arXiv:2305.03985v1 [cs.CG] 6 May 2023

重新探讨最小成员数几何集合覆盖

Sayan Bandyapadhyay* William Lochet† Saket Saurabh‡ Jie Xue §

摘要

我们重新探讨几何集合覆盖问题的一种自然变体，称为最小成员数几何集合覆盖 （MMGSC）。该问题的输入包括一组 S 点和一组 $\mathcal{R}$ 几何对象，目标是找到一个子集 $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$，覆盖 S 中的所有点，同时使 S 相对于 $\mathcal{R}^*$的隶属度 最小，记作 memb($S, \mathcal{R}^*$)；其中 memb(S, $\mathcal{R}^*$) $= \max_{p\in S} |\{R \in \mathcal{R}^* : p \in R\}|$。我们首次为 MMGSC 给出了 $\mathbb{R}^2$上的多项式时间近似算法。具体而言，我们取得了以下两项主要成果。

- 我们首次为单位正方形情形下的 MMGSC 给出了多项式时间常数近似算法。这回答了自 Erlebach 和 Leeuwen[在 SODA'08], 上的工作以来一直悬而未决的问题：他们给出了一种常数近似算法，其运行时间为 $n^{O(\text{最优值})}$，其中 opt 是该问题的最优值（即最小隶属度）。
- 我们给出了针对使用半平面的 MMGSC 的首个多项式时间近似方案（PTAS）。在此之前，甚至无人知晓该问题能否在多项式时间内以 $o(\log n)$ 的近似因子求解，而众所周知，使用半平面的最小规模集合覆盖问题可以在多项式时间内求解。

我们还研究了一个与 MMGSC 密切相关的问题，称为最小层数几何集合覆盖（MPGSC）。该问题旨在找到 $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$，以覆盖 S，同时使 $\mathcal{R}^*$ 的层数 最小；其中，层数定义为 $\mathcal{R}^*$ 中具有非空公共交集的对象的最大数量。最近，Durocher 等人给出了首个针对使用单位正方形的 MPGSC 的常数近似算法，其运行时间为 $O(n^{12})$。我们给出了一种显著简单得多、运行时间近线性的常数近似算法。

1 引言

几何集合覆盖是计算几何中最基本的问题之一 [2, 3, 5,7, 9, 15]。在该问题的原始设定中，给定一个点集 S 和一个几何对象集 $\mathcal{R}$，我们的目标是使用 S 中数量尽可能少的对象覆盖 $\mathcal{R}$中的所有点。受各种应用的启发，文献中还研究了几种几何集合覆盖问题的变体。本文研究一种自然的几何集合覆盖问题变体，称为最小成员数几何集合覆盖 （MMGSC）。

在 MMGSC 问题中，输入还包括一个 S 点集和一个 $\mathcal{R}$ 几何对象集。与几何集合覆盖问题类似，我们的目标仍然是使用 $\mathcal{R}$中的对象覆盖 S 中的所有点。然而，我们并不关心所使用的几何对象数量。相反，我们希望保证 S 中的任意点都不会被"过度覆盖"。更准确地说，目标是找到一个 $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$，覆盖 S 中的所有点，使得 S 相对于 $\mathcal{R}^*$的隶属度（记作 memb(S, $\mathcal{R}^*$)）最小，其中 memb(S, $\mathcal{R}^*$) $= \max_{p\in S} |\{R \in \mathcal{R}^* : p \in R\}|$。

*波特兰州立大学，美国，sayan.bandyapadhyay@gmail.com。
†LIRMM，蒙彼利埃大学，法国国家科学研究中心，法国蒙彼利埃，william.lochet@gmail.com。
‡印度钦奈数学科学研究所，saket@imsc.res.in。§纽约大学上海分校，中国，jiexue@nyu.edu。

Kuhn 等人 [13]，受蜂窝网络应用的启发，引入了 MMGSC 问题的非几何版本，即最小成员数集合覆盖（MMSC）。也就是说，S 是一个任意的全集，其中包含 n 个元素，而 $\mathcal{R}$ 是由 S的子集组成的集合。他们证明，MMSC 问题存在一个 $O(\log n)$ 近似算法，其中 $n = |S|$。此外，他们还通过证明以下结果补充了上界结果：除非 P=NP，否则该问题无法在多项式时间内以小于 $\ln n$的比率进行近似。Erlebach 和 van Leeuwen [11], 在其关于几何覆盖问题的开创性工作中，从近似算法的角度研究了 MMSC 的几何版本，即 MMGSC。他们证明，在单位圆盘和单位正方形上，以小于 2 的比率近似该问题是 NP-困难的；并且在最优目标值有常数上界的条件下，为单位正方形给出了一个 5-近似算法。更准确地说，他们的算法运行时间为 $n^{O(\mathsf{opt})}$，其中opt 是该问题的最优值（即最小成员数）。MMGSC 在单位正方形上的情形是否存在（真正的）多项式时间常数近似算法，至今仍是一个悬而未决的问题。

作为我们的首个结果，我们通过给出一个针对单位正方形 MMGSC 的多项式时间算法解决了这一开放问题，该算法可达到常数近似比。事实上，我们的算法适用于该问题的广义版本：在该版本中，待覆盖的点集可以不同于用于计算隶属度的点集。

定义 1.1 (广义 MMGSC)。 在广义最小成员几何集合覆盖（*MMGSC*）问题中，输入包含两个由实数集中的点构成的集合 S, S'，以及一个由实数集中的几何对象构成的集合 $\mathcal{R}$，目标是找到一个子集 $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$，使其覆盖 S 中的所有点，并使 隶属度$(S', \mathcal{R}^*)$ 最小。我们将问题实例$(S, S', \mathcal{R})$的最优值记为 最优值$(S, S', \mathcal{R})$，即 最优值$(S, S', \mathcal{R})$ $=$ 隶属度$(S', \mathcal{R}^*)$，其中 $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$ 是一个最优解。

定理 1.2。 对于单位正方形，广义 *MMGSC* 问题存在多项式时间常数近似算法。

我们的第二个结果是针对半平面 MMGSC 的多项式时间近似方案（PTAS）。在此项工作之前，甚至尚不清楚该问题能否在多项式时间内以 $o(\log n)$ 的因子进行近似，而半平面的最小规模集合覆盖问题则可在多项式时间内求解。同样，我们的多项式时间近似方案适用于广义版本。

定理 1.3。 对于半平面，广义 *MMGSC* 问题存在多项式时间近似方案。

MMGSC 的广义版本很有趣，因为它还推广了文献中研究的另一个密切相关的问题，称为 最小层数几何集合覆盖 （MPGSC）。MPGSC 问题由 Biedl、Biniaz 和 Lubiw 提出 [4]，作为 MMGSC 的一种变体。他们指出，在某些应用中，例如蜂窝网络中的干扰降低，我们希望最小化平面中每个点的隶属度，而不仅仅是 S 的点。因此，在 MPGSC 中，目标是找到 $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$ 以覆盖 S，使得层数 $\mathcal{R}^*$ 最小化，其中层数定义为 $\mathcal{R}^*$ 中具有非空公共交集的对象的最大数量。注意，MPGSC 是广义 MMGSC 的特例（令 S' 包含由 $\mathcal{R}$所诱导的排列中每个面的一个点即可）。因此，定理1.2 和1.3 均适用于 MPGSC。

在我们的工作之前，Biedl、Biniaz 和 Lubiw [4] 证明了，对于由轴平行单位正方形构成的集合，求解 MPGSC 是 NP-困难的；他们还针对最优值（即最小层数）为常数的实例，给出了多项式时间 2-近似算法。最近，Durocher、Keil 和 Mondal [10] 为单位正方形的 MPGSC 提出了首个常数近似算法，其运行时间为 $O(n^{12})$ 时间。该算法无法推广至其他相关情形，例如尺寸相近的正方形或单位圆盘。我们从定理1.2 推导出的算法已经高效得多

比 [10] 中的算法（该算法同样无法推广至尺寸相近的正方形或单位圆盘）更高效。不过，我们注意到，仅对于单位正方形的 MPGSC，存在一种非常简单的常数-$\tilde{}$ $\tilde{}$近似算法，其运行时间为 $O(n)$ 时间；其中 O 隐藏了对数因子。这种简单算法可直接推广到任意大小相近的胖对象，前提是其最小规模集合覆盖问题可在多项式时间内求得常数近似解。因此，我们得到以下结果。

定理 1.4。 对于单位（或大小相近的）正方形/圆盘，*MPGSC* 问题存在常数因子近似算法，运行时间为 $O(n)$。

我们所有结果中共同的一个要素，是建立 MMGSC（或 MPGSC）与标准最小规模几何集合覆盖之间的联系。我们表明，在某些情况下，最小规模集合覆盖（满足特定条件）可以在 MMGSC 意义下实现良好的近似。这揭示了几何集合覆盖问题不同变体之间的内在关系，或许具有独立的研究价值。

其他相关工作。 最近，Mitchell 和 Pandit [14]证明，具有与一条水平线相交的矩形或锚定在两条水平线上的矩形的 MMGSC 问题是 NP-困难的（同时还给出了其他算法和计算复杂性方面的结果）。

组织结构。 本文其余部分的组织结构如下。在第 2 节中，我们介绍带有单位正方形的 MMGSC 问题的结果。在第 3 节中，我们介绍带有半平面的 MMGSC 问题的结果。关于 MPGSC 的结果将在第 4 节中给出。最后，在第 5 节中，我们总结本文，并提出一些有待未来研究的开放问题。

2 单位正方形的常数近似

设 S, S' 是实数集 $\mathbb{R}^2$ 中的两组点， $\mathcal{Q}$ 是一组（与坐标轴平行的）单位正方形。我们希望求解广义 MMGSC 实例 $(S, S', \mathcal{Q})$。

2.1 将 S 限制在一个网格单元内

首先，我们构造一个网格 Γ，它由边长为 1 的正方形网格单元组成。对于每个网格单元 $\square$，记 $S_\square = S \cap \square$ 和 $\mathcal{Q}_\square = \{Q \in \mathcal{Q} : Q \cap \square \neq \emptyset\}$。

引理 2.1。 假设对于每个 $\square \in \Gamma$， $\mathcal{Q}^*_\square \subseteq \mathcal{Q}_\square$ 都是广义 *MMGSC* 实例 $(S_\square, S', \mathcal{Q}_\square)$ 的一个 c-近似解。那么， $\bigcup_{\square\in\Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$ 是实例 $(S, S', \mathcal{Q})$ 的一个 $O(c)$-近似解。

