arXiv:2305.03992v1 [math.PR] 6 May 2023

神经科学中的电压-电导动力学系统：概率重构与指数遍历性

Xu'an Dou* Fanhao Kong† Weijun Xu‡ Zhennan Zhou §

2023年5月9日

摘要

许多科学家和数学家都研究过神经元集群的电压-电导动力学方程，但对其进行严格分析仍处于初步阶段。在这项工作中，我们首次在线性情形下证明了该动力学模型指数收敛至稳态。我们的证明基于概率重构，这使我们能够考察微观轨迹，并绕过宏观方程中特殊速度场和边界条件所带来的困难。我们构造了一个相应的随机过程，使得证明小化条件变得可行，进而利用Harris定理证明其指数遍历性。

关键词： 积分发放神经元、电压-电导模型、长时间行为、Harris定理、亚强制性

数学主题分类： 35B40,35Q84, 35Q92,37A25,92B20

1 引言

我们考虑一个源自神经科学的动力学方程，称为电压-电导方程。它通过 $p(t,v,g)$ 描述一个神经元群体，其中该函数表示在时间 t 电压为 $v\in(V_R,V_F)$、电导为 $g\in(0,+\infty)$ 的神经元的概率密度。其演化由以下方程支配：

$$\partial_t p+\partial_v(J(v,g)p)=\partial_g((g-g_{\text{in}})p)+a\partial_{gg}p,\quad t>0,v\in(V_R,V_F),g>0. \tag{1.1}$$

该模型最初于 [5, 6] 提出，并在神经科学[4–7, 26, 34, 35] 中作为计算工具或理论框架获得了诸多成功应用。然而，由于其特有的结构，对该模型的数学研究仍处于初步阶段，具体如下所述。

*北京大学北京国际数学研究中心，北京，100871，中国（dxa@pku.edu.cn）

†北京大学数学科学学院，中国北京，100871 (fanhaokong@pku.edu.cn)

‡北京大学北京国际数学研究中心，北京，100871，中国（wei- junxu@bicmr.pku.edu.cn）§北京大学北京国际数学研究中心，北京，100871，中国（zhen- nan@bicmr.pku.edu.cn）。

在 g方向上，方程（1.1）包含半直线上的奥恩斯坦-乌伦贝克（OU）过程所对应的通常福克-普朗克算子，并在 $g=0$处满足无通量或反射边界条件：

$$(g-g_{\text{in}})p + a\partial_g p = 0, \qquad g=0\ ,\ \ v\in(V_R,V_F)\ ,\ \ t>0 \tag{1.2}$$

用于质量守恒。为简便起见，这里将参数 $g_{\text{in}}>0$ 和 $a>0$ 视为常数。在 v方向上，方程结构更为复杂。速度场 J 由下式给出

$$J(v,g) = g_L(V_R-v) + g(V_E-v), \tag{1.3}$$

其中，固定参数满足

$$g_L>0\ , \qquad V_E>V_F>V_R\ . \tag{1.4}$$

在 (1.3) 中，第一项 $g_L(V_R-v)$ 描述泄漏效应，它会使电压降低V_R。这里， $g_L>0$ 是恒定的泄漏电导。第二项 $g(V_E-v)$ 会使电压升至放电电位 V_F。这里， $V_E>V_F$ 是兴奋性反转电位。换言之，速度场体现了两种机制之间的竞争：前者的强度固定为 g_L，后者的强度则由电导变量 g表征。

当神经元的电压达到 V_F时便会产生尖峰，而这仅在 $J(V_F,g)>0$ 时发生，等价地说，$g>g_F:=g_L(V_F-V_R)/(V_E-V_F)$。在这种情况下，尖峰产生后，电压会立即重置为 V_R。这将导出边界条件

$$J(V_R,g)\,p(t,V_R,g) = J(V_F,g)\,p(t,V_F,g), \quad g>g_F\ , \tag{1.5}$$

在 $v=V_R$和 $v=V_F$处使通量相等。另一方面，对于 $0<g\le g_F$，有 $J(V_R,g)>0$且 $J(V_F,g)\le 0$。因此我们施加狄利克雷边界条件

$$0 = p(t,V_R,g) = p(t,V_F,g), \quad g\le g_F. \tag{1.6}$$

请注意，通量相等条件 (1.5) 实际上对所有 $g>0$ 都成立，但边界条件的类型会随着 $J(V_F,g)$ 符号的变化而改变。示意见图1。

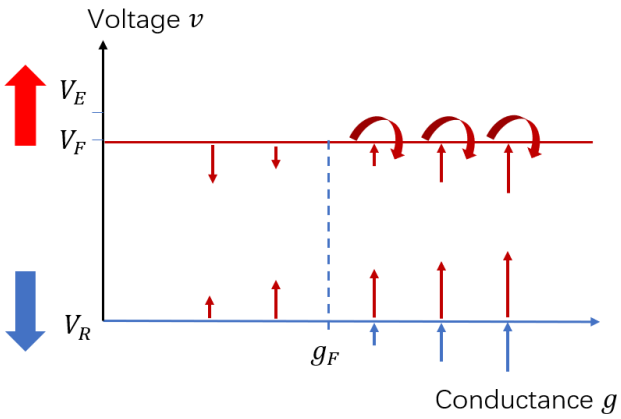

图1： v中的速度场 $J(v,g)$ 与边界条件示意图。红色箭头表示速度场 J。蓝色箭头表示电压 v 在 $\{g>g_F\}$中到达 V_F 后重置为 V_R。对于 $g\le g_F$，施加零狄利克雷边界条件。

我们为该系统补充一个初始条件

$$p(0,v,g) = p_{\text{init}}(v,g), \tag{1.7}$$

假设该初始条件是一个概率密度。边界条件 (1.2)、(1.5) 和 (1.6) 确保 p 的总质量在动力学过程中守恒。

关于该系统全面的生物学解释，请参阅 [5] 。注意，若将$g_{\text{in}} > 0$ 和 $a > 0$ 视为固定常数，方程便简化为线性情形。在更一般的情况下，这两个参数可以依赖于时间，甚至以非线性方式依赖于解 p 。非线性可能引发多种现象，例如 [3]中通过数值计算观察到的周期解。尽管如此，即使在线性情形下， v中的速度场和边界条件也已给严格分析带来困难。

在电压-电导方程（1.1）数学分析领域的一项开创性工作（[31]）中，作者研究了稳态问题，并为动力学问题推导出若干全局界。此后的研究进展可分为两条路径：一是直接研究（1.1）的线性结构 [16, 17], ，二是研究非线性但经过简化的模型 [9, 25, 32]。具体而言， [25, 32], 研究了若干渐近极限及其极限模型，而 [9] 则完整刻画了一个变体模型的长时间行为，其研究动机是理解原始模型中周期解的出现。在上述所有工作中， v中的动力学，尤其是边界条件（1.5）—（1.6），都经过了简化。为了说明即使在线性情形下原方程也存在困难，我们指出：在 [31], 中获得稳态的 $L^{(8/7)^-}$ 可积性后，直到最近的 L^∞ 估计 [16]出现之前，可积性指标才得到改进。

本文的主要目标是探讨线性方程 (1.1) 的解指数收敛到稳态的问题；自 [31] 以来，这一直是一个悬而未决的问题。在 [31], 中，仅证明了 g 边缘分布的收敛。近期， [16] 通过紧性方法证明了完整解 $p(t,\ v,\ g)$ 的定性收敛，但没有给出收敛速率。 [17] 提出并研究了一个简化模型，并通过预解式估计进行分析。据我们所知，此前尚不清楚方程 (1.1) 的解是否会以指数速度收敛到稳态。

为说明其中的困难，我们注意到，方程 (1.1) 中的扩散仅出现在 g 方向，而在 v 方向上只有对流项 $\partial_v(J(v,\ g)p)$。这种情形类似于经典的动理学福克-普朗克方程，其中电压 v 类似于位置变量，而电导 g 类似于速度变量。要证明解收敛到平衡态，需要利用 v 方向上的对流与 g 方向上的扩散之间的相互作用，这种相互作用可能会将耗散从 g 方向“传递”到 v 方向。当然，这并非新的挑战，因为它出现在许多经典动理学模型的分析中，称为亚强制性 [38]。事实上，文献中已发展出各种次椭圆性方法，用于研究动理学模型 [1, 14, 19, 38] 向平衡态的收敛。然而，由于方程 (1.1) 具有特定结构，现有的许多次椭圆性方法似乎难以应用于该方程。

方程 (1.1) 与许多经典动理学模型的不同之处在于其速度场 $J(v,\ g)$ 以及 v 中的边界条件 (1.5)-(1.6)。根据 (1.3) 的定义，速度场 $J(v,\ g)$ 无法写成类似 $f(v)h(g)$ 的可分离形式，因此带来了若干困难。最重要的是，这使得稳态不具有局部平衡结构。具体而言，稳态 $p_\infty(v,\ g)$ 无法写成可分离形式 $\theta(v)M(g)$，其中 $M(g)$ 属于 g 中的福克-普朗克算子的核（在经典动理学模型中有时称为局部麦克斯韦分布）。因此，基于局部平衡的次椭圆性方法无法应用于 (1.1)。

与 $J(v,\ g)$ 密切相关的是， v 中的边界条件（(1.5) 和 (1.6)）也带来了诸多困难。这些边界条件使现有的超强制性方法无法适用，因为这些方法仅适用于全空间或周期域上的问题。

我们指出，这些困难不仅出现在技术层面，而且对动力学也至关重要，例如对非线性情形下周期解的出现至关重要。事实上，一旦$J(v,\ g)$被简化为 $g(V_E - v)$（即去除泄漏机制，并相应简化边界条件）， [9] 便排除了在由此得到的非线性但经过简化的模型中存在周期解的可能性。因此，研究原始线性方程 (1.1) 发挥着一种重要作用。

i在理解非线性情形中的各种引人入胜的动力学方面发挥重要作用 e.

