot{D}^2 - E(D,\varrho_k,S)\,, \tag{104}$$

对于 $M>0$ 和 $\varrho = \sum_k \varrho_k$，而对于前文讨论的准静态近似，可取 $L(D,\dot{D},\varrho_k,S) = -E(D,\varrho_k,S)$。

**离散空间表示**。从材料坐标表示转换为空间坐标表示时，我们将密度乘以 $1/(D+1)$，而标量则不经改变地转换到空间坐标系中：

$$\begin{aligned} &s = \frac{S}{D+1}\,, \qquad \rho_k = \frac{\varrho_k}{D+1}\,, \qquad q_{k\ell} = \frac{Q_{k\ell}}{D+1}\,, \\ &F^* = F(D+1)\,, \quad w^k = W^k\,. \end{aligned} \tag{105}$$

这些关系由密度的关系 $s(t,x) = S(t,\varphi^{-1}(t,x))J\varphi^{-1}(t,x)$ 以及标量函数的关系 $w^k(t,x) = W^k(t,\varphi^{-1}(t,x))$ 得出；这里考虑线性变形 $\varphi(t,X) = (D(t)+1)X$，且当 $S(t,X) = S(t)$ 和 $W^k(t,X) = W^k(t)$ 时。

相应地，材料坐标系和空间坐标系中的密度时间变化率之间存在以下关系

$$\frac{d}{dt}\varrho_k = (D+1)\bar{D}_t\rho_k\,, \quad \frac{d}{dt}S = (D+1)\bar{D}_t s$$

以及对于标量

$$\frac{d}{dt}W^k = \frac{d}{dt}w^k =: D_t w^k\,,$$

其中

$$D_t = \partial_t \quad \text{and} \quad \bar{D}_t = \partial_t + A_s \quad \text{with} \quad A_s = \frac{\dot{D}}{D+1}$$

它们是标量函数和密度的拉格朗日时间导数的有限维形式，见式（23）。

通过对变分原理 (100) 进行变量变换，我们得到

$$\delta\int_0^T (D+1)\left[\ell(D,\dot{D},\rho_k,s) + \rho_k D_t w^k\right]\mathrm{d}t + \int_0^T (D+1)F\delta D\,\mathrm{d}t = 0 \tag{106}$$

具有唯象约束和变分约束

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial s}\bar{D}_t s &= \sum_{k,\ell} q_{k\ell} D_t w^k \\ \frac{\partial \ell}{\partial s}\bar{D}_\delta s &= \sum_{k,\ell} q_{k\ell} D_\delta w^k, \end{aligned} \tag{107}$$

其中，我们通过以下方式将空间坐标系中的拉格朗日量 $\ell$ 定义为物质拉格朗日量$L$

$$L(D,\dot{D},\varrho_k,S)=(D+1)\ell\big(D,\dot{D},\varrho_k/(D+1),S/(D+1)\big). \tag{108}$$

请注意，变分表述 (106)–(107) 显然是 (70)–(71) 的有限维版本。同样需要指出的是，在离散情形下，当所有材料块体被视为一个单一实体时，力 $F$ 可以理解为施加于整个材料上的空间均匀力，也可以理解为施加于边界上的力。提醒读者注意，在上一节中，力 $F$ 施加于拉伸状态下杆的边界上。

应用原理 (106)–(107) 得到运动方程

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\ell}{\partial\dot{D}}-\dfrac{\partial\ell}{\partial D}=\dfrac{1}{D+1}\Big(-\dfrac{\partial\ell}{\partial\dot{D}}\dot{D}-\dfrac{\partial\ell}{\partial s}s-\sum\limits_k\dfrac{\partial\ell}{\partial\rho_k}\rho_k+\ell\Big)+F \\ -\dfrac{\partial\ell}{\partial s}\bar{D}_t s=\sum\limits_{k,\ell}q_{k\ell}\dfrac{\partial\ell}{\partial\rho_k} \\ \bar{D}_t\rho_k=\sum\limits_\ell q_{k\ell}\,, \end{cases} \tag{109}$$

以及条件 $-\frac{\partial\ell}{\partial\rho_k}=D_t w^k$。系统 (109) 在空间坐标系中的总能量 $\epsilon_{\rm tot}=\frac{\partial\ell}{\partial\dot{D}}\dot{D}-\ell$平衡为

$$\bar{D}_t\epsilon_{\rm tot}=F\dot{D}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d}{dt}\left(\epsilon_{\rm tot}(D+1)\right)=(D+1)F\dot{D}\,, \tag{110}$$