证明。注意， $\bigcup_{\square\in\Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$ 是 S的一个集合覆盖，因为任意点 $p \in S$ 都包含在某个网格单元$\square$ 中，因此 $\mathcal{Q}^*_\square$ 覆盖了 p。接下来我们证明，对于任意点 $p' \in S'$， $\bigcup_{\square\in\Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$ 中包含 p' 的单位正方形数量至多为 $9c\cdot\mathrm{opt}(S, S', \mathcal{Q})$。假设包含 p' 的网格单元为 $\square'$。注意，只有当网格单元 $\square$ 满足 $Q \in \mathcal{Q}^*_\square$ 时，单位正方形$Q \in \bigcup_{\square\in\Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$ 才包含 p' ；该网格单元要么是 $\square'$ ，要么是 $\square'$周围的 8 个网格单元之一。对于每个这样的网格单元 $\square$， $\mathcal{Q}^*_\square$ 中包含p' 的单位正方形数量至多为 $c \cdot \mathrm{opt}(S_\square, S', \mathcal{Q}_\square)$，因为 $\mathcal{Q}^*_\square$ 是$(S_\square, S', \mathcal{Q}_\square)$的一个 c-近似解。显然，$\mathrm{opt}(S_\square, S', \mathcal{Q}_\square) \leq \mathrm{opt}(S, S', \mathcal{Q})$。因此， $\bigcup_{\square\in\Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$中包含 p' 的单位正方形至多有 $9c \cdot \mathrm{opt}(S, S', \mathcal{Q})$个，这意味着 $\bigcup_{\square\in\Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$ 是$(S, S', \mathcal{Q})$的一个 $9c$-近似解。 $\square$

2.2 使用线性规划划分实例

基于前面的讨论，我们现在假设 S 包含在网格单元 $\square$ 中，且 $\mathcal{Q}$ 中的所有单位正方形都与 $\square$相交。注意， S' 中的点可以位于平面上的任意位置。我们将为广义 MMGSC 实例$(S, S', \mathcal{Q})$构造一个线性规划松弛。为此，我们先引入分数集合覆盖的概念。点集 A 的一个分数集合覆盖，是一组数值 $\{x_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ ，这些数值属于 $[0,1]$ ，并由一组几何范围 $\mathcal{B}$ 索引，满足$\sum_{B\in\mathcal{B},a\in B} x_B \geq 1$ ，对所有 $a \in A$均成立。对于另一个点集 A' ，我们可以定义 A'相对于该分数集合覆盖 $\{x_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ 的隶属度为 $\mathsf{memb}(A', \{x_B\}_{B\in\mathcal{B}}) = \max_{a'\in A'} \sum_{B\in\mathcal{B},a'\in B} x_B$。实例$(S, S', \mathcal{Q})$的线性规划松弛，要求使用 $\mathcal{Q}$ 中的单位正方形对 S进行分数集合覆盖，并使 S' 相对于该覆盖的隶属度最小。具体而言，我们为每个单位正方形 $Q \in \mathcal{Q}$创建一个变量x_Q。此外，我们还创建另一个变量 y，表示 S 相对于 $\{x_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$的隶属度上界。我们考虑以下线性规划。

$$
\begin{aligned}
& \min \ y \\
\text{s.t.} \quad & 0 \leq x_Q \leq 1 \text{ for all } Q \in \mathcal{Q}, \\
& \textstyle\sum_{Q\in\mathcal{Q},p\in Q} x_Q \geq 1 \text{ for all } p \in S, \\
& \textstyle\sum_{Q\in\mathcal{Q},p'\in Q} x_Q \leq y \text{ for all } p' \in S'.
\end{aligned}
$$

我们使用多项式时间线性规划求解器，计算上述线性规划的最优解（$\{x^*_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$， y^*）。关于该解，我们有如下观察。

事实 2.2. $y^* \leq$最优$(S,\ S',\ \mathcal{Q})$。

证明。令 $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}$为一个最优解。我们有 $S \subseteq \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}^*}$，且 $\mathsf{memb}(S',\ \mathcal{Q}^*) = \mathsf{opt}(S,\ S',\ \mathcal{Q})$。令 $x_Q = 1$ 表示 $Q \in \mathcal{Q}^*$， $X_Q = 0$ 表示 $Q \notin \mathcal{Q}^*$，并令 $y =$ 表示 $\mathsf{memb}(S',\ \mathcal{Q}^*)$。这些值满足线性规划约束。因此， $y^* \leq y = \mathsf{opt}(S,\ S',\ \mathcal{R})$。 $\square$

接下来，我们将根据线性规划解（$\{x^*_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$， y^*），把实例（S， S'， $\mathcal{Q}$）划分为四个子实例。回顾一下， S 中的所有点都位于网格单元 $\square$ 内，而$\mathcal{Q}$中的所有单位正方形都与 $\square$相交。令 c_1、 c_2、 c_3、 c_4为 $\square$的四个角。我们可以将 $\mathcal{Q}$划分为 $\mathcal{Q}_1$、 $\mathcal{Q}_2$、 $\mathcal{Q}_3$、 $\mathcal{Q}_4$，其中 $\mathcal{Q}_i$ 由包含 c_i 的单位正方形组成，对所有 $i \in \{1,2,3,4\}$均如此。此外，我们按以下方式将 S 划分为S_1、 S_2、 S_3、 S_4。对于一个点 $p \in \mathbb{R}^2$和 $i \in \{1,2,3,4\}$，将$\delta_{p,\ i}$定义为所有满足 $p \in Q$的 $Q \in \mathcal{Q}_i$对应的x^*_Q之和。然后，我们将每个点 $p \in S$分配给 S_i，其中 $i \in \{1,2,3,4\}$是使$\delta_{p,\ i}$最大的指标。注意以下事实。

事实 2.3。对于每个 $i \in \{1,2,3,4\}$，我们有 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}_i,\ p\in Q} x^*_Q \geq \frac{1}{4}$对于所有 $p \in S_i$均成立。

证明。由于线性规划的约束，我们有 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}_i,\ p\in Q} x^*_Q = \delta_{p,\ i}$以及 $\sum_{i=1}^{4} \delta_{p,\ i} = \sum_{Q\in\mathcal{Q},\ p\in Q} x^*_Q \geq 1$。此外，对于所有 $j \in \{1,2,3,4\}$， $\delta_{p,\ i} \geq \delta_{p,\ j}$ 均成立，因为 $p \in S_i$。因此，$\delta_{p,\ i} \geq \frac{1}{4}$。 $\square$

现在，我们将原始实例划分为 $(S_1,\ S',\ \mathcal{Q}_1)\ldots,(S_4,\ S',\ \mathcal{Q}_4)$。考虑一个指标 $i \in\{1,2,3,4\}$。如果我们对所有 $Q \in \mathcal{Q}_i$定义 $\tilde{x}^*_Q = 4x^*_Q$，那么上述事实意味着，对于所有 $p \in S_i$， $\sum_{Q\in\mathcal{Q}_i,\ p\in Q} \tilde{x}^*_Q \geq 1$。换言之， $\{\tilde{x}^*_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_i}$ 是 S_i的分数集合覆盖。注意，$\mathsf{memb}(S',\ \{\tilde{x}^*_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_i}) \leq 4y^*$，因为

$$
4y^* \geq \sum_{Q\in\mathcal{Q},p'\in Q} 4x^*_Q \geq \sum_{Q\in\mathcal{Q}_i,p'\in Q} \tilde{x}^*_Q
$$

对于所有 $p' \in S$，这是由线性规划的约束所决定的。有了这一观察，现在只需为每个实例 $(S_i,\ S',\ \mathcal{Q}_i)$ 计算一个解，即使相对于 也能达到常数因子近似。

分数解。这些解的并集是 $S = \bigcup_{i=1}^{4} S_i$ 的一个集合覆盖， S' 相对于它的隶属度为 $O(y^*)$。实例 $(S_i, S', \mathcal{Q}_i)$ 的一个良好性质是， $\mathcal{Q}_i$ 中的所有单位正方形都包含 $\square$ 的同一个角 c_i 。在下一节中，我们将展示如何为此类实例计算所需的近似解。

2.3 单角情形

现在考虑一个实例 $(S, S', \mathcal{Q})$，其中 S 中的所有点都位于网格单元 $\square$ 中，并且所有单位正方形都包含 $\square$ 的同一个角（例如左下角）。对于一个点 $p \in \mathbb{R}^2$，分别用 $x(p)$ 和 $y(p)$ 表示其 x 坐标和 y 坐标。此外，对于一个单位正方形 $Q \in \mathcal{Q}$，分别用 $x(Q)$ 和 $y(Q)$ 表示其右上角的 x 坐标和 y 坐标。我们做两个简单的观察。第一个观察表明，在这种情况下，最小规模集合覆盖问题的整数间隙等于 1。第二个观察给出了包含 $\square$ 同一个角的单位正方形的一条有用几何性质。

事实 2.4. 设 $S_0 \subseteq S$ 是一个子集，且 $\mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{Q}$ 是 S_0 的一个最小规模集合覆盖。对于 S_0 的任意分数集合覆盖 $\{\hat{x}_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ ，都有 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q \geq |\mathcal{Q}_0|$。

证明。为方便起见，对于点集 A 和范围集 $\mathcal{B}$，我们将 $\pi(A, \mathcal{B})$记作使用 $\mathcal{B}$中的范围覆盖 A 所需的最小集合覆盖大小。现在只需证明，对于 A 的任意分数集合覆盖 $\{x_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ S_0 $\lfloor \sum_{Q\in\mathcal{Q}} x_Q \rfloor$ $\lfloor \sum_{Q\in\mathcal{Q}} x_Q \rfloor = \hat{}$，都有 $S_0 = \emptyset$ $\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q \geq \pi(S_0, \mathcal{Q})$。我们对 $\hat{}$ 进行归纳。当 $\hat{}$ 时，必有 ，结论显然成立。假设当$\lfloor \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q \rfloor \leq k-1$时结论成立，考虑 $\lfloor \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q \rfloor = k$的情况。令 $p \in S_0$ 为 S_0中最右侧的点，即对于所有 $q \in S_0$，都有 $x(p) \geq x(q)$；令 $Q_p \in \mathcal{Q}$ 为包含 p 且使$y(Q_p)$最大的单位正方形。对于 $Q \in \mathcal{Q}$，我们定义

$$\hat{x}'_Q = \begin{cases} \hat{x}_Q & \text{if } p \notin Q, \\ 0 & \text{if } p \in Q \text{ and } Q \neq Q_p, \\ 1 & \text{if } Q = Q_p. \end{cases}$$