本文旨在通过概率重构，证明电压-电导方程 (1.1) 指数收敛到稳态。概率方法的优势在于利用微观轨迹的遍历性，从而有助于绕过应用宏观偏微分方程方法时遇到的上述困难。

更具体地说，我们构造了一个随机过程，可将其视为对 (1.1) 的微观描述。该过程的概率密度给出了 (1.1)-(1.7) 的一个弱解，这类似于随机微分方程与其福克-普朗克方程之间的经典联系。对于所构造的过程，我们将验证 Harris定理的条件，由此可推出其密度指数收敛到稳态。我们的主要结果如下。

定理1.1 (主要结果**)**。 对于在 (2.1)-(2.4) 中构造的随机过程，其概率分布 $(\mu_t)^{t\geq 0}$是按定义 *3.1* 所定义的 (1.1)-(1.7) 的一个弱解。此外，我们有如下指数收敛

$$\|\mu_t - \pi\|_\beta \leq Ce^{-\lambda t}\|\mu_0 - \pi\|_\beta, \quad t \geq 0, \tag{1.8}$$

收敛到唯一的不变测度 π，其中 $\|\cdot\|_\beta$ 是（4.3）中定义的加权全变差范数， C、 λ 和 β 是与初始数据 μ_0无关的正常数。

我们的概率重构确实与[5], 中考虑的随机过程密切相关，该过程是推导（1.1）的科学动机。然而，据我们所知，在我们的工作之前，文献 [9, 16, 17, 25, 31, 32] 中对（1.1）的数学分析侧重于偏微分方程，并未采用概率视角。尽管如此，我们注意到，对于其他一些神经元模型（例如NNLIF模型 [2, 12, 28]），偏微分方程和概率方面都已有研究。

Harris定理是研究马尔可夫过程 [21, 22, 30]收敛性的经典工具。它给出了获得指数收敛的充分条件。特别是，需要满足小化条件，这大致意味着：对于给定紧集中的初始数据，解具有一致下界。近年来，Harris定理已成功应用于许多源自物理学和生物学的动力学方程（[8, 10, 36, 39]），其条件通过对时间演化半群进行偏微分方程估计得到验证。尽管如此，似乎很难仅通过偏微分方程论证来验证（1.1）的小化条件，这促使我们转而研究相应的随机过程。值得注意的是，早期研究（[29]）已从随机过程的视角探讨了动理学模型的指数收敛。对于我们的情形，为了获得小化条件，我们设计了特殊策略，利用速度场结构以及随机过程的跳跃机制；后者是对边界条件（1.5）—（1.6）的微观反映。

本文其余部分安排如下。第2节中，我们构造一个随机过程；第3节中，我们还将建立该过程与（1.1）之间的联系。第4节用于证明该随机过程的指数遍历性。第5节总结全文并讨论未来的研究方向。附录A简要介绍H¨ormander定理。

为简化记号，在本文余下部分中，我们固定参数

$$V_R = 0,\, V_F = 1, \quad a = g_{\text{in}} = 1. \tag{1.9}$$

这种简化并非我们分析所必需的。请注意，我们将 $g_L(>0)$和 $V_E(>V_F=1)$保留为未指定的参数。

2 概率表述：一个相关过程

为了证明其指数收敛至 (1.1) 的平衡态，我们首先从概率视角对其进行重新表述。为此，我们构造一个更新型随机过程，其福克-普朗克方程由 (1.1)-(1.7) 给出。

我们将该随机过程记为 $(V_t,\ G_t)_{t\geq 0}$，其中 V_t 对应电压变量v ， G_t 对应电导变量 g。其动力学由以下带有 V_t更新的随机微分方程构造。

$$dV_t = J(V_t, G_t)dt, \qquad \text{when } V_t \in [0,1), \tag{2.1}$$
$$V_{t-} = 1, \quad \Rightarrow \text{ set } V_t = 0, \tag{2.2}$$
$$dG_t = -(G_t - 1)dt + \sqrt{2}dB_t + dL_t, \tag{2.3}$$

初始条件为

$$(V_0, G_0) \sim \mu_0, \tag{2.4}$$

其中， μ_0 是定义在状态空间 $\mathcal{X}$ 上的概率测度，由下式给出

$$\mathcal{X} := [0,1) \times [0, +\infty). \tag{2.5}$$

在式（2.3）中，局部时间 $\{L_t\}_{t\geq 0}$ 是满足 $L_0 = 0$ 的最小非递减过程，它确保对每个 $t \geq 0$都有 $G_t \geq 0$ 。注意，只有当 $G_t = 0$时， L_t 才会在时间 t 增加，这对应于原点处的反射边界。由于当 $G_t > 0$时，式（2.3）中的“dL_t”一项不起作用，因此G_t 在 $\{t$上仅表现为普通的奥恩斯坦-乌伦贝克（OU）过程： $G_t > 0\}$。由此可知，式（2.3）给出了一个定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的 OU 过程，其原点处具有反射边界条件（例如参见 [11, 20]）。注意， G_t 的演化不依赖于 V_t。

V_t 的动力学由两种机制支配。当 $V_t \in [0,1)$ 时，对于 G_t轨迹的每个实现，式（2.1）确实给出了一个常微分方程

$$\frac{dV_t}{dt} = J(V_t, G_t) = -g_L V_t + G_t(V_E - V_t)\ , \quad \text{when } V_t \in [0,1)\ . \tag{2.6}$$

另一方面，当 V_t 在时间上的左极限趋近于 1，即 $V_{t-} := \lim_{s\to t-} V_s = 1$ 时，根据 (2.2)，我们设定 $V_t = 0$ 并重新初始化常微分方程 (2.6)。$(V_t,\ G_t)$ 的典型轨迹见图 2。

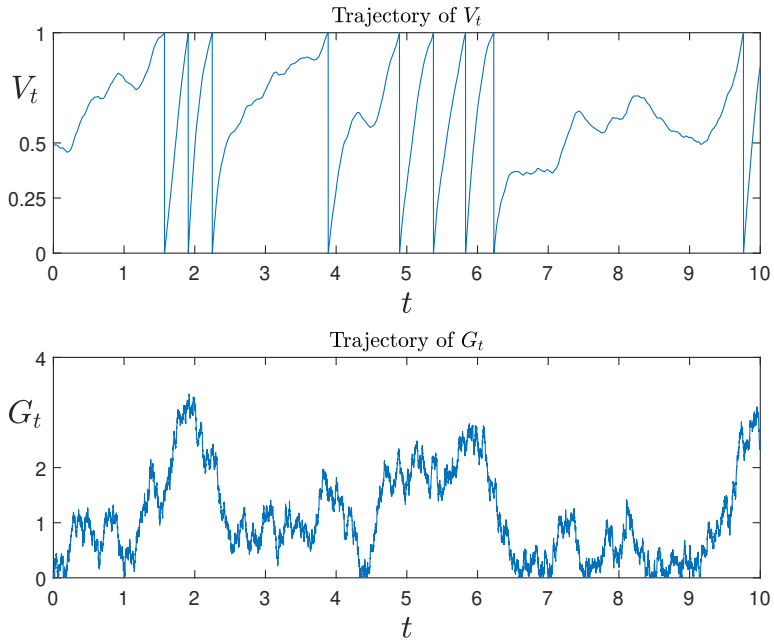

图 2：通过数值模拟得到的 $(V_t,\ G_t)$ 的典型轨迹。参数： $g_L = 1$， $V_E = 2$，其他参数与 (1.9) 中相同。

我们将 V_t 发生跳跃的时刻 t 称为跳跃时刻或尖峰时刻。从生物学角度看，当神经元的电压达到阈值 $V_F = 1$ 时，就会产生尖峰。尖峰之后，其电压会重置为 $V_R = 0$。“更新条件”(2.2)可视为尖峰重置机制的一种体现。实际上，随机微分方程系统 (2.1)-(2.3) 与 [5, 6], 中研究的粒子系统密切相关，而该粒子系统正是考虑偏微分方程 (1.1) 的物理动机。

我们首先给出 (2.1)-(2.4) 的（逐路径）整体适定性。

定理 2.1. 对于任意初始数据 μ_0（其为 $\mathcal{X}$ 上的概率测度），随机微分方程系统(2.1)-(2.4) 的解对所有时间 $t \geq 0$ 均存在，并且几乎必然具有逐轨迹唯一性。

证明. $(G_t)_{t\geq 0}$ 的整体适定性显然成立，因为 (2.3) 给出了一个标准的反射 OU 过程（例如参见 [11, 20]）。此外， G_t 几乎必然具有连续轨迹。

剩下需要研究 $(V_t)_{t\geq 0}$。根据常微分方程的结构，我们先在 $V_t \in [0, 1)$ 时求解 (2.6)，并在 $V_{t^-} = 1$ 时重置 $V_t = 0$ ，然后重复这一过程。要证明整体存在性，只需证明任意有限时间区间内不会出现无限多个跳跃时刻，这样我们就可以无限次重复上述分段构造。这种情况类似于 [13, 引理 3.3]。令$\tau_0 = 0$。对于 $k \geq 1$，令 τ_k 为第 k 个跳跃时刻，其定义如下:

$$\tau_k := \inf \left\{ t > \tau_{k-1} : \lim_{s\to t^-} V_s = 1 \right\} . \tag{2.7}$$

因此，只需证明

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to+\infty} \tau_k = +\infty \right) = 1. \tag{2.8}$$

对于固定的 $N > 0$，如果对于每个 $k \geq 0$ 都有 $\tau_k \leq N$，那么根据（2.1）以及 $J(v,\ g) \leq gV_E$，我们有

$$\tau_k - \tau_{k-1} \geq \frac{1}{\max_{0\leq t\leq N} J(V_t, G_t)} \geq \frac{1}{V_E \max_{0\leq t\leq N} G_t} . \tag{2.9}$$

（2.9）中的最后一个量趋于 0，当且仅当 $\max_{0\leq t\leq N} G_t = +\infty$。因此，我们得到

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{k\to+\infty} \tau_k \leq N \Big) = \mathbb{P}\Big(\lim_{k\to+\infty} \tau_k \leq N, \lim_{k\to+\infty} (\tau_k - \tau_{k-1}) = 0 \Big) \leq \mathbb{P}\Big(\max_{0\leq t\leq N} G_t = +\infty \Big) = 0.$$

令 $N \to +\infty$ 趋于无穷，即可得到（2.8）。 □

接下来，我们将在第3节中建立随机过程（2.1）—（2.4）与偏微分方程（1.1）—（1.7）之间的联系。并将在第4节中证明随机微分方程（2.1）—（2.4）向稳态的指数收敛。

3 从过程到其福克-普朗克方程

为论证上一节引入的概率重构，我们将推导出 (1.1)-(1.7) 是 (2.1)-(2.4) 的福克-普朗克方程。更确切地说，我们将证明 (V_t, G_t) 的概率分布给出了偏微分方程 (1.1)-(1.7) 的一个弱解。

在第 3.1 节中，我们介绍弱解的定义（定义 3.1），讨论其基本性质（命题 3.1 和 3.2），并说明它与随机微分方程 (2.1)-(2.4) 的联系（定理 3.1）。部分证明将在第 3.2 节和第 3.3 节给出。

我们将生成元 $\mathcal{L}$ 定义为

$$\mathcal{L}u = \partial_{gg}u + (1 - g)\partial_g u + J\partial_v u . \tag{3.1}$$

因此，其伴随算子 $\mathcal{L}^*$ 为

$$\mathcal{L}^*u = \partial_{gg}u - \partial_g((1 - g)u) - \partial_v(Ju) .$$

3.1 福克-普朗克方程：弱形式

下面给出（1.1）—（1.7）的弱解定义。

定义 3.1 （(1.1)-(1.7) 的弱解）。 设 $(\mu_t)^{t\geq 0}$ 是由$[0,1) \times [0,+\infty)$ 索引的一族概率测度。若以下条件成立，则称$(\mu_t)^{t\geq 0}$ 是具有初始数据μ_0 的(1.1)-(1.7) 的弱解:

