arXiv:2305.03998v2 [math.RT] 4 Sep 2024

温和代数导出范畴中代数心的几何模型

WEN CHANG

Abstract. 我们为温和代数的导出范畴中的任意代数心构造了一个几何模型，该代数心等价于某个温和代数的模范畴。为此，我们对 [BC21]，所给出的温和代数模范畴的几何模型进行变形，然后将其嵌入 [OPS18]，所给出的导出范畴的几何模型中。在这个几何模型中，曲面上的每条所谓之字形曲线既表示一个不可分解模，也表示该模的最小投射分解。嵌入的关键在于对简单模与投射模之间的对偶性给出几何解释。

这两种几何模型的结合为我们提供了一种便捷方式，使我们能够在导出范畴的框架下描述模的同调性质。特别地，我们将任意高阶 Yoneda 扩张实现为曲面上的多边形，并将 Yoneda 乘积实现为这些多边形的粘合。作为应用，我们在标记曲面上实现了温和代数导出范畴中的任意代数心。

Contents

引言 2
致谢 5
1. 预备知识 5
1.1. 温和代数的模范畴 5
1.2. 温和代数的导出范畴 6
1.3. 标记曲面与曲面剖分 7
1.4. 温和代数导出范畴的几何模型 9
1.5. t-结构、心与 simple-minded集合 12
2. 温和代数模范畴的几何模型 13
2.1. 作为曲线的模 13
2.2. 单纯对象与射影对象 17
2.3. 模范畴与导出范畴 19
2.4. 作为交点的态射与扩张 24
2.5. 作为特选多边形的高阶 Yoneda 扩张 30
3. 温和代数代数心的几何模型 32
4. 一个例子 36
参考文献 39

2010 *Mathematics Subject Classification.* 16D90、16E35、57M50。作者受到中央高校基本科研业务费（编号：GK202403003）和中国国家自然科学基金（项目编号：12271321）的资助。

Introduction

近年来，拓扑和几何方法在代数表示论中的应用日益广泛。关于与代数相关的各种范畴的几何模型，已有大量研究。几何模型使我们能够利用曲面组合学/拓扑学获得许多应用，例如，将弧实现为不可分解对象，将交点实现为态射，将弧的旋转实现为 Auslander-Reiten 平移，将曲面切割实现为范畴约化，等等。

已有研究表明，曲面模型是解决代数的模范畴/导出范畴中诸多表示论问题的有力工具，例如，对扭挠对进行分类 [BBM14, CD20, CP16, HJR11]；给出代数的导出不变量 [AG16, ALP21, APS23, D14, O19, OZ22, LP20]；验证支撑 τ-倾斜图的连通性 [FGLZ23]，以及研究 silting 理论和例外序列理论 [APS23, CJS22, CHS23, CS23a,CS23b] 等。

利用曲面模型研究代数表示的方法起源于簇理论。在 [FST08], 中，作者在带边界和标记点的定向曲面上发现了簇代数结构。他们将簇代数的簇解释为曲面的三角剖分，并将簇的变异解释为三角剖分的翻转。

受簇代数几何模型的启发， [ABCJP10、L09](另见[BZ11、CCS06])研究了以三角剖分的 Jacobian 代数形式给出的温和代数的曲面模型。在 [DS12], 中，作者对三角剖分的 Jacobian 代数进行变形，并引入了另一类温和代数，称为曲面切割代数。

近年来，文献 [BC21] 和 [OPS18] 分别利用曲面的部分三角剖分（或剖分），为任意温和代数建立了其模范畴和导出范畴的几何模型。对于作为温和代数推广的 skew-gentle 代数，相关模范畴／导出范畴的曲面模型也已建立，例如见 [A21、AB22、HZZ23、LSV22、QZZ22]。

温和代数是结合代数表示论中的经典研究对象[AH81、AS87]。值得注意的是，它们与数学的许多其他领域均有联系。例如，它们在曲面的同调镜像对称中发挥着重要作用，参见[B16、BD18、HKK17]。特别地，已有结果表明，同调光滑分次温和代数的完美导出范畴与边界带有标记点的分次定向光滑曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴三角等价 [HKK17、LP20]。

本文中，我们为温和代数的（有界）导出范畴中的任意代数心给出一个几何模型。三角范畴的心是一个满阿贝尔子范畴，是构造 Brigdeland 稳定性条件的关键部分[B07]。更准确地说，稳定性条件等价于一个带有满足所谓 Harder-Narasimhan 性质的稳定性函数的心。因此，稳定性条件可以看作是心的一种连续推广。如果一个心是长度范畴，且其简单对象的同构类有限，则称其为代数心。值得注意的是，文献 [HKK17], 研究了（分次）温和代数的导出范畴上的稳定性条件，因而也研究了相应的心；而本文建立的几何模型则从表示论的角度出发，在某种意义上更加具体。我们还提到，文献 [BPP16、BPP17].研究了温和代数某个子类的有界导出范畴中的心及相应的稳定性条件。

更确切地说，我们将证明，温和代数的导出范畴中的代数心等价于某个温和代数的模范畴。基于这一点，

我们通过在给定温和代数 A 的导出范畴的曲面模型中找出各种温和代数的模范畴，为这些代数心构建几何模型。

然而，请注意，文献 [BC21] 中模范畴 mod-A 的几何模型，与文献 $\mathcal{D}^b(A)$ 中 [OPS18] 的导出范畴几何模型并不相同，详情见 [BC21的引言和第 2]节。为实现我们的目的，即在导出范畴中实现任意代数心，我们对文献[BC21] 给出的几何模型作了修改，并将这两个模型统一到同一个曲面上。关于文献 [BC21] 中的几何模型与本文模型之间差异的更多说明，见注记 2.9。

下面给出更详细的说明。我们在同一个曲面上，分别借助不同的“坐标”来实现温和代数的模范畴和导出范畴：即简单坐标 Δ_s^* 和射影坐标 Δ_p^* （分别参见定义2.1 和 1.4），其中 Δ_s^* 和 Δ_p^* 都是曲面的部分三角剖分，二者通过弧扭转和对偶相关联（见图 3 和 9）。于是，曲面上的所谓之字形曲线 （见定义 2.4）若以 A为坐标，就表示一个不可分解的 Δ_s^* -模；若以 Δ_p^* 为坐标，则表示该模的最小投射分解。更确切地说，有如下定理，其中第一部分实质上已见于 [BC21，定理 2]。

定理A (定理 2.8, 定理 2.16)。 设 $(\mathcal{S},\ \mathcal{M},\ \Delta_s^*)$ 是一个具有简单坐标的标记曲面，并设 Δ_p^* 为相应的射影坐标。那么，由 Δ_s^* 和 Δ_p^* 得到的温和代数同构，记作 A。此外，

(1) 存在一个映射 M，它在 $(\mathcal{S},\mathcal{M},\Delta_s^*)$ 上的之字形弧 α 与字符串 A-模 M_α之间建立双射，并在 $(\mathcal{S},\mathcal{M},\Delta_s^*)$ 上的（本原）闭合之字形曲线 α 与带 A-模 $M_{(\alpha,\lambda,m)}$的同构类之间建立双射，其中 $\lambda\in k^*, m\in\mathbb{N}$；(2) 任意之字形弧 α相对于 Δ_p^*所对应的射影复形 $P_\alpha^\bullet$，是 M_α的最小投射分解；任意之字形闭曲线 α相对于 Δ_p^*所对应的射影复形 $P_{(\alpha,\lambda,m)}^\bullet$，是 $M_{(\alpha,\lambda,m)}$的最小投射分解，其中 $\lambda\in k^*, m\in\mathbb{N}$。

正如预期的那样，曲线的带权定向交点（见定义2.22、2.25和2.26）将解释为相应模之间的同态／扩张，见定理2.30。

由于在上述建立的曲面模型中，一条曲线不仅表示一个不可分解模，还表示该模的最小投射分解，因此使用曲面模型研究模的同调性质十分方便。例如，我们得到了任意不可分解模的投射分解的显式刻画，见命题2.23 和注记2.27。不可分解 A模的投射维数和内射维数，以及 A 的有限维数，都可以直接从曲面中读出，见推论2.28 和2.29。

需要指出的是，关于温和代数（以及更一般的串代数）上模的上同调核与扩张，已有多篇论文进行研究，例如[BDMTY20、BS21、CS17、CPS19、CPS21、HS05、K15、S99、Z14]。本文聚焦于高阶扩张，并将其解释为曲面上的多边形，见下述定理。该定理可视为这样一种现象的推广：曲面上的某些三角形既表示关联范畴中的可区分三角形，也表示对象的1-扩张。特别地，任意高阶扩张总是源于端点处的定向交点，而内部非标记定向交点则总会产生1-扩张。我们指出，这一现象也在以下文献中被发现

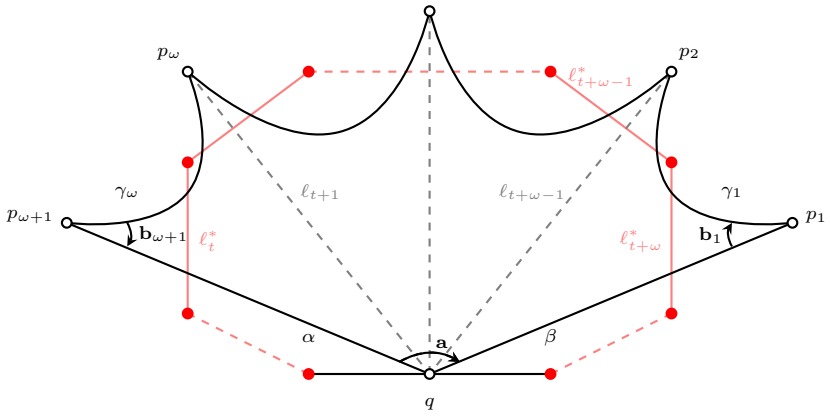


FIGURE 1. 一个特殊的（$\omega+2$）边形 $\mathbb{P}$（$\mathbf{a}$）（以粗黑色弧作为边）表示给定的一个 Yoneda ω-扩张 $[\mathbf{a}$，它由（0.1）给出，对应于 Ext 中的一个映射$^\omega$（M_α，M_β），该映射源自一个定向交点 $\mathbf{a}$，从 α 到 β，其权为 ω。

[BS21], 其中作者研究了由标记曲面的三角剖分所产生的温和代数的高阶扩张。

定理 B（定理 2.32）。设 a 是标记曲面（$\mathcal{S}$、$\mathcal{M}$、Δ^*_s）上从 $\circ$-弧 α 到 $\circ$-弧 β 的边界/穿孔定向交点，它产生了 Ext$^\omega$(M_α、M_β) 中的映射 a，其中 ω 是 Δ^*_s 中位于 α 与 β 之间的（红色）弧的数量，如图 1 所示。则 Yoneda ω-扩张 $[\mathbf{a}]$ 如下所示，其中弧 γ_i 和映射 $\mathbf{b}_i$ 描绘于图 1 的特定（$\omega+2$）- 边形 $\mathbb{P}$(a) 中：

$$(0.1)\qquad [\mathbf{a}] = 0 \longrightarrow M_\beta \xrightarrow{\mathbf{b}_1} M_{\gamma_1} \xrightarrow{\mathbf{b}_2} \cdots \longrightarrow M_{\gamma_\omega} \xrightarrow{\mathbf{b}_{\omega+1}} M_\alpha \longrightarrow 0\ .$$

此外，两个 Yoneda扩张 $[\mathbf{a}]$ 和 $[\mathbf{b}]$ 的 Yoneda乘积可以解释为将 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 和 $\mathbb{P}(\mathbf{b})$ 粘合成一个新的多边形 $\mathbb{P}(\mathbf{ab})$，见注记 2.33。

最后，为了给出温和代数 A的导出范畴中任意代数心的几何模型，我们固定一个带有初始射影坐标的标记曲面（$\mathcal{S}$，$\mathcal{M}$，Δ^*_A），并在该曲面上引入简单心剖分的概念，它是一个二元组（Δ_s，f），由一个简单剖分 Δ_s 以及一个集合 f组成，后者由 Δ_s 中弧的分次构成（见定义 3.1）。我们证明，简单心剖分（Δ_s，f）给出简单心集合 $P^\bullet_{(\Delta_s,f}$的一个几何实现。

给定一个简单心剖分（Δ_s，f），我们构造一个分次简单坐标（Δ^*_s，F^*），其中 F^*是由 f诱导出的 Δ^*_s上的分次。分次简单坐标（Δ^*_s，F^*）将作为“坐标”，用于实现由简单心集合 $P^\bullet_{(\Delta_s,f}$生成的心。更准确地说，令 Γ 为与（Δ^*_s，F^*）相关的分次温和代数中由具有零分次的元素组成的子代数，则 Γ是一个温和代数，并且我们有如下

定理 C（定理3.6）。设 $\mathcal{H}$ 是由简单心集合 $P^\bullet_{(\Delta_s,f)}$ 生成的 $\mathcal{D}^b(A)$ 的一个代数心。那么 $\mathcal{H}$ 等价于温和代数 Γ 的模范畴。此外，$\mathcal{H}$ 中的任意不可分解对象都具有以下形式：$P^\bullet_{(\alpha,g)}$，其中

在（$\mathcal{S}$、$\mathcal{M}$、Δ_s^*、F^*）上的锯齿形 $\circ$-弧 α 以及某个分次 g；或者对于在（$\mathcal{S}$、$\mathcal{M}$、Δ_s^*、F^*）上的之字形闭曲线 α 及某个分次 g，具有以下形式： $P^\bullet{}_{(\alpha,\ g,\ \lambda,\ m)}$ $\lambda \in k^*$、 $m \in \mathbb{N}$。

此外，心 $\mathcal{H}$ 中扭挠对的（简单）HRS 倾斜，可以解释为相关分次简单坐标中某种弧翻转，见注记 4.1。

本文的组织结构如下。我们首先在第 1 节回顾有关标记曲面、温和代数的模范畴/导出范畴以及导出范畴中的代数心的一些背景知识。2 节将给出温和代数的模范畴的几何模型。3 节致力于为温和代数的导出范畴中的任意代数心构建几何模型。最后，我们将在第 4 节给出一个例子，以说明上述结果。

Acknowledgments

我谨向 Ping He、Haibo Jin、Yu Qiu、Sibylle Schroll、Yu Zhou 和 Bin Zhu 致以谢意，感谢他们围绕这一主题进行的有趣讨论并提出宝贵建议。我还要感谢 Raquel Coelho Sim˜oes 告知我 Thomas Br¨ustle、David Pauksztello 和 Helene R. Tyler 的相关研究，并感谢 Thomas Br¨ustle、David Pauksztello 和 Helene R. Tyler 分享他们正在撰写的预印本 [BPT]。衷心感谢审稿人对本文进行了极其细致的审阅，并提出了宝贵的意见。特别感谢一位审稿人指出了先前版本中定理3.6 的证明中存在的一个漏洞，并提供了修正这一问题的方法。

1. Preliminaries

本文中，假设代数是基域 k 上的有限维基本代数，其中 k 是代数闭的。箭图记为 $Q = (Q_0, Q_1)$，其中 Q_0 是顶点集， Q_1 是箭集。对于一条箭头 a， s(a) 是其源点，t(a) 是其终点。箭图中的箭按从左到右的顺序复合如下：对于箭 a 和 b，我们用 ab 表示从 a 的源点到 b 的终点的路径。我们约定映射也按从左到右的顺序复合，即若 $f\colon X \to Y$ 且 $g\colon Y \to Z$，则 $fg\colon X \to Z$。一般而言，我们考虑右模。我们用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbb{N}$ 表示正整数集。对于有限集 M，我们用 $|M|$ 表示其基数。