注意到 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}'_Q \leq \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q$。事实上，由于 $\{\hat{x}_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ 是 S_0的一个分数集合覆盖，我们有 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}, p\in Q} \hat{x}_Q \geq 1 = \sum_{Q\in\mathcal{Q}, p\in Q} \hat{x}'_Q$。此外，根据定义，$\sum_{Q\in\mathcal{Q}, p\notin Q} \hat{x}'_Q = \sum_{Q\in\mathcal{Q}, p\notin Q} \hat{x}_Q$ 。因此，$\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}'_Q \leq \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q$。由于 $\lfloor \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q \rfloor = k$，我们有 $\lfloor \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}'_Q \rfloor \leq k$ ，从而 $\lfloor \sum_{Q\in\mathcal{Q}\setminus\{Q_p\}} \hat{x}'_Q \rfloor \leq k-1$。此外，我们注意到 $\{\hat{x}'_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ 也是 S_0的一个分数集合覆盖。为此，考虑一个点 $q \in S_0$。我们有 $x(q) \leq x(p) \leq x(Q_p)$。若 $q \in Q_p$，则 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}, q\in Q} \hat{x}'_Q \geq 1$。假设 $q \notin Q_p$，这意味着 $y(q) > y(Q_p)$，因为 $x(q) \leq x(Q_p)$。根据 Q_p的选取，对于所有满足$p \in Q$的 $Q \in \mathcal{Q}$ ，我们有 $y(q) > y(Q)$，因此 $q \notin Q$。由此可得 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}, q\in Q} \hat{x}'_Q = \sum_{Q\in\mathcal{Q}, q\in Q} \hat{x}_Q \geq 1$。所以，$\{\hat{x}'_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ 是 S_0的一个分数集合覆盖。因此， $\{\hat{x}'_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}\setminus\{Q_p\}}$ 是 $S_0\setminus Q_p$的一个分数集合覆盖。利用 $\lfloor \sum_{Q\in\mathcal{Q}\setminus\{Q_p\}} \hat{x}'_Q \rfloor \leq k-1$ 这一事实以及归纳假设，我们有 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}\setminus\{Q_p\}} \hat{x}'_Q \geq \pi(S_0\setminus Q_p, \mathcal{Q}\setminus\{Q_p\})$。注意， $\pi(S_0\setminus Q_p, \mathcal{Q}\setminus\{Q_p\}) \geq \pi(S_0, \mathcal{Q}) - 1$，这仅仅是因为 $S_0\setminus Q_p$ 的一个集合覆盖与 Q_p 合在一起，就构成了 S_0的一个集合覆盖。因此， $\sum_{Q\in\mathcal{Q}\setminus\{Q_p\}} \hat{x}'_Q \geq \pi(S_0, \mathcal{Q}) - 1$ ，进而 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}'_Q \geq \pi(S_0, \mathcal{Q})$。由于 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}'_Q \leq \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q$，最终得到 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q \geq \pi(S_0, \mathcal{Q})$，证明完毕。 $\square$

事实 2.5. 设 Q^-、Q、Q^+ 是三个都包含 $\square$ 左下角的单位正方形，并且满足 $x(Q^-) \leq x(Q) \leq x(Q^+)$ 和 $y(Q^-) \geq y(Q) \geq y(Q^+)$。那么 $Q^- \cap Q^+ \subseteq Q$。

证明。令 $p \in Q^- \cap Q^+$。事实 $p \in Q^-$蕴含 $x(p) \leq x(Q^-)$ 和 $y(Q^-) - 1 \leq y(p)$。因此我们有$x(p) \leq x(Q)$ 和 $y(Q) - 1 \leq y(p)$。另一方面，事实 $p \in Q^+$ 蕴含 $x(Q^+) - 1 \leq x(p)$ 和$y(p) \leq y(Q^+)$。因此我们有 $x(Q) - 1 \leq x(p)$ 和 $y(p) \leq y(Q)$。所以， $x(Q) - 1 \leq x(p) \leq x(Q)$ 和 $y(Q) - 1 \leq y(p) \leq y(Q)$，这意味着 $p \in Q$。

$\square$

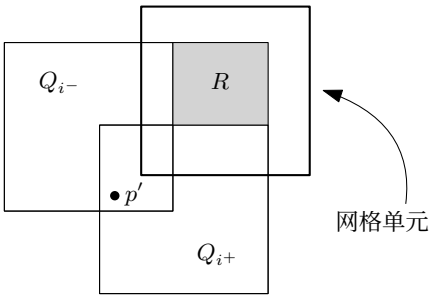


图1：矩形 R 的示意图。

我们称单位正方形 $Q \in \mathcal{Q}$ 被另一个单位正方形 $Q' \in \mathcal{Q}$ 支配，当且仅当 $Q \cap \square \subseteq Q' \cap \square$。若单位正方形 $\mathcal{Q}$ 未被 $\mathcal{Q}$中的任何其他单位正方形支配，则称其为极大。我们用$\mathcal{Q}_{\mathsf{max}} \subseteq \mathcal{Q}$ 表示 $\mathcal{Q}$中的极大单位正方形集合。以下引理表明，只使用 $\mathcal{Q}_{\mathsf{max}}$ 中的单位正方形来覆盖 S 的任意最小规模集合覆盖，也是最小成员数集合覆盖的一个良好近似。

引理2.6. 令 $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}$ 为 S 的一个最小规模集合覆盖，使得 $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}_{\mathsf{max}}$，并令 $\{x_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ 为 S 的一个分数集合覆盖。则 $\mathsf{memb}(S', \mathcal{Q}^*) \leq \mathsf{memb}(S', \{x_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}) + 2$。

证明。假设 $\mathcal{Q}^* = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$，其中 $x(Q_1) \leq \cdots \leq x(Q_r)$。由于 $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}_{\mathsf{max}}$，我们必有$x(Q_1) < \cdots < x(Q_r)$ 且 $y(Q_1) > \cdots > y(Q_r)$。考虑一个点 $p' \in S'$。令 $i^- \in [r]$（分别为 $i^+ \in [r]$）是满足 $p' \in Q_{i^-}$（分别为 $p' \in Q_{i^+}$）的最小（分别为最大）指标。根据事实 2.5，对于所有 $i \in \{i^-, \ldots, i^+\}$，我们有 $p' \in Q_{i^-} \cap Q_{i^+} \subseteq Q_i$，因此 $|\{Q \in \mathcal{Q}^* : \ p' \in Q\}| = i^+ - i^- + 1$。只需证明 $\sum_{Q\in\mathcal{Q},\ p'\in Q} x_Q \geq i^+ - i^- - 1$。

考虑矩形 $R = (x(Q_{i^-}),\ x(Q_{i^+})] \times (y(Q_{i^+}),\ y(Q_{i^-})]$；见图1。令 $S_0 = S \cap R$和 $\mathcal{Q}_0 = \{Q_{i^-+1}, \ldots, Q_{i^+-1}\}$。注意到 $\mathcal{Q}_0$覆盖 S_0，因为 $\mathcal{Q}^*\backslash\mathcal{Q}_0$中的单位正方形都不包含 S_0中的任何点。我们声称， $\mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{Q}$ 是 S_0的最小规模集合覆盖。事实上，由于 $x(Q_{i^-}) <$
$\cdots < x(Q_{i^+})$ 和 $y(Q_{i^-}) > \cdots > y(Q_{i^+})$， $S\backslash S_0$ 中的点都由单位正方形 Q_1、……、Q_{i^-} 以及 Q_{i^+}、……、Q_r覆盖。如果存在一个 S_0的集合覆盖 $\mathcal{Q}'_0 \subseteq \mathcal{Q}$，使得 $|\mathcal{Q}'_0| < |\mathcal{Q}_0|$，那么 $\mathcal{Q}'_0$与 Q_1、……、Q_{i^-}、Q_{i^+}、……、Q_r 共同构成 S的一个集合覆盖，其规模小于$\mathcal{Q}^*$，这与 $\mathcal{Q}^*$ 是 S的最小规模集合覆盖这一事实矛盾。因此， $\mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{Q}$ 是 S_0的最小规模集合覆盖。现在，对每个 $Q \in \mathcal{Q}$，若 $Q \cap R \neq \emptyset$，则定义 $\hat{}x_Q = x_Q$；若$Q \cap R = \emptyset$，则定义 $\hat{}x_Q = 0$。由于 $\{x_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ 是 S的分数集合覆盖，对每个 $p \in S_0$，我们有 $\sum_{Q\in\mathcal{Q},p\in Q} x_Q \geq 1$，这意味着 $\sum_{Q\in\mathcal{Q},p\in Q} \hat{}x_Q \geq 1$，因为 $p \in R$，因此对于所有满足 $p \in Q$的 $Q \in \mathcal{Q}$，都有 $\hat{}x_Q = x_Q$。所以 $\{\hat{}x_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ 是 S_0的分数集合覆盖。由事实 2.4，我们于是得到

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q \geq |\mathcal{Q}_0| = i^+ - i^- - 1. \tag{1}$$

接下来，我们注意到，对于任意满足 $Q \cap R \neq \emptyset$ 的单位正方形 $Q \in \mathcal{Q}$， $x(Q_{i^-}) \leq x(Q) \leq x(Q_{i^+})$，且 $y(Q_{i^-}) \geq y(Q) \geq y(Q_{i^+})$。令 $Q \in \mathcal{Q}$，并假设 $Q \cap R \neq \emptyset$。不等式$x(Q_{i^-}) \leq x(Q)$ 和 $y(Q) \geq y(Q_{i^+})$ 直接由事实 $Q \cap R \neq \emptyset$ 得出。若 $x(Q) > x(Q_{i^+})$，则 Q 支配 Q_{i^+}，这与事实 $Q_{i^+} \in \mathcal{Q}_{\mathsf{max}}$ 矛盾。类似地，若 $y(Q_{i^-}) < y(Q)$，则 Q 支配 Q_{i^-}，这与事实 $Q_{i^-} \in \mathcal{Q}_{\mathsf{max}}$ 矛盾。因此，$x(Q_{i^-}) \leq x(Q)$，且 $y(Q_{i^-}) \geq y(Q)$。根据事实 2.5，对于所有满足 $Q \cap R \neq \emptyset$ 的 $Q \in \mathcal{Q}$，我们有 $p' \in Q_{i^-} \cap Q_{i^+} \subseteq Q$。因此，对于所有满足 $p' \notin Q$ 的$Q \in \mathcal{Q}$，$\hat{}x_Q = 0$，这意味着

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q},p'\in Q} x_Q \geq \sum_{Q\in\mathcal{Q},p'\in Q} \hat{x}_Q = \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \hat{x}_Q. \tag{2}$$

结合方程 1 和 2，我们得到 $\sum_{Q\in\mathcal{Q},\ p'\in Q} x_Q \geq i^+ - i^- - 1$。 □

利用上述引理，现在只需使用 S 中的单位正方形，计算出 $\mathcal{Q}_{\max}$的一个最小规模集合覆盖。在这种情形下，众所周知，最小规模集合覆盖问题可以通过贪心算法在多项式时间内（甚至近线性时间内）求解，因为 $\mathcal{Q}$ 中的单位正方形实际上等价于西南象限；例如参见 [1]。因此，我们可以在多项式时间内计算出 $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}$的一个集合覆盖 S，使得$\mathsf{memb}(S',\ \mathcal{Q}^*) \leq \mathsf{memb}(S',\ \{x_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}})$ $+2$对于 $\{x_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ 的任意分数集合覆盖 S均成立。

2.4 将所有内容整合起来

回顾第 2.2 节末尾，我们有四个广义 MMGSC 实例 $(S_1, S', \mathcal{Q}_1), \ldots, (S_4, S', \mathcal{Q}_4)$。此外，对于每个 $i \in \{1, \ldots, 4\}$，我们都有一个 S_i的分数集合覆盖 $\{\tilde{x}^*_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_i}$，使得 $\mathsf{memb}(S',\{\tilde{x}^*_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_i})$ $\leq 4y^* \leq 4 \cdot \mathsf{opt}(S, S', \mathcal{Q})$。根据第 2.3 节中的讨论，对于每个$i \in \{1, \ldots, 4\}$，我们都可以在多项式时间内计算出 S_i的一个集合覆盖 $\mathcal{Q}^*_i \subseteq \mathcal{Q}_i$，满足 $\mathsf{memb}(S', \mathcal{Q}^*_i) \leq \mathsf{memb}(S', \{\tilde{x}^*_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_i}) + 2$。令 $\mathcal{Q}^* = \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{Q}^*_i$。由于 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$, $\mathcal{Q}^*$ 是S的一个集合覆盖。此外，我们还有

$$\begin{aligned}
\mathsf{memb}(S', \mathcal{Q}^*) &\leq \textstyle\sum_{i=1}^4 \mathsf{memb}(S', \mathcal{Q}^*_i) \\
&\leq \textstyle\sum_{i=1}^4 \mathsf{memb}(S', \{\tilde{x}^*_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_i}) + 8 \\
&\leq 16y^* + 8 \\
&\leq 16 \cdot \mathsf{opt}(S, S', \mathcal{Q}) + 8.
\end{aligned}$$