1. 对每个 $t > 0$， μ_t 都关于 $\mathcal{X} =[0,1) \times [0,+\infty)$上的勒贝格测度绝对连续。

2. 我们有如下恒等式

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(T,v,g)\mu_T(dv,dg) = \int_{\mathcal{X}} \phi(0,v,g)\mu_0(dv,dg) + \int_0^T \int_{\mathcal{X}} (\partial_t + \mathcal{L})\phi(t,v,g)\mu_t(dv,dg)dt, \quad (3.2)$$

for 对每个 $T > 0$ 和 $\phi \in \mathbf{\Phi}$ 均成立。这里，可容许的检验函数类 $\mathbf{\Phi}$ 定义如下:

$$\mathbf{\Phi} := \left\{\phi(t,v,g) \in \mathcal{C}_c^\infty\big([0,+\infty) \times \mathcal{X}\big) \,:\, \phi(t,0,g) = \phi(t,1,g),\ \partial_g\phi(t,v,0) = 0\right\}. \quad (3.3)$$

注 3.1。 对检验函数 ϕ 施加(3.3) 这一限制，反映了边界条件。我们将在关于命题 *3.2* 的讨论以及定理 *3.1* 的证明中更清楚地看到这一点。需要注意的是，对于(t,v,g)，定义域 $[0,+\infty) \times \mathcal{X}$包含边界 $\{t = 0\}$ 和 $\{g = 0\}$。因此， ϕ 在该定义域中具有紧支集，并不意味着 $\phi(t,v,0) = 0$ （我们也不要求这一点）。事实上，为确保边界条件(1.2)成立，我们需要允许检验函数在 $g = 0$ 处取任意值。

在说明定义 3.1 与随机过程 (2.1)-(2.4) 的联系之前，我们先给出两个命题来阐明定义 3.1。第一个命题将表明，通过限制在适当的检验函数上，第二个条件 (3.2) 在分布意义下蕴含 (1.1)。此外，由于亚椭圆性，第二个条件本身也保证了 μ_t 的内部 正则性，这意味着方程 (1.1) 确实在经典意义下成立。

命题 3.1。 设 $(\mu_t)^{t\geq 0}$ 是定义在 $[0,1)\times[0,+\infty)$ 上的一族概率测度，满足 (3.2)。那么 μ_t 在 $(0,1) \times (0,+\infty)$ 内是一个 $\mathcal{C}^\infty$ 函数。更准确地说，存在一个光滑的非负函数 $p \in \mathcal{C}^\infty\big((0,+\infty) \times (0,1) \times (0,+\infty)\big)$，使得对于每个 $t > 0$，都有

$$\mu_t(A) = \int_A p(t,v,g)dvdg, \qquad \textit{for all measurable } A \subseteq (0,1) \times (0,+\infty). \quad (3.4)$$

此外，方程(1.1) 在经典意义下成立。

证明。 我们将弱形式 (3.2) 限制在 $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,+\infty) \times (0,1) \times (0,+\infty)) \subset \mathbf{\Phi}$ 上，得到

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{X}} (\partial_t + \mathcal{L})\phi(t,v,g)\mu_t(dv,dg)dt = 0, \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,+\infty) \times (0,1) \times (0,+\infty)). \quad (3.5)$$

这恰好说明 μ_t 在分布意义下满足方程 (1.1)，即

$$(\partial_t - \mathcal{L}^*)\mu_t = 0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'\big((0,+\infty) \times (0,1) \times (0,+\infty)\big). \quad (3.6)$$

回顾一下，若算子 K 满足：对任意开集 $U \subseteq \Omega$， $Ku \in \mathcal{C}^\infty(U)$ 蕴含 $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$，则称其在区域 Ω 中是亚椭圆的。根据 H¨ormander 定理， $\partial_t - \mathcal{L}^*$ 是亚椭圆的（更多细节请参见引理 A.1）。因此，由 (3.6) 可推知， μ_t 确实具有光滑内部密度 p。结合 (3.6)，我们得出 (1.1) 在经典意义下确实成立。

□

鉴于命题 3.1 给出的内部正则性，定义 3.1 中第一个条件的主要作用是确保边界 正则性，即 μ_t 在 $v=0$ 或 $g=0$处不奇异。

尽管定义 3.1 中没有明确写出边界条件 (1.2)、(1.5) 和 (1.6)，但它们实际上已蕴含在测试函数类 (3.3) 中。形式上，对 (3.2) 中最后一项进行分部积分，并利用 (3.3) 中测试函数的边界约束，即可得到这些边界条件。特别地，第一个约束 $\phi(t,\ 0,\ g)=\phi(t,\ 1,\ g)$ 对应于 $v=0$ 处的边界条件，而第二个约束 $\partial_g\phi(t,\ v,\ 0)=0$ 对应于 $g=0$ 处的边界条件。下面给出严格的表述。

命题 3.2。 设 $(\mu_t)^{t\geq 0}$ 是满足定义 *3.1* 中条件的方程 (1.1)-(1.7) 的一个弱解。记其内部密度函数为 $p(t,v,g)$。则 $v\,(1.5)$-(1.6) 中的边界条件在以下意义下成立：对于任意检验函数 $\psi(t,g)\in\mathcal{C}_c^\infty\big((0,+\infty)\times(0,+\infty)\big)$，有

$$\lim_{v\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}J(v,g)p(t,v,g)\psi(t,g)dtdg=\lim_{v\to 1^-}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}J(v,g)p(t,v,g)\psi(t,g)dtdg, \tag{3.7}$$

其中两个极限均存在且有限。此外，若 $\psi\geq 0$ 的支集包含于 $(0,+\infty)\times(0,g_F)$，则(3.7) 中的两个极限均为0。

这里我们仅陈述 v 边界条件下的情形，因为这是该问题的独特之处，而g 方向的情形类似。命题 3.2 的证明将推迟到第 3.3 节。

注意，命题 3.2 仅假设 $(\mu_t)^{t\geq 0}$ 满足定义 3.1，而命题 3.1 仅假设 $(\mu_t)^{t\geq 0}$ 满足 (3.2)。特别地，它们均未假设 $(\mu_t)^{t\geq 0}$与过程 $(V_t,\ G_t)$之间存在任何关系。

接下来，我们将讨论过程 $(V_t,\ G_t)$。首先，我们有以下关于其边界行为的命题。其证明推迟至第 3.2 节。

命题 3.3. 设 $(V_t,G_t)^{t\geq 0}$ 为 (2.1)-(2.4)的解。那么我们有

$$\mathbb{P}\left(V_t=0\right)=\mathbb{P}\left(V_{t^-}=1\right)=0,\qquad t>0, \tag{3.8}$$

and

$$\mathbb{P}\left(G_t=0\right)=0,\qquad t>0. \tag{3.9}$$

现在我们可以建立随机过程 (2.1)-(2.4) 与偏微分方程 (1.1)-(1.7) 之间的关系。以下定理给出了这一结果。

定理 3.1. 设$(V_t,G_t)^{t\geq 0}$ 为定理 *2.1* 中建立的随机微分方程(2.1)-(2.4) 的唯一解。记(V_t,G_t) 的概率分布为 μ_t。则$(\mu_t)^{t\geq 0}$ 是(1.1)-(1.7) 的弱解，其初始数据为μ_0，这里的弱解按定义 *3.1* 的意义理解。

证明。第一部分：弱形式。 首先，我们证明 μ_t 满足弱形式 (3.2)，即定义 3.1 中的第二个条件。对于 $\phi(t,v,g)\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$，根据带跳半鞅的伊藤公式（例如参见 [33, 定理 2.33]），可得

$$\begin{aligned}\phi(T,V_T,G_T)-\phi(0,V_0,G_0)=&\int_0^T(\partial_t+\mathcal{L})\phi(t,V_{t-},G_t)dt+\sqrt{2}\int_0^T\partial_g\phi(t,V_{t-},G_t)dB_t\\&+\int_0^T\partial_g\phi(t,V_{t-},G_t)dL_t+\sum_{k\geq 1:\ \tau_k\leq T}\big(\phi(\tau_k,0,G_{\tau_k})-\phi(\tau_k,1,G_{\tau_k})\big)\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中， τ_k 是(2.7)中定义的沿 v 方向的第 k个跳跃时刻。注意，(3.10)右端的前两项出现在通常的伊藤公式中，而关于 k局部时间的积分项之所以出现，是因为存在沿 k方向的反射边界；

最后一项之所以出现，是因为 V_t 在 v方向的边界处从1跳变为0。

然后，我们 限制 (3.3) 中定义的 $\phi \in \mathbf{\Phi}$ ，以消去 (3.10) 中后两个项，并推导出

$$\phi(T, V_T, G_T) - \phi(0, V_0, G_0) = \int_0^T (\partial_t + \mathcal{L})\phi(t, V_t, G_t)dt + \sqrt{2}\int_0^T \partial_g \phi(t, V_{t-}, G_t)dB_t \tag{3.11}$$

事实上，对于 $\phi \in \mathbf{\Phi}$，跳跃项之和为零，因为 $\phi(t, 0, g) = \phi(t, 1, g)$；而关于局部时间过程 L_t 的积分也为零，因为只有当 $G_t = 0$ 时， L_t 才会发生变化，但对于 $\phi \in \mathbf{\Phi}$，$(\partial_g \phi)(t, v, 0) = 0$。对 (3.11) 两边取期望，即得 (3.2)。

第二部分： 的正则性 μ_t。现在我们验证定义 3.1 中的第一个条件。由于 μ_t 满足 (3.2)，我们可以应用命题 3.1，得到 (3.4) 中给出的 μ_t 的内部正则性。结合上述内部正则性和命题 3.3，我们立即推出 μ_t 关于 $[0, 1) \times [0, +\infty)$ 上的勒贝格测度绝对连续。 □

本节其余部分安排如下。第 3.2 节旨在证明命题 3.3，从而完成定理 3.1 的证明。在第 3.3 节中，我们从定义 3.1 出发，明确推导出边界条件，即证明命题 3.2。

3.2 边界正则性：命题 3.3 的证明

本节旨在证明命题 3.3 中的边界正则性。我们仅详细证明 (3.8)，因为 (3.9) 是反射 OU 过程的一项标准性质（例如参见 [11, 20]）。

对于内部正则性（命题 3.1），我们利用算子 $\partial_t - \mathcal{L}^*$ 的亚椭圆性，这归功于 H¨ormander 定理。由于亚椭圆性是一种局部性质，直接应用 H¨ormander 定理并不能推出边界行为。为证明命题 3.3 中的边界正则性，我们在 (3.12) 中引入一个辅助过程，将 v 的定义域扩展到 (0，1) 之外。

考虑马尔可夫过程 $\widehat{V}_t$ 无跳跃时，表示为

$$d\widehat{V}_t = J(\widehat{V}_t, G_t)dt, \quad \widehat{V}_0 = V_0, \qquad \widehat{V}_t \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