1.1. 温和代数的模范畴。

本小节回顾温和代数及其模范畴的一些基本定义和性质。

定义 1.1. 若代数 $A = kQ/I$ 满足以下条件，则称其为温和代数： $Q = (Q_0, Q_1)$ 是有限箭图，且 I 是 kQ 的可容许理想：
(1) Q_0 中的每个顶点至多是两个箭头的源点，且至多是两个箭头的终点。(2) 对于 Q_1 中的每个箭头 a，至多存在一个箭头 b 使得 $0 \neq$ ab $\in I$；至多存在一个箭头 c 使得 $0 \neq$ ca $\in I$；至多存在一个箭头 b′ 使得 ab′ $\notin I$；至多存在一个箭头 c′ 使得 c′a $\notin I$。
(3) I 由长度为二的路径生成。

在本节中， $A = kQ/I$ 表示一个温和代数。众所周知，任意有限维不可分解右 A-模要么是字符串模，要么是带模，它们分别由字符串和带的组合数据参数化。我们在此简要回顾这些结果，更多详情请参阅 [BR87] 。

对于一个箭头 a，令 a^{-1} 为其形式逆，并满足 s(a^{-1}) $= t$(a) 和 t(a^{-1}) $= s$(a)。游走是由箭头和逆箭头构成的（可能无限的）序列 $\cdots\omega_1\omega_2\cdots\omega_m\cdots$

在 Q 中，使得 $t(\omega_i) = s(\omega_{i+1})$，且对每个 i 都有 $\omega_{i+1} \neq \omega_i^{-1}$。如果一个游走 ω 由有限个箭头和形式逆构成，则称其为有限游走。

字符串是一种有限游走 ω，它避开关系；也就是说，ω或 ω^{-1} 中不存在属于 I 的子序列。正串是仅由箭头组成的字符串，逆串是仅由形式逆组成的字符串。对于每个顶点 v，我们将一个平凡字符串 1_v 与之关联。每个字符串 ω 定义一个字符串模 $M(\omega)$，它由类型为 A 的箭图表示给出：将 ω 中的每个顶点替换为 k 的一份副本，并将每个箭头替换为恒等映射。由此得到字符串的逆变等价类与字符串模的同构类之间的一个双射。特别地，$M(1_v)$是由 Q中顶点 v 产生的简单模。

带是一种字符串 ω，其任意次幂 ω^n 都是字符串，且 ω 本身不是任何字符串的真幂。每个带 $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n$定义一族带模 $M(\omega, m, \lambda)$，其中 $m \in \mathbb{N}$为正整数，$\lambda \in k^*$为参数。更确切地说，将 ω 的每个顶点替换为向量空间 k^m 的一份副本；箭头 ω_i（或 ω_i^{-1}）的作用在 $1 \leq i \leq n-1$ 时由恒等映射诱导，在 $i = n$时则由 $\phi(\lambda)$诱导，其中 $\phi(\lambda)$是 k^m 的一个不可约自同构，其特征值为 λ。注意，由于我们假设基域 k 是代数闭的，在选定向量空间的一组基后，不可约自同构 $\phi(\lambda)$可由一个秩为 m、特征值为 λ的 Jordan块 $B(\lambda)_m$ 给出。此外，带与 $m \in \mathbb{N}$及 $\lambda \in k^*$ 在取逆和旋转意义下构成带模的一个指标集。注意，对于给定的带 ω 和参数 λ，所有带模 $M(\omega, m, \lambda)$在模范畴的 AR 箭图中构成一个齐次管，其中模 $M(\omega, 1, \lambda)$位于管口，称为拟单带模。

1.2. 温和代数的导出范畴。 在本小节中，我们借助 $A = kQ/I$中引入的同伦串和同伦带，回顾温和代数 [B11] 的导出范畴中不可分解对象的分类。更多细节请参阅 [BM03、B11] 。

一个同伦串 $\sigma = \cdots\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\cdots$在 (Q, I) 上是一个由子游走 $\ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, \ldots$ 组成的游走，其中包含 $\sigma = \cdots\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r\cdots$，且满足
(1) 每个 σ_i 都是直接字符串或逆字符串；(2) 如果 σ_i、σ_{i+1} 都是直接（分别为逆）字符串，则 $\sigma_i\sigma_{i+1}$（分别为 $\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}$）$\in I$；(3) 如果 σ 从右侧（分别从左侧）是无限的，则存在 l，使得 $\sigma_l\sigma_{l+1}\ldots$（分别为 $\ldots\sigma_{l-1}\sigma_l$）是最终周期的，其中 σ_i、$i \geq l$（分别为 $i \leq l$）是 Q 中的箭头（分别为形式逆箭头）。

对于无限同伦串，我们将使用以下记号：

$$\sigma = (\sigma_{-s}\cdots\sigma_{-2}\sigma_{-1})^{\infty}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n(\sigma_{n+1}\sigma_{n+2}\cdots\sigma_{n+t})^{\infty},$$

其中，σ_{-i} 是 $1 \leq i \leq s$的形式逆箭头，而 σ_{n+i} 是$1 \leq i \leq t$的正向箭头。

同伦带是一个有限同伦串 $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_r$，其中直接串和逆串的数量相等 σ_i，并且任意次幂 σ^n 都是同伦串，而 σ 本身不是任何同伦串的真幂。

同伦串 σ上的分次是一个整数序列 $\mu = (\ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r, \ldots)$，使得对于每个 i,

$$\mu_{i+1} = \begin{cases} \mu_i - 1 & \text{if } \sigma_{i+1} \text{ is a direct homotopy string;} \\ \mu_i + 1 & \text{if } \sigma_{i+1} \text{ is an inverse homotopy string.} \end{cases}$$

称有序对（σ， μ）为分次同伦串。

We 类似地，可定义同伦带上的分次，以及分次同伦带。

一个分次同伦串（σ,μ）对应一个不可分解对象 $P^\bullet_{(\sigma,\mu)}$；一个同伦带（σ,μ）则对应一族不可分解对象$P^\bullet_{(\sigma,\mu,\lambda,m)}$，它们属于$\mathcal{K}^{-,\ b}(proj\text{-}A)$，其中 $\lambda\in k^*$ 且 $m\in\mathbb{N}$。下面我们简要回顾这一构造。

设（σ,μ）是（Q,I）上的一个分次同伦串，且满足 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$。记 P_{v_i}为与顶点 v_i 对应的投射对象：当 $1\le i\le n$时为$=s(\sigma_i)$，而当 v_{n+1} 时为$=t(\sigma_n)$。于是，σ_i 诱导出一个从 $P_{v_{i+1}}$ 到 P_{v_i} 的典范非零映射（相应地，也诱导出一个从 P_{v_i} 到 $P_{v_{i+1}}$的典范非零映射）；若 σ_i 是正串（相应地，逆串），则该映射仍记为 σ_i（相应地，记为 σ_i^{-1}）。我们将 P_{v_i}置于 $P^\bullet_{(\sigma,\mu)}$的第 μ_i位，并将 $P_{v_{i+1}}$置于 $P^\bullet{}_{(\sigma,\ \mu)}$ 的第 μ_{i+1}位，再用映射 σ_i（相应地，σ_i^{-1}）将它们连接起来。如此，我们通过连接 σ 经过的所有投射对象，得到一个复形 $P^\bullet_{(\sigma,\mu)}$。我们称 $P^\bullet_{(\sigma,\mu)}$ 为由（σ,μ）得到的同伦串对象。

设 (σ,μ) 是 (Q,I) 上的一个分次同伦带，其中 $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_n$。类似地，$\sigma_i$ 在 P_{v_i} 和 $P_{v_{i+1}}$ 之间诱导一个典范的非零映射。对于每个 $1\le i\le n-1$，我们将 $P^m_{v_i}$ 放在 $P^\bullet_{(\sigma,\mu,\lambda,m)}$ 的第 μ_i 个位置，并将 $P^m_{v_{i+1}}$ 放在 $P^\bullet_{(\sigma,\mu,\lambda,m)}$的第 μ_{i+1} 个位置，再根据 σ_i 是正向还是反向，用映射 σ_iI_m 或 $\sigma_i^{-1}I_m$ 将它们连接起来，其中 I_m 是秩为 m 的单位矩阵。最后，根据 σ_n 是正向还是反向，我们用 $\sigma_nB(\lambda)_m$ 或 $\sigma_n^{-1}B(\lambda)_m$ 将 P_{v_1} 和 P_{v_n} 连接起来。这样，我们便通过连接 σ 经过的所有投射对象的直和，得到一个复形 $P^\bullet_{(\sigma,\mu,\lambda,m)}$。我们称 $P^\bullet_{(\sigma,\mu,\lambda,m)}$ 为由 (σ,μ) 导出的同伦带对象。

注意，$\mathcal{K}^{-,b}(proj\text{-}A)$中的每个对象要么是同伦串对象，要么是同伦带对象。此外，除取逆外，同伦串构成同伦串对象的一个指标集；除取逆和旋转外，同伦带连同 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\lambda\in k^*$ 构成同伦带对象的一个指标集。

1.3.标记曲面与曲面剖分。我们回顾有关标记曲面的若干概念，以及如何从曲面的剖分构造温和代数；关于这些内容，有许多参考文献，例如 [HKK17、PPP19、LP20、BC21、PPP21], 本文将紧密遵循 [OPS18] 和 [APS23]。

定义 1.2. 标记曲面是一个二元组 $(\mathcal{S},\mathcal{M})$，其中
(1) $\mathcal{S}$ 是一个具有非空边界的定向曲面，其连通分支为 $\partial\mathcal{S}=\sqcup_{i=1}^b\partial_i\mathcal{S}$；(2) $\mathcal{M}=\mathcal{M}_\circ\cup\mathcal{M}_\bullet\cup\mathcal{P}_\circ$ 是 标记点在 $\mathcal{S}$上的有限集。和 $\mathcal{M}_\bullet$中的元素位于 $\mathcal{S}$的边界上，分别用符号 $\circ$ 和 $\bullet$表示。每个连通分支 $\partial_i\mathcal{S}$ 都必须至少包含一个每种颜色的标记点，其中点 $\circ$ 和 $\bullet$ 在 $\partial_i\mathcal{S}$上交替排列。中的元素位于 $\mathcal{S}$的内部。我们将这些点称为穿孔点，并用符号 $\circ$表示。

请注意，在[APS23], 中，曲面上的穿孔点用 $\bullet$点表示，而在这里我们使用 $\circ$点，因为这种选择更适合我们的目的，也就是说，我们关注的是温和代数的模范畴，而非其导出范畴。

在曲面上，所有曲线均视为在边界分支和穿孔点处相对同伦等价，并且曲线的所有交点都要求是横截的。我们固定顺时针方向作为曲面的定向，也就是说，沿边界行进时，曲面的内部位于右侧。

定义 1.3. 设 $(\mathcal{S},\mathcal{M})$ 为一个标记曲面。

(1) 一条弧 是指一条不可缩的曲线，其端点位于 $\mathcal{M}_\circ \cup \mathcal{P}_\circ \cup \mathcal{M}_\bullet$中。(2) 一个环 是指端点重合的弧。(3) 一条 $\circ$-弧 是指一条不可缩的曲线，其端点位于 $\mathcal{M}_\circ \cup \mathcal{P}_\circ$中。(4) 一条 $\bullet$-弧 是指一条不可缩的曲线，其端点位于 $\mathcal{M}_\bullet$中。(5) 一条简单弧 是指没有内部自交的弧。(6) 一条例外弧 是指没有边界自交的简单弧，即具有两个不同端点。(7) 一条闭曲线 是指位于 $\mathcal{S}$ 内部的一条不可缩曲线，且其端点重合。我们总是假设闭曲线是本原的，即它不是 $\mathcal{S}$的基本群中某条闭曲线的非平凡幂。

为了使某些定义和记号在存在环的情况下仍然有良好定义，我们将环的唯一端点视为两个不同的端点。

定义 1.4. 设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 是一个标记曲面。
(1) 端点位于 $\mathcal{M}_\circ$ 的简单弧的集合称为射影剖分，如果这些弧没有内部交点，并且它们将曲面切分成多边形，且每个多边形都恰好包含一个来自 $\mathcal{M}_\bullet \cup \mathcal{P}_\circ$ 的标记点。(2) 端点位于 $\mathcal{M}_\bullet \cup \mathcal{P}_\circ$ 的简单弧的集合称为射影坐标，如果这些弧没有内部交点，并且它们将曲面切分成多边形，且每个多边形都恰好包含一个来自 $\mathcal{M}_\circ$ 的标记点。

射影剖分将记为 Δ_p。那么不难看出（例如参见[OPS18] ），对于每个 Δ_p，在（$\mathcal{S}$， $\mathcal{M}$）上存在唯一的（相差同伦）射影坐标，我们将其记为 Δ_p^*，使得 ℓ^* 中的每条弧都与 Δ_p^* 中恰好一条弧 ℓ 相交。我们称 Δ_p^* 为 对偶(射影坐标)，并称 Δ_p为对偶(射影剖分)。

我们指出，上文引入的射影坐标称为 $\bullet$-可容许剖分，见 [APS23], ，并对应于 [OPS18] 中考虑的层状结构。注意，在 [OPS18], 中，允许存在没有标记点的空边界分支；本文将其收缩为 $\bullet$-穿孔点。 [OPS18], 中只使用一种标记点，对应于本文中的边界-$\circ$-点。层状结构中每条弧的端点都位于两个相邻标记点之间的线段上，或位于空边界分支上。对于一个层状结构，将同一线段（或空边界分支）上的端点收缩为一个点，该点对应于本文使用的红色标记点（或穿孔点），由此得到上文定义的射影坐标。

注记 1.5. 在定义 2.1中，我们将引入简单剖分和简单坐标。我们在此使用的术语将在定理 2.8 和定理2.12中得到说明，也就是说，在研究温和代数的导出范畴和模范畴时，射影坐标和简单坐标将分别被视为某种“坐标”，而对偶投射剖分和对偶简单剖分中的弧将分别表示该温和代数的不可分解投射模和简单模。

定义 1.6. 设 q 是曲面 Δ_p^* 中弧 ℓ_i^*、ℓ_j^* 的公共端点。在 q 处从 ℓ_i^* 到 ℓ_j^* 的定向交点，是一个以 q 为顶点、局部从 ℓ_i^* 到 ℓ_j^* 的顺时针角，且该角位于曲面的内部。如果一个定向交点不能表示为来自 Δ_p^* 的两条弧的两个定向交点的复合，则称其为极小定向交点。

定义 1.7. 我们将代数 $A(\Delta_p^*)$ 定义为箭图 $Q(\Delta_p^*)$ 的路径代数 $kQ(\Delta_p^*)$ 关于如下定义的理想 $I(\Delta_p^*)$ 的商：

(1) $Q(\Delta_p^*)$ 的顶点由 Δ_p^* 中的弧给出。(2) 每个从 ℓ_i^* 到 ℓ_j^* 的极小定向交点 a 都会产生一个从 ℓ_i^* 到ℓ_j^*的箭头，仍记作 a。(3) 理想 $I(\Delta_p^*)$ 由路径 ab：$\ell_i^* \to \ell_j^* \to \ell_k^*$ 生成，其中分别产生 a 和 b 的 ℓ_i^* 和 ℓ_j^* 的公共端点与 ℓ_j^* 和 ℓ_k^* 的公共端点重合。

那么很容易验证，$A(\Delta_p^*)$ 是一个温和代数。事实上，[BC21、OPS18、PPP19] 证明了任意温和代数都可以由此方式得到。因此，这建立了由三元组（$\mathcal{S}$，$\mathcal{M}$，Δ_p^*）构成的集合与温和代数的同构类集合之间的双射，其中三元组由标记曲面的同胚类及其射影坐标组成 $A(\Delta_p^*)$。

注记 1.8。我们应当提及，当我们根据曲面上的剖分定义代数时，采用的取向与[OPS18] 和 [BC21]中使用的相反。

根据定义，Δ_p^* 将曲面剖分成若干多边形，每个多边形都恰有一个来自 $\mathcal{M}_\circ$的 $\circ$-点。设 α 是（$\mathcal{S},\mathcal{M}$）上的一条 $\circ$-弧或闭曲线，并选定 α的一个方向。记 $\alpha\cap\Delta_p^*$ 为 α 与 Δ_p^*中的弧的交点所构成的全序集，其中顺序由 α的方向诱导。 α的一个分次是函数 f: $\alpha\cap\Delta_p^* \longrightarrow \mathbb{Z}$，定义如下：若 p_1 和 p_2 属于 $\alpha\cap\Delta_p^*$，且 p_2 是 p_1的直接后继，则 α 经由 p_1 进入由 Δ_p^* 中的弧围成的多边形 $\mathbb{P}$，并经由 p_2离开。如果 $\circ$中的点位于 α左侧，则 $f(p_2) = f(p_1) - 1$；否则，$f(p_2) = f(p_1) + 1$。我们称有序对(α, f)为$(\mathcal{S},\mathcal{M},\Delta_p^*)$上的一条分次曲线。