如果 $\mathsf{opt}(S,\ S',\ \mathcal{Q}) > 0$，那么 $\mathcal{Q}^*$ 是一个常数近似解。当 $\mathsf{opt}(S,\ S',\ \mathcal{Q}) = 0$ 时，可以通过选取 $\mathcal{Q}$ 中所有不包含任何 S' 点的单位正方形，轻松求解。因此，当 S 包含在一个网格单元中时，我们得到了一个常数近似算法。进一步结合引理2.1，可得以下结论。

定理 1.2。 对于含单位正方形的广义 *MMGSC* 问题，存在一个多项式时间常数近似算法。

3 半平面的多项式时间近似方案

设 S，S' 是实数集中的两个点集，$\mathcal{H}$ 是一个半平面集合。我们希望求解广义 MMGSC 实例（S，S'，$\mathcal{H}$）。令 $n = |S| + |S'| + |\mathcal{H}|$。

为了描述我们的算法，我们首先需要介绍一些关于半平面的基本概念。半平面 H 的法向量（简称法线）是一个单位向量，它垂直于 H 的边界直线，且方向指向 H的内部；也就是说，如果 H 的方程为 $ax + by + c \geq 0$，其中 $a^2 + b^2 = 1$，那么它的法向量为 $\vec{v} = (a, b)$。对于平面上的两个非零向量 $\vec{u}$和 $\vec{v}$，我们用 $\mathsf{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ 表示从 $\vec{u}$ 到 $\vec{v}$的顺时针有序角，即 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 之间、位于 $\vec{u}$ 顺时针方向且位于 $\vec{v}$逆时针方向的角。对于两个半平面 H 和 J，我们记 $\mathsf{ang}(H, J) = \mathsf{ang}(\vec{u}, \vec{v})$，其中 $\vec{u}$（分别为 $\vec{v}$）是 H（分别为 J）的法向量。对于由半平面组成的集合 $\mathcal{R}$，我们用 $\bigcap\mathcal{R}$ 和 $\bigcup\mathcal{R}$ 分别表示 $\mathcal{R}$中所有半平面的交集与并集。如果半平面 $H \in \mathcal{R}$ 满足$\bigcap\mathcal{R} = \bigcap(\mathcal{R}\backslash\{H\})$，我们就称其在 $\mathcal{R}$ 中是冗余的。如果 $\mathcal{R}$ 中的每个半平面都不冗余，我们就称 $\mathcal{R}$是不可约的。$\mathcal{R}$ 的补区域指 $\mathbb{R}^2\backslash\bigcup\mathcal{R}$的闭包，它始终是一个凸多边形（可能无界）。本节将始终用到以下关于半平面的简单事实。

事实 3.1. 设 $\mathcal{R}$ 是一个不可约半平面集，且满足 $\bigcup\mathcal{R} \neq \mathbb{R}^2$。那么以下两条性质成立。

(i) 对于任意半平面 $H \in \mathcal{R}$ 和另一个不同于 H 的半平面 H'，有 $\bigcup\mathcal{R} \neq \bigcup\mathcal{R}'$，其中 $\mathcal{R}' = (\mathcal{R}\backslash\{H\}) \cup \{H'\}$。*(ii)* 若 $\mathcal{R}$ 中的半平面交集非空，即 $\bigcap\mathcal{R} \neq \emptyset$，则可以将 $\mathcal{R} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ 写成这样，使得 $0 < \text{角}(H_1, H_2) < \text{角}(H_1, H_3) < \cdots < \text{角}(H_1, H_t) < \pi$。

证明。我们先证明性质 (i)。由于 $\mathcal{R}$ 不可约，且 $\bigcup\mathcal{R} \neq \mathbb{R}^2$、$H$ 在 $\mathcal{R}$ 的补区域边界上形成一条线段（或一条射线）σ。若 $\bigcup\mathcal{R} = \bigcup\mathcal{R}'$，则 σ 也是 $\mathcal{R}'$ 的补区域边界上的一条线段。此外，σ 对应于 $\bigcup\mathcal{R}$ 内部的一侧与 σ 对应于 $\bigcup\mathcal{R}'$ 内部的一侧重合，因为 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 共享同一个补区域。因此，为了使 σ 位于 $\mathcal{R}'$ 的补区域边界上，必有 $H \in \mathcal{R}'$。这与假设 $H' \neq H$ 矛盾。

然后我们证明性质 (ii)。设 $p \in \bigcap\mathcal{R}$ 和 $q \in \mathbb{R}^2\backslash(\bigcup\mathcal{R})$。不失一般性，假设直线 pq 是竖直的，且 p 位于 q 下方。现在每个半平面 $H \in \mathcal{R}$ 都包含 p，但不包含 q。因此，H 的方程为 $y \leq kx + b$，其中 k、$b \in \mathbb{R}^2$ 为某些值。将 $\mathcal{R}$ 中的半平面排序为 H_1，……，H_t，使得若 $y \leq k_i x + b_i$ 是 H_i 的方程，则 $k_1 \geq \cdots \geq k_t$。显然，$0 \leq \text{ang}(H_1, H_2) \leq \text{ang}(H_1, H_3) \leq \cdots \leq \text{ang}(H_1, H_t) < \pi$。现在注意到 $\text{ang}(H_i, H_{i+1}) > 0$。事实上，若 $\text{ang}(H_i, H_{i+1}) = 0$，则 $H_i \subseteq H_{i+1}$ 或 $H_{i+1} \subseteq H_i$，这与 $\mathcal{R} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ 不可约的假设相矛盾。因此，我们有不等式 $0 < \text{ang}(H_1, H_2) < \text{ang}(H_1, H_3) <$

$\cdots <$ 角度$(H_1, H_t) < \pi$。 □

事实 3.2. 设 $H_1, \ldots, H_t$ 是满足以下条件的半平面

$$0 < \text{ang}(H_1, H_2) < \text{ang}(H_1, H_3) < \cdots < \text{ang}(H_1, H_t) \leq \pi.$$

那么，以下两个性质成立。

(i) 若 $H_1 \cup H_t \neq \mathbb{R}^2$，则 H_1 和 H_t 在 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 中都不是冗余的。

(ii) 若 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 是不可约的，则 $\bigcap_{i=1}^{t} H_i = H_1 \cap H_t$。

证明。我们先证明性质 (i)。不失一般性，只需证明 H_1 在 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 中不是冗余的，并且可以假设 H_1 的方程为 $y \geq 0$。H_1 的边界线 ℓ 由方程 $y = 0$ 定义。由于对每个 $i \in \{2, \ldots, t-1\}$，$0 < \text{ang}(H_1, H_i) < \pi$，$H_i$ 包含 ℓ 的 $x = +\infty$ 端，但不包含 ℓ 的 $x = -\infty$ 端。若 $\text{ang}(H_1, H_t) < \pi$，则 H_t 也不包含 ℓ 的 $x = -\infty$ 端，这意味着 $\ell \nsubseteq \bigcup_{i=2}^{t} H_i$，因此 H_1 在 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 中不是冗余的。若 $\text{ang}(H_1, H_t) = \pi$，则对于某个 $c \in \mathbb{R}$，H_t 的方程为 $y \leq c$。注意 $c < 0$，因为 $H_1 \cup H_t \neq \mathbb{R}^2$。因此，$H_t$ 不与 ℓ 相交，故 H_1 在 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 中不是冗余的。

接下来证明性质 (ii)。只需证明对于所有 $i \in \{2, \ldots, t-1\}$，$H_1 \cap H_t \subseteq H_i$。不失一般性，只需考虑 $i = 2$ 的情形。首先注意到，$\text{ang}(H_1, H_2) > 0$。事实上，若 $\text{ang}(H_1, H_2) = 0$，则要么 $H_1 \subseteq H_2$，要么 $H_2 \subseteq H_1$，这与 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 不可约的事实矛盾。出于同样的原因，$\text{ang}(H_2, H_t) > 0$。因此，$\text{ang}(H_1, H_2) < \text{ang}(H_1, H_t)$。若 $\text{ang}(H_1, H_t) = \pi$，则 H_1 和 H_t 是方向相反的半平面，这意味着要么 $H_1 \cap H_t = \emptyset$，要么 $H_1 \cup H_t = \mathbb{R}^2$。在前一种情形下，我们直接得到 $H_1 \cap H_t \subseteq H_2$。在后一种情形下，我们有 $t = 2$（因此 $H_1 \cap H_t \subseteq H_2$ 显然成立）；否则，H_2、……、H_{t-1} 在 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 中都是冗余的，这与 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 不可约的假设矛盾。因此，只需考虑 $\text{ang}(H_1, H_t) < \pi$ 的情形。现在，$\text{ang}(H_1, H_2) < \text{ang}(H_1, H_t) < \pi$。不失一般性，设 H_2 的方程为 $x \geq 0$。那么，H_1 的方程为 $y \geq kx + b$，其中

某个 k，$b \in \mathbb{R}$，且 H_t 的方程为 $y \le k'x + b'$，其中某个 k'，$b' \in \mathbb{R}$。令 p 为直线 $y = kx + b$ 和 $y = k'x + b'$ 的交点。注意，$H_1 \cup H_t$ 覆盖了所有 x 坐标大于或等于 p 的点。因此，p 的 x 坐标为正；否则 $H_2 \subseteq H_1 \cup H_t$，这与 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 不可约的事实矛盾。另请注意，区域 $H_1 \cap H_t$ 完全位于 p 的右侧，因此包含于 H_2 中。

□

3.1 一个 $n^{O(\mathsf{opt})}$时间精确算法

本节将展示如何在$n^{O(\mathsf{opt})}$ 时间内计算实例（S，S'，$\mathcal{H}$）的（精确）最优解。只需解决一个判定问题：给定整数 $k \ge 0$，寻找一个子集 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$，使其覆盖 S 并满足 $\mathsf{memb}(S', \mathcal{Z}) \le k$，或者判定不存在这样的子集。只要该问题能够在 $n^{O(k)}$ 时间内解决，通过依次尝试 $k = 1$、.....、$|\mathcal{H}|$，最终即可在 $n^{O(\mathsf{opt})}$ 时间内计算出（S，S'，$\mathcal{H}$）的最优解。下文中，（S，S'，$\mathcal{H}$）的有效解是指一个子集 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$，其覆盖 S 并满足 $\mathsf{memb}(S', \mathcal{Z}) \le k$。