注意， $J(v, g) = -g_L v + g(V_E - v)$ 对所有 $v \in \mathbb{R}$ 都有自然定义。过程 (3.12) 仅仅是去掉更新条件 (2.2) 后的 (2.1) 中的 V_t。由于 v-定义域得到了扩展， $v = 1$ 成为 V_t 的一个内部点，因此我们可以应用 H¨ormander 定理。

我们首先给出这是根据定理 A.1 给出的亚椭圆性，应用于引理 3.1 中。

引理 3.1. 对每个 $(v_0, g_0) \in \mathcal{X}$，以初始数据 $(V_0, G_0) = (v_0, g_0)$的(V_t, G_t) 分布具有密度 $\widehat{\rho}^{v_0, g_0}_t(v, g)$ ，其中 $t > 0$，且映射

$$(t, v_0, g_0, v, g) \mapsto \widehat{\rho}^{v_0, g_0}_t(v, g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times (0, V_E) \times \mathbb{R}^+ \times (0, V_E) \times \mathbb{R}^+).$$

证明。 证明过程与 [18, 定理 4.3]基本相同。区别在于，(V_t, G_t) 的状态空间 $\widehat{\ }$在 g 方向上具有反射边界。我们仅详细说明关于 (t, v, g) 的连续性，以展示针对反射 OU 过程所作的计算修改。

对每个 $T > 0$ 以及每个光滑函数 ϕ，满足 $\partial_g \phi(t, v, 0) = 0$，且在$\mathcal{C}^\infty_c((0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 内具有紧支集，由 Itô 公式可得

$$0 = \phi(T, \widehat{V}_T, G_T) = \int_0^T (\partial_t + \mathcal{L})\phi(t, \widehat{V}_t, G_t)dt + \int_0^T \partial_g \phi(t, \widehat{V}_t, G_t)dL_t + \sqrt{2}\int_0^T \partial_g \phi(t, \widehat{V}_t, G_t)dB_t. \tag{3.13}$$

再次注意，局部时间 L_t 仅在 $G_t = 0$ 时增加，因此含有局部时间过程的项几乎必然消失。对式 (3.13) 两边取期望并分部积分，可得

$$\langle \phi(t,v,g), (-\partial_t + \mathcal{L}^*)\widehat{\rho}_t^{v_0,g_0}(v,g)\rangle_{t,v,g} = 0.$$

根据 ϕ 的选取，

$$(\partial_t - \mathcal{L}^*)\widehat{\rho}_t^{v_0,g_0} = 0$$

在区域 $(0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 中以分布意义成立。根据引理 A.1，$\partial_t - \mathcal{L}^*$ 在 $(0,T) \times (0, V_E) \times \mathbb{R}^+$中是亚椭圆的，这意味着映射 $(t,v,g) \mapsto \widehat{\rho}^{v_0,g_0}_{t}(v,g)$ 在同一区域内是光滑的。因此，所需结果成立，因为 $T > 0$ 是任意的。

类似地，关于初始数据 (v_0, g_0) 的连续性，可以由分布意义下的 Kolmogorov 后向方程以及 $\partial_t + \mathcal{L}$ 的亚椭圆性（由引理 A.1 给出）得到。对于 Kolmogorov 后向方程的证明，我们可以按照上述方式修改 [18, 定理 4.3] 中的细节，以处理由 g-方向上的反射边界所引起的局部时间项。 □

注意到，V_t 的随机微分方程与 (2.1) 形式相同，唯一不同的是 V_t 在趋近 1 时会跳至 0。在 (2.7) 中定义的 V_t 的首次跳跃时间 τ_1 之前，这两个过程相同。因此我们有

$$\widehat{V}_{(t\wedge\tau_1)^-} = V_{(t\wedge\tau_1)^-}. \tag{3.14}$$

现在我们来证明命题 3.3。如前所述，反射 OU 过程的 g-边界正则性 (3.9) 是标准结果（例如参见 [11, 20]）。剩下需要证明 v-边界正则性 (3.8)。

命题 *3.3* 的证明。我们首先注意到，对于 $t > 0$，事件 $\{V_t = 0\}$ 是两个不相交事件 $\{V_{t^-} = 1\}$ 和 $\{V_{t^-} = 0\}$的并。因此，我们有

$$\mathbb{P}(V_t = 0) = \mathbb{P}(V_{t^-} = 1) + \mathbb{P}(V_{t^-} = 0), \qquad t > 0. \tag{3.15}$$

如果 $V_{t^-} = 0$，我们可以推知，V 在t的某个左邻域内遵循常微分方程 (2.1) 的演化。这意味着 $G_t = 0$，因为对于每个 $g > 0$，$J(0, g) > 0$。因此 $\{V_{t^-} = 0\} \subseteq \{G_t = 0\}$，由 (3.9) 可知其概率为零。由 (3.15)，我们得到

$$\mathbb{P}(V_t = 0) = \mathbb{P}(V_{t^-} = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_k = t),$$

w这里，τ_k 是在 (2.7) 中定义的第 k 个跳跃时刻。接下来只需证明对于每个 $k \in \mathbb{N}^+$，$\mathbb{P}(\tau_k = t) = 0$。

我们首先考虑 $k = 1$。由于在 τ_1 之前，V_t 与 V_t 具有相同的轨迹，根据 (3.14)，我们有

$$\mathbb{P}(\tau_1 = t) \le \mathbb{P}(\widehat{V}_t = 1)\ .$$

由于 $v = 1$ 是 $(0, V_E)$ 的一个内点，引理 3.1 表明

$$\mathbb{P}(\widehat{V}_t = 1) = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{P}^{v_0,g_0}(\widehat{V}_t = 1)\mu_0(dv_0, dg_0) = 0,$$

其中 $\mathbb{P}^{v_0,\ g_0}$ 是以 $(V_0, G_0) = (v_0, g_0)$ 为条件的概率测度。因此，$\mathbb{P}(\tau_1 = t) = 0$.

现在我们转向 $k \ge 2$。记在 $\{V_0 = v, G_0 = g\}$ 条件下（τ_1，G_{τ_1}）的分布为$\mathcal{T}^{v,\ g}$，它描述了首次跳跃时间及位置的联合分布。根据强马尔可夫性质，在（τ_j，G_{τ_j}）条件下（$\tau_{j+1} - \tau_j$，$G_{\tau_{j+1}}$）的联合概率分布不依赖于τ_j的取值，并且恰好为 $\mathcal{T}^{0,\ G_{\tau_j}}$。现在，我们通过在时间 τ_1处截断轨迹来计算概率 $\mathbb{P}(\tau_k = t)$。更准确地说，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_k = t) &= \int_{\mathcal{X}} \mathbb{P}^{v_0,g_0}(\tau_k = t)\mu_0(dv_0, dg_0) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \int_{0<t_1<t} \int_{g_1>0} \mathbb{P}(\tau_k - \tau_1 = t - t_1 | G_{\tau_1} = g_1)\mu_0(dv_0, dg_0)\mathcal{T}^{v_0,g_0}(dt_1, dg_1).\end{aligned}$$

由此继续　　按照此过程，我们在时间τ_j处截断轨迹，并依次对 $2 \le j \le k-1$ 进行处理，以获得 t

$$\mathbb{P}(\tau_k = t) = \int_{\mathcal{X}} \int_{0<\sum_{j=1}^{k-1} t_j<t} \int_{\vec{g}\in(\mathbb{R}^+)^{k-1}} \mathbb{P}\left(\tau_k - \tau_{k-1} = t - \sum_{j=1}^{k-1} t_j \middle| G_{\tau_{k-1}} = g_{k-1}\right)$$
$$\mu_0(dv_0, dg_0)\mathcal{T}^{v_0,g_0}(dt_1, dg_1)\prod_{j=2}^{k-1}\mathcal{T}^{0,g_{j-1}}(dt_j, dg_j),$$

whe，得到 $\vec{g} = (g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_{k-1})$。根据强马尔可夫性质以及 $\mathbb{P}(\tau_1 = t) = 0$，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\tau_k - \tau_{k-1} = t - \sum_{j=1}^{k-1} t_j \middle| G_{\tau_{k-1}} = g_{k-1}\right) = \mathbb{P}^{0,g_{k-1}}\left(\tau_1 = t - \sum_{j=1}^{k-1} t_j\right) = 0$$

对于 $t - \sum_{j=1}^{k-1} t_j > 0$。因此，对于每个 $k \in \mathbb{N}^+$，我们得到 $\mathbb{P}(\tau_k = t) = 0$。 □

3.3 De推导边界条件：命题 3.2 的证明

我们已证明，$(V_t,\ G_t)$ 的概率分布给出了定义 3.1 中定义的 (1.1)-(1.7) 的一个弱解。现在，我们从一个弱解出发，按照命题 3.2 的意义明确推导边界条件。为此，我们需要定义 3.1 的以下推论。特别地，这里用到了 μ_t 在边界 $v = 0$ 和 $v = 1$处不奇异这一点。

引理 3.2. 设 $(\mu_t)^{t\ge 0}$ 是按照定义 *3.1* 意义下的 (1.1) 和 (1.2)-(1.7) 的弱解。对于 $t > 0$，记 μ_t 的密度为 $p(t, v, g)$。令

$$q(t,g) := \int_0^1 p(t,v,g)dv = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^{1-\epsilon} p(t,v,g)dv, \quad t > 0,\ g > 0.$$

是 g 中的边缘密度。那么，对所有 $\psi(t, g) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$，有

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \big(\partial_t - (g-1)\partial_g + \partial_{gg}\big)\psi(t,g)q(t,g)dtdg = 0. \tag{3.16}$$

换言之，q 满足方程

$$\partial_t q = \partial_g((g-1)q) + \partial_{gg}q\ , \quad (t,g) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{3.17}$$

i在弱意义下，这就是反射 *OU* 过程 G 的福克-普朗克方程　　.