不难看出，分次的定义与弧的方向选择无关。然而，如果 α 是一条闭曲线，那么它可能不可分次化，也就是说，可能不存在 α 的分次，因为在这种情况下，f 可能没有良好定义。

1.4. 温和代数导出范畴的几何模型。本小节回顾 [OPS18] 所建立的温和代数导出范畴的几何模型。下文中，设$(\mathcal{S},\mathcal{M},\Delta_p^*)$为带有射影坐标的标记曲面，并令 $A(\Delta_p^*)$ 为其对应的温和代数。

我们首先回顾如何由（$\mathcal{S},\mathcal{M},\Delta_p^*$）上的分次 $\circ$-弧/闭曲线（α, f）构造 A（Δ_p^*）的分次同伦串/带（σ,μ）。

令 α 为曲面上的一条 $\circ$-弧或一条闭曲线。选定 α 的方向后，将依次与 α 相交的 Δ_p^* 的有序多边形记为 $\mathbb{P}_0,\mathbb{P}_1,\cdots,\mathbb{P}_{n+1}$；当 α 为闭曲线时，指标按模 $n+1$ 计算，特别地，$\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_{n+1}$。将依次与 α 相交的 Δ_p^* 中的有序弧记为 $\ell_0^*,\ell_1^*,\cdots,\ell_n^*$，使得对每个 $0 \le i \le n$，ℓ_i^* 属于 $\mathbb{P}_i$ 和 $\mathbb{P}_{i+1}$。

（1）若 α 是一条两个端点均在 $\mathcal{M}_\circ$中的 $\circ$-弧，则对每个 $1 \le i \le n$，存在一条典范的非零路径 σ_i，位于 A（Δ_p^*）中，从 ℓ_{i-1}^* 到 ℓ_i^*（分别从 ℓ_i^* 到 ℓ_{i-1}^*）；该路径由 $\mathbb{P}_i$ 中极小定向交点所对应的箭头复合而成，前提是 $\mathbb{P}_i$ 中唯一的 $\circ$-点位于 α 的左侧（分别为右侧）。若 σ_i 是一条从 ℓ_{i-1}^* 到 ℓ_i^*（分别从 ℓ_i^* 到 ℓ_{i-1}^*）的路径，我们将其记为 $\overrightarrow{\sigma}_i = \sigma_i$（分别记为 $= \sigma_i^{-1}$）。令 $\sigma = \overrightarrow{\sigma}_1\overrightarrow{\sigma}_2\cdots\overrightarrow{\sigma}_n$，它是一个有限同伦串。我们通过令 $\mu_i = f(\ell_i^*)$，在 σ 上定义分次 μ。于是（σ,μ）是 A（Δ_p^*）的有限同伦串。

(2) 若 α 是闭曲线，则 (σ,μ) 的构造类似。注意，由于α 可分级，正向字符串和逆向字符串的数量相等，因此 σ 是可分级的同伦带。

(3) 若 α 是一条 $\circ$-弧，且至少有一个端点 q 来自 $\mathcal{P}_\circ$，则我们首先通过局部重绘 α，构造一条无限弧 $\widetilde{\alpha}$，使其

沿顺时针方向无限次缠绕。如果 α 的两个端点都是穿孔点，那么我们就在两个端点附近局部重绘 α。此外，我们以唯一的方式扩展 f，从而在 $\widetilde{\alpha}$ 上得到一个分次 f，使得 f 和 f 在 $\sim\alpha$ 与 $\widetilde{\alpha}$ 和 Δ_p^* 的公共交点处取值相同。我们以类似于上文处理两个端点都在 $\mathcal{M}_\circ$ 中的 $\circ$-弧的方式，将新的分次弧 $(\widetilde{\alpha}, f)$ 与分次同伦串 (σ, μ) 相关联。于是 (σ, μ) 是 $A(\Delta_p^*)$ 的一条无限同伦串。

上述构造在（$\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$, Δ_p^*）上的分次 $\circ$弧/闭曲线（α, f）集合与 A（Δ_p^*）的分次同伦串/带（σ, μ）集合之间给出了一个双射。我们将由（α, f）关联的同伦串/带对象记为 $P^\bullet{}_{(\alpha,\ f)}$ /$P^\bullet{}_{(\alpha,\ f,\ \lambda,\ m)}$，即由（$\sigma$, μ）产生的对象。

令 $n \in \mathbb{Z}$，对于一条分次曲线（α, f），我们通过设定 $f[n](q) = f(q) - n$ 来定义平移 $f[n]$，其中 $q \in \alpha \cap \Delta_p^*$ 是任意交点。于是，分次曲线的分次平移对应于相关对象的平移，即 $P^\bullet{}_{(\alpha,\ f[n])} = P^\bullet_{(\alpha,f)}[n]$ 和 $P^\bullet_{(\alpha,f[n],\lambda,m)} = P^\bullet{}_{(\alpha,\ f,\ \lambda,\ m)}[n]$。

此外，基于 [ALP16], 中的结果， [OPS18，定理 3.3、注记 38] 证明了 $\mathcal{K}^{-}$中的态射^b（$proj$-A）可以解释为曲面上分次曲线的定向交点，以下将对此重新表述。我们首先介绍曲面上一般曲线的定向交点概念（参见定义 1.6）。

定义 1.9. 设 α 和 β 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上相交于一点 q的两条 $\circ$-弧或闭曲线。从 α 到 β 在 q 处的定向交点，是以 q 为基点、从 α到 β 的顺时针角，该角位于曲面内部；约定当 q 是曲面的非带 puncture 的内部点时，相对的两个角视为等价。

q的位置有三种可能： q 是边界标记点、非带 puncture 的内部点或穿孔点，分别见图2中的相应图片。边界交点只产生一个定向交点 a，见左图；而非带 puncture 的内部交点产生两个定向交点，见中图。带 puncture 的内部交点产生无穷多个定向交点，见右图；其中我们将从 α 到 β 的极小定向交点记为 a，并将从 β 到 α的极小定向交点记为 b。于是，由 q 产生的任意从 α 到 β 的定向交点，都可由 a 再进行若干次顺时针 $2m\pi$ 旋转得到，其中 $m \in \mathbb{N}$为某个值；我们将其记为 (a m)。特别地，有 (a m) = a。类似地，由 q 产生的从 β到 α 的定向交点记为 (b m)。

为了考察 α 和 β上的分次，我们引入它们与 Δ_p^*中的弧之间的一些特殊交点 p_1 和 p_2。更确切地说，在图2中，绿色线段是 Δ_p^*中弧的一部分。我们分别将集合 $\Delta_p^* \cap \alpha$ 和 $\Delta_p^* \cap \beta$ 中距离 q 最近的交点记为 p_1 和 p_2。特别地，当 q 是穿孔点时，为了产生交点 p_1 和 p_2，我们将弧替换为无限弧（虚线弧），见右图。注意，在所有情况下， p_1 和 p_2 的选取都是唯一的，即使对于非带 puncture 的内部交点也是如此：包含 q 的多边形$\mathbb{P}$中的 $\circ$-点位于右侧，见中图。

设 $P^\bullet_{(\alpha,f)}$ and $P^\bullet{}_{(\beta,g)}$为 $\mathcal{K}^{-,b}(proj\text{-}A)$ 中与曲面上的两条分次曲线 (α, f) 和 (β, g) 相关的两个对象。为方便陈述结果，下文中若 $m = 1$，我们将带对象 $P^\bullet_{(\alpha,f,\lambda,m)}$ 记作 $P^\bullet_{(\alpha,f)}$，且该陈述

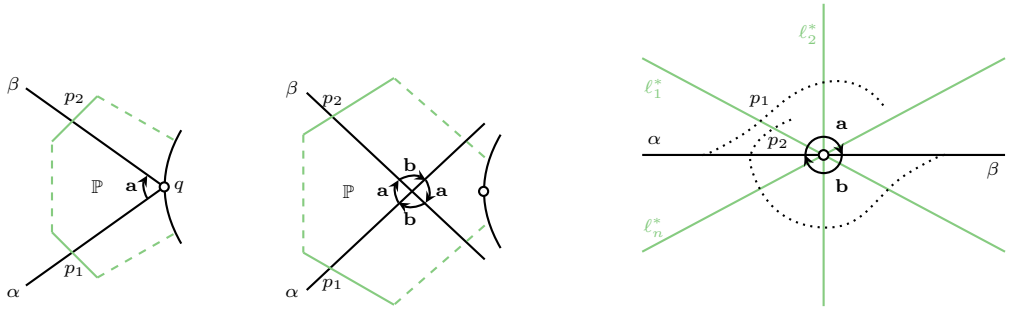


FIGURE 2. 定向交点在导出范畴中产生相应对象之间的态射。

不依赖于 λ 的选择。于是， α 与 β 的定向交点在 $\mathcal{K}^{-,b}(proj\text{-}A)$ 中产生态射。更确切地说，

(1) 定向交点 $\mathbf{a}$ 由图 2 左图所示的边界交点产生一个态射：

$$\psi_{\mathbf{a}} : P^{\bullet}_{(\alpha,f)} \to P^{\bullet}_{(\beta,g)}[g(p_2) - f(p_1)]; \tag{1.1}$$

(2) 定向交点 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 分别由图 2 中图所示的非穿孔内部交点产生两个态射：

$$\psi_{\mathbf{a}} : P^{\bullet}_{(\alpha,f)} \to P^{\bullet}_{(\beta,g)}[g(p_2) - f(p_1)], \tag{1.2}$$

$$\psi_{\mathbf{b}} : P^{\bullet}_{(\beta,g)} \to P^{\bullet}_{(\alpha,f)}[f(p_1) - g(p_2) + 1]; \tag{1.3}$$

(3) 定向交点 $(\mathbf{a}\ m)$ 和 $(\mathbf{b}\ m$分别由图 2右图所示的带穿孔点的内部交点产生态射：

$$\psi_{(\mathbf{a},m)} : P^{\bullet}_{(\alpha,f)} \to P^{\bullet}_{(\beta,g)}[g(p_2) - f(p_1) + mn], \tag{1.4}$$

$$\psi_{(\mathbf{b},m)} : P^{\bullet}_{(\beta,g)} \to P^{\bullet}_{(\alpha,f)}[f(p_1) - g(p_2) + mn], \tag{1.5}$$

其中 $m \in \mathbb{N}$ 和 n 是与穿孔点相连的 Δ_p^* 中的弧的数量 $\circ$，并且必要时按模 n 设置 $0 \leq g(p_2) - f(p_1)\ f(p_1) - g(p_2) \leq n-1$。

命题 1.10。[OPS18，定理 3。3] 态射 $\psi_{\mathbf{a}}$， $\psi_{\mathbf{b}}$， $\psi_{(\mathbf{a},m)}$ 和 $\psi_{(\mathbf{b},m)}$上述构造的映射构成了 Hom 空间

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}(P^{\bullet}_{(\alpha,f)}, P^{\bullet}_{(\beta,g)}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(P^{\bullet}_{(\alpha,f)}, P^{\bullet}_{(\beta,g)}[n]),$$

除非 α 和 β 重合。

(1) 如果 α 和 β 是同一条 $\circ$-弧，那么上述态射与恒等映射一起构成 Hom 空间的一组基。

(2) 如果 α 和 β 是同一条闭曲线，且 $P^{\bullet}_{(\alpha,f)}$ 和 $P^{\bullet}_{(\beta,g)}$ 具有相同的参数，那么 $P^{\bullet}_{(\alpha,f)} \cong P^{\bullet}_{(\beta,g)}[f-g]$，并且上述态射与恒等映射以及一个典范映射 ξ 一起，该映射出现在一个 Auslander–Reiten 三角中

$$\tau P^{\bullet}_{(\alpha,f)} \longrightarrow E \longrightarrow P^{\bullet}_{(\alpha,f)} \xrightarrow{\xi} \tau P^{\bullet}_{(\alpha,f)}[1] = P^{\bullet}_{(\beta,g)}[f-g+1],$$

构成 Hom 空间的一个基，其中，对于 Δ_p^* 中的一条弧与 $\alpha = \beta$ 的任意交点 p，$f-g \in \mathbb{Z}$ 被定义为 $f(p)$ 与 $-g(p)$ 之差。

1.5. t-结构、心与 simple-minded集合。对于有限维代数 A，众所周知，有限生成右 A-模的有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(A)$ 与同伦范畴 $\mathcal{K}^{-,b}(proj\text{-}A)$ 三角等价。下文中，我们将不区分这两个范畴。同样众所周知，有限生成右 A-模的范畴 mod-A 可以嵌入 $\mathcal{K}^{-,b}(proj\text{-}A)$，成为一个全子范畴，该嵌入将模 M 映射到其投射分解 $P^\bullet_M$。在此嵌入下，模的扩张空间与相应投射复形的同态空间一致，即对于 mod-A 中的任意模 M 和 N，以及任意非负整数 ω，存在典范同构 $\mathrm{Ext}^\omega(M,N) \cong \mathrm{Hom}(P^\bullet_M, P^\bullet_N[\omega])$。

事实上，mod-A 是一个更一般概念的典型例子，即 $\mathcal{D}^b(A)$ 的心，也就是标准 t-结构 $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ 的心，其中 $\mathcal{D}^{\leq 0}$ 由正次数上同调消失的复形组成，而 $\mathcal{D}^{\geq 0}$ 由负次数上同调消失的复形组成。

一般而言，三角范畴 t-结构 在带有悬移函子的三角范畴 $\mathcal{C}$ 上，若悬移函子为 $[1]$（[BBD82]）是 $\mathcal{C}^{\leq 0}$，$\mathcal{C}^{\geq 0}$ 的全子范畴对 $\mathcal{C}$，满足
（1） $\mathcal{C}^{\leq 0}[1] \subseteq \mathcal{C}^{\leq 0}$ 和 $\mathcal{C}^{\geq 0}[-1] \subseteq \mathcal{C}^{\geq 0}$；（2）对于 $M \in \mathcal{C}^{\leq 0}$ 和 $N \in \mathcal{C}^{\geq 0}$，$\mathrm{Hom}(M, N[-1]) = 0$；（3）对于每个 $M \in \mathcal{C}$，在 $\mathcal{C}$ 中存在一个三角形 $M' \to M \to M'' \to M'[1]$，其中有 $M' \in \mathcal{C}^{\leq 0}$ 和 $M'' \in \mathcal{C}^{\geq 0}[-1]$。

我们称 $\mathcal{C}^{\leq 0} \cap \mathcal{C}^{\geq 0}$ 为 t-结构的心，它总是阿贝尔的。若满足以下条件，则称 $(\mathcal{C}^{\leq 0}, \mathcal{C}^{\geq 0})$ 的 t-结构是有界的。

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}^{\leq 0}[n] = \mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}^{\geq 0}[n].$$

如果一个 t-结构是有界的，且其心是代数的，也就是说，心中简单对象的同构类有限，并且心中的每个对象既是阿廷的，也是诺特的，那么这个 t-结构就称为代数 t-结构。代数 t-结构与三角范畴中的某些特殊对象的集合密切相关：简单心集合。

如果三角范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 $S_1,\dots,S_n$ 构成的集合满足以下关于 $1 \leq i,j \leq n$ 的条件，则称其为简单生成集：
(1) $\mathrm{Hom}(S_i, S_j[m]) = 0$, $\forall\, m < 0$，(2) $\mathrm{End}(S_i)$ 是一个除代数，且当 $i \neq j$ 时 $\mathrm{Hom}(S_i, S_j)$ 为零，(3) $S_1,\dots,S_n$ 生成 $\mathcal{C}$（即 $\mathcal{C} = \mathrm{thick}(S_1,\dots,S_n)$）。