根据关系式 (108)，这确实等价于物质坐标系中的能量平衡 (103)，其中 $F=F^*/(D+1)$。

第5节研究的准静态情形对应于拉格朗日量

$$\ell(D,\dot{D},\rho_k,s)=-\epsilon(D,\rho_s,s)=-\frac{\varrho_0}{D+1}e_t\left(\frac{s(D+1)}{\varrho_0}\right)-\rho_s e_{\rm el}(b)\,,$$

见式（76），此时系统（109）还原为式（84）。

# 7 结论

本文提出了一种适用于多孔介质的通用且热力学一致的变分理论，该理论允许固体基质在应力作用下发生破碎。我们的理论扩展了连续损伤力学，并明确揭示了损伤参数的物理含义：它表示破碎材料的密度。在我们的理论中，损伤源于弹性基质组分的不可逆破坏，而剩余弹性组分的微观性质在整个过程中保持不变。这种方法免去了建立弹性系数随损伤参数变化的唯象理论的必要。我们还推导了固体基质断裂速率的热力学一致表达式，以及满足热力学第二定律的一般材料的摩擦力和应力表达式。变分表述所得方程的形式在寻找此类热力学一致表达式的过程中

发挥了关键作用。随后，我们研究了模型的简化单速度版本，同时保证其热力学一致性，并据此推导出用于分析基质破碎的常微分方程精确约化形式。最后，我们提出了一种通用变分方法，用于推导此类热力学一致的多组分降阶模型。

在后续工作中，我们计划继续这一过程，针对不同的几何形状以及材料弹性和热能的不同表达式，为方程（41）求出特定的解析解和数值解。尤其值得关注的是，材料某一点的流体压力突然升高后，损伤如何继续在体材料中传播，这与 [15] 中所做的研究相同。此外，由于我们的理论采用变分形式，因此适合用于构造变分积分器，以开展损伤动力学的长期模拟 [61–65]。

# 致谢

我们感谢 D. D. Holm 教授、D. V. Zenkov 教授以及 C. Eldred 博士和 A. Lokhov 博士所进行的富有成效的讨论，这些讨论阐明了我们理论的适用性以及损伤力学理论的发展程度。VP 的部分研究经费由 NSERC Discovery 资助项目 2023-03590 提供。

# 参考文献

[1] Kachanov, L.：《连续损伤力学导论》，第10卷。施普林格（1986）[2] Lemaitre, J.：《损伤力学教程》。施普林格（2012）[3] Kachanov, M.：含有大量裂纹的弹性固体及相关问题。《应用力学进展》**30**，259–445（1993）[4] Homand-Etienne, F., Hoxha, D., Shao, J.-F.：脆性岩石的连续损伤本构定律。《计算机与岩土工程》**22**（2），135–151（1998）[5] Placidi, L., dell'Isola, F., Ianiro, N., Sciarra, G.：预应力固体–流体混合物理论的变分表述及其在波动现象中的应用。欧洲力学杂志 A/固体 **27**（4），582–606（2008）[6] Placidi, L., Misra, A., Barchiesi, E.：二维应变梯度损伤建模：一种变分方法。应用数学与物理杂志 **69**，1–19（2018）[7] Placidi, L., Barchiesi, E., Misra, A.：损伤的应变梯度变分方法：与损伤梯度模型的比较及数值结果。复杂系统数学与力学 **6**（2），77–100（2018）[8] Placidi, L., Barchiesi, E., Misra, A., Andreaus, U.：连续损伤与断裂力学中的变分方法。《连续介质力学百科全书》，2634–2643（2020）