证明。根据定义 3.1，对于每个 $t > 0$，μ_t 关于勒贝格测度绝对连续，其密度为 p。因此，我们可以将 (3.2) 改写为

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(T,v,g)p(T,v,g)dvdg = \int_{\mathcal{X}} \phi(0,v,g)\mu_0(dv,dg) + \int_0^T\int_{\mathcal{X}} (\partial_t + \mathcal{L})\phi(t,v,g)p(t,v,g)dtdvdg. \tag{3.18}$$

注意，对于 ψ：在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ 中，$(t, g) \mapsto \psi(t, g)$，函数 $\phi(t, v, g) := \psi(t, g)$ 属于 (3.3) 中定义的检验函数类 Φ。此外，由于 ψ 在 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 中具有紧支集，我们可以选取足够大的 T，使得 (3.18) 中的前两项均为零，从而得到

$$\int_0^T\int_{\mathcal{X}} (\partial_t - (g-1)\partial_g + \partial_{gg})\psi(t,g)p(t,v,g)dtdvdg.$$

然后，对 v 变量进行积分即可得到该结果。 □

现在我们开始证明命题 3.2。

命题 *3.2* 的证明。根据命题 3.1，方程 (1.1) 的解 p 在 $(0,+\infty)\times(0,t)\times(0,\infty)$ 内是光滑的。因此，我们可以对 $v\in(\epsilon_1,1-\epsilon_2)\subset(0,1)$ 上的 (1.1) 进行积分，得到

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\int_{\epsilon_1}^{1-\epsilon_2}p(t,v,g)dv\right)+\big(J(v,g)p(t,v,g)\big)\big|_{v=\epsilon_1}^{v=1-\epsilon_2}\\&=\partial_g\left((g-1)\int_{\epsilon_1}^{1-\epsilon_2}p(t,v,g)dv\right)+\partial_{gg}\left(\int_{\epsilon_1}^{1-\epsilon_2}p(t,v,g)dv\right),\quad t>0,g>0.\end{aligned}\tag{3.19}$$

现在令 $\epsilon_1,\epsilon_2\to0^+$ 趋于极限。形式上，根据引理 3.2 和边界条件 (1.5)，我们期望 (3.19) 的两边分别收敛到 (3.17) 的两边。

为证明这一点，我们需要将导数移到测试函数上，并以弱形式得到边界条件。更确切地说，将 (3.19) 乘以测试函数 $\psi(t,g)\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$，并对 $(t,g)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ 进行分部积分。于是有

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\big(J(v,g)p(t,v,g)\big)\big|_{v=\epsilon_1}^{v=1-\epsilon_2}\psi(t,g)dtdg=B_\psi(\epsilon_1,\epsilon_2),\tag{3.20}$$

其中

$$B_\psi(\epsilon_1,\epsilon_2)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}[(\partial_t+\partial_{gg}-(g-1)\partial_g)\psi(t,g)]\left(\int_{\epsilon_1}^{1-\epsilon_2}p(t,v,g)dv\right)dtdg.\tag{3.21}$$

考 虑式 (3.21) 中的极限 ϵ_1，$\epsilon_2\to0^+$。由控制收敛定理和引理 3.2，我们得 et

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to0^+}B_\psi(\epsilon_1,\epsilon_2)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}[(\partial_t+\partial_{gg}-(g-1)\partial_g)\psi(t,g)]q(t,g)dtdg=0,$$

其中 在最后一个等式中，我们利用了 q 满足式 (3.16)。因此，鉴于式 (3.20)，我们推 ce

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to0^+}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\left[\big(J(v,g)p(t,v,g)\big)\big|_{v=\epsilon_1}^{v=1-\epsilon_2}\right]\psi(t,g)dtdg=0,\qquad\forall\psi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+).\tag{3.22}$$

我们断言，作为式 (3.22) 的推论，对于每个 $\psi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$，式 (3.7) 中的两个极限都存在且相等。事实上，固定 ψ，记

$$\begin{aligned}C_1(\epsilon_1)&:=\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}J(\epsilon_1,g)p(t,\epsilon_1,g)\psi(t,g)dtdg,\\C_2(\epsilon_2)&:=\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}J(1-\epsilon_1,g)p(t,1-\epsilon_2,g)\psi(t,g)dtdg.\end{aligned}$$

于是，(3.22) 可写为

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to0^+}(C_2(\epsilon_2)-C_1(\epsilon_1))=0.\tag{3.23}$$

由于上述极限以 ϵ_1，$\epsilon_2\to0$ 任意方式存在，我们推知，当 ϵ_1，$\epsilon_2\to0$ 时，$C_1(\epsilon_1)$ 和 $C_2(\epsilon_2)$ 均收敛到有限值，且极限相等。这就证明了 (3.7)。

最后，假设 $\psi(t,\ g)$ 的支集包含于 $(0,\ +\infty)\times(0,\ g_F)$，且 $\psi\geq0$。回顾一下，g_F 是 $J(1,\ g)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上的唯一零点。然后，注意到对于 $g\in(0,\ g_F)$，$J(0,\ g)>0$ 且 $J(1,\ g)<0$，由 (3.7) 可得

$$0\leq\lim_{v\to0^+}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}J(v,g)p(t,v,g)\psi(t,g)dtdg=\lim_{v\to1^-}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}J(v,g)p(t,v,g)\psi(t,g)dtdg\leq0,\tag{3.24}$$

由于 $p\geq0$ 和 $\psi\geq0$。因此，等式 (3.24) 成立，这意味着两个极限均为零。由此证明了命题 3.2。

□

4 指数收敛

本节将证明马尔可夫过程 $(V_t,\ G_t)$ 的指数遍历性。根据哈里斯定理，指数收敛可由李雅普诺夫函数结构和小化条件推出。以下是 [21, 定理 1.3] 中给出的哈里斯定理的一个版本。

定理 4.1。设 $\mathcal{P}$ 是可测空间 $\mathcal{X}$ 上离散时间马尔可夫过程的马尔可夫算子，$\mathcal{P}^*$ 表示其伴随算子。假设以下两个条件成立。

1. （李雅普诺夫函数）存在 $W\colon \mathcal{X}\mapsto[0,+\infty)$ 和 $\alpha_1\in(0,1)$ $\alpha_2>0$，使得 t

$$(\mathcal{P}W)(x)\leq\alpha_1W(x)+\alpha_2 \tag{4.1}$$

对每个 $x\in\mathcal{X}$ 均成立。

2.（小化条件）存在 $\eta>0$、$R>\frac{2\alpha_2}{1-\alpha_1}$ 和 $\mathcal{X}$ 上的概率测度 ν，使得

$$\inf_{x\in\mathcal{C}(R)}\mathcal{P}^*\delta_x\geq\eta\nu\ , \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{C}(R)\colon=\{x:\ W(x)\ \leq R\}$，且 δ_x 是点 x 处的狄拉克测度。

那么，相对于半群 $\mathcal{P}$，存在唯一的平稳分布 π。此外，存在 $\beta>0$ 和 $\theta\in(0,\ 1)$，使得我们有如下指数收敛

$$\|(\mathcal{P}^*)^n\mu-\pi\|_\beta\leq\theta^n\|\mu-\pi\|_\beta$$

对于任意初始分布 μ 和任意 $n\geq1$，其中

$$\|\nu_1-\nu_2\|_\beta:=\int_{\mathcal{X}}(1+\beta W(x))|\nu_1-\nu_2|(dx). \tag{4.3}$$

是由李雅普诺夫函数 W 和常数 $\beta>0$加权的全变差距离范数。

将 Harris定理应用于我们的模型，可得关于过程 $(V_t,\ G_t)$ 的指数遍历性主要结果。

定理 4.2。设 $(\mathcal{P}_t)^{t\geq0}$ 为过程 (V_t,G_t) 的马尔可夫半群，且 $(\mathcal{P}_t^*)^{t\geq0}$ 为其伴随算子。那么，相对于$(\mathcal{P}_t)^{t\geq0}$，存在唯一的平稳分布 π。此外，存在 $\beta,C,\lambda>0$，使得

$$\|\mathcal{P}_t^*\mu_0-\pi\|_\beta\leq Ce^{-\lambda t}\|\mu_0-\pi\|_\beta \tag{4.4}$$

对于定义在 $\mathcal{X}$ 上的任意初始分布 μ_0 以及任意 $t>0$，其中 $\|\cdot\|_\beta$ 是式(4.3)中定义的加权全变差距离范数。

我们将首先证明指数衰减 (4.4) 沿某个子序列 $t_n=nT$ 成立，其中$T>0$ 固定（将在命题 4.1 中说明），然后将其推广到所有 $t>0$。为了证明它沿这样的子序列成立，我们将验证马尔可夫算子 $\mathcal{P}_T$ 满足定理 4.1 中的假设。

4.1 Lyapunov 函数结构

由于由 (2.5) 给出的区域 $\mathcal{X}$ 在 v方向上有界，因此李雅普诺夫函数可以只依赖于 g 。

引理 4.1。 对于每个 $T > 0$，函数 $W(v, g) := (g - 1)^2$ 是关于马尔可夫算子 $\mathcal{P}_T$ 的李雅普诺夫函数，因为它满足定理 *4.1* 中的假设 *1*。

证明。 固定 $(v_0, g_0) \in \mathcal{X}$。定义

$$f(t) := \mathbb{E}^{(v_0,g_0)} W(V_t, G_t) = \mathbb{E}^{(v_0,g_0)} (G_t - 1)^2.$$

回顾式 (3.10) 中给出的半鞅 Itˆo 公式。取 $\phi(t, v, g) = W(v, g) = (g - 1)^2,$，可得

$$\frac{1}{2}\big((G_t - 1)^2 - (G_0 - 1)^2\big) = \int_0^t \big(1 - (G_s - 1)^2\big) ds + \sqrt{2} \int_0^t (G_s - 1) dB_s + \int_0^t (G_s - 1) dL_s.$$

对等式两边取期望，得到

$$\frac{1}{2}\big(f(t) - f(0)\big) = t - \int_0^t f(s) ds + \mathbb{E}^{(v_0,g_0)} \bigg[\int_0^t (G_s - 1) dL_s \bigg]. \tag{4.5}$$

回想一下， L_s 仅在 $G_s = 0$ 时改变其值，因此有

$$\int_0^t (G_s - 1) dL_s = -L_t \ .$$

对 t 求导，并利用 L 是递增的这一点，我们得到

$$f'(t) \le 2 - 2f(t) \ .$$

因此，由 Gronwall 不等式可得。

$$\mathbb{E}^{(v_0,g_0)} W(V_t, G_t) = f(t) \le e^{-2t} f(0) + (1 - e^{-2t}) = e^{-2t} W(v_0, g_0) + (1 - e^{-2t}), \tag{4.6}$$

这验证了 (4.1)。 □

4.2 小化条件

现在我们来检验定理 4.1 中的假设 2。回想一下，我们选择 $W(v, g) := (g-1)^2 \to +\infty$ 作为 $g \to +\infty$.，那么对于 $R \ge 1$，我们有

$$\mathcal{C}(R) = \{(v, g) : W(v, g) \le R\} = [0, 1) \times [0, M(R)], \tag{4.7}$$

其中 $M(R) := \sqrt{R} + 1$。小化条件是以下命题的直接推论 .