注意，对于任意代数 A，简单 A-模构成一个 $\mathcal{D}^b(A)$ 的简单心集合，而简单心集合与代数 t-结构一一对应，因此也与代数心对应，参见 [KY14]。下面的命题说明如何由简单心集合构造代数心。

命题 1.11. [KY14，命题 5.4，定理 6.1] 设 $S_1,\dots,S_n$ 是 $\mathcal{D}^b(A)$ 的一个简单心集合。设 $\mathcal{D}^{\leq 0}$（分别地，$\mathcal{D}^{\geq 0}$）是 $\{S_i[m] \mid i = 1,\dots,n, m \geq 0\}$（分别地，$\{S_i[m] \mid i = 1,\dots,n, m \leq 0\}$）在 $\mathcal{D}^b(A)$ 中的扩张闭包。则有序对 $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ 是 $\mathcal{D}^b(A)$ 上的一个有界 t-结构。

反过来，$\mathcal{D}^b(A)$ 中的任何代数心都以以上方式由一个简单心集合产生。

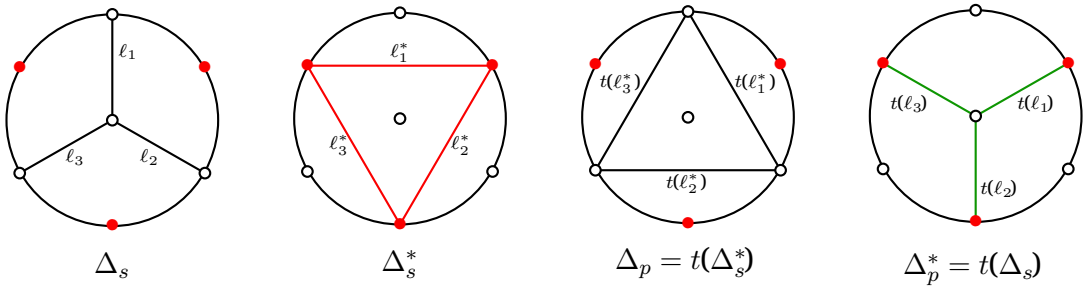


FIGURE 3. 带有一个穿孔点的圆盘上的剖分与坐标示例。从左到右依次为：简单剖分、简单坐标、射影剖分和射影坐标。请注意，简单剖分与简单坐标、射影剖分与射影坐标分别互为对偶，具体而言，剖分中的一条弧恰好与相应坐标中的一条弧相交。射影剖分/坐标由简单坐标/剖分经由顺时针旋转弧的 •/∘-边界端点，使其到达同一边界分支上的下一个 ∘/•-边界点而得。

2. A GEOMETRIC MODEL FOR THE MODULE CATEGORY OF A GENTLE ALGEBRA

2.1. 作为曲线的模。 在本节中，令 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 为一个标记曲面，其中 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\circ \cup \mathcal{P}_\circ \cup \mathcal{M}_\bullet$ 是 $\mathcal{S}$上的标记点集合。我们将介绍 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上的简单剖分/坐标，并将其与温和代数联系起来。随后，我们将温和代数的不可分解模解释为标记曲面上的某些曲线。这可以视为对 [BC21] 中建立的模范畴几何模型的一种修改。

定义 2.1。 （1）一组简单 ∘弧被称为简单剖分，如果这些弧没有内部交点，并且将曲面切分成多个多边形，其中每个多边形恰好包含一个来自 $\mathcal{M}_\bullet$的标记点。（2）一组简单 •弧被称为简单坐标，如果这些弧没有内部交点，并且将曲面切分成多个多边形，其中每个多边形恰好包含一个 ∘标记点，来自 $\mathcal{M}_\circ \cup \mathcal{P}_\circ$。

注意，如果 $\mathcal{P}_\circ$ 为空，即曲面上不存在穿孔点，那么射影剖分（分别为射影坐标）与简单剖分（分别为简单坐标）重合；否则二者不同，见下例。

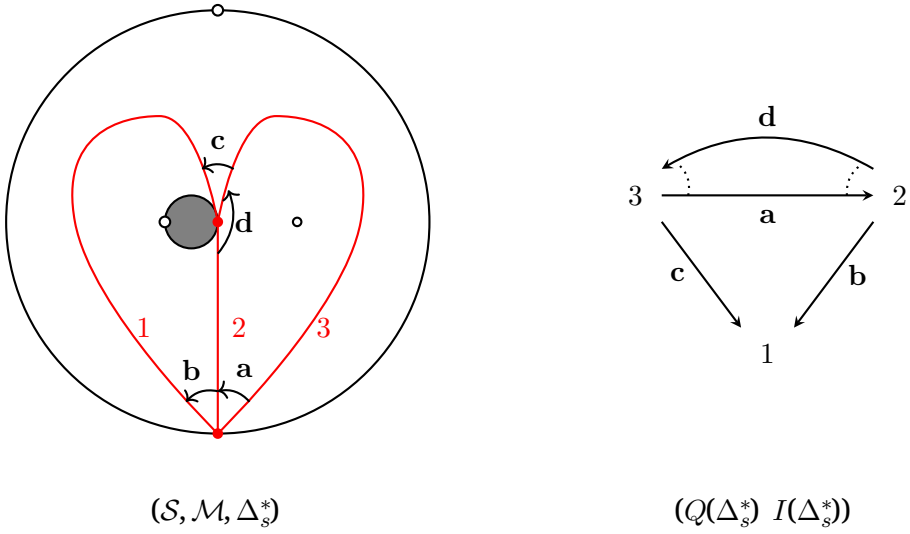
例 2.2. 图 3中的图展示了圆盘上有一个穿孔点时坐标和剖分的示例。

我们用 Δ_s表示一个简单剖分。与射影剖分的情形类似，对于任意 Δ_s，存在唯一一个（在同伦意义下）对偶简单坐标 Δ_s^*，定义在（$\mathcal{S}$，$\mathcal{M}$）上，使得 Δ_s^* 中的每条弧恰好与 Δ_s中的一条弧相交。示例见图3 左侧的两幅图。

可以将 Δ_s^* 与温和代数 $A(\Delta_s^*) = kQ(\Delta_s^*)/I(\Delta_s^*)$ 联系起来，这与定义1.7中给出的射影坐标情形互为对偶。更确切地说， $Q(\Delta_s^*)$ 的顶点由 Δ_s^*中的弧给出，而箭头由弧之间的极小定向交点给出。然而，与射影坐标情形互为对偶的是，此处我们需要 ℓ_j^* 沿着 ℓ_i^* 逆时针方向经过某个公共端点处的一个

定向交点**a** 从 ℓ_i^* 到 ℓ_j^*，且理想 $I(\Delta_s^*)$ 由路径**ab** :$\ell_i^* \to \ell_j^* \to \ell_k^*$生成，其中 ℓ_i^* 与 ℓ_j^*的公共端点，以及ℓ_j^* 与 ℓ_k^* 的公共端点分别对应于**a**和**b** ，且这两个公共端点不同。例子见例2.3 。

例2.3。 图 4 左图是带有单纯坐标的标记曲面，右图则是相应的带关系的箭图。



$(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ $(Q(\Delta_s^*)\ I(\Delta_s^*))$

FIGURE 4. 左图是标记环带上的一个单纯坐标，右图则是相应的带关系的箭图，其中我们用虚线表示关系。

那么 $A(\Delta_s^*)$ 是一个温和代数；与射影坐标的情形类似，这建立了以下两者之间的双射：由标记曲面及其单纯坐标组成的三元组（$\mathcal{S}$、 $\mathcal{M}$、Δ_s^*）的同胚类集合，以及温和代数 $A(\Delta_s^*)$ 的同构类集合；另见 [BC21，定理 1]。

注意，Δ_s^* 将曲面切割成多边形 $\mathbb{P}$，其中每个多边形恰好包含一个来自 $\mathcal{M}$。或来自 $\mathcal{P}$。的标记点，见图5。这些多边形称为 Δ_s^*的多边形。

下面我们将在 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 上引入一种特殊的曲线，并将其解释为 $A(\Delta_s^*)$ 的不可分解模。我们将 Δ_s^* 的一个多边形 $\mathbb{P}$ 记作

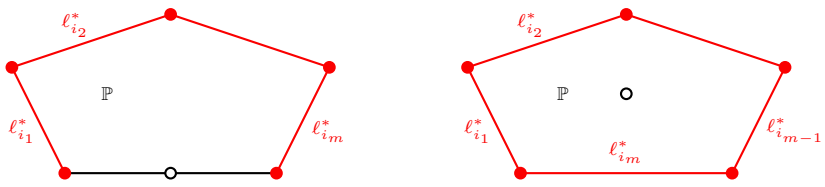


FIGURE 5. 由简单坐标中的弧和边界线段形成的两种多边形 $\mathbb{P}$ 。

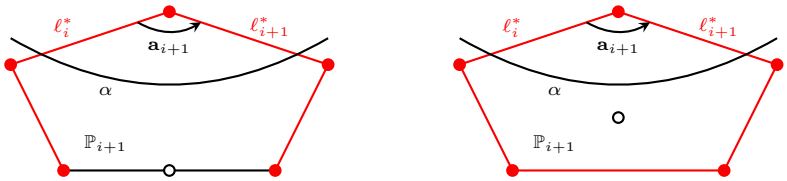


FIGURE 6. 一条之字形曲线 α 穿过 Δ_s^* 的一个多边形 $\mathbb{P}_{i+1}$ 。若$\mathbb{P}_{i+1}$ 包含一个穿孔点且不包含二边形，则该穿孔点不必属于由 ℓ_i^*、ℓ_{i+1}^* 和 α 的线段构成的（三角形）三角形，见右图。弧 ℓ_i^* 和 ℓ_{i+1}^* 可以重合，也就是说， $\mathbb{P}_{i+1}$ 是一个由 •-弧 $\ell_i^* = \ell_{i+1}^*$围成的一次穿孔单边形。

$(\ell_{i_1}^*, \cdots, \ell_{i_m}^*)$， Δ_s^*中构成 $\mathbb{P}$的有序弧集，其中弧按顺时针方向排列；如果 $\mathbb{P}$ 有一个穿孔点，则指标 $1 \le j \le m$ 视为模 m 。对于任意 $\ell_{i_j}^* \in \mathbb{P}$，我们将 $\ell_{i_{j-1}}^*$ （如果存在）称为 $\ell_{i_j}^*$ 在 $\mathbb{P}$ 中的前驱，将 $\ell_{i_{j+1}}^*$ （如果存在）称为 $\ell_{i_j}^*$ 在 $\mathbb{P}$中的后继，见图 5。特别地，如果 $\mathbb{P}$ 具有来自 $\mathcal{M}_\circ$的一个标记点，则 $\ell_{i_1}^*$ 没有前驱，且 $\ell_{i_m}^*$ 没有后继；而如果 $\mathbb{P}$ 有一个穿孔点，则$\ell_{i_1}^*$ 有前驱$\ell_{i_m}^*$ ，且 $\ell_{i_m}^*$有后继$\ell_{i_1}^*$ 。

设定1：设 α 为标记曲面（$\mathcal{S}, \mathcal{M}$）上的一条 $\circ$-弧或一条闭曲线。在选定 α的一个方向后，将Δ_s^*中依次与 α相交的有序多边形记为 $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \cdots, \mathbb{P}_{n+1}$；当 α 为闭曲线时，指标按模$n+1$计算，特别地，令 $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_{n+1}$。将$\Delta_s^*$ 中依次与 α 相交的有序弧记为 ℓ_0^*, $\ell_1^*, \cdots, \ell_n^*$，使得对于每个$0 \le i \le n$，$\ell_i^*$ 属于 $\mathbb{P}_i$ 和 $\mathbb{P}_{i+1}$ 。注意， $\{\ell_0^*, \ell_1^*, \cdots, \ell_n^*\}$ 是一个有序多重集，即这些ℓ_i^*不必彼此不同。

定义2.4. 设 α 是$(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$上的 $\circ$-弧或闭曲线。在上述设定1的记号下，

(1) 我们称 α 为定义在 上（$\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*$) 的一条之字形曲线，当且仅当在每个多边形 $\mathbb{P}_{i+1}$, $0 \le i \le n+1$, ℓ_{i+1}^*都是 ℓ_i^*的前驱或后继。此外，如果 $\mathbb{P}_{i+1}$ 是一个包含穿孔点且具有 m 条边的多边形，其中 $m \ne 2$，那么我们还要求该穿孔点不位于由 ℓ_i^*, ℓ_{i+1}^* 和 α的线段所构成的（唯一）三角形内，见图 6右图；(2) 我们称一条 $\circ$-弧为一条之字形弧，如果它是一条之字形曲线；(3) 如果一条（本原）闭曲线是一条之字形曲线，则称其为一条闭之字形曲线。

注记 2.5. 请注意，之字形曲线的定义与曲线方向的选择无关。若 $\mathbb{P}_{i+1}$ 是一个带有穿孔点的二边形，则由 ℓ_i^*、 ℓ_{i+1}^* 的线段与曲线围成两个三角形。在这种情况下，穿孔点可以属于这两个三角形中的任意一个。不过，不同的选择会产生不同的、彼此不同伦的之字形曲线。

构造 1. 锯齿形 $\circ$-弧/闭曲线的字符串/带。

设 α 是 $A(\Delta_s^*)$ 关联，具体方式如下。$(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$，我们将一个字符串 ω (α)

(1) 若 α 是采用 设定1 中记号的之字形弧。那么对于每个 $0 \le i \le n-1$，在 $A(\Delta_s^*)$ 中都存在一条从 ℓ_i^* 到 ℓ_{i+1}^* 的箭头，它来自 $\mathbb{P}_{i+1}$ 的一个角，是一个极小定向交点，我们将其记为 $\mathbf{a}^{i+1}$，见图 6 左图。我们将游走 $\omega(\alpha) = \omega_1 \cdots \omega_n$ 与 α 对应，其中 $\omega_{i+1} = \mathbf{a}^{i+1}$ 如果 α 进入 $\mathbb{P}_{i+1}$ 时经过 ℓ_i^*

并通过 ℓ^*_{i+1} 离开，或 $\omega_{i+1} = \mathsf{a}_{i+1}^{-1}$ 如果 α 通过 ℓ^*_{i+1} 进入并通过ℓ^*_i离开。由于 α 是锯齿形，很容易看出 $\omega(\alpha)$ 是 $A(\Delta^*_s)$ 的一个字符串。

(2) 若 α 是（$\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$, Δ^*_s）上的闭之字形曲线，记号如设定1所示。类似地，我们将游走 ω（α）$= \omega_1 \cdots \omega_n$ 与 α关联起来。容易看出，ω（α）是 A（Δ^*_s）的一个带，因为 α 是闭曲线。注意，我们要求任意闭曲线都是本原的，因此 ω（α）不是任何带的幂。

例2.6。 图 7 中的图片给出了由标记曲面上的之字形曲线所产生的字符串和带的示例，其简单坐标如图 4所示。

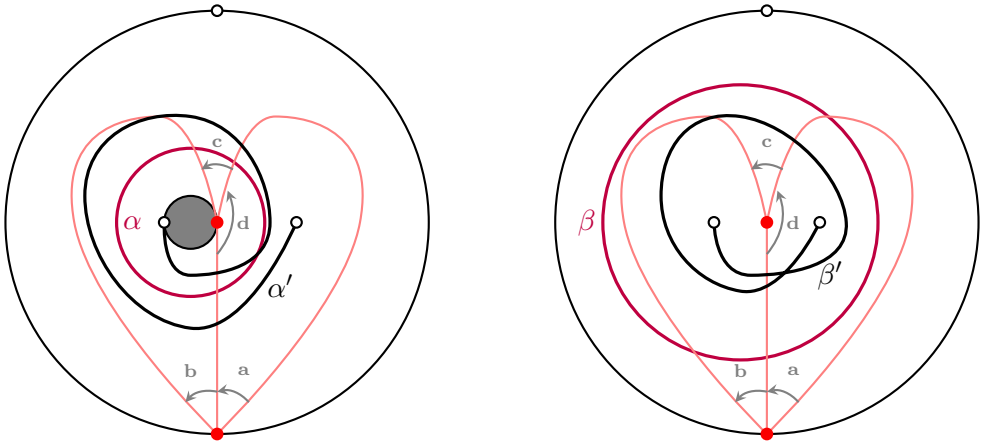


FIGURE 7. 左图中，α 是一条闭之字形曲线，它给出一个带 ω（α）$= \mathsf{bc}^{-1}\mathsf{d}^{-1}$；而 α' 是一条之字形弧，它给出一个字符串ω（α'）$= \mathsf{bc}^{-1}\mathsf{d}^{-1}$。右图中，$\beta$ 是一条闭之字形曲线，它给出一个带 ω（β）$= \mathsf{bc}^{-1}\mathsf{a}$；而 β' 是一条之字形弧，它给出一个字符串ω（β'）$= \mathsf{bc}^{-1}\mathsf{a}$。