令 Δ 为一个充分大的数，使得 $S \cup S' \subseteq [-\Delta, \Delta]^2$。为方便起见，我们向$\mathcal{H}$ 中加入四个方程分别为 $y \le -\Delta$、$y \ge \Delta$、$x \le -\Delta$和 $x \ge \Delta$的虚拟半平面。由于这些虚拟半平面不包含 $S \cup S'$中的任何点，将它们纳入 $\mathcal{H}$ 不会改变问题。若一个半平面集合是不可约的，且其补区域非空且有界，则称其为正规半平面集合。我们有如下简单观察。

事实 3.3. 如果$(S, S', \mathcal{H})$ 有一个有效解，那么它要么有一个正则有效解，要么有一个覆盖整个平面 $\mathbb{R}^2$ 的有效解。

证明。考虑 $(S, S', \mathcal{H})$ 的一个有效解 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$。我们将构造另一个有效解，它要么是正规的，要么覆盖 $\mathbb{R}^2$。首先，我们将四个虚拟半平面加入 $\mathcal{Z}$，并令 $\mathcal{Z}' \supseteq \mathcal{Z}$ 表示所得集合。于是 $\mathcal{Z}'$ 覆盖 S，且 $\mathsf{memb}(S', \mathcal{Z}') = \mathsf{memb}(S', \mathcal{Z})$。因此 $\mathcal{Z}'$ 也是一个有效解。接下来，我们通过不断从 $\mathcal{Z}'$ 中移除冗余半平面，得到一个与 $\mathcal{Z}'$ 具有相同补区域的不可约子集 $\mathcal{Z}'' \subseteq \mathcal{Z}'$。现在 $\mathcal{Z}''$ 仍覆盖 S，且 $\mathsf{memb}(S', \mathcal{Z}'') \le \mathsf{memb}(S', \mathcal{Z}')$，这意味着 $\mathcal{Z}''$ 也是一个有效解。如果 $\bigcup \mathcal{Z}'' = \mathbb{R}^2$，我们就完成了。否则，$\mathcal{Z}''$ 的补区域非空。此外，$\mathcal{Z}''$ 的补区域与 $\mathcal{Z}'$ 的补区域相同，而后者有界，因为四个虚拟半平面都在 $\mathcal{Z}'$ 中。因此，$\mathcal{Z}''$ 的补区域有界。这意味着 $\mathcal{Z}''$ 是正规的，因为 $\bigcup \mathcal{Z}''$ 是不可约的。

□

如果 $(S, S', \mathcal{H})$ 有一个覆盖 $\mathbb{R}^2$ 的有效解，那么它也有一个覆盖 $\mathbb{R}^2$ 的不可约有效解，根据 Helly 定理，该解的大小至多为 3。因此，在这种情况下，我们只需枚举 $\mathcal{H}$ 中所有大小至多为 3 的子集，即可在 $n^{O(1)}$ 时间内解决该问题。否则，根据上述事实，只需检查是否存在 $(S, S', \mathcal{H})$ 的正规有效解。接下来，我们假设 $(S, S', \mathcal{H})$ 有一个正规有效解，并说明如何在 $n^{O(k)}$ 时间内找到这样的解。若算法最终未能找到正规有效解，我们便可断定其不存在。设 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$ 是 $(S, S', \mathcal{H})$ 的一个（未知的）正规有效解。根据定义，$\mathcal{Z}$ 的补区域非空，且是一个（有界的）凸多边形。考虑由 $\mathcal{H}$ 中半平面的边界直线构成的排列 $\mathcal{A}$。该排列有 $O(n^2)$ 个面，其中至少有一个面包含在 $\mathcal{Z}$ 的补区域内。我们只需猜测这样一个面。通过进行 $O(n^2)$ 次猜测，我们可以假定已知补区域 $\mathcal{Z}$ 中的一个面 F。然后，我们取 F 内部的一个点 p，该点也位于 $\mathcal{Z}$ 的补区域内部。

现在，问题变为寻找（$S, S', \mathcal{H}$）的一个正则有效解，其补区域包含 p。因此，我们可以从 $\mathcal{H}$ 中移除所有包含 p 的半平面。现在，补区域

任意 $\mathcal{H}$ 的区域都包含 p。如果凸多边形 Γ 的每条边 e 都是某个半平面 $H \in \mathcal{H}$ 的边界线的一部分，且 $\Gamma \cap H = e$ （或者等价地，H 不包含 Γ），则称 Γ 与 $\mathcal{H}$兼容。注意，正规有效解的补区域是一个与 $\mathcal{H}$兼容的凸多边形 Γ，并满足：(i) S中没有点位于 Γ的内部；(ii) 对于 Γ的任意 $k+1$条边 e_1、……、 e_{k+1}，交集 $\bigcap_{i=1}^{k+1} H(e_i)$不包含 S'中的任何点；其中$H(e) \in \mathcal{H}$ 表示边界线经过 e 和 $\Gamma \cap H = e$的半平面。另一方面，任何满足条件(i)和(ii)的与 $\mathcal{H}$兼容的凸多边形，都是$(S, S', \mathcal{H})$的某个正规有效解的补区域，而该解恰好是与 Γ各边对应的半平面集合。由此可见，只需找到一个满足这两个条件、且与 $\mathcal{H}$兼容的凸多边形 Γ。以下事实可用于简化条件(ii)。

事实 3.4 t $e_1 \ldots e_t$ $\mathcal{H}$ Γ $\bigcap_{i=1}^{t} H\ e_i\ \cap$.. 如果一个 -相容凸多边形 $S' \neq \emptyset$ t $f_1 \ldots f_t$ Γ $\bigcap_{i=1}^{t} H\ f_i\ \cap S' \neq \emptyset$ 存在边，，且满足(())，那么该多边形存在连续边，，且满足(())。

证明。令 $\mathcal{R} = \{H(e_1) \ldots, H(e_t)\}$，并假设 $(\bigcap \mathcal{R}) \cap S' \neq \emptyset$，这意味着 $\bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset$。注意，与 Γ 的边对应的半平面集合是不可约的，因为 Γ 是 $\mathcal{H}$-相容的，因此 Γ 的每条边 e 的内部只能被半平面 $H(e)$ 覆盖。特别地，$\mathcal{R}$ 是不可约的。此外，根据我们的假设，$\bigcup \mathcal{R} \neq \mathbb{R}^2$ $\bigcup \mathcal{H} \neq \mathbb{R}^2$。因此，根据事实 3.1 的 (ii)，存在 $e^-, e^+ \in \{e_1, \ldots, e_t\}$，使得对于所有 $i \in [t]$，ang$(H(e^-)\ H(e_i)) \leq$ ang$(H(e^-)\ H(e^+)) < \pi$。现在我们沿着 Γ 的边界从 e^- 顺时针走到 e^+，并令 E 为我们经过的 Γ 的边的集合（包括 e^- 和 e^+）。显然，对于所有 $i \in [t]$，$e_i \in E$，因此 $|E| \geq t$。此外，对于所有 $e \in E \backslash \{e^-, e^+\}$，ang$(H(e^-)\ H(e)) <$ ang$(H(e^-)\ H(e^+)) < \pi$。定义 $\mathcal{R}' = \{H(e) : e \in E\}$。由于 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 都是不可约的，我们可以应用事实 3.2 的 (ii) 得出 $\bigcap \mathcal{R} = H(e^-) \cap H(e^+) = \bigcap \mathcal{R}'$，这意味着 $(\bigcap \mathcal{R}') \cap S' \neq \emptyset$。最后，因为 E 由 Γ 和 $|E| \geq t$ 的连续边组成，所以存在 $f_1, \ldots, f_t \in E$，它们是 Γ 的 t 条连续边。我们有 $\bigcap \mathcal{R}' \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} H(f_i)$，因此 $(\bigcap_{i=1}^{t} H(f_i)) \cap S' \neq \emptyset$。

□

根据上述事实，我们只需找到一个与 $\mathcal{H}$ 兼容的凸多边形 Γ，使其满足：(i) S 中没有点位于 Γ 的内部；(ii) 对于 Γ 的任意 $k+1$ 条连续边 e_1、……、 e_{k+1}，都有 $(\bigcap_{i=1}^{k+1} H(e_i)) \cap S' \neq \emptyset$。为方便起见，若 Γ 满足条件 (i) 和 (ii)，就称其性质良好。接下来，我们将这个问题归约为一个（带权）有向图 G 中的最短环问题，具体如下。令 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathcal{H}$ 中半平面的边界直线集合。我们考虑平面上每条位于某条直线 $\ell \in \mathcal{L}$ 上的线段 s，并要求 s 的每个端点都是 ℓ 与 $\mathcal{L}$ 中另一条直线的交点。用 Φ 表示这些线段的集合。注意，$|\Phi| = O(n^3)$，因为 Φ 的每条直线 $\ell \in \mathcal{L}$ 上都包含 $O(n^2)$ 条线段。显然，与 $\mathcal{H}$ 兼容的凸多边形的边都是 Φ 中的线段。考虑一条线段 $\phi \in \Phi$。回想一下，点 p 位于 F 的内部，而 F 是排列 $\mathcal{A}$ 的一个面。因此，$\mathcal{L}$ 中没有直线经过 p。由此可知，对于每条线段 $\phi \in \Phi$，ϕ 和 p 的两个端点构成一个三角形 Δ_ϕ。如果 $p \to a \to b$ 是 Δ_ϕ 三个顶点从 p 开始的顺时针次序，那么我们称 a 为 ϕ 的左端点，并称 b 为 ϕ 的右端点。显然，ang$(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pb}) < \pi$。将要构造的图 G 的顶点与满足以下三个条件的 $(k+1)$ 元组 $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k) \in \Phi^{k+1}$ 一一对应。

1. 对所有 $i \in [k]$，ϕ_i 的左端点都是 ϕ_{i-1} 的右端点。下文中，我们用 a_i 表示 ϕ_i 的左端点（即 ϕ_{i-1}的右端点）。此条件保证线段 ϕ_0、ϕ_1…… ϕ_k 构成一条由 $k+1$ 段组成的多段线链。

2. 对所有 $i \in [k]$，ang$(\overrightarrow{a_{i-1}a_i}, \overrightarrow{a_ia_{i+1}}) \leq \pi$。这一条件保证由$\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k$构成的链是顺时针凸的，也就是说，当我们沿着该链从 a_0 到

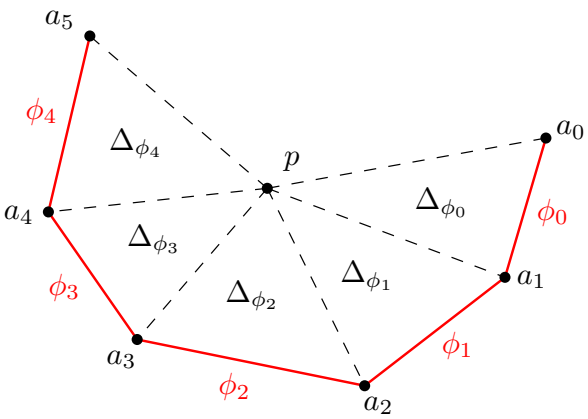


图 2：展示 G的顶点所满足的条件。

a_{k+1}，我们总是在链的顶点处向右转向。图2 展示了一条满足此条件（以及条件1）的链。

3. $S \cap (\bigcup_{i=0}^{k} \Delta_{\phi_i}) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} \phi_i$ and $(\bigcap_{i=0}^{k} H(\phi_i)) \cap S' = \emptyset$.