命题 4.1。 存在 $T > 0$ ，使得对于任意 $R \ge 1$，都存在一个常数 $\eta(R) > 0$以及一个定义在 $\mathcal{X}$ 上的概率测度 ν ，使得

$$\inf_{(v_0,g_0)\in\mathcal{C}} \mathbb{P}^{v_0,g_0}((V_T, G_T) \in A) \ge \eta \nu(A) \tag{4.8}$$

对于每个博雷尔可测的 $A \subset \mathcal{X}$，其中 $\mathcal{C}$ 由 (4.7) 给出。

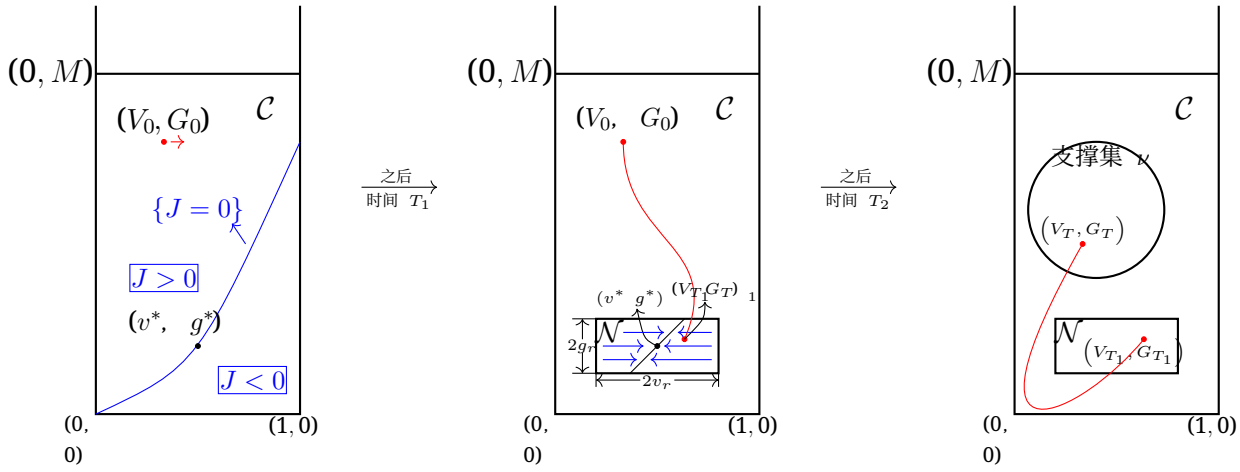

图3： 命题 4.1 的证明策略。在这些坐标系中，水平轴表示v方向，垂直轴表示 g方向。在第一幅图中，蓝色曲线表示速度场 J的零点集，并将区域 $\mathcal{C}$ 分成两部分。点 (v^*, g^*) 是J的一个特定零点。红点 (V_0, G_0) 表示过程的初始点。在第二幅图中，矩形区域 $\mathcal{N}$ 是 (v^*, g^*) 的一个邻域。蓝色箭头表示速度场 J的方向。红色曲线表示 (V_t, G_t) 在时间 T_1结束时的轨迹，且终点 (V_{T_1}, G_{T_1}) 属于 $\mathcal{N}$。在第三幅图中， ν 是一个概率测度，圆圈表示其支集。红色曲线表示 (V_t, G_t) 在时间 T结束时的轨迹，且终点 (V_T, G_T) 属于 ν的支集。

图3展示了证明命题 4.1 的策略。我们将马尔可夫过程$\{(V_t, G_t)\}_{0\le t\le T}$分解为两部分： $t \in [0, T_1]$ 和 $t \in [T_1, T]$，其中 T_1 是一个适当的时间，与R无关，具体将在命题 4.1 的证明中给出。

步骤 *1*： 注意，函数 $J(v, g)$ 在区域 $\mathcal{C}$ 内有零点，我们选取 J 的一个合适零点（v^*， g^*）及其邻域 $\mathcal{N}$。在某些限制条件下，（V_t， G_t）一旦进入 $\mathcal{N}$，便可在时间 T_1 内保持在 $\mathcal{N}$ 中。并且，（V_t， G_t）所受的限制条件只能施加于反射 OU 过程$\{G_t\}_{0\le t\le T_1}$，因为 $\{V_t\}$ 完全由 $\{G_t\}$ 决定。

步骤 *2*：对于第二部分，我们选取与 R 无关的 $T_2 > 0$，并证明：对于每个（v， g） $\in \mathcal{N}$，以（v， g）为初始数据时，在时间 T_2 的转移概率具有一致下界（见 (4.12)）。注意， $T := T_1 + T_2$ 与 R 无关。结合这两部分即可得到所需的下界 (4.8)。

我们选取 J 的以下零点

$$(v^*, g^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{g_L}{2V_E - 1}\right), \tag{4.9}$$

稍后我们将在 (4.14) 中明确合适的邻域 $\mathcal{N}$。

考虑马尔可夫过程$\widetilde{V}_t$与V_t相同，但在 1 处吸收。更准确地说，它由下式给出

$$\widetilde{V}_t := \begin{cases} V_t, & t < \tau_1; \\ 1, & t \ge \tau_1, \end{cases}$$

其中 τ_1 是在 (2.7) 中定义的首次跳跃时间。令 $\widetilde{\rho}_t$ 为 V_t 的密度。我们有以下引理。

引理 4.2。映射

$$(t, v_0, g_0, v, g) \mapsto \widetilde{\rho}_t^{v_0, g_0}(v, g)$$

在 $\mathbb{R}^+ \times (0,1) \times \mathbb{R}^+ \times (0,1) \times \mathbb{R}^+$ 上光滑。此外，存在时间 $T_2 > 0$ 和一点$(v, g) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+$，使得

$$\widetilde{\rho}_{T_2}^{v^*, g^*}(v, g) > 0. \tag{4.10}$$

证明。光滑性的证明与 [18, 定理 4.3] 基本相同，只是我们在 g 方向上有反射边界，这可以用与引理 3.1 的证明相同的方法处理。此处省略细节。

现在我们选择 $T_2 = \frac{1}{(2g^*+3)V_E}$，由上述结果可知，$\widetilde{\rho}^{v_0, g_0}_{T_2}(v,g)$ 关于 (v,g) 连续。因此，只需证明

$$\mathbb{P}^{v^*,g^*}(T_2 < \tau_1) = \int_{\mathcal{X}} \widetilde{\rho}^{v^*,g^*}_{T_2}(v,g)dvdg > 0,$$

其中 $\mathbb{P}^{v^*,g^*}$ 是在 $\{V_0 = v^*, G_0 = g^*\}$ 条件下的概率测度。事实上，若对每个 $0 \le t \le T_2$ 都有 $G_t < g^* + 1$，则对每个 $0 \le t \le T_2$，我们有 $J(V_t, G_t) < (g^*+1)V_E$，因此

$$\widetilde{V}_{T_2} = v^* + \int_0^{T_2} J(V_t, G_t)dt < v^* + T_2(g^*+1)V_E < 1.$$

因此，我们得到

$$\mathbb{P}^{v^*,g^*}(T_2 < \tau_1) \ge \mathbb{P}^{g^*}\Big(\max_{0\le t\le T_2} G_t < g^*+1\Big) > \mathbb{P}^{g^*}\Big(\max_{0\le t\le T_2} G_t < g^*+1, \min_{0\le t\le T_2} G_t > 0\Big),$$

其中 $\mathbb{P}^{g^*}$ 是在 $\{G_0 = g^*\}$ 条件下的概率测度。对于事件 $\{\max_{0\le t\le T_2} G_t < g^*+1, \min_{0\le t\le T_2} G_t > 0\}$，由于 G_t 不会触及反射边界，我们可以用不带反射边界的 OU 过程替代反射 OU 过程 G_t。根据 [37], 中给出的扩散过程支撑定理，我们有

$$\mathbb{P}^{g^*}\Big(\max_{0\le t\le T_2} G_t < g^*+1, \min_{0\le t\le T_2} G_t > 0\Big) > 0. \tag{4.11}$$

证明至此完成。 □

对于上述引理中选取的时间 T_2，我们可以找到一点 $(v, g) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^+$，使得 $\widetilde{\rho}^{v^*, g^*}_{T_2}(v, g) > 0$。由于 $\widetilde{\rho}^{v_0, g_0}_{T_2}(v_1, g_1)$ 关于 (v_0, g_0, v_1, g_1) 连续，我们可以找到充分小的常数 $\delta, \varepsilon > 0$ 以及一个非空开集 $\mathcal{K}$，使得 $(v, g) \in \mathcal{K} \subset \mathcal{X}$，从而

$$\widetilde{\rho}^{v_1,g_1}_{T_2}(v_2, g_2) \ge \varepsilon, \quad \forall\, (v_1, g_1) \in B_\delta(v^*, g^*), \quad \forall\, (v_2, g_2) \in \mathcal{K}. \tag{4.12}$$

注意，集合 $\mathcal{K}$ 的选取与 R 无关，因为 $\mathcal{K}$ 只依赖于函数 $\widetilde{\rho}_{T_2}$。现在我们选取一个较小的常数 $v_r < \delta$ 和一个充分小的常数 g_r，使得

$$g_r^2 + v_r^2 < \delta^2, \qquad J^* := \min_{g\in[g^*-g_r, g^*+g_r]} |J(v^*-v_r, g)| \wedge |J(v^*+v_r, g)| > 0, \tag{4.13}$$

其中，最后一个条件确保 (V_t, G_t) 以至少为 J^* 的速度沿 v 方向向两条直线 $v = v^* - v_r$ 和 $v = v^* + v_r$ 之间的区域移动，若 $G_t \in (g^* - g_r, g^* + g_r)$。然后，邻域 $\mathcal{N}$ 由下式确定（见图3）

$$\mathcal{N} := [v^* - v_r, v^* + v_r] \times [g^* - g_r, g^* + g_r]. \tag{4.14}$$

我们将对 $\{(V_{T_1}, G_{T_1}) \in \mathcal{N}\}$ 的概率进行界定，这对应于图3中的步骤 1。首先，我们给出一个关于 G_t 的技术性引理，该引理将在引理 4.4 中使用。

引理 4.3。考虑由 (2.3) 给出的反射 *OU* 过程 G_t。对于任意 M、$m > 0$、$b > 2c > 0$，我们有

$$\inf_{g_0\in[0,M]} \mathbb{P}^{g_0}(G_t \in [b-2c, b+2c],\ \forall\, t \in [1, 1+m]) > 0,$$

其中，$\mathbb{P}^{g_0}$ 表示以 $\{G_0 = g_0\}$ 为条件的概率测度。

证明。根据 G_t 的马尔可夫性质，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{g_0}(G_t \in [b-2c, b+2c],\ \forall\ 1 \le t \le 1+m)\\ \ge\ &\mathbb{P}^{g_0}(G_1 \in [b-c, b+c]) \cdot \inf_{g\in[b-c,b+c]} \mathbb{P}^{g}(G_t \in [b-2c, b+2c],\ \forall\ 0 \le t \le m)\ .\end{aligned}$$

因此，只需证明以下界

$$\inf_{g\in[b-c,b+c]} \mathbb{P}^{g}(G_t \in [b-2c, b+2c],\ \forall\ 0 \le t \le m) > 0; \tag{4.15}$$

$$\inf_{g_0\in[0,M]} \mathbb{P}^{g_0}(G_1 \in [b-c, b+c]) > 0. \tag{4.16}$$

对于 (4.15)，在离开区间 $[b-2c, b+2c]$ 之前，过程 G_t 的上下界分别由从 $b-c$ 和 $b+c$ 出发、无边界反射的两个 OU过程 控制。更确切地说，对于

$$G_t^{(1)} = e^{-t}(b-c) + (1-e^{-t}) + \sqrt{2}\int_0^t e^{-(t-s)} dB_s, \quad G_t^{(2)} = e^{-t}(b+c) + (1-e^{-t}) + \sqrt{2}\int_0^t e^{-(t-s)} dB_s\ ,$$