定义 2.7. 设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta^*_s)$ 为具有简单坐标的标记曲面。
(1) 对于曲面上的锯齿形 ∘弧 α，我们将由 $\omega(\alpha)$产生的 $A(\Delta^*_s)$的字符串模 M_α 称为 α的字符串模。(2) 对于曲面上的之字形闭曲线 α，我们将由 $\omega(\alpha)$产生的 $A(\Delta^*_s)$的带模族 $M_{(\alpha,\lambda,m)}$ 称为 α的带模，其中 $\lambda \in k^*$ 和 $m \in \mathbb{N}$。

注意，上述定义的字符串模与 α 的方向选择无关。如果我们选择 α 的另一个方向，则会得到一个字符串，即 $\omega(\alpha)$ 的逆。因此，M_α 和 $M_{(\alpha,\lambda,m)}$ 都是良定义的。

以下定理见[BC21，定理 2]，，经过对曲面模型的修改后，该定理建立了曲面上之字形曲线的同伦类与相应温和代数上的不可分解模（族）的同构类之间的双射。为方便读者，我们在此给出证明，关于下述定理与2.9 之间关系的进一步解释，参见注记[BC21，定理 2]。

T定理 2.8. 设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta^*_s)$ 是一个带有简单坐标的标记曲面。
(1) 映射 $M\colon \alpha \mapsto M_\alpha$ 在 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta^*_s)$ 上的之字形弧与 $A(\Delta^*_s)$ 的字符串模之间建立了双射。特别地，M 在对偶简单剖分 Δ_s 中的弧与 $A(\Delta^*_s)$ 的简单模之间建立了双射。

(2) 映射 $M : \alpha \mapsto M_{(\alpha,\lambda,m)}$ 对于 $\lambda \in k^*$ 和 $m \in \mathbb{N}$，在 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 上的闭合之字形曲线与 $A(\Delta_s^*)$ 的带模类之间建立了双射。

证明。（1）注意到 M 是单射。事实上，若对于两条之字形弧 α_1 和 α_2有 $M_{\alpha_1} = M_{\alpha_2}$，则 $\omega(\alpha_1) = \omega(\alpha_2)$，必要时改变 α_2 的方向。因此，α_1 和 α_2 经过 Δ_s^*中的相同多边形序列。特别地，它们在 $\mathcal{M}_\circ$中具有相同的端点。于是，α_1 和 α_2 关于边界分支和穿孔点是同伦的。

现在我们证明 M 是满射。设 $M = M(\omega)$ 是一个字符串模，其中有 $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$；对于每个 $1 \le i \le n$，$\omega_i =$为某个箭头a_i的$_i$，或 $\omega_i =$为某个箭头a_i的$_i^{-1}$，其中箭头a_i属于 $Q(\Delta_s^*)$。根据 $Q(\Delta_s^*)$ 的定义，每个a_i 连接 Δ_s^*中的两条弧 ℓ_i^* 和 ℓ_{i+1}^*，使得它们都属于 Δ_s^*的某个多边形 $\mathbb{P}_i$，且 ℓ_i^* 是ℓ_{i+1}^*的前驱或后继。特别地，ℓ_1^* 和 ℓ_2^* 共享一个公共多边形 $\mathbb{P}_1$。记 $\mathbb{P}_0$ 为包含 ℓ_1^*的 Δ_s^* 的另一个多边形。同样地，令 $\mathbb{P}_{n+1}$ 为包含 ℓ_n^*的 Δ_s^* 的另一个多边形（而不是 $\mathbb{P}_n$）。我们构造一条（唯一的）之字形弧 α，其端点是 $\mathbb{P}_0$ 和 $\mathbb{P}_{n+1}$中的（唯一的）标记点或穿孔点，并依次穿过多边形 $\mathbb{P}_i$、$1 \le i \le n$中的$_i$或$_i^{-1}$。于是有 $M_\alpha = M(\omega)$。

(2) 证明与第一个陈述的证明类似。 □

注记2.9。本文建立的温和代数模范畴的曲面模型，可以视为对 [BC21]中给出的曲面模型所作的一项小修改。区别在于，在 [BC21] 中，除包含在单边形或双边形中的无标记边界分支外，其余无标记边界分支均被移除；而在本文中，这些边界分支被保留并收缩为穿孔点。此外，还在简单坐标给出的部分三角剖分中构成多边形边的每个边界分支上添加了额外的标记 $\circ$点。因此，锯齿形曲线在 [BC21], 中称为允许曲线（忽略上述修改）。正是这些变化使得在 [BC21的定理 2] 中，一个不可分解模对应于一个曲线等价类，而在上述定理中，它对应于唯一一条曲线。

2.2. 单纯对象与射影对象。本节研究标记曲面上的单纯坐标、射影坐标、单纯剖分和射影剖分之间的关系。我们将证明，这些对象中的每一种都可以通过对偶变换以及下文定义的某种扭转从另一种得到。

定义 2.10. 设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 为一个标记曲面。

(1) 设 ℓ 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上的一条弧。若一条弧可由 ℓ 得到，即将 ℓ 的每个 $\circ$端点（分别为 $\bullet$ 端点）沿边界分支顺时针旋转至该分支上的下一个 $\bullet$ 端点（分别为 $\circ$ 端点），并保持作为穿孔点的 $\circ$端点不变，则称该弧为 ℓ 的扭转。我们将 ℓ 的扭转记为 $t(\ell)$。

(2) 对偶地，我们通过将 ℓ 的端点逆时针旋转来定义弧 ℓ 的反扭转，并记为 $t^{-1}(\ell)$。

(3) 设 Δ_s^* 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上的一个简单坐标。我们称 $t(\Delta_s^*)$（分别称 $t^{-1}(\Delta_s^*)$）为 Δ_s^* 的扭转（分别为反扭转），它由 Δ_s^* 中各弧的扭转（分别为反扭转）构成。类似地，我们定义简单剖分、射影剖分和射影坐标的扭转与反扭转。

命题 2.11。设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 为标记曲面。

(1) $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上简单坐标的扭转和反扭转都是 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 的射影剖分，反之亦然。(2) $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上简单剖分的扭转和反扭转都是 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上的射影坐标，反之亦然。

证明。 我们只证明简单坐标 Δ_s^*的扭转情形，其他情形的证明类似。注意，任意弧 ℓ^* 在Δ_s^* 中都是简单的 $\circ$-弧，而扭转后的 $t(\ell^*)$ 是简单的 $\bullet$-弧。另一方面，由于我们同时扭转 Δ_s^*中的弧， $t(\Delta_s^*)$ 中的新弧没有内部交点，并且仍将曲面切分为多边形，每个多边形恰好包含一个 $\circ$-穿孔点或一个 $\bullet$-边界点。因此， $t(\Delta_s^*)$ 是一个射影剖分。 □

例见图 3 简单/射影剖分以及简单/射影坐标的扭转示例。以下定理说明了将其称为射影剖分的原因：射影剖分 $t(\Delta_s^*)$ 中的弧会导出代数 $A(\Delta_s^*)$ 的投射模。

定理 2.12. 设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 是带有简单坐标的标记曲面，其中$\Delta_s^* = \{\ell_1^*, \cdots, \ell_n^*\}$。那么对于每个 $1 \leq i \leq n$,
(1) 弧 $t(\ell_i^*)$ 是一条之字形弧，它导出与幂等元 ℓ_i^* 相关联的 $A(\Delta_s^*)$ 的不可分解射影模 P_i，也就是说，我们有 $M_{t(\ell_i^*)} = P_i$；(2) 弧 $t^{-1}(\ell_i^*)$ 是一条之字形弧，它导出与幂等元 ℓ_i^* 相关联的 $A(\Delta_s^*)$ 的不可分解内射模I_i，也就是说，我们有 $M_{t^{-1}(\ell_i^*)} = I_i$。

证明。（1）由图8可直接得出证明，其中红色水平弧为 ℓ_i^*，黑色弧是 $t(\ell_i^*)$的扭转。事实上，根据$A(\Delta^*)$的关系集 $I(\Delta^*)$的定义，图中的字符串$\mathsf{a}_u^{-1} \cdots \mathsf{a}_1^{-1}$和$\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_{u+v}$都是极大的，即对于任意非平凡箭头$\mathsf{a}$和$\mathsf{b}$，复合$\mathsf{a}_u\mathsf{a}$和$\mathsf{b}_{u+v}\mathsf{b}$均为零。因此，字符串$\mathsf{a}_u^{-1} \cdots \mathsf{a}_1^{-1}$ $\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_{u+v}$导出投射模 P_i，其根是由$\mathsf{a}_u^{-1} \cdots \mathsf{a}_2^{-1}$和$\mathsf{b}_2 \cdots \mathsf{b}_{u+v}$导出的至多两个极大单列子模之和。

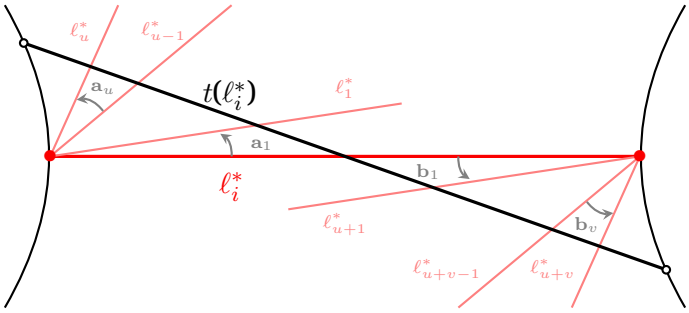


FIGURE 8. 黑色 $\circ$弧是扭转 $t(\ell_i^*)$的一条 $\bullet$弧 ℓ_i^*，来自简单坐标 Δ_s^*，它导出与 $A(\Delta_s^*)$相关联的不可分解射影模 ℓ_i^*。

(2) 该证明与第一个陈述的证明互为对偶。 □

设定 2：设 Δ_s^* 是标记曲面（$\mathcal{S}$， $\mathcal{M}$）上的简单坐标。在本节余下部分中，我们固定使用以下记号：用 Δ_p 表示 Δ_s^* 的扭转，用 Δ_i 表示 Δ_s^*的逆扭转。 Δ_p 的对偶记为 Δ_p^* ， Δ_s^* 的对偶记为 Δ_s。对于任意曲线，我们总是假设它相对于坐标 Δ_s^* 和 Δ_p^* 均处于最小位置。

现在，对于“坐标”和“剖分”，我们有三种运算：上文定义的扭转 $t(-)$、反扭转 $t^{-1}(-)$，以及对偶 $(-)^*$。容易看出，扭转与反扭转互为逆运算。也容易看出，对偶是一个与扭转和反扭转都可交换的对合。也就是说，我们有如下关系。

引理 2.13. 以下等式成立：
$(-)^{**} = id(-)$ $t^{-1}t(-) = tt^{-1}(-) = id(-)$, $(t(-))^* = t((-)^*)$, $(t^{-1}(-))^* = t^{-1}((-)^*)$,
也就是说，图9 可交换。

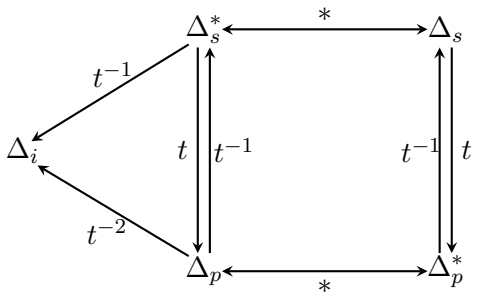


FIGURE 9. 剖分与坐标通过对偶性相关联 $*$、扭转 t 和反扭转 t^{-1}，其中 Δ_i 是一个剖分，其弧对应不可分解内射模，而 Δ_s 和 Δ_p中的弧分别产生简单模和不可分解投射模，见定理2.8 和2.12。

2.3. 模范畴与导出范畴。 如小节 1.4中回顾的那样，Δ_p^* 在 $A(\Delta_p^*)$ 的导出范畴几何模型中发挥着重要作用，其中Δ_p^* 是投射复形的一种“坐标”。在本小节中，我们将把上文建立的模范畴几何模型（作为对 [BC21] 中给出的模型的修改）与 [OPS18] 中建立的导出范畴几何模型联系起来。

我们首先直接描述如何从Δ_s^*直接得到$\Delta_p^* = t((\Delta_s^*)^*)$，并回顾一下我们处于设定 2 中。

注意，简单坐标 Δ_s^* 将曲面切分成多个多边形，每个多边形都包含一个来自 $\mathcal{M}$。或来自 $\mathcal{P}$。的标记点，见图 5。那么，图 10 展示了对 $t((-)^*)$ 中每个多边形局部进行的操作。将绿色线段粘合在一起后，我们就得到 Δ_s^* 中最终的弧Δ_p^*。

现在我们证明以下结论

引理 2.14. 存在一个典范同构 $A(\Delta_s^*) \cong A(\Delta_p^*)$，它将与 ℓ_i^* 相关联的幂等元映射到与 $t(\ell_i)$ 相关联的幂等元。

证明。首先，注意到箭图 $Q(\Delta_s^*)$与$Q(\Delta_p^*)$之间存在一个典范同构，它将顶点 ℓ_i^* 映到顶点 $t(\ell_i)$。通过直接考察运算 $t((-)^*)$的构造（如图 10 局部所示），以及分别依据小节 2.1 和定义 1.7 构造 $Q(\Delta_s^*)$与 $Q(\Delta_p^*)$中的箭，即可验证这一点。此外，注意到 $Q(\Delta_p^*)$中的两个连续箭来自同一个端点，当且仅当 $Q(\Delta_s^*)$中对应的箭来自不同的端点。

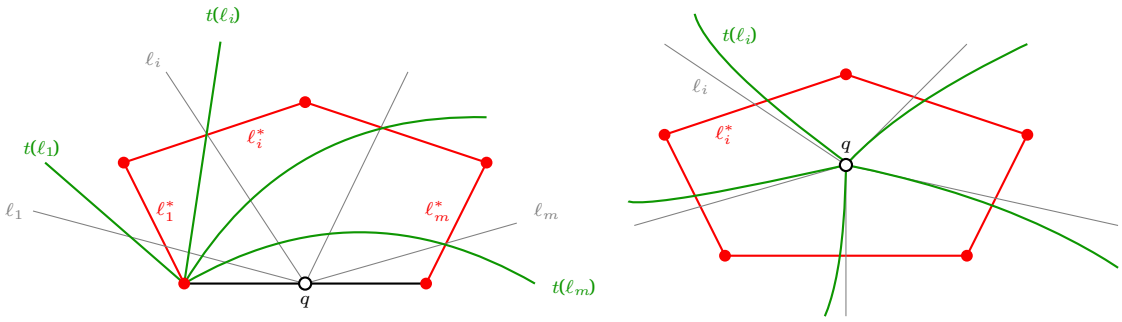


FIGURE 10. 图中展示了操作 $t((-)^*)$在 Δ_s^*中的弧上的局部作用，其中一条 ℓ_i^* 来自 Δ_s^* 的弧是红色的，一条 ℓ_i 来自 Δ_s 的弧是黑色的，而一条来自 Δ_p^* 的 $t(\ell_i)$弧是绿色的。我们首先绘制 ℓ_i^*的对偶弧 ℓ_i，然后将 $\circ$-端点顺时针旋转到下一个，从而得到 $t(\ell_i)$