直观地说， G 的每个顶点对应的（$k+1$）元组，表示了我们要寻找的与 $\mathcal{H}$兼容的凸多边形中$k+1$ 条连续边的一种可能选取。对于满足 $(\phi_1, \ldots, \phi_k) = (\phi'_0, \phi'_1, \ldots, \phi'_{k-1})$ 的两个顶点$v = (\phi_0, \phi_1, \ldots\ldots, \phi_k)$ 和 $v' = (\phi'_0, \phi'_1, \ldots\ldots, \phi'_k)$，我们从 v向 v'添加一条权重为 $\mathsf{ang}(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pb})$ 的有向边，其中 a是 ϕ_0的左端点，而 b是 $\phi'_0 = \phi_1$ 的左端点（根据上面的条件1，它同时也是 ϕ_0 的右端点）。注意， G 的每条边的权重都为正，因为每个 $\phi \in \Phi$ 和 p 的两个端点构成一个三角形 Δ_ϕ。关键观察如下引理所述。

引理 3.5. 存在一个性质良好的 $\mathcal{H}$-兼容凸多边形包含 p，当且仅当 G 中最短环的（加权）长度恰好为 2π。

证明。 我们首先注意到， G 中任意环的（加权）长度都是 2π 的倍数，且至少为 2π。对于 G 的顶点 $v = (\phi_0, \phi_1, \ldots\ldots, \phi_k)$，我们用 a_v 表示 ϕ_0 的左端点。考虑 G 中的一个环 $(v_0, v_1, \ldots\ldots, v_r)$，其中 $v_r = v_0$。根据 G 的构造，环 $(v_0, \ldots\ldots, v_r)$ 的长度为 $\sum_{i=0}^{r-1} \mathsf{ang}(\overrightarrow{pa_{v_i}}, \overrightarrow{pa_{v_{i+1}}})$，由于 $\overrightarrow{pa_{v_0}} = \overrightarrow{pa_{v_r}}$，该长度是 2π 的倍数。此外，由于 G 的每条边的权重均为正，环的长度大于 0，因此至少为 2π。基于这一观察，现在只需证明：存在一个性质良好的 $\mathcal{H}$-兼容凸多边形包含 p，当且仅当 G 中存在一个长度恰好为 2π 的环。

对于“若”部分，假设 G 中存在一个长度恰为 2π的环 $(v_0、 v_1、 \ldots、 v_r)$，其中$v_r = v_0$。根据 G的构造，存在 $\phi_0、 \phi_1、 \ldots、 \phi_{r-1} \in \Phi$，使得对于任意 $i \geq 0$，都有 $v_i = (\phi_i、 \ldots、 \phi_{i+k})$；为方便起见，我们对任意 $i \geq r$定义$\phi_i = \phi_i \bmod r$。令 a_i 表示 ϕ_i的左端点。由于 $(v_0、 v_1、 \ldots、 v_r)$ 的长度为 2π，因此有 $\sum_{i=0}^{r-1} \mathsf{ang}(\overrightarrow{pa_i}, \overrightarrow{pa_{i+1}}) = 2\pi$。于是，点 $a_0、 a_1、 \ldots、 a_{r-1}$ 围绕 p 按顺时针顺序排列，而线段 $\phi_0、 \phi_1、 \ldots、 \phi_{r-1}$围成一个包含 p的简单多边形 Γ。我们有$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{r-1} \Delta_{\phi_i}$。回顾定义 G的顶点时所需的三个条件。对于每个 i， $(\phi_i、 \ldots、 \phi_{i+k})$ 都是 G 的一个顶点，条件2保证了 Γ的凸性。此外，由于 $p \notin H(\phi_i)$，这意味着 Γ和 $H(\phi_i)$位于 ϕ_i的两侧，即 $\Gamma \cap H(\phi_i) = \phi_i$。因此， Γ是一个与 $\mathcal{H}$相容的凸多边形。只需验证 Γ性质良好。注意， $S \cap \Gamma = S \cap (\bigcup_{i=0}^{r-1} \Delta_{\phi_i}) = \bigcup_{i=0}^{r-1} (S \cap (\bigcup_{j=i}^{i+k} \Delta_{\phi_j}))$。根据条件3，对于任意 i，有 $S \cap (\bigcup_{j=i}^{i+k} \Delta_{\phi_j}) \subseteq \bigcup_{j=i}^{i+k} \phi_j$，这意味着 $S \cap \Gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{r-1} \phi_i$，也就是说，没有

S 中的点位于 Γ的内部。再次根据条件3，对于任意 i，有$(\bigcup_{j=i}^{i+k} H(\phi_j)) \cap S' = \emptyset$。因此，$\Gamma$ 性质良好。

对于“仅当”部分，假设存在一个包含 p 的性质良好的 $\mathcal{H}$-兼容凸多边形 Γ。设 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{r-1}$ 是 Γ 上按顺时针顺序排列的边。由于 Γ 与 $\mathcal{H}$ 兼容，这些边都是 Φ 中的线段。和之前一样，对于任意 $i \geq r$，我们定义 $\phi_i = \phi_{i \bmod r}$。现在，对于任意 $i \geq 0$，$(\phi_i, \ldots, \phi_{i+k})$ 这个 $(k+1)$ 元组表示 Γ 上连续的 $k+1$ 条边。根据 Γ 是包含 p 的性质良好的 $\mathcal{H}$-兼容凸多边形这一事实，可以很容易地验证，$(\phi_i, \ldots, \phi_{i+k})$ 满足定义 G 顶点的条件1、2、3。首先，条件1显然成立。根据 Γ 的凸性，我们得到条件2。为证明条件3，注意到 Γ 与 $\mathcal{H}$ 兼容，因此半平面 $H(\phi_i) \ldots, H(\phi_{i+k})$ 与 Γ 的内部不相交。但 $\bigcup_{j=i}^{i+k} \Delta_{\phi_j}$ 包含于 Γ 中。由于 Γ 性质良好，$S \cap \Gamma$ 中的每个点都位于 Γ 的边界上，因此 $S \cap \bigcup_{j=i}^{i+k} \Delta_{\phi_j} \subseteq \bigcup_{j=i}^{i+k} \phi_j$。$(\bigcap_{j=i}^{i+k} H(\phi_j)) \cap S'$ 的空性也可由 Γ 性质良好这一事实得出。因此，条件3成立。由此可知，$(\phi_i, \ldots, \phi_{i+k})$ 是 G 的一个顶点，我们将其记为 v_i。根据 G 的构造，对于任意 $i \geq 0$，v_i 和 v_{i+1} 之间都有一条边。由于 $v_r = v_0$，$(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ 是 G 中的一个环。若用 a_i 表示 ϕ_i 的左端点（它同时也是 ϕ_{i-1} 的右端点），则 $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ 是 Γ 上按顺时针顺序排列的顶点。于是，环 $(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ 的长度为 $\sum_{i=0}^{r-1} \mathsf{ang}(\overrightarrow{pa_i}, \overrightarrow{pa_{i+1}}) = 2\pi$。 □

根据上述引理，只需计算 G 中的最短环，这可以通过标准算法（例如 Dijkstra 算法）在多项式时间内完成，时间关于 G 的规模为多项式。注意，G 有 $n^{O(k)}$ 个顶点。因此，我们得到一个运行时间为 $n^{O(k)}$ 的算法，用于计算满足 $\mathsf{memb}(S', \mathcal{Z}) \leq k$ 的集合覆盖 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$（由 S 构成），前提是这样的集合覆盖存在。通过迭代地尝试 $k = 1, \ldots, |\mathcal{H}|$，我们可以在 $n^{O(\mathsf{opt})}$ 时间内求解半平面 MMGSC 问题。

3.2 具有常数加性误差的算法

本节将说明如何在多项式时间内计算实例 $(S, S', \mathcal{H})$ 的一个近似解 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$，其加性误差为常数，即 $\mathsf{memb}(S', \mathcal{Z}) = \mathsf{opt}(S, S', \mathcal{H}) + O(1)$。若 $\bigcup \mathcal{H} = \mathbb{R}^2$，则根据 Helly 定理，存在 $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{H}$ 使得 $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \mathbb{R}^2$。此时，我们可以取 $\{H_1, H_2, H_3\}$ 作为解，它显然具有常数加性误差。因此，假设 $\bigcup \mathcal{H} \neq \mathbb{R}^2$。我们的算法遵循局部搜索的思路。不过，与大多数局部搜索算法（通过局部修改）在每一步提升解的“质量”不同，我们的算法不关心质量（即隶属度），而是专注于缩小解的补区域。形式化地，对于两个集合 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{Z}'$，若 $\bigcup \mathcal{Z} \subsetneq \bigcup \mathcal{Z}'$，我们记作 $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$；若 $\bigcup \mathcal{Z} \subseteq \bigcup \mathcal{Z}'$，则记作 $\mathcal{Z} \preceq \mathcal{Z}'$。我们定义以下“局部（不可）改进”解的概念。

定义 3.6. 若存在 $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{H}$ 使得 $|\mathcal{Z} \backslash \mathcal{Z}'| = |\mathcal{Z}' \backslash \mathcal{Z}| \leq k$ 且 $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$，则子集 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$ 是 k-可扩张的。若集合 $\mathcal{H}$ 的子集 k 不是 k-可扩张的，则称其为 k-稳定的。

换句话说，如果我们可以（分别地，不能）将 $\mathcal{Z}$ 中的 k 个半平面替换为 $\mathcal{H}$ 中的其他 k 个半平面，从而缩小 $\mathcal{Z}$ 的补区域，则称 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$ 是 k-可扩张的（分别地，k-稳定的）。我们关注的是作为 S 的最小规模 集合覆盖且 k-稳定的子集 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$。这种集合可以通过标准的局部搜索过程构造。

引理 3.7. 可在 $n^{O(k)}$ 时间内计算出 S 的一个 k-稳定的最小规模集合覆盖 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$。

证明。半平面的标准集合覆盖问题可在多项式时间内求解。因此，我们可以在 $n^{O(1)}$ 时间内计算出一个最小规模集合覆盖 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$。为了进一步获得一个 k-稳定的集合覆盖，我们持续执行以下过程：每当存在 $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{H}$ 使得 $|\mathcal{Z} \backslash \mathcal{Z}'| = |\mathcal{Z}' \backslash \mathcal{Z}| \leq k$

且 $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ 时，我们将 $\mathcal{Z}$ 更新为 $\mathcal{Z}'$。在此过程中， $\mathcal{Z}$ 的大小不会改变，而 $\mathcal{Z}$ 的补区域会缩小。因此， $\mathcal{Z}$ 始终是 S 的一个最小规模集合覆盖。此外，由于补区域 $\mathcal{Z}$ 在每一步都会缩小，该过程最终一定会终止。最后， $\mathcal{Z}$ 不再是 k-可扩展的，因此是 k-稳定的。这证明了我们的算法的正确性。为说明该算法需要 $n^{O(k)}$ 时间，我们证明：(i) 算法会在 $O(n)$ 步内终止；(ii) 每一步都可在 $n^{O(k)}$ 时间内完成。