[9] Abali, B.E., Klunker, A., Barchiesi, E., Placidi：一种结合了作用量形式主义与历史变量的梯度超材料脆性损伤力学新型相场方法。Wiley Online Library（2021）[10] Hamiel, Y., Lyakhovsky, V., Agnon, A.：孔弹性介质中损伤与孔隙率的耦合演化：理论及其在多孔岩石变形中的应用。Geophysical Journal International **156**（3），701–713（2004）[11] Lyakhovsky, V., Hamiel, Y.：孔弹性岩石中的损伤演化与流体流动。Izvestiya, Physics of the Solid Earth **43**（1），13–23（2007）[12] Gastaldi, D., Sassi, V., Petrini, L., Vedani, M., Trasatti, S., Migliavacca, F.：可生物吸收镁合金器件的连续体损伤模型——在冠状动脉支架中的应用。Journal of the mechanical behavior of biomedical materials**4**（3），352–365（2011）[13] Jeffers, J.R., Browne, M., Taylor, M.：真空混合骨水泥的损伤累积、疲劳与蠕变行为。Biomaterials **26**（27），5532–5541（2005）[14] Baˇzant, Z.P., Jir´asek, M.：塑性与损伤的非局部积分形式：进展综述。Journal of engineering mechanics **128**（11），1119–1149（2002）[15] Mobasher, M.E., Berger-Vergiat, L., Waisman, H.：多孔介质中输运与损伤的非局部表述。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **324**，654–688（2017）[16] Biot, M.A.：三维固结的一般理论。Journal of applied physics **12**（2），155–164（1941）[17] Bucchi, A., De Tommasi, D., Puglisi, G., Saccomandi, G.：损伤作为一种材料相变。Journal of Elasticity（2023）[18] Gay-Balmaz, F., Putkaradze, V.：多孔介质热力学的变分几何方法。ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/应用数学与力学杂志 **102**（11），202100198（2022）[19] Farkhutdinov, T., Gay-Balmaz, F., Putkaradze, V.：充满不可压缩流体的多孔介质动力学的几何变分方法。Acta Mechanica **231**，3897–3924（2020）[20] Farkhutdinov, T., Gay-Balmaz, F., Putkaradze, V.：不可压缩流体中的主动变形多孔介质：一种变分方法。Physica D，即将发表（2020）[21] Boer, R.：多孔介质理论的当代进展。Applied Mechanics Reviews（2000）[22] De Boer, R.：《多孔介质连续体力学的发展趋势》，第18卷。施普林格（2005）[23] Coussy, O.：《多孔连续体力学》。Wiley（1995）

[24] De Boer, R.：《多孔介质理论：历史发展与当前状态的重点》。施普林格（2012）[25] Bedford, A., Drumheller, D.S.：多孔介质的变分理论。《国际固体与结构杂志》**15**(12)，967–980（1979）[26] Aulisa, E., Cakmak, A., Ibragimov, A., Solynin, A.：多孔介质中非线性流体动力相互作用的变分原理与稳态不变量。《连续、离散与脉冲系统动力学》（A辑）（2007）[27] Aulisa, E., Ibragimov, A., Toda, M.：多孔介质中非线性流动建模的几何框架及其在工程中的应用。《非线性分析：现实世界应用》**11**(3)，1734–1751（2010）[28] Lopatnikov, S.L., Cheng, A.H.-D.：具有孔隙率动力学的孔隙弹性宏观拉格朗日表述。《固体力学与物理学杂志》**52**(12)，2801–2839（2004）[29] Lopatnikov, S.L., Gillespie, J.W.：孔隙弹性 I：流体饱和多孔材料力学的控制方程。《多孔介质传输》**84**(2)，471–492（2010）[30] dell'Isola, F., Guarascio, M., Hutter, K.：饱和多孔固体变形的变分方法：推广太沙基有效应力原理的二阶梯度理论。《应用力学档案》**70**(5)，323–337（2000）[31] Sciarra, G., dell'Isola, F., Ianiro, N., Madeo, A.：二阶梯度孔隙弹性的变分推导 I：一般理论。《材料与结构力学杂志》**3**(3)，507–526（2008）[32] Sciarra, G., dell'Isola, F., Ianiro, N., Sciarra, G.：二阶梯度孔隙弹性的变分推导 II：在固结问题中的应用。《材料与结构力学杂志》**3**(4)，607–625（2008）[33] dell'Isola, F., Madeo, A., Seppecher, P.：多孔介质流体可渗透界面处的边界条件：一种变分方法。《国际固体与结构杂志》**46**(17)，3150–3164（2009）[34] Serpieri, R., Rosati, L.：开孔双相介质动力响应的有限变形模型表述。《固体力学与物理学杂志》**59**(4)，841–862（2011）[35] Serpieri, R., Travascio, F., Asfour, S., Rosati, L.：饱和多孔介质中应力分配定律的变分一致推导。《国际固体与结构杂志》**56**，235–247（2015）[36] Serpieri, R., Travascio, F.：通过纯宏观且纯变分的方法对不排水双相多孔介质中的应力分配与边界条件进行一般定量分析。《连续介质力学与热力学》**28**(1-2)，235–261（2016）