•边界分支上的点，如果 ℓ_i 的端点位于边界分支上，如左图所示；如果是穿孔点，则仅保留 ℓ_i 的端点，如右图所示。

因此，通过比较定义可知， $I(\Delta_s^*)$与 $I(\Delta_p^*)$也相同。于是存在典范同构 $A(\Delta_s^*) \cong A(\Delta_p^*)$，它将与$\ell_i^*$ 相关联的幂等元映到与 $t(\ell_i)$相关联的幂等元。□

由上述引理可知，在下文中我们不再区分 $A(\Delta_p^*)$ 和 $A(\Delta_s^*)$，并用 A 表示它们。特别地，我们不再区分与 $t(\ell_i)$ 和 ℓ_i^* 相关联的幂等元，并将 $A(\Delta_p^*)$ 中从 $t(\ell_i)$ 到 $t(\ell_j)$ 的箭头视为 $A(\Delta_s^*)$ 中从 ℓ_i^* 到 ℓ_j^* 的箭头。

下文将证明，锯齿形曲线也表示相应模的最小投射分解。我们首先为锯齿形曲线引入一种典范分次。

定义 2.15. 设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_p^*)$ 是带有射影坐标的标记曲面。
(1) 对于 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上的任意 $\circ$-弧 α，设 f_0 为 α 的一个分次，使得对于任意 $q \in \alpha \cap \Delta_p^*$， $f_0(q) \leq 0$，并且存在至少一个 $q \in \alpha \cap \Delta_p^*$ 满足 $f_0(q) = 0$。将与 (α, f_0) 相关联的射影复形记为 $P_\alpha^\bullet$。我们分别称 f_0 和 $P_\alpha^\bullet$ 为 α （相对于 Δ_p^*）的典范分次和典范投射复形。(2) 对于 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_p^*)$ 上任意可分次的闭曲线 α 以及任意 $\lambda \in k^*$, $m \in \mathbb{N}$，我们类似地定义典范分次 f_0 和典范投射复形 $P_{(\alpha,\lambda,m)^\circ}^\bullet$

我们指出， f_0 是唯一的，因此 $P_\alpha^\bullet$ 和 $P_{(\alpha,\lambda,m)}^\bullet$ 是良定义的。以下是本小节中的一个主要结果，其证明将分为若干个命题来完成。

定理 2.16. 设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 是一个带有简单坐标 Δ_s^* 的标记曲面，并设 Δ_p^* 是 Δ_s^* 对应的射影坐标。
(1) 对曲面上的任意之字形弧 α， $P_\alpha^\bullet$ 是 M_α 的投射分解。(2) 曲面上的任意之字形闭曲线 α 相对于 Δ_p^* 都是可赋级的，并且对任意 $\lambda \in k^*$ 和 $m \in \mathbb{N}$， $P_{(\alpha,\lambda,m)}^\bullet$ 都是 $M_{(\alpha,\lambda,m)}$ 的投射分解。

注 2.17. 上述定理表明，$\mathcal{S}$、$\mathcal{M}$、Δ_s^*上的之字形曲线不仅表示 $A(\Delta_s^*$的模范畴中的一个模，也表示 $A(\Delta_s^*$的导出范畴中该模的投射分解。这意味着，对于任意温和代数，在对象层面，上述小节中建立的其模范畴的几何模型（$\mathcal{S}$、$\mathcal{M}$、Δ_s^*）可以自然嵌入$\mathcal{S}$、$\mathcal{M}$、Δ_p^*的导出范畴几何模型中，该模型由 [OPS18]建立。这一事实使我们能够利用导出范畴研究模范畴；特别是，在接下来的小节中，我们将完整描述两个不可分解模之间的同态以及扩张。

命题 2.18. 对于 Δ_s 中的任意一条弧 ℓ，关于 Δ_p^* 的典范投射复形 $P_\ell^\bullet$ 是简单模 M_ℓ 的投射分解。

证明。 我们先通过代数构造来求简单模的投射分解 M_ℓ，然后再回到几何模型。众所周知，单项式代数上的简单模的投射分解是已知的，例如参见 [GHZ85]。这里我们明确构造该分解，以方便读者。

记 P_{ℓ^*} 为与 $Q(\Delta_s^*)$ 的顶点 ℓ^* 相关联的投射模。由于 $A(\Delta_s^*)$ 是温和代数， P_{ℓ^*} 的根 $rad(P_{\ell^*})$ 是至多两个单列子模 U_{i_0} 和 U_{j_0} 的直和，其中 U_{i_0} 和 U_{j_0} 可以为零。以下假设二者均非零；其他情形的证明类似。因此我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow U_{i_0} \oplus U_{j_0} \longrightarrow P_{\ell^*} \xrightarrow{\pi_0} M_\ell \longrightarrow 0,$$

其中 π_0 是典范投影。

令$\ell_{i_0}^*$ 为 $Q(\Delta_s^*)$中与 U_{i_0}的顶对应的（唯一）顶点。由于 U_{i_0} 是单串模，因此它是一个简单模。于是，从 U_{i_0} 到 P_{ℓ^*} 的典范嵌入由一个从 ℓ^* 到$\ell_{i_0}^*$的箭头a_0 给出。记 $\ell_{i_0}^*$对应的投射模为 P_{i_0} 。那么，a_0 诱导出一个从 P_{i_0} 到 P_{ℓ^*}的映射，事实上它是从 P_{i_0} 到 U_{i_0} 的典范投影与从 U_{i_0} 到 P_{ℓ^*}的典范嵌入的复合。我们仍用a_0 表示这个映射。另一方面，对 U_{j_0}进行类似讨论，可得投射模 P_{j_0} 以及从 P_{j_0} 到 P_{ℓ^*}的典范映射b_0 。于是，我们得到 M_ℓ的投射分解的前两项，它对应于 $A(\Delta_s^*)$中的同伦串$\mathsf{a}_0^{-1}\mathsf{b}_0$ ：

$$P_{i_0} \oplus P_{j_0} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathbf{a}_0\\ \mathbf{b}_0\end{pmatrix}} P_{\ell^*} \xrightarrow{\pi_0} M_\ell \longrightarrow 0\ .$$

注意，再由温和代数定义中的第二个条件可知，对于某个单列模 U_{i_1}，有$rad(P_{i_0})$ $= U_{i_1} \oplus rad(U_{i_0})$。若 $U_{i_1} = 0$，则 $rad(P_{i_0})$ $=rad(U_{i_0})$，因而 $P_{i_0} = U_{i_0}$。在这种情况下，a_0 是一个单射，因此我们已经完成了 U_{i_0} 侧的构造，并从 U_{j_0}继续构造。

现在假设 U_{i_1} 非零。令 $\ell_{i_1}^*$ 为对应于 U_{i_1}的顶的顶点。与上面的讨论类似，存在一个从$\ell_{i_0}^*$ 到 $\ell_{i_1}^*$ 的箭头 a_1 ，它导出一个从 P_{i_1} 到 P_{i_0}的典范映射 a_1 。于是有 $\mathsf{a}_0\mathsf{a}_1 = 0$，否则， U_{i_1} 是 U_{i_0}的一个子模，这与等式 $rad(P_{i_0}) = U_{i_1} \oplus rad(U_{i_0})$ 矛盾。

不失一般性，对于 U_{j_0}，我们还有一个子模 U_{j_1} ，以及箭头 b_0 和 b_1 ，它们具有与 U_{i_0} 类似的性质。于是我们得到 $A(\Delta_s^*)$ 的一个同伦串 $\mathsf{a}_1^{-1}\mathsf{a}_0^{-1}\mathsf{b}_0\mathsf{b}_1$ ，其中包含 $\mathsf{a}_0\mathsf{a}_1 =\mathsf{b}_0\mathsf{b}_1 = 0$，它给出了

M_ℓ 的投射分解的前三项：

$$P_{i_1} \oplus P_{j_1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_1 \end{pmatrix}} P_{i_0} \oplus P_{j_0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_0 \end{pmatrix}} P_{\ell^*} \xrightarrow{\pi_0} M_\ell \longrightarrow 0\ .$$

继续这一过程；如果它在有限步内停止，那么我们将得到一个极大同伦串$\sigma = \mathbf{a}_m^{-1} \cdots \mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{b}_0 \cdots \mathbf{b}_n$ 使得 $\mathbf{a}_u\mathbf{a}_{u+1} = \mathbf{b}_v\mathbf{b}_{v+1} = 0$ 对于任意 $0 \leq u \leq m-1$，$0 \leq v \leq n-1$。那么 σ 给出一个射影复形 $P^\bullet(\sigma)$，这恰好是 M_ℓ的投射分解。如果该过程不在有限步内停止，那么我们将得到一个无限同伦串 σ；根据小节 1.2 中给出的无限同伦串的结构，它实际上是最终周期的。

我们回到几何模型（$\mathcal{S}$，$\mathcal{M}$，Δ_p^*）。令 $P_\ell^\bullet := P^\bullet_{(\ell,f_0)}$。要证明 $P_\ell^\bullet$是 M_ℓ的投射分解，我们必须证明 $P_\ell^\bullet = P^\bullet(\sigma)$。为此，只需证明如下断言： σ 恰好是与复形 $P_\ell^\bullet$相关联的同伦串 $\sigma(\ell)$。注意到此时分次会自动一致，因为 $P^\bullet(\sigma)$ 和 $P_\ell^\bullet$ 都是某些模的投射分解。

现在我们证明这个断言。这里考虑 ℓ 的一个端点是边界上的标记点、另一个端点是穿孔点的情形，见图 11。其他情形也可类似证明。首先，我们将 σ 中出现的箭头 a_u 和 b_v 分别标记为 $0 \leq u \leq m-1$ 和 $0 \leq v \leq n-1$，并将它们视为定向交点，即图中的黑色箭头。然后，我们在局部画出射影坐标 Δ_p^*，也就是绿色弧；它是通过使用算子 $t^{((-)^*)}$ 从 Δ_s^* 得到的，参见图 10。特别地，Δ_p^* 中弧之间的定向交点就是绿色箭头，其标记沿用 Δ_s^* 中的标记。由图可清楚看出，与 ℓ 相关联的同伦串 $\sigma(\ell)$ 是 σ。

□

命题 2.19. 对于 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 上任意的锯齿形 $\circ$-弧 α，$P_\alpha^\bullet$ 是 M_α 的投射分解。

证明。记 $\sigma(\alpha)$ 为与 $A(\Delta_s^*)$ 相关联的字符串 α。我们对长度 n 的 $\sigma(\alpha)$ 使用归纳法来证明该陈述。根据命题 2.18，当 $n = 0$ 时，该陈述成立。

现在假设，当 $\sigma(\alpha)$ 的长度小于 n 时，该陈述对 α 成立。设 $\sigma(\alpha)$ 从 $Q(\Delta_s^*)$ 的一个顶点 ℓ^* 出发。我们通过删除从 ℓ^* 出发的第一个箭头 a 或逆箭头 a^{-1}，从$\sigma(\alpha)$ 构造一个新字符串。记与新字符串相关联的之字形弧为 β，将其记作 $\sigma(\beta)$。令 q 为 ℓ 与 β 的交点，它是一个边界标记点或穿孔点。注意，在这两种情况下，α 都是由 β 和 ℓ 在 q 处平滑得到的。一个例子见图 12，其中q 是穿孔点，且 $\sigma(\alpha)$ 从逆箭头 a^{-1} 出发。

这种平滑导出了一个短正合列。

$$0 \longrightarrow M_\beta \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow M_\ell \longrightarrow 0,$$

如果 a 始于 ℓ^*，或一个短正合列

$$0 \longrightarrow M_\ell \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow M_\beta \longrightarrow 0,$$

如果 a 终止于 ℓ^*。由于 $\sigma(\beta)$ 的长度为 $n-1$，根据假设，$P_\beta^\bullet$ 是 M_β 的投射分解。另一方面，$P_\ell^\bullet$ 是 M_ℓ 的投射分解。记 $P^\bullet$ 为 α 的投射分解，则我们有一个三角。

$$P_\beta^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow P_\ell^\bullet \longrightarrow P_\beta^\bullet[1]$$

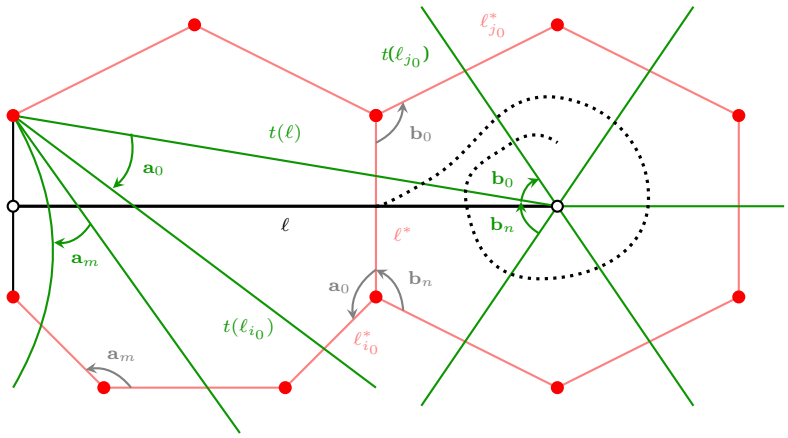


FIGURE 11. 弧 ℓ 在 Δ_s 中表示关于几何模型 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 的一个简单模，同时也表示关于几何模型 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_p^*)$ 的该简单模的投射分解。由于 ℓ 的一个端点是穿孔点，要得到 $P_\ell^\bullet$，应在局部重新绘制 ℓ，使其沿顺时针方向绕穿孔点无限次，见虚线。M_ℓ 的投射分解由同伦串 $\sigma = \mathsf{a}_m^{-1} \cdots \mathsf{a}_0^{-1}(\mathsf{b}_0 \cdots \mathsf{b}_n)^\infty$ 给出（见命题 2.18 的证明），这恰好是弧 ℓ 关于 Δ_p^* 所给出的同伦串 $\sigma(\ell)$。

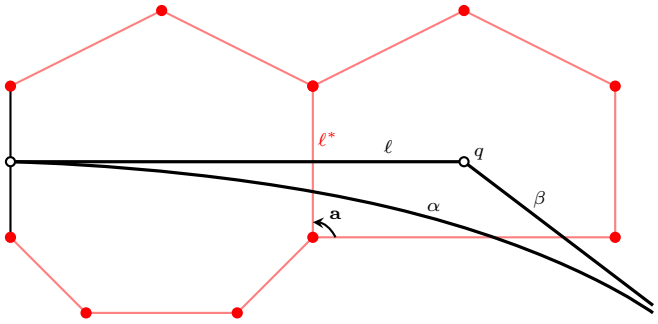


FIGURE 12. 弧 α 是 β 和 ℓ在交点 q处的平滑，其中与 α 相关联的字符串 $\sigma(\alpha)$始于a^{-1}，而与 β 相关联的字符串 $\sigma(\beta)$则由 $\sigma(\alpha)$删除一个a^{-1}后得到。

or

$$P_\ell^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow P_\beta^\bullet \longrightarrow P_\ell^\bullet[1]$$

在导出范畴 $\mathcal{K}^{-,b}(proj\text{-}A)$ of $A(\Delta_s^*)$ 中，它们分别是模范畴中上述两个短正合列的提升。

另一方面，根据 $\mathcal{K}^{-,b}(proj\text{-}A)$ 中映射锥的描述，见 [OPS18定理 41]，可知 q 处的定向交点产生了上述可区分三角形，而与 $P^\bullet$ 相关的 $\circ$-弧是通过平滑 β得到的。