对于 (i)，关键观察是，每个半平面 $H \in \mathcal{H}$ 至多能从 $\mathcal{Z}$ 中移除一次。形式化地，我们用 $\mathcal{Z}_i$ 表示该过程第 i 步之后的集合 $\mathcal{Z}$，因此原始的 $\mathcal{Z}$ 为 $\mathcal{Z}_0$。令 P_i 为 $\mathcal{Z}_i$的补区域。假设 $H \in \mathcal{Z}_{i-1}$ 和 $H \notin \mathcal{Z}_i$。我们断言，对于所有 $j > i$，都有 $H \notin \mathcal{Z}_j$。假设对某个 $j > i$有 $H \in \mathcal{Z}_j$。由于 $\mathcal{Z}_j$ 是 S的一个最小规模集合覆盖， H 在 $\mathcal{Z}_j$ 中不是冗余的，因此 P_j 的一条边 e 由 H定义，即 e 是 H的边界线上的一条线段。注意， e 也是 P_{i-1}边界的一部分，因为 $H \in \mathcal{Z}_{i-1}$ 且 $P_j \subseteq P_{i-1}$。由此可知， e 是 P_i边界的一部分，因为 $P_j \subseteq P_i \subseteq P_{i-1}$。但这不可能成立，因为 $H \notin \mathcal{Z}_i$。因此，对所有 $j > i$，都有 $H \notin \mathcal{Z}_j$。现在，对于每个索引 $i \geq 1$，至少存在一个半平面 $H \in \mathcal{H}$，使得 $H \in \mathcal{Z}_{i-1}$ 且 $H \notin \mathcal{Z}_i$，这仅仅是因为 $|\mathcal{Z}_{i-1}| = |\mathcal{Z}_i|$ 且 $\mathcal{Z}_{i-1} \neq \mathcal{Z}_i$。于是，我们将第 i 步归因于这个半平面 H。根据上述观察，每个半平面至多被归因一次。因此，该过程至多在 n 步内终止。要说明 (ii)，注意到在每一步中，满足 $|\mathcal{Z} \backslash \mathcal{Z}'| = |\mathcal{Z}' \backslash \mathcal{Z}| \leq k$ 的 $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{H}$ 数量至多为 $n^{O(k)}$，且这些集合可在 $n^{O(k)}$ 时间内枚举。因此，每一步都能在 $n^{O(k)}$ 时间内完成。由此，整个算法可在 $n^{O(k)}$ 时间内终止。

□

我们的关键观察是，对于任意 $k = 1$，任何满足 k-稳定性的 S 最小规模集合覆盖，在 MMGSC 意义下的加性误差至多为 2。

引理 3.8。如果 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$ 是满足 1-稳定性的 S 的最小规模集合覆盖，那么我们有 $|\mathcal{Z}| \leq$最优值$(S, S', \mathcal{H}) + 2$。

证明。考虑一个点 $p \in S'$。我们证明，对于 S 的任意集合覆盖$\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{H}$，都有 $\mathsf{memb}(p, \mathcal{Z}') \geq \mathsf{memb}(p, \mathcal{Z}) - 2$。令 $\mathcal{Z}(p) \subseteq \mathcal{Z}$ 由 $\mathcal{Z}$ 中所有包含 p 的半平面组成。由于 $\bigcap \mathcal{Z}(p) \neq \emptyset$，根据事实 3.1 的 (ii) 以及假设 $\bigcup \mathcal{H} \neq \mathbb{R}^2$，我们有 $\mathcal{Z}(p) = \{H_1, \ldots, H_r\}$，使得 $0 < \mathsf{ang}(H_1, H_2) < \mathsf{ang}(H_1, H_3) < \cdots < \mathsf{ang}(H_1, H_r) < \pi$。令 $S_0 \subseteq S$ 为包含在 $\bigcup_{i=2}^{r-1} H_i$ 中、但不包含在 $\mathcal{Z}$ 中任何其他半平面内的点集；令 $\mathcal{Z}'_0 \subseteq \mathcal{Z}'$ 为至少包含 S_0 中一个点的半平面集。注意 $|\mathcal{Z}'_0| \geq r - 2$，否则 $(\mathcal{Z} \backslash \{H_2, \ldots, H_{r-1}\}) \cup \mathcal{Z}'_0$ 将是 S 的一个集合覆盖，其规模严格小于 $\mathcal{Z}$，这与 $\mathcal{Z}$ 是 S 的最小规模集合覆盖这一事实矛盾。我们将证明 $\mathcal{Z}'_0$ 中的每个半平面都包含 p，因此

$$\mathsf{memb}(p, \mathcal{Z}') \geq \mathsf{memb}(p, \mathcal{Z}'_0) = |\mathcal{Z}'_0| \geq r - 2 = \mathsf{memb}(p, \mathcal{Z}) - 2.$$

考虑一个半平面 $H' \in \mathcal{Z}'_0$。我们要证明 $p \in H'$。根据 $\mathcal{Z}'_0$ 的构造， H' 包含一个点 $q \in S_0$。此外，根据 S_0 的构造， q 包含于$\bigcup_{i=2}^{r-1} H_i$，但不包含于 $\mathcal{Z} \backslash \{H_2, \ldots, H_{r-1}\}$ 中的任何半平面。特别地， $q \notin H_1$ 和 $q \notin H_r$，这意味着 $H' \neq H_1$ 和 $H' \neq H_r$。我们注意到 $\{H_1, H_r, H'\}$ 是不可约的。显然， H' 在 $\{H_1, H_r, H'\}$ 中不是冗余的，因为它包含 q，而 H_1 和 H_r 不包含 q。如果 H_1 在 $\{H_1, H_r, H'\}$ 中是冗余的，那么 $\mathcal{Z} \preceq (\mathcal{Z} \backslash \{H_1\}) \cup \{H'\}$。由于 $\mathcal{Z}$ 是不可约的，且 $H' \neq H_1$，根据事实 3.1 的 (i)，这意味着 $\mathcal{Z} \prec (\mathcal{Z} \backslash \{H_1\}) \cup \{H'\}$，这与 $\mathcal{Z}$ 是 1-稳定的事实矛盾。因此， H_1 在 $\{H_1, H_r, H'\}$ 中不是冗余的。出于同样的原因， H_r 在 $\{H_1, H_r, H'\}$ 中也不是冗余的。因此， $\{H_1, H_r, H'\}$ 是不可约的。

接下来，我们通过证明 $p \in H'$ 或 $\mathcal{Z}$ 是 1-可扩张的来完成证明。由于后者不成立（因为 $\mathcal{Z}$ 是 1-稳定的），因此可推出 $p \in H'$。若 $\mathsf{ang}(H_1, H') < \mathsf{ang}(H_1, H_r)$，根据

$\{H_1, H_r, H'\}$ 的不可约性以及事实 3.2 的 (ii)，我们有 $H_1 \cap H' \cap H_r = H_1 \cap H_r$，由此可推出 $H_1 \cap H_r \subseteq H'$，进而得到 $p \in H_1 \cap H_r \subseteq H'$。若 $\text{ang}(H_1, H') = \text{ang}(H_1, H_r)$，则 $H' \subseteq H_r$ 或 $H_r \subseteq H'$。注意，前者不成立，因为 $q \in H'$，但 $q \notin H_r$。因此，我们有 $p \in H_r \subseteq H'$。只需考虑 $\text{ang}(H_1, H') > \text{ang}(H_1, H_r)$ 的情形。在此情形下，我们证明 $\mathcal{Z}$ 是 1-可扩张的。由于 $q \in \bigcup_{i=2}^{r-1} H_i$，存在包含 q 的 $H \in \{H_2, \ldots, H_{r-1}\}$。现在 $\text{ang}(H_1, H) < \text{ang}(H_1, H_r) < \text{ang}(H_1, H')$，由此可推出 $\text{ang}(H, H_r) < \text{ang}(H, H')$，且 $\text{ang}(H', H_1) < \text{ang}(H', H)$。我们进一步区分两种情形：$\text{ang}(H, H') \leq \pi$ 和 $\text{ang}(H, H') \geq \pi$（事实上二者对称）。假设 $\text{ang}(H, H') \leq \pi$。图 3 展示了此情形下点 p、q 以及半平面 H、H'、H_1、H_r 的情况。由于 $\text{ang}(H, H_r) < \text{ang}(H, H')$，根据事实 3.2 的 (ii)，若 $\{H, H_r, H'\}$ 不可约，则 $H \cap H_r \cap H' = H \cap H'$。但是，$H \cap H_r \cap H' \neq H \cap H'$，因为 $q \in H \cap H'$ 且 $q \notin H_r$。因此，$\{H, H_r, H'\}$ 可约。注意，由于根据我们的假设 $\bigcup \mathcal{H} \neq \mathbb{R}^2$，所以 $H \cup H' \neq \mathbb{R}^2$。因此，根据事实 3.2 的 (i)，$H$ 和 H' 都不是 $\{H, H_r, H'\}$ 中的冗余项。由此可知，H_r 在 $\{H, H_r, H'\}$ 中是冗余的，因为 $\{H, H_r, H'\}$ 可约。因此，$\mathcal{Z} \preceq (\mathcal{Z} \backslash \{H_r\}) \cup \{H'\}$。由于 $\mathcal{Z}$ 不可约且 $H' \neq H_r$，根据事实 3.1 的 (i)，我们有 $\mathcal{Z} \prec (\mathcal{Z} \backslash \{H_r\}) \cup \{H'\}$，即 $\mathcal{Z}$ 是 1-可扩张的。另一种情形 $\text{ang}(H, H') \geq \pi$ 类似。在此情形下，$\text{ang}(H', H) \leq \pi$。利用事实 $\text{ang}(H', H_1) < \text{ang}(H', H)$，并采用上述相同的论证，可证明 $\mathcal{Z} \prec (\mathcal{Z} \backslash \{H_1\}) \cup \{H'\}$，即 $\mathcal{Z}$ 是 1-可扩张的。 □

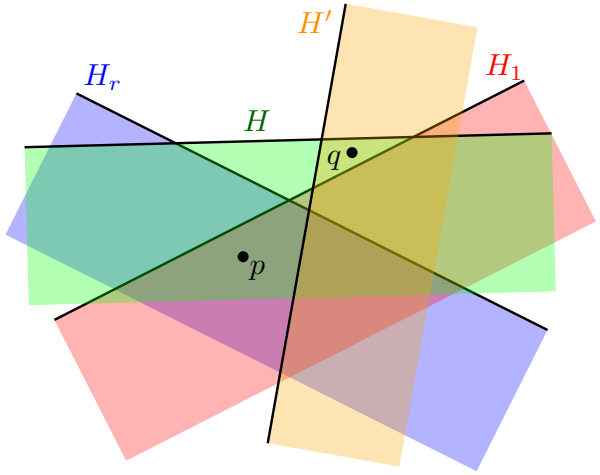


图 3：引理证明示意图3.8。

利用引理 3.7，我们可以在 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$ 时间内计算出一个 S 中的 $n^{O(1)}$最小规模集合覆盖。然后根据引理 3.8，$\mathcal{Z}$是 MMGSC 实例（S，S'，$\mathcal{H}$）的一个近似解，加性误差为 2。这为我们提供了一个针对半平面 MMGSC 的多项式时间近似算法，其具有 $O(1)$ 加性误差。