[37] Auffray, N., dell'Isola, F., Eremeyev, V.A., Madeo, A., Rosi, G.：基于 Hamilton–Piola 最小作用原理的二阶梯度连续体与毛细流体分析连续介质力学 、《固体数学与力学》**20(4)**，375–417（2015）[38] Serpieri, R., Della Corte, A., Travascio, F., Rosati, L.：两相连续介质孔隙弹性混合物的变分理论：简要综述。载于：《广义连续体：经典与先进材料的模型》，第377–394页。施普林格（2016）[39] Travascio, F., Asfour, S., Serpieri, R., Rosati, L.：通过宏观变分连续介质方法分析可压缩多孔介质的固结问题。《固体数学与力学》**22(5)**，952–968（2017）[40] Serpieri, R., Travascio, F.：《变分连续介质多相孔弹性》。施普林格（2017）[41] Arnold, V.：无限维李群的微分几何及其在理想流体流体动力学中的应用。《傅里叶研究所年刊》**16**，319–361（1966）[42] Brinkman, H.C.：流动流体对致密粒子群施加的黏性力计算。《流动、湍流与燃烧》**1(1)**，27–34（1949）[43] Brinkman, H.C.：关于由紧密堆积的多孔颗粒组成的介质的渗透率。《流动、湍流与燃烧》**1(1)**，81–86（1949）[44] Kannan, K., Rajagopal, K.R.：高压梯度引起的多孔介质流动。《应用数学与计算》**199(2)**，748–759（2008）[45] Srinivasan, S., Rajagopal, K.R.：为推导多孔介质流动的 Darcy、Forchheimer 和 Brinkman 模型及其推广形式提供热力学基础。《国际非线性力学杂志》**58**，162–166（2014）[46] Weymouth, G.D., Yue, D.K.-P.：笛卡尔网格上自由表面模拟的守恒型流体体积法。《计算物理学杂志》**229(8)**，2853–2865（2010）[47]Gay-Balmaz, F., Yoshi mura, H.：非平衡热力学的拉格朗日变分表述。第一部分：离散系统。《几何与物理学杂志》**111**，169–193（2017）[48]Gay-Balmaz, F., Yoshimura, H.：非平衡热力学的拉格朗日变分表述。第二部分：连续系统。《几何与物理学杂志》**111**，194–212（2017）[49] Gay-Balmaz, F., Yoshimura, H.：从拉格朗日力学到非平衡热力学：一种变分视角。《熵》**21** （2019）[50] Marsden, J.E., Hughes, T.J.R.：《弹性力学的数学基础》。Courier Corporation（1994）

[51] Gay-Balmaz, F., Marsden, J.E., Ratiu, T.S.：自由边界连续介质力学中的约化变分表述。非线性科学杂志 **22**(4), 463–497 (2012)[52] Gay-Balmaz, F.：具有降雨过程的湿大气非平衡热力学及其伪不可压缩近似的变分推导。地球物理与天体物理流体动力学 **113**, 428–465 (2019)[53] Brinkman, H.C.：浓悬浮液和溶液的黏度。化学物理学杂志 **20**(4), 571–571 (1952)[54] Atkin, R.J., Craine, R.E.：混合物连续介质理论：基础理论与历史发展。《力学与应用数学季刊》**29**(2), 209–244 (1976)[55] Ogden, R.W.：大变形各向同性弹性——关于不可压橡胶类固体理论与实验的相关性。伦敦皇家学会会刊。A辑：数学与物理科学 **326**(1567), 565–584 (1972)[56] Mihai, L.A., Chin, L., Janmey, P.A., Goriely, A.：适用于脑组织和脂肪组织的超弹性本构模型比较。皇家学会界面杂志 **12**(110), 20150486 (2015)[57] Mihai, L.A., Budday, S., Holzapfel, G.A., Kuhl, E., Goriely, A.：一类人脑组织超弹性模型。《固体力学与物理学杂志》**106**, 60–79 (2017)[58] Rhodes, M.E., Hillen, T., Putkaradze, V.：比较线性弹性与单项Ogden弹性在胶质母细胞瘤侵袭模型中的影响。脑多物理学**3**, 100050 (2022)[59] Murphy, B.P., Prendergast, P.J.：丙烯酸骨水泥疲劳强度的大小及其变异性。国际疲劳杂志 **22**(10), 855–864 (2000)[60] Weibull, W.：一种适用范围广泛的统计分布函数。应用力学杂志 (1951)[61] Bauer, W., Gay-Balmaz, F.：非弹性流与伪不可压缩流的变分积分器。几何力学杂志 **11**(4), 511–537 (2019)[62] Eldred, C., Bauer, W.：利用分裂外微积分表述地球物理流体的变分形式与哈密顿表述。HAL-INRIA 预印本 (2018)[63] Brecht, R., Bauer, W., Bihlo, A., Gay-Balmaz, F., MacLachlan, S.：球面旋转浅水方程的变分积分器。英国皇家气象学会季刊 **145**(720), 1070–1088 (2019)[64] Gawlik, E.S., Gay-Balmaz, F.：可压缩流的变分有限元离散。Found. Comput. Math. **21**, 961–1001 (2020)