我们有

$$\begin{aligned}\inf_{g\in[b-c,b+c]} \mathbb{P}^{g}(G_t \in [b-2c, b+2c],\ \forall\ 0 \le t \le m) &\ge \mathbb{P}(b-2c \le G_t^{(1)} \le G_t^{(2)} \le b+2c,\ \forall\ 0 \le t \le m)\\ &= \mathbb{P}(e^{-t}c - 2c \le G_t^{(3)} \le 2c - e^{-t}c,\ \forall\ 0 \le t \le m)\ .\end{aligned}$$

其中

$$G_t^{(3)} := (1-e^{-t})(1-b) + \sqrt{2}\int_0^t e^{-(t-s)} dB_s\ .$$

因此，由于 $G_t^{(3)}$ 的支撑定理，(4.15) 成立。对于 (4.16)，我们有

$$\Xi(g_0) := \mathbb{P}^{g_0}(G_1 \in [b-c, b+c]) = \int_{b-c}^{b+c} \widetilde{\rho}(1, g_0, g) dg.$$

由于 $(g_0,\ g) \mapsto \widetilde{\rho}(1,\ g_0,\ g)$ 属于 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap \mathcal{C}([0,+\infty) \times \mathbb{R}^+)$，因此 Ξ 连续。由 [15, Theorem 8], 中建立的反射扩散过程的支撑定理可得，对于每个固定的 $g_0 \in [0, M]$，$\Xi(g_0) > 0$。(4.16) 随即由 Ξ 的连续性得到。 □

现在我们可以证明步骤 1 中的主要引理了。

引理 4.4。存在常数 $T_1 > 0$ 和 $\gamma(R) > 0$，使得

$$\inf_{(v_0,g_0)\in\mathcal{C}} \mathbb{P}^{v_0,g_0}((V_{T_1}, G_{T_1}) \in \mathcal{N}) > \gamma(R)$$

证明。我们将选取一个合适的常数 $T_3 > 0$，并令 $T_1 := 1 + T_3$，从而控制 $\mathcal{N}$中的 (V_{T_1}, G_{T_1})。若将反射 OU 过程限制在 $[g^* - g_r, g^* + g_r]$ 中，其中 $t \in [1, T_1]$，则只需对仅依赖于 $\{G_t\}_{0\le t\le T_1}$ 的概率进行估计。

由 J 关于 v 方向的单调性，我们有

$$\min_{(v,g)\in[0,1)\times[g^*-g_r,g^*+g_r]\setminus\mathcal{N}} |J(v,g)| = J^* > 0.$$

选择 $T_3 := \frac{1}{2J^*}$如果 G_t在 $[g^* - g_r, g^* + g_r]$ 中受到 $t \in [0, T_3]$的限制，那么 (V_t, G_t) 将以至少 J^* 的速度朝 v方向移动，并在 T_3时间内被限制在区域 $\mathcal{N}$ 中。因此，我们有如下关系

$$\{G_t \in [g^* - g_r, g^* + g_r],\ \forall\ 0 \le t \le T_3\} \subset \{(V_{T_3}, G_{T_3}) \in \mathcal{N}\}.$$

回顾一下， $T_1 = 1 + T_3$，我们有

$$\inf_{(v_0,g_0)\in\mathcal{C}} \mathbb{P}^{v_0,g_0}((V_{T_1}, G_{T_1}) \in \mathcal{N}) \geq \inf_{g_0\in[0,M]} \mathbb{P}^{g_0}(G_t \in [g^* - g_r, g^* + g_r],\ \forall\, 1 \leq t \leq T_1).$$

根据引理 4.3，取 $c = \frac{g_r}{2}, b = g^*, m = T_3$，上述不等式右侧为正，且仅取决于 R，因为 $M(R) = \sqrt{R} + 1$ 仅取决于 R。 □

现在，我们已具备证明命题 4.1 所需的全部条件。

命题 *4.1* 的证明。取 $T = T_1 + T_2 = 1 + \left\lceil \frac{1}{(2g^*+3)V_E} \right\rceil \frac{1}{2J^*}$，使其与 R 无关。回顾满足 (4.12) 的 $\mathcal{K}$ 的取值、(4.14) 中给出的 $\mathcal{N}$ 的取值，以及 (4.12) 中给出的转移概率下界。对于每个 $A \subset \mathcal{X}$，有

$$\mathbb{P}^{v_0,g_0}((V_T, G_T) \in A) \geq \mathbb{P}^{v_0,g_0}((V_{T_1}, G_{T_1}) \in \mathcal{N}) \inf_{(v,g)\in\mathcal{N}} \int_{A\cap\mathcal{K}} \widetilde{\rho}_{T_2}^{v,g}(v_2, g_2) dv_2 dg_2 \geq \gamma\varepsilon |A \cap \mathcal{K}|\,,$$

最后一个不等式由 (4.12) 和引理 4.4 得出。

最后，令 ν 为由 $\mathcal{K}$ 上的勒贝格测度归一化得到的概率测度，并取 $\eta = \gamma\varepsilon|\mathcal{K}|$。我们有

$$\gamma\varepsilon|A \cap \mathcal{K}| = \eta\nu(A)$$

对每个 $A \subset \mathcal{X}$。回忆一下， $\mathcal{K}$ 和 ε 与 R无关，而 γ 与 $(v_0,\ g_0) \in \mathcal{C}$ 的选择无关，但取决于 R。由此可得，时间 T和测度 ν 均与 R无关，且因子 $\eta(R)$ 与 $(v_0,\ g_0) \in \mathcal{C}$无关。因此，界 (4.8) 成立。 □

4.3 遍历性的指数收敛——定理 4.2 的证明

结合 $(V_t,\ G_t)$ 的 Lyapunov 函数结构和小化条件，即可完成定理 4.2 的证明。

定理 *4.2* 的证明。回忆由 (4.9) 定义的常数 g^* 和由 (4.13) 定义的常数 J^*。取 $T = 1 + \left\lceil \frac{1}{(2g^*+3)V_E} \right\rceil \frac{1}{2J^*}$。引理 4.1 表明，马尔可夫算子 $\mathcal{P}_T$ 存在一个李雅普诺夫函数。命题 4.1 表明，对于 $\mathcal{P}_T$，小化条件也成立。因此，在 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_T$ 下，假设 1 和 2 均满足。由定理 4.1 可知，(4.4) 沿子序列 $t_n = nT$ 成立，其中 $C = 1$。更精确地说，存在 $\beta > 0$ 和 $\theta \in (0,\ 1)$，使得

$$\|(\mathcal{P}_T^*)^n \mu_0 - \pi\|_\beta \leq \theta^n \|\mu_0 - \pi\|_\beta$$

对于 $\mathcal{X}$ 上的每个概率分布 μ_0 以及每个 $n \in \mathbb{N}$。

为了将其延拓到所有时间，对于每个 $t > 0$，我们将其分解为 $t = nT + t'$ 其中 $t' \in [0, T)$ 和 $n \in \mathbb{N}^+$。根据定理 4.2，我们得到

$$\|\mathcal{P}_t^*\mu_0 - \pi\|_\beta = \|(\mathcal{P}_T^*)^n(\mathcal{P}_{t'}^*\mu_0 - \pi)\|_\beta \leq \theta^n \|\mathcal{P}_{t'}^*\mu_0 - \pi\|_\beta.$$

回顾式 (4.3) 中定义的度量，我们得到

$$\|\mathcal{P}_{t'}^*\mu_0 - \pi\|_\beta \leq \int_{\mathcal{X}} (1 + \beta W(v,g))(\mathcal{P}_{t'}^*|\mu_0 - \pi|)(dv, dg) = \int_{\mathcal{X}} (1 + \beta \mathcal{P}_{t'} W(v,g))|\mu_0 - \pi|(dv, dg),$$

其中第一个不等式由 $\mathcal{P}_{t'}^*\pi = \pi$ 得出。注意，我们可以像在 (4.6) 中那样控制 $\mathcal{P}_{t'}W(v,\ g)$，方法是

$$\mathcal{P}_{t'} W(v,g) \leq (g-1)^2 + 1.$$

然后我们有

$$\int_{\mathcal{X}}(1+\beta\mathcal{P}_{t'}W(v,g))|\mu_0-\pi|(dv,dg)\leq\int_{\mathcal{X}}(1+\beta(g-1)^2+\beta)|\mu_0-\pi|(dv,dg)$$
$$\leq\int_{\mathcal{X}}(1+\beta)(1+\beta(g-1)^2)|\mu_0-\pi|(dv,dg)=(1+\beta)\|\mu_0-\pi\|_\beta.$$

结合上述不等式，选择 $\lambda=-\frac{\log\theta}{T}$ and $C=\theta^{-1}(1+\beta)$ 即可得到所需结果。 □

5 结论

在这项工作中，我们基于概率重构，研究电压-电导方程 (1.1) 向稳态的指数收敛。特别地，我们构造了一个随机过程 (2.1)-(2.4)，它与 [5]，中用于推导 (1.1) 的科学启发式方法密切相关。

作为一个附带结果，我们严格建立了所构造的随机过程 (2.1)-(2.4) 与偏微分方程 (1.1) 的一个弱解之间的联系，这在一定程度上论证了 [5] 中推导的合理性。然而，建立完整的理论并非本文的研究重点。以下问题仍未解决：定义 3.1 中的弱解是否总是对应于该随机过程，以及它在边界处是否具有经典正则性。据我们所知，尽管已有各种先验估计，且 [31]，中概述了一些研究方向，但 (1.1) 的解尚无精确定义，更遑论适定性证明。对于带边界的动理学方程，这些问题可能较为微妙；经典的动理学福克-普朗克方程也可参见 [24, 27] 。

除了指数收敛之外，方程 (1.1) 的非线性版本还呈现出多种现象，包括周期解 [3], ，而我们对这些现象的了解仍有限。我们的结果增进了对线性情形的理解，可为严格分析非线性动力学奠定基础。尤其值得探讨的是，此处的概率重构能否推广到非线性问题，并有助于理解其动力学。

致谢

Z.Zhou 的工作部分得到国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1001200、2020YFA0712000）和国家自然科学基金（项目编号：12031013、12171013）的资助。W.Xu 感谢中国国家自然科学基金通过项目编号 12171008 提供的资助。X.Dou 和 Z.Zhou 感谢 Benoˆıt Perthame 和 Delphine Salort 提供的有益讨论。

附录A H¨ormander 定理

本节将简要介绍 H¨ormander 定理及其应用。H¨ormander 定理是验证微分算子亚椭圆性的有力工具。首先，我们介绍亚椭圆性的概念。

定义 A.1。 如果微分算子 $\mathcal{A}$ 在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中满足：对每个开集 $U\subseteq\Omega$， $\mathcal{A}u\in\mathcal{C}^\infty(U)$ 蕴含 $u\in\mathcal{C}^\infty(U)$，则称其在该区域内具有亚椭圆性。