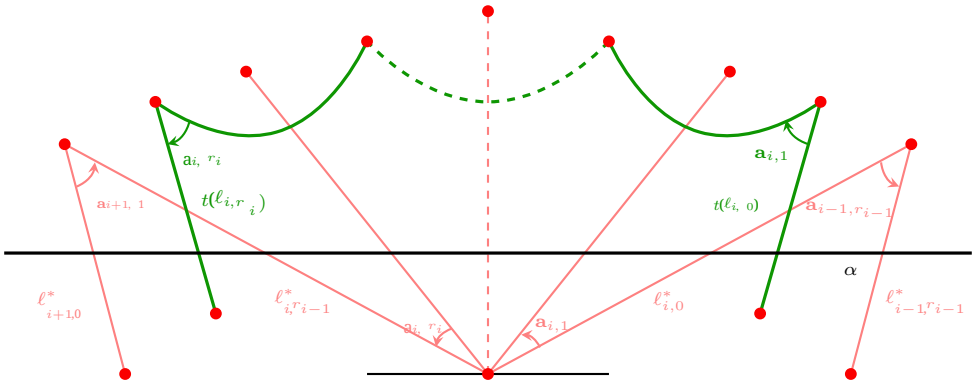


FIGURE 13. 与闭曲线 α 相关联的同伦带 $\overline{\sigma}$为 $\overline{\sigma}$，它由字符串 $\sigma_i = \mathsf{a}_{i,\,1}\cdots\mathsf{a}_{i,\,r_i}$ 组成： $t(\ell_{i,\,0}) \to t(\ell_{i,\,r_i})$或逆串 σ_i^{-1}。

以及在 q 处的 ℓ，这恰好是弧 α。因此，$P_\alpha^\bullet = P^\bullet$，它是 M_α 的投射分解。□

命题 2.20. 任意之字形闭曲线 α 在 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 上都可相对于Δ_p^*分级，且 $P^\bullet_{(\alpha,\lambda,m)}$ 是任意 $\lambda \in k^*$ 和 $m \in \mathbb{N}$ 对应的 $M_{(\alpha,\lambda,m)}$ 的投射分解。

证明。 由于对于 $\lambda \in k^*$ 和 $m \in \mathbb{N}$的不同选择，$M_{(\alpha,\lambda,m)}$ 的投射分解都来自同一个同伦带，例如参见 [HS05，命题 1 (2)]。因此我们将固定一个 $\lambda \in k^*$ 并假设 $m = 1$。

设 σ 是与 α 相关的带，则 $\sigma = \sigma_1\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{2n-1}\sigma_{2n}^{-1}$，其中 σ_i、$1 \leqslant i \leqslant 2n$ 是正串。注意， σ 在正、逆同伦字母之间交替。因此， σ 也可以视为同伦带，为避免歧义，记作 $\overline{\sigma}$；它给出了 $M_{(\alpha,\lambda,1)}$的投射分解 $P^\bullet$，参见 CPS21，推论 2.12]。要证明 α 是可分级的且 $P^\bullet_{(\alpha,\lambda,1)} = P^\bullet$，只需证明 $\overline{\sigma}$ 是与 α 相关的同伦带。设 $\sigma_i = \mathsf{a}_{i,\,1}\cdots\mathsf{a}_{i,\,r_i}$，其中 $\mathsf{a}_{i,\,j}$ 是一条从 $\ell^*_{i,\,j-1}$ 指向 $\ell^*_{i,\,j}$ 的箭头。由于 σ 是与 α 相关的带， α 依次与弧 $\ell^*_{i,\,j}$ 相交，参见图 13 中的局部构形；回想一下构造 1 中给出的由闭曲线构造带的方法。因此， α 依次与 Δ_p^* 中的两条弧 $t(\ell_i,0)$ 和 $t(\ell_i,r_i)$ 相交；回想一下， Δ_p^* 是通过使用算子 $t(-)^*$ 从 Δ_s^* 得到的，参见图 10。最后，根据小节 1.4 开头给出的与闭曲线相关的同伦带的构造， α 的同伦带恰好是 $\overline{\sigma}$，它由字符串 σ_i 组成： $t(\ell_i,0) \to t(\ell_i,r_i)$，或者由逆串 σ_i^{-1} 组成： $t(\ell_i,r_i) \to t(\ell_i,0)$。

□

定理的证明*2.16*: 这由命题 2.19 和2.20。

2.4. 态射和扩张作为交点。在本小节中，我们将标记曲面上之字形曲线的交点解释为相关温和代数的模范畴中的态射和扩张。我们将固定 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 为具有简单坐标的标记曲面，并令 A 为相关的温和代数。当我们说之字形曲线时，我们指的是相对于 Δ_s^* 的 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 上的之字形曲线。

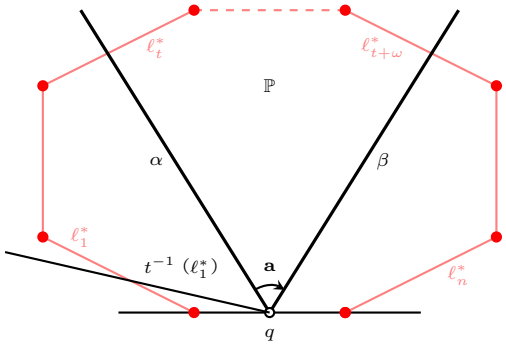


FIGURE 14. 对于一条之字形弧 α，其端点为 q，且与 ℓ_t^*相交，w_q在 q 处的权重 $w_q(\alpha)$ 等于 $n-t$。从 α 到 β 的定向交点 a 的权重 $\omega(\mathsf{a})$ 定义为 $w_q(\alpha) - w_q(\beta)$，其值等于 ω。

对于之字形弧或之字形闭曲线 α，我们仍用 f_0 表示典范分次，使得 $P^\bullet_{(\alpha,f_0)}$ 或 $P^\bullet_{(\alpha,f_0,\lambda,m)}$ 分别是 M_α 或 $M_{(\alpha,\lambda,m)}$的投射分解。下面从边界处定向交点的权的定义开始。

定义 2.21. 设 α 是一条之字形弧，其端点 q 位于 $\mathcal{M}_\circ$中，其中 q 属于 Δ_s^*的一个多边形 $\mathbb{P}=\{\ell_1^*,\ell_2^*,\cdots,\ell_n^*\}$，弧按顺时针方向标记，见图 14。假设从 q出发，ℓ_t^* 是与 α 相交的第一条弧，对某个 $1\leq t\leq n$成立。我们称 $n-t$ 为 α 在 q处的权重，记作 $w_q(\alpha)$；称 $t-1$ 为 α 在 q处的余权重，记作 $cw_q(\alpha)$。

定义 2.22. 设 α 和 β 是两条之字形弧，它们在$\mathcal{M}_\circ$中共享一个公共端点 q。从 α到 β 的加权定向交点，是指一个从 α到 β 的定向交点 a，它由 q产生，其权重为 $w(\mathsf{a})=w_q(\alpha)-w_q(\beta)$。

注意，根据定义 1.9，存在一个定向交点 a 从 α 到 β 意味着 β 在 α 处沿顺时针方向行进 q，参见图 14，因此$w_q(\alpha)\geq w_q(\beta)$，依据我们在定义 2.21中采用的约定。因此，由边界交点产生的定向交点的权重总是非负的。

下面的命题明确描述了任意端点位于边界上的之字形弧 $P_\alpha^\bullet$ 的最小投射分解 α。下文中，我们将复形写成一条直线，其中投射模之间的映射由箭图中相应的箭头给出。将次数相同的投射模放在一起后，即得到最终的投射分解。注意，这一结果可视为对 [CPS21，定理 2.8、推论 2,12], 的几何解释；该文借助字符串的组合学给出了温和代数上任意不可分解模的最小投射分解。我们还提到，在 [LGH22], 中，作者也使用曲面模型构造温和代数上模的投射分解，并采用了 [BC21]中建立的几何模型。

命题 2.23。设 α 是一条锯齿形 $\circ$-弧，其端点 p 和 q 位于边界上。设 $\mathbb{P}=\{\ell_1^*,\ell_2^*,\cdots,\ell_n^*\}$ 和 $\mathbb{P}'=\{\iota_1^*,\iota_2^*,\cdots,\iota_m^*\}$ 分别是包含 p 和 q 的 Δ_s^* 的多边形。对于每个 $1\leqslant i\leqslant r$，我们将与 α 相关联的字符串记为 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r$，并将 σ_i 的端点记为 ν_i^*。

（1）如果 σ_1 是正向的且 σ_r 是反向的，那么 $P_\alpha^\bullet$ 由下式给出

$$P_{t(\ell_n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{t(\ell_{\omega_p(\alpha)})} \longleftarrow P_{t(\nu_1)} \longrightarrow P_{t(\nu_2)} \longleftarrow P_{t(\nu_3)} \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow P_{t(\nu_{m-1})} \longleftarrow P_{t(\nu_m)} \longrightarrow P_{t(\iota_{\omega_q(\alpha)})} \longleftarrow \cdots \longleftarrow P_{t(\iota_m)}$$

(2) 如果 σ_1 和 σ_r 均为正向，则 $P_\alpha^\bullet$ 由下式给出。

$$P_{t(\ell_n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{t(\ell_{\omega_p(\alpha)})} \longleftarrow P_{t(\nu_1)} \longrightarrow P_{t(\nu_2)} \longleftarrow P_{t(\nu_3)} \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longleftarrow P_{t(\nu_{m-1})} \longrightarrow P_{t(\nu_m)} \longleftarrow P_{t(\iota_{\omega_q(\alpha)-1})} \longleftarrow \cdots \longleftarrow P_{t(\iota_m)}$$

(3) 若 σ_1 和 σ_r 均为逆向，则 $P_\alpha^\bullet$ 由下式给出

$$P_{t(\ell_n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{t(\ell_{\omega_p(\alpha)-1})} \longrightarrow P_{t(\nu_1)} \longleftarrow P_{t(\nu_2)} \longrightarrow P_{t(\nu_3)} \longleftarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow P_{t(\nu_{m-1})} \longleftarrow P_{t(\nu_m)} \longrightarrow P_{t(\iota_{\omega_q(\alpha)})} \longleftarrow \cdots \longleftarrow P_{t(\iota_m)}$$

(4) 若 σ_1 为逆向而 σ_r 为正向，则 $P_\alpha^\bullet$ 由下式给出

$$P_{t(\ell_n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{t(\ell_{\omega_p(\alpha)-1})} \longrightarrow P_{t(\nu_1)} \longleftarrow P_{t(\nu_2)} \longrightarrow P_{t(\nu_3)} \longleftarrow \cdots$$
$$\cdots \longleftarrow P_{t(\nu_{m-1})} \longrightarrow P_{t(\nu_m)} \longleftarrow P_{t(\iota_{\omega_q(\alpha)-1})} \longleftarrow \cdots \longleftarrow P_{t(\iota_m)}$$

证明。 由命题 2.19，投射分解 $P_\alpha^\bullet$ 由与 α 相对应的复形给出，其中所用的射影坐标为 $\Delta_{p\circ}^*$。 当 σ_1 是正串时， $P_\alpha^\bullet$ 的左侧部分如下所示，这可直接从图 15中看出：

$$P_{t(\ell_n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{t(\ell_{\omega_p(\alpha)})} \longleftarrow P_{t(\nu_1)} \longrightarrow P_{t(\nu_2)} \longleftarrow P_{t(\nu_3)} \longrightarrow \cdots$$

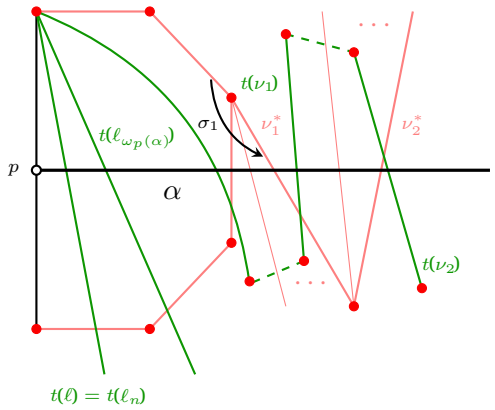


FIGURE 15. 若 σ_1 是一个正串，则 $P_\alpha^\bullet$ 的左半部分通过依次连接与 Δ_p^* 中 α 相交的弧所关联的投射模得到： $t(\ell_n)$、 $t(\ell_{n-1})$、 $\cdots$、 $t(\ell_{\omega_p(\alpha)})$、 $t(\nu_1)$、 $t(\nu_2)$、 $\cdots$。

当 σ_1 是一个逆串时， $P_\alpha^\bullet$ 的左侧部分如下，直接从图 16中即可看出。注意在这种情况下， $P_{t(\ell_{\omega_p(\alpha)})}$ 不会出现在复形中，因为 α 与 t不相交（$\ell_{\omega_p(\alpha)}$）：

$$P_{t(\ell_n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{t(\ell_{\omega_p(\alpha)-1})} \longrightarrow P_{t(\nu_1)} \longleftarrow P_{t(\nu_2)} \longrightarrow P_{t(\nu_3)} \longleftarrow \cdots$$

最后，将左侧部分和右侧部分合并后，我们得到陈述中的整个复形 $P^\bullet_\alpha$。

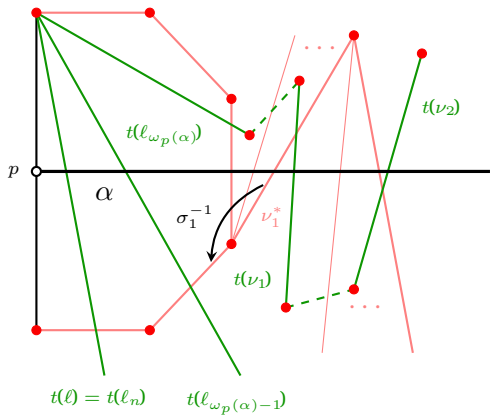


FIGURE 16. 若 σ_1 是一个逆串，则$P^\bullet_\alpha$ 的左侧部分由依次连接与Δ_p^* 中 α 相交的弧所对应的投射模得到： $t(\ell_n)$、 $t(\ell_{n-1})$、 $\cdots$、 $t(\ell_{\omega_p(\alpha)-1})$、 $t(\nu_1)$、 $t(\nu_2)$、 $\cdots$。注意，在这种情况下， α 与 $t(\ell_{\omega_p(\alpha)})$不相交。

□

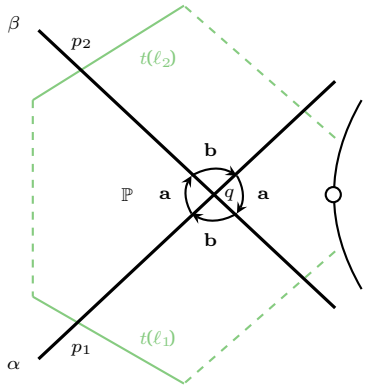
由上述命题可推出以下结果

推论 2.24. 设 α 为一条锯齿形 $\circ$-弧，其端点 p 位于边界上。假设从 p出发， $t(\ell)$是 Δ_p^* 中与 α 相交的第一条弧，并将交点记为 ρ，则有 $f_0(\rho) = -\omega_p(\alpha)$。

证明。我们仍用 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$ 表示与 α相关联的字符串，用 ν_1^*表示 σ_1的端点。不失一般性，假设 σ_1 是对应于 α 从 p出发部分的字符串。若 σ_1 是正串，则 $t(\ell_n)$是 Δ_p^* 中与 α 相交的第一条弧，即 $t(\ell) = t(\ell_n)$，见图15中的示意图。在这种情况下，由于$P^\bullet_\alpha$ 是 M_α的投射分解，根据命题 2.23 中对 $P^\bullet_\alpha$的描述可知， $P_{t(\nu)}$ 位于$P^\bullet_{(\alpha,f_0}$的第（-1）个位置，因此有$f_0(t(\nu)) = -1$。因此， $f_0(t(\ell)) = -\omega_q(\alpha)$，这同样可由命题 2.23 得出。