[65] Gawlik, E.S., Gay-Balmaz, F.：黏性导热流体的变分且热力学一致的有限元离散。arXiv:2211.08745 (2023年)

[66]de Groot, S.R., Mazur, P.：《非平衡热力学》，North-Holland（1969）

# A 热质传递系数涉及交叉现象的另一种表达式

这里，我们根据熵产生方程（48）的形式，描述可逆过程中可能出现的交叉效应。

关于质量和热传递，对于 $k=s,\ \ell=b$，可能出现交叉效应，同时仍满足（56）；这些效应是塞贝克效应和杜福尔效应的离散类比。因此，我们可以考虑

$$\begin{bmatrix} J_{sb}\frac{T_s-T_b}{T_sT_b} \\ q_{sb} \end{bmatrix} = \mathcal{L}_{sb}\begin{bmatrix} T_b-T_s \\ \frac{1}{T_s}\big(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_s|^2-g_s\big)-\frac{1}{T_b}\big(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_b|^2-g_b\big) \end{bmatrix} \tag{111}$$

其中 $2\times 2$ 矩阵 $\mathcal{L}_{sb}$ 的对称部分为正，且 $J_{sf}$ 和 $J_{bf}$ 满足（57），或等价地满足（59）。值得注意的是，质量和热传递系数的条件（60）和（111）似乎是新的，在以往关于该主题的文献中尚未出现。另一方面，由于 $q_{sb}$ 在物理上可解释为弹性基质损伤的速率，这些方程确实在某些方面类似于以往文献中用于描述损伤参数演化的唯象方程，参见例如 [11]。其中所述的传递速率方程 $q$，用我们的记号表示，将是内压力 $p$ 的仿射函数。我们的表达式包含这些压力项，同时还涉及与弹性能有关的其他项，如下文所示。

除了与质量和热传递相关的标量过程之间的交叉现象外，还可以假设存在另一种交叉效应，其数学形式类似于体积黏度与化学之间的交叉现象，参见 [66]。忽略摩擦力，并假设应力 $\boldsymbol{\sigma}_{k\ell}$ 为对称的，我们可以将熵产生表达式 (48) 改写为

$$\begin{aligned}\sum_{k<\ell}\Bigg[&\boldsymbol{\sigma}^{\circ}_{k\ell}:\Big(\frac{\mathbb{F}^{\circ}_k}{T_k}-\frac{\mathbb{F}^{\circ}_\ell}{T_\ell}\Big)+\frac{1}{3}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_{k\ell})\Big(\frac{\operatorname{div}\mathbf{u}_k}{T_k}-\frac{\operatorname{div}\mathbf{u}_\ell}{T_\ell}\Big)\\&+q_{k\ell}\Big(\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_k|^2-g_k}{T_k}-\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_\ell|^2-g_\ell}{T_\ell}\Big)+J_{k\ell}\Big(\frac{1}{T_\ell}-\frac{1}{T_k}\Big)(T_\ell-T_k)\Bigg].\end{aligned}$$

因此，自然而然地可以假设标量过程具有以下交叉效应：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_{k\ell}) \\ q_{k\ell} \\ J_{k\ell}\frac{T_k-T_\ell}{T_kT_\ell} \end{bmatrix} = \mathcal{L}_{k\ell}\begin{bmatrix} \frac{1}{T_k}\operatorname{div}\mathbf{u}_k-\frac{1}{T_\ell}\operatorname{div}\mathbf{u}_\ell \\ \frac{1}{T_k}(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_k|^2-g_k)-\frac{1}{T_\ell}(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_\ell|^2-g_\ell) \\ T_\ell-T_k \end{bmatrix}, \tag{112}$$

根据第二定律， $3 \times 3$ 矩阵 $\mathcal{L}_{k\ell}$ 的对称部分必须为正。我们不打算考虑涉及交叉效应的更一般条件（111）和（112），而只关注较为简单的条件（58），因为该条件可导出最简单、能够进行解析处理的数学表达式。尽管与（111）和（112）相比，表达式（58）在数学上相对简单，但它们仍能导出具有物理意义的系统，并给出物理上有效的定量预测。