在 [23], H¨ormander 给出了微分算子系数满足亚椭圆性的一个充分条件，这个条件称为 H¨ormander 条件。为了表述 H¨ormander 的

条件，我们回顾定义在 $\mathbb{R}^n$上的两个 $\mathcal{C}^\infty$ 向量场 V 和 W 之间的李括号。李括号 $[V,W]$ 是一个新的向量场，定义如下：

$$[V,W](x) := DV(x)W(x) - V(x)DW(x),$$

其中， DV 是由（DV）$_{ij} := \partial_j V_i$给出的 V 的导数矩阵。于是，H¨ormander 条件可表述如下。

定义 A.2。 设 A_0、A_1、$\cdots$、A_m 是 $\mathbb{R}^n$上的 $\mathcal{C}^\infty$ 向量场。若在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中，对于每个 $x \in \Omega$，向量场满足 ***H¨ormander*** 条件，则称它们满足该条件：

$$A_i(x)\,(0 \le i \le m),\ [A_i, A_j](x)\,(0 \le i,j \le m),\ [\,[A_i, A_j], A_k](x)\,(0 \le i,j,k \le m), \cdots$$

张成 $\mathbb{R}^n$。

现在我们可以陈述 [23]中给出的 H¨ormander 定理。

定理 A.1。 考虑定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的形如以下形式的微分算子 $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i^2, \tag{A.1}$$

其中，算子 $\mathcal{A}_i (0 \le i \le m)$ 由 $\mathcal{A}_i := A_i \cdot \nabla$给出。这里， A_0、 A_1、 $\cdots$、 A_m 是 $\mathbb{R}^n$上的 $\mathcal{C}^\infty$ 向量场。如果 $\{A_i\}_{0\le i\le m}$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$中满足 ***H¨ormander*** 条件，则算子 $\mathcal{A}$在Ω中是亚椭圆的。

对于具有 (A.1) 形式的椭圆算子 $\mathcal{A}$ ，很容易看出 $\{A_i\}_{0\le i\le m}$ 满足 H¨ormander 条件。因此，H¨ormander 条件可视为一种非退化条件，用于将微分算子的椭圆性加以推广。作为示例，我们将 H¨ormander 定理应用于我们的模型，以验证 $\partial_t + \mathcal{L}$ 和 $\partial_t - \mathcal{L}^*$ 的亚椭圆性，其中算子 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^*$ 由 (3.1) 给出。

引理 A.1。 算子 $\partial_t + \mathcal{L}$、$\partial_t - \mathcal{L}^*$ 在 $\mathbb{R}^+ \times$ （0、V_E） $\times \mathbb{R}^+$ 中是亚椭圆的 .

证明。 我们将算子 $\partial_t + \mathcal{L}$ 写成如下形式 $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1^2$，其中

$$\mathcal{A}_0 := \partial_t + J\partial_v + (g-1)\partial_g, \qquad \mathcal{A}_1 := \partial_g.$$

令 $A_0 =$(1, $J(v,g)$ $g-1$) 和 $A_1 =$(0, 0, 1)，则对 $i = 0, 1$，有 $\mathcal{A}_i = A_i \cdot \nabla$。注意，李括号 $[A_0, A_1] =$(0, $V_E - v$, 1)。可以验证，向量场 A_0, A_1 和 $[A_0, A_1]$ 在 $(t,v,g) \in \mathbb{R}^+ \times$(0, V_E) $\times \mathbb{R}^+$ 处张成 $\mathbb{R}^3$。因此， A_0, A_1 满足 H¨ormander 条件。由定理 A.1，可得 $\partial_t + \mathcal{L}$ 的亚椭圆性。 $\partial_t - \mathcal{L}^*$ 的亚椭圆性可以用同样的方法处理，细节从略。 □

参考文献

[1] F. Baudoin。Bakry–´Émery 与 Villani 相遇。《泛函分析杂志》，273(7)：2275–2291，2017 年。

[2] M. J. C´áceres、J. A. Carrillo 和 B. Perthame。非线性噪声积分—发放神经元模型的分析：爆破解与稳态。《数学神经科学杂志》，1(1)：1–33，2011 年。

[3] M. J. C´aceres、J. A. Carrillo 和 L. Tao。《神经元网络动力学的非线性福克–普朗克方程表述的数值求解器》。《计算物理学杂志》，230(4):1084–1099，2011年。

[4] D. Cai、L. Tao 和 D. W. McLaughlin。《一种用于涨落驱动系统尺度扩展并保留尖峰信息的嵌入式网络方法》。《美国国家科学院院刊》，101(39):14288–14293，2004年。[5] D. Cai、L. Tao、A. V. Rangan 和 D. W. McLaughlin。《神经元网络动力学的动力学理论》。《数学科学通讯》，4(1):97–127，2006年。[6] D. Cai、L. Tao、M. Shelley 和 D. W. McLaughlin。《涨落驱动神经元网络的有效动力学表述及其在视觉皮层简单细胞和复杂细胞中的应用》。《美国国家科学院院刊》，101(20):7757–7762，2004年。[7] D. Cai、L. Tao、M. S. Shkarayev、A. V. Rangan、D. W. Mclaughlin 和 G. Kovačič。《涨落在神经元网络粗粒化描述中的作用》。《数学科学通讯》，10(1):307–354，2012年。引用次数：4；全部为开放获取，铜牌开放获取。[8] C. Cao。《一般力作用下的动力学福克–普朗克方程》。《演化方程杂志》，21(2):2293–2337，2021年。[9] J. A. Carrillo、X. Dou 和 Z. Zhou。《相互作用神经元的简化电压-电导动力学模型及其渐近极限》。《arXiv》预印本 arXiv:2203.02746，2022年。[10] J. A. Cañizo、C. Cao、J. Evans 和 H. Yoldaş。《通过Harris定理研究线性动力学方程的亚强制性》。《动力学及相关模型》，13(1):97–128，2020年。[11] D. R. Cox 和 H. D. Miller。《随机过程理论》。《约翰·威立父子公司》，纽约，1965年。[12] F. Delarue、J. Inglis、S. Rubenthaler 和 E. Tanré。《McKean–Vlasov型网络化积分-发放模型的全局可解性》。《应用概率年刊》，25(4):2096–2133，2015年。[13] F. Delarue、J. Inglis、S. Rubenthaler 和 E. Tanré。《具有奇异平均场自激的粒子系统：在神经元网络中的应用》。《随机过程及其应用》，125(6):2451–2492，2015年。[14] J. Dolbeault、C. Mouhot 和 C. Schmeiser。《保持质量的线性动力学方程的亚强制性》。《美国数学会汇刊》，367(6):3807–3828，2015年。[15] H. Doss 和 P. Priouret。《反射过程的支集》。《概率论及相关领域杂志》，61(3):327–345，1982年。[16] X. Dou、B. Perthame、D. Salort 和 Z. Zhou。《源于神经科学的电压-电导动力学系统的界与长期收敛》。《离散与连续动力系统》，43(3&4):1366–1382，2023年。[17] X. Dou 和 Z. Zhou。《通过预解式估计研究具有变异漂移场的双速模型向平衡态的指数收敛》，2022年。arXiv，2201.12494。[18] J. Foldes 和 D. Herzog。《线性二阶次椭圆方程的随机特征线方法》。《arXiv》预印本 arXiv:2112.06404，2021年。[19] S. Gadat 和 L. Miclo。《玩具亚强制半群的谱分解与 $\mathbb{L}^2$-算子范数》。《动力学及相关模型》，6(2):317–372，2013年。

[20] W. Ha. 反射奥恩斯坦-乌伦贝克过程的应用。博士论文，匹兹堡大学，2009年。[21]M. Hairer 和 J. Mattingly. 再论马尔可夫链的 Harris 遍历定理。随机分析、随机场与应用研讨会 VI, Progr. Probab.，63:109–117，2011。[22] T. Harris. 某些情形下平稳测度的存在性。载于《第三届伯克利数学统计与概率研讨会论文集：于加利福尼亚大学统计实验室举行，1954年12月、1955年7月和8月》，第2卷，第113页。加利福尼亚大学出版社，1956。[23] L. H¨ormander. 亚椭圆二阶微分方程。Acta Mathematica，119(1):147–171，1967。[24] H. J. Hwang、J. Jang 和 J. J. Vel´azquez. 带吸收边界条件的福克-普朗克方程。Archive for Rational Mechanics and Analysis，214(1):183–233，2014。[25] J. Kim、B. Perthame 和 D. Salort. 神经网络电压-电导模型中的快速电压动力学。Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 52(1):101–134，2021。[26] G. Kovaˇciˇc、L. Tao、A. V. Rangan 和 D. Cai. 基于电导的积分发放神经元网络的福克-普朗克描述。Physical Review E，80(2):021904，2009年。[27] T. Leli`evre、M. Ramil 和 J. Reygner. 圆柱域中动理学福克-普朗克方程的概率研究。arXiv 预印本 arXiv:2010.10157，2020年。[28] J.-G. Liu、Z. Wang、Y. Zhang 和 Z. Zhou. 从迭代视角严格证明神经网络的福克-普朗克方程。arXiv 预印本 arXiv:2005.08285，2020年。[29] J. C. Mattingly、A. M. Stuart 和 D. J. Higham. 随机微分方程及其近似的遍历性：局部利普希茨向量场与退化噪声。随机过程及其应用，101(2):185–232，2002。[30] S. P. Meyn 和 R. L. Tweedie. 马尔可夫链几何收敛速率的可计算界。应用概率年刊，981–1011页，1994。[31] B. Perthame 和 D. Salort. 积分发放神经网络的电压-电导动力学系统。动力学及相关模型，6(4):841–864，2013。[32]B. Perthame 和 D. Salort. 从积分发放神经元网络的电压-电导动力学模型推导电压密度方程。数学科学通讯，17(5)，2019。[33] P. Protter. 随机积分与微分方程。随机建模与应用概率。Springer Berlin Heidelberg，2005。[34] A. V. Rangan 和 D. Cai. 神经元网络动力学动力学理论的最大熵闭合。Physical Review Letters，96(17):178101，2006年。[35] A. V. Rangan、D. Cai 和 L. Tao. 求解神经元网络动力学动力学理论矩方程的数值方法。Journal of Computational Physics，221(2):781–798，2007。

[36] D. Salort 和 D. Smets. 部分扩散模型趋于平衡。HAL 预印本 hal-03845918，2022年11月。
[37] D. Stroock 和 S. R. S. Varadhan. 关于二阶退化椭圆-抛物型算子及其相关扩散过程。《纯粹与应用数学通讯》，25(6):651–713，1972年。[38] C. Villani. 亚强制性。949–951页。美国数学会，2009年。[39] H. Yolda¸s. 基于 Harris 型定理的定量次强制性估计。arXiv 预印本 arXiv:2203.00096，2022年。