3.3 将所有内容整合起来

我们的多项式时间近似方案可通过直接结合第3.1 节和3.2节中的算法得到。令$c = O$表示第3.2节算法的加性误差。我们首先运行第3.2 节中的算法，得到一个解 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$。如果 $|\mathcal{Z}| \geq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot c$，那么

$$\frac{|\mathcal{Z}|}{\text{opt}(S, S', \mathcal{H})} \leq \frac{|\mathcal{Z}|}{|\mathcal{Z}| - c} \leq 1 + \varepsilon.$$

在这种情况下， $\mathcal{Z}$已经是一个（$1+\varepsilon$）近似解。否则，$|\mathcal{Z}| < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot c$因此最优$(S, S', \mathcal{H}) < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot c$。然后，我们可以运行第3.1 节中的算法，在 $n^{O(1/\varepsilon)}$ 时间内计算出一个最优解。由此得到以下结论。

定理 1.3。 含半平面的广义 *MMGSC* 问题存在一个多项式时间近似方案。

4 最小层数几何集合覆盖

本节给出一种非常简单的常数近似算法，用于求解单位正方形的最小层数几何集合覆盖问题。该技术也可应用于 $\mathbb{R}^2$ 中由任意尺寸相近的几何对象构成的问题。

设（S， $\mathcal{Q}$）是一个 MPGSC 实例。如第 2 节所示，我们首先应用网格技术。我们构造一个网格 Γ，其由边长为 1 的正方形网格单元组成。对于每个网格单元 $\square$，记 $S_\square = S \cap \square$ 和 $\mathcal{Q}_\square = \{Q \in \mathcal{Q} : \ Q \cap \square \neq \emptyset\}$。关键观察如下。

引理 4.1。 假设对于每个 $\square \in \Gamma$， $\mathcal{Q}^*_\square \subseteq \mathcal{Q}_\square$ 都是最小规模几何集合覆盖实例 （$S_\square$， $\mathcal{Q}_\square$）的一个 c-近似解。那么， $\bigcup_{\square \in \Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$ 就是 *MPGSC* 实例 （S， $\mathcal{Q}$）的一个 O（c）-近似解。

证明。设 $\gamma =$ 为$\bigcup_{\square \in \Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$的层数，且 $p \in \mathbb{R}^2$ 是 $\bigcup_{\square \in \Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$中 γ 个单位正方形所包含的一个点。考虑包含 p 的网格单元 $\square_p$，并将 $\mathcal{C}$ 定义为以$\square_p$为中心的 3×3 个网格单元的集合。注意，所有包含 p 的单位正方形都属于 $\bigcup_{\square \in \mathcal{C}} \mathcal{Q}^*_\square$。因此，我们有 $|\bigcup_{\square \in \mathcal{C}} \mathcal{Q}^*_\square| \geq \gamma$，且 $|$最大值 $_{\square \in \mathcal{C}} \mathcal{Q}^*_\square| \geq \gamma/9$。所以，存在 $\square \in \Gamma$ 使得 $|\mathcal{Q}^*_\square| \geq \gamma/9$。由于 $\mathcal{Q}^*_\square$ 是最小规模集合覆盖实例 $(S_\square, \mathcal{Q}_\square)$ 的一个 c 近似解，我们知道，任何覆盖 $S_\square$ 的 $\mathcal{Q}_\square$ 的子集，其大小至少为 $\gamma/(9c)$。由此可知，任何覆盖 S 的 $\mathcal{Q}$ 的子集都必须包含 $\mathcal{Q}_\square$ 中至少 $\gamma/(9c)$ 个单位正方形。注意，这些单位正方形各自都包含 $\square$的一个角。因此，至少有一个 $\square$ 的角被 $36c$ 个这样的单位正方形所包含（ $\gamma/$），这意味着任何解的层数至少为 $\gamma/(36c)$。因此， $\bigcup_{\square \in \Gamma} \mathcal{Q}^*_\square$ 是 MPGSC 实例 $(S, \mathcal{Q})$ 的一个 $O(c)$-近似解。 □

请注意，上述证明中的论证可以推广到任意固定维度下的任意大小相近的胖对象。如果一组几何对象是大小相近的胖对象，则存在常数 α， $\beta > 0$，使得该集合中的每个对象都包含一个半径为 α 的球，且包含于一个半径为 β的球中。

定理 4.2。 对于 $\mathbb{R}^d$中的任意一类 $\mathcal{C}$ 大小相近的胖对象，如果带有 $\mathcal{C}$ 的最小规模几何集合覆盖问题存在一个运行时间为 $T(n)$ 的常数近似算法，其中函数 T 满足 $T(a+b) \geq T(a) + T(b)$，那么带有 $\mathcal{C}$ 的 *MPGSC* 问题也存在一个运行时间为 $T(n)$的常数近似算法。

证明。设 $(S, \mathcal{R})$ 是一个满足 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}$的 MPGSC 实例。我们使用上述网格技术，将输入实例 $(S, \mathcal{R})$ 分解为一组 $\{(S_\square, \mathcal{R}_\square)\}$ 个实例。然后应用带有 $\mathcal{C}$ 的最小规模几何集合覆盖问题算法，计算关于规模的常数近似解 $\mathcal{R}^*_\square \subseteq \mathcal{R}_\square$。根据引理 4.1， $\bigcup_{\square \in \Gamma} \mathcal{R}^*_\square$ 是 MPGSC 实例 $(S, \mathcal{R})$ 的一个常数近似解。如果最小规模集合覆盖算法的运行时间为 $T(n)$，那么只要函数 T满足 $T(a+b) \geq T(a) + T(b)$，我们的算法也只需 $T(n)$ 时间。 □

定理 1.4。 对于单位（或尺寸相近的）正方形/圆盘的 *MPGSC* 问题，存在常数 $\tilde{}$近似算法，其运行时间为 $O(n)$。

~证明。 对于 $O(n)$-时间的、用于尺寸相近的正方形/圆盘最小规模集合覆盖的常数近似算法早已为人所知。关于尺寸相近的正方形，请参见例如 [1]。关于尺寸相近的~圆盘，请参见例如 [2, 7]。直接应用定理 4.2 可得 $O(n)$-时间的、针对单位正方形和单位圆盘 MPGSC 的常数近似算法。 □

5 结论

本文重新探讨了经典几何集合覆盖问题的自然变体，即最小成员数几何集合覆盖（MMGSC）问题和最小层数几何集合覆盖（MPGSC）问题。我们为使用单位正方形的 MMGSC 提出了一种多项式时间常数近似算法，为使用半平面的 MMGSC 提出了一种多项式时间近似方案（PTAS），并为使用单位正方形（或单位圆盘）的 MPGSC 提出了一种简单的常数近似算法，该算法在近线性时间内运行。我们的算法建立了 MMGSC/MPGSC 与标准最小规模几何集合覆盖之间的联系，这一联系本身可能也具有独立的研究价值。

接下来，我们提出一些关于该主题未来研究的开放问题。首先，我们关于使用单位正方形的 MMGSC 的算法高度依赖于单位正方形的几何性质，因此无法推广到尺寸相近的正方形或单位圆盘等其他设置（而我们的 MPGSC 算法可以推广）。因此，研究使用这些范围的问题很有意义。其次，目前仍不清楚使用半平面的 MMGSC 问题是否为 NP-困难。因此，确定该问题的复杂性是一个重要问题。最后，经典几何集合覆盖问题近期已在动态设置下得到研究 [1, 6, 8, 12], ，其中点或范围可以被插入和删除。自然地，也可以研究 MMGSC 和 MPGSC 的动态版本。

致谢

作者感谢 Qizheng He、Daniel Lokshtanov、Rahul Saladi、Subhash Suri 和 Haitao Wang 就相关问题展开的有益讨论，并感谢匿名审稿人提出的详尽意见，这些意见显著提升了论文的写作质量。

参考文献

[1] Pankaj Agarwal、Hsien-Chih Chang、Subhash Suri、Allen Xiao 和 Jie Xue。动态几何集合覆盖与击中集。*ACM Transactions on Algorithms (TALG)*，18(4):1–37，2022年。7，16

[2] Pankaj K Agarwal 和 Jiangwei Pan。几何击中集与集合覆盖的近线性算法。载于第三十届计算几何年度研讨会论文集，第271–279页，2014年。1，16[3] Boris Aronov、Esther Ezra 和 Micha Shair。用于轴平行矩形和盒的小规模 ε-网。载于第四十一届 *ACM* 计算理论年度研讨会论文集，第639–648页，2009年。1[4] Therese Biedl、Ahmad Biniaz 和 Anna Lubiw。用圆盘和正方形覆盖点的最小重叠度。计算几何，94:101712，2021年。doi:10.1016/j.comgeo.2020.101712。2[5] Herv´e Br¨onnimann 和 Michael T Goodrich。有限 VC 维数下近乎最优的集合覆盖。载于第十届计算几何年度研讨会论文集，第293–302页，1994年。1

[6] Timothy Chan 和 Qizheng He。具有次线性更新时间的几何集合覆盖动态数据结构。计算几何期刊，13(2):90–114，2022年。16[7] Timothy M Chan 和 Qizheng He。更快的几何集合覆盖近似算法。arXiv 预印本 arXiv:2003.13420，2020年。1，16[8] Timothy M Chan、Qizheng He、Subhash Suri 和 Jie Xue。重新探讨动态几何集合覆盖。载于2022年ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，第3496–3528页。SIAM，2022年。16[9] Kenneth L Clarkson 和 Kasturi Varadarajan。改进的几何集合覆盖近似算法。载于第二十一届计算几何年度研讨会论文集，第135–141页，2005年。1[10] Stephane Durocher、J Mark Keil 和 Debajyoti Mondal。用单位正方形覆盖点的最小重叠度。载于WALCOM：算法与计算：第17届国际会议及研讨会，WALCOM 2023，新竹，台湾，2023年3月22日至24日，论文集，第23–35页。施普林格，2023年。2，3[11] Thomas Erlebach 和 Erik Jan van Leeuwen。几何覆盖问题的近似算法。载于 Shang-Hua Teng（编），第十九届 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA 2008，美国加利福尼亚州旧金山，2008年1月20日至22日，第1267–1276页。SIAM，2008年。URL：http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1347082.1347220。2[12] Arindam Khan、Aditya Lonkar、Saladi Rahul、Aditya Subramanian 和 Andreas Wiese。几何集合覆盖与击中集的在线及动态算法。载于第三十九届计算几何年度研讨会论文集，2023年。16[13] Fabian Kuhn、Pascal von Rickenbach、Roger Wattenhofer、Emo Welzl 和 Aaron Zollinger。蜂窝网络中的干扰：最小成员数集合覆盖问题。载于 Lusheng Wang（编），计算与组合学：第11届国际年度会议，CO-COON 2005，中国昆明，2005年8月16日至29日，论文集，计算机科学讲义第3595卷，第188–198页。施普林格，2005年。doi:10.1007/11533719_21。2[14] Joseph SB Mitchell 和 Supantha Pandit。最小成员数覆盖与击中。理论计算机科学，876:1–11，2021年。3[15] Kasturi Varadarajan。通过准均匀采样实现加权几何集合覆盖。载于第四十二届 ACM 计算理论研讨会论文集，第641–648页，2010年。1