现在设 σ_1 为一个逆串。如果 $\omega_q(\alpha) \geq 1$，那么 $t(\ell_n)$ 是 Δ_p^* 中与 α相交的第一条弧，即 $t(\ell) = t(\ell_n)$，见图16。因此，类似地有$f_0(t(\ell)) = -\omega_q(\alpha)$。如果 $\omega_q(\alpha) = 0$，那么 $t(\nu_1)$ 是 Δ_p^* 中与 α 相交的第一条弧，即 $t(\ell) = t(\nu_1)$。由于在这种情况下 $P_{t(\nu_1)}$ 位于 $P^\bullet_{(\alpha,f_0)}$ 的第 0 个位置，我们有$f_0(t(\ell)) = 0$，这又等于 $-\omega_q(\alpha)$。□

命题-定义 2.25. 设 α 和 β 是两条之字形曲线，它们在曲面上的一个非标记点内点 q 处相交，局部图示如下，其中 a 和 b 是与 q 相关联的定向交点：

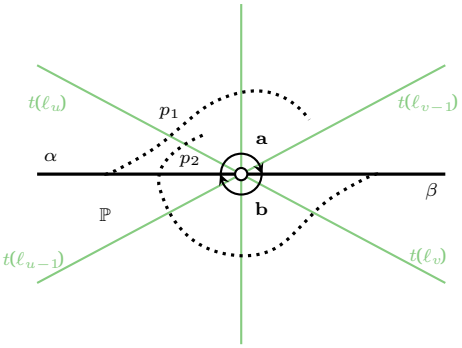


则有 $f_0(p_1) = g_0(p_2)$ 或 $f_0(p_1) = g_0(p_2)+1$，其中 p_1 和 p_2 分别是 Δ_p^* 中的弧与 α 和 β 中的弧之间距离点 q 最近的交点，而 f_0 和 g_0 分别是与 α 和 β 相关联的典范分次，正如小节 2.4 开头所回顾的那样。

(1) 如果 $f_0(p_1) = g_0(p_2)$，那么我们称 a 是从 α 到 β、权为 $w(\mathsf{a}) = 0$ 的加权定向交点，并称 b 是从 β 到 α、权为$w(\mathsf{b}) = 1$ 的加权定向交点；(2) 如果 $f_0(p_1) = g_0(p_2) + 1$，那么我们称 a 是从 α 到 β、权为 $w(\mathsf{a}) = 1$ 的加权定向交点，并称 b 是从 β 到 α 、权为 $w(\mathsf{b}) = 0$ 的加权定向交点。

证明。由等式 (1.2)，存在一个从 $P^\bullet_{(\alpha,f_0)}$ 到 $P^\bullet_{(\beta,g_0)}[g_0(p_2) - f_0(p_1)]$ 的态射，它由 a 产生；同样，也存在一个从 $P^\bullet_{(\beta,g_0)}$ 到 $P^\bullet_{(\alpha,f_0)}[f_0(p_1) - g_0(p_2) + 1]$ 的态射，它由 b 产生。另一方面，由于 $P^\bullet_{(\alpha,f_0)}$ 和 $P^\bullet_{(\beta,g_0)}$ 都是模的投射分解，我们有 $g_0(p_2) - f_0(p_1) \geq 0$ 以及 $f_0(p_1) - g_0(p_2) + 1 \geq 0$。因此我们有$f_0(p_1) = g_0(p_2)$ 或 $f_0(p_1) = g_0(p_2) + 1$。□

定义 2.26. 设 α 和 β 是曲面上共享端点$q \in \mathcal{P}_\circ$的两条之字形弧。对于任意 $m \in \mathbb{N}$，设 (a m) 和 (b m) 分别是从 α 到 β 以及从 β 到 α 的相应定向交点，它们在小节 1.4 中引入。假设有 n 条弧 $t(\ell_i)$ $1 \leq i \leq n$ 连接到 q，其中 α 和 β 分别连接到弧 $t(\ell_{u-1})$ 与 $t(\ell_u)$之间，以及弧 $t(\ell_{v-1})$ 与 $t(\ell_v)$之间，见下图



然后，我们将 (a m) 称为从 α到 β、权为 w 的加权定向交点 (a m) $=(v-u)+mn$，并将 (b m) 称为从 β到 α、权为 w 的加权定向交点 (b m) $=(u-v)+mn$。

在上述定义中，我们总是以这样的方式选取 $v-u$ 和 $u-v$，使得 $0 \leq v-u, u-v \leq n-1$，必要时对 n 取模。

注 2.27. 类似于命题 2.23，对于任意锯齿形 $\circ$-弧 α，若其端点是穿孔点而非边界上的标记点，仍然可以直接给出相应的投射分解 $P^\bullet_\alpha$。微妙之处在于，该复形在左侧是无限的，投射模 $P_{t(\ell_i)}$ 会周期性地出现，参见图 10。

对于有限维代数 A，我们知道有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(A)$ 与同伦范畴 $\mathcal{K}^{-,b}(proj\text{-}A)$ 以及 $\mathcal{K}^{+,b}(inj\text{-}A)$ 三角等价。上述构造和结果也可以对偶地应用于 $\mathcal{K}^{+,b}(inj\text{-}A)$。特别地，可以定义内射坐标 Δ_i^* 为 $t^{-1}(\Delta_s)$，并将其用作计算温和代数 $A(\Delta_s^*)$ 上一个模的最小内射分解的坐标。我们不在此详细讨论，但将在第 4 节给出一个例子。

命题 2.23 以及注记 2.27 中的描述直接给出以下推论，其中第三条从表示论的角度来看是众所周知的，即带模 M 的投射维数 $\operatorname{pd} M$ 和内射维数 $\operatorname{id} M$ 均为一。

推论 2.28. 设 α 为一条锯齿形曲线，则
(1) $\operatorname{pd} M_\alpha = max\{w_p(\alpha)\, w_q(\alpha)\}$，且 $\operatorname{id} M_\alpha = max\{cw_p(\alpha)\, cw_q(\alpha)\}$ 如果 α 是锯齿形 $\circ$-弧，且两个端点 p 和 q 均在 $\mathcal{M}_\circ$中，则 $\operatorname{pd}\circ(p)\, q\,(\mathcal{M}_\circ) M_\alpha =$，以及 $\operatorname{id} M_\alpha = \infty(\alpha)\circ(\mathcal{P}_\circ) M_\alpha =$；(2) 若 α 是一条锯齿形 $\circ$-弧，且至少有一个端点位于 $\mathcal{P}_\circ$中，则 $\operatorname{pd} M_\alpha = \operatorname{id} M_\alpha = \infty$；(3) 若 α 是一条锯齿形闭曲线，则 $\operatorname{pd} M_\alpha = \operatorname{id} M_\alpha = 1_\circ$

上述推论使我们能够计算温和代数 A的有限维数 $\operatorname{fd} A$ ，其中 $\operatorname{fd} A$ 定义为

$$\operatorname{fd} A := \sup\{\operatorname{pd} M : \text{ for } M \in \text{mod-A with } \operatorname{pd} M < \infty\}.$$

推论 2.29. 设 A 为温和代数，则

$$\operatorname{fd} A = \max\{\operatorname{pd} I \text{ for injective module } I\}, \tag{2.1}$$

这也等于具有连续关系的最长序列中箭的数量，其中该序列不包含来自具有完全关系的有向圈的任何箭头。

证明。 设 $\mathbb{P}$ 是 Δ_s^* 中的一个多边形，它有一个边界标记点 q，并且在包含边界线段的多边形集合中具有最多的边数。假设 $\mathbb{P}$有 n 条边，参见图 14。那么由推论 2.28可得，$\operatorname{pd} M \leq n-1$ 对任意有限投射维数的不可分解A-模 M 成立，因此 $\operatorname{fd} A \leq n-1_\circ$

设 ℓ_1^* 是 $\mathbb{P}$中的第一条边。记 I_1 为与 $t^{-1}(\ell_1^*)$ 相关联的内射模，即 $I_1 = M_{t^{-1}}(\ell_1^*)$；关于弧与内射模对应关系的构造，参见图 9。记 p 为 $t^{-1}(\ell_1^*)$ 的另一个端点，它属于多边形 $\mathbb{P}'$。注意， p 也是一个边界标记点，并且 $w_p(t^{-1}(\ell_1^*)) \leq w_q(t^{-1}(\ell_1^*))$，因为 $\mathbb{P}$ 是最大的。另一方面，注意 $w_q(t^{-1}(\ell_1^*)) = n-1$，参见图 14。那么由推论 2.28 可得，$\operatorname{pd} I_1 = n-1_\circ$

由于在 A 中，任何含有连续关系的序列都由来自同一多边形的那些箭头连接起来，因此，多边形 $\mathbb{P}$ 给出了此类最长序列，第二个结论可由上述讨论直接得出。□

以下定理是本小节的主要结果。回顾一下，当我们将曲线的定向交点表示为 $\mathcal{K}^-$中的态射时，$^b(proj\text{-}A)$，为了便于陈述结果，我们将带对象 $P^\bullet_{(\alpha,f,\lambda,m)}$ 记为 $P^\bullet_{(\alpha,f)}$ ，如果 $m=1$ ，且该陈述不依赖于 λ 的选择，参见小节 1.4。下面我们将

继续使用此记号。因此，对于两个这样的模 M_α 和 M_β，它们同构当且仅当 α 和 β 同伦且相关参数相同。

定理 2.30。设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 是带有简单坐标的标记曲面，且 α 和 β 是该曲面上的两条之字形曲线。那么对于从 α 到 β、权为 $\omega \geq 0$ 的任一定向交点，都有一个与之对应的态射，属于 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$。

此外，除非 (1) α 和 β 是同一条 $\circ$-弧，否则所有此类态射构成空间 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$ 的一组基。在这种情况下，恒等映射是 $\mathrm{Hom}(M_\alpha, M_\beta)$ 的额外基映射；(2) α 和 β 是同一条闭曲线，且 $M_\alpha \cong M_\beta$。在这种情况下，恒等映射是 $\mathrm{Hom}(M_\alpha, M_\beta)$ 中额外的基映射，而与 M_α 的 Auslander-Reiten 序列对应的自扩张是 $\mathrm{Ext}^1(M_\alpha, M_\beta)$ 的额外基映射。

证明。 首先，我们证明每个从 α 到 β、权为 ω 的定向交点都会产生一个 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$中的态射。当该定向交点来自内部交点 q时，由等式 (1.2) 和 (1.4，以及命题—定义 2.25和定义 2.26 中给出的定向交点权的定义，便可直接得出结论。

现在假设 a 是一个从 α 到 β 的定向交点，它来自边界交点 q，其权为 ω。设 $\mathbb{P} = \{\ell_1^*, \cdots, \ell_m^*\}$ 是 Δ_s^*的多边形，且包含 q，其中 $\mathbb{P}$ 中的弧按顺时针方向标记，参见图 10 左图。假设从 q出发， p_1 和 p_2 分别是 α和 β 与 Δ_p^*中的弧相交时遇到的第一个交点。则由推论 2.24 得 $f_0(p_1) = -w_q(\alpha)$ 和$g_0(p_2) = -w_q(\beta)$。再由等式 (1.1)，存在一个从$P^\bullet_{(\alpha, f_0)}$ 到 $P^\bullet_{(\beta, g_0)}[g_0(p_2) - f_0(p_1)] = P^\bullet_{(\beta, g_0)}[w_q(\alpha) - w_q(\beta)] = P^\bullet_{(\beta, g_0)}[\omega]$的态射。该态射对应于 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$中的一个态射，也就是说，定向交点 a 会产生一个 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$中的态射。

定理中关于态射构成扩张空间的一组基的第二部分，由命题 1.10 以及空间 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$ 与 $\mathrm{Hom}(P_\alpha^\bullet, P_\beta^\bullet[\omega])$ 之间的一一对应关系可得。特别地，由于带模的投射维数和内射维数均为 1，以该带模为起点的 AR 三角可以提升为导出范畴中的 AR 三角，因此结论 (2) 可由命题 1.10 中对应的结论 (2) 得出。 □

注记 2.31. 总而言之，设 α 和 β 是两条在 q处相交的之字形曲线。若 q 是边界交点，则 q产生的 M_α 与 M_β 之间只有一个态射。若 q 是非带 puncture 的内部交点，则 q 产生的 M_α 与 M_β 之间存在一个态射和一个 1-扩张。若 q 是穿孔点，则 q产生的 M_α 与 M_β 之间存在无穷多个态射或扩张。

特别地，源自非带 puncture 的内部交点的扩张总是一个 1-扩张，而所有高阶扩张都源自边界交点或作为穿孔点的交点。我们提到，这一现象也在 [BS21], 中有所指出，其中给出了由曲面三角剖分产生的 gentle代数的不可分解模之间高阶扩张空间的显式基。

2.5. 作为特选多边形的高阶 Yoneda 扩张。在本小节中，我们将高阶 Yoneda 扩张解释为曲面上的一些特殊多边形，即特选多边形，并将 Yoneda 乘积解释为这些多边形的粘合。

设 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 是一个带有简单坐标的标记曲面。设 α 和 β 是两个 $\circ$在曲面上共享端点 q 的弧，位于 $\mathcal{M}_\circ$中。假设 q 属于 Δ_s^* 的一个多边形，使得 α 与弧 $\ell_t^* \in \Delta_s^*$ 相交，而 β 与弧 $\ell_{t+\omega}^* \in \Delta_s^*$相交。记

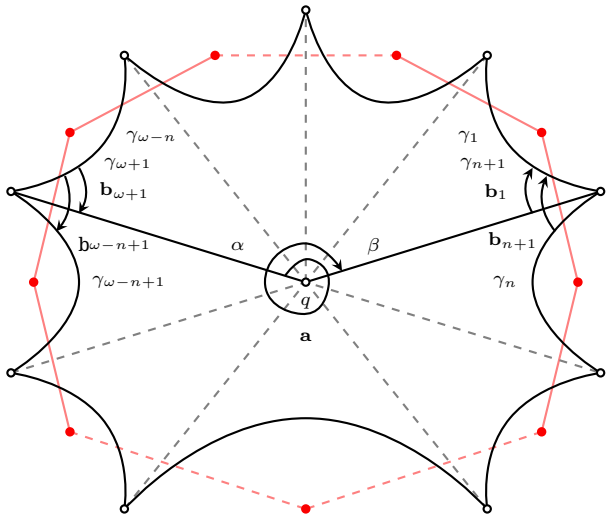


FIGURE 17. 一个特殊的（$\omega+2$）边形 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 对应一个定向交点 $\mathbf{a}$，从 α 到 β，权为 ω，其中 q 是一个穿孔点，并且该多边形中有 n 条弧，属于 Δ_s^*，而 q 属于其中。

为 从 到 的相应定向交点，其权为 $w(\mathbf{a}) = \omega$。我们按以下方式构造一个（$\omega+2$）边形 $\mathbb{P}(\mathbf{a}) = \{\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{\omega+1}\}$，见图 1。

我们记作 $\beta = \gamma_0$ and $\alpha = \gamma_{\omega+1}$。令 γ_1 为在 q 处对 γ_0 and$\ell_{t+\omega-1}$ 进行平滑得到的 $\circ$-弧，令 γ_ω 为在 q 处对 $\gamma_{\omega+1}$ and ℓ_{t+1} 进行平滑得到的 $\circ$-弧。对于$2 \leq i \leq \omega-1$，令 γ_i 为在 q 处对 $\ell_{t+\omega-i+1}$ and $\ell_{t+\omega-i}$ 进行平滑得到的 $\circ$-弧。对于任意 $1 \leq i \leq \omega+1$，我们用 p_i 表示 γ_{i-1} and γ_i 的公共端点。于是显然，每个 $p_i, 1 \leq i \leq \omega$ 都会产生一个从 γ_{i-1} 到 γ_i 、权为零的定向交点 $\mathbf{b}_i$。我们仍用 $\mathbf{b}_i$ 表示与 $\mathbf{b}_i$ 相关联的 $\mathrm{Hom}(M_{\gamma_{i-1}}, M_{\gamma_i})$ 中的映射。

当 q 是一个穿孔点时，我们也可以类似地构造 $(\omega+2)$-边形 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$。微妙之处在于，定向交点可能会绕着 q 转好几圈，因此相应的多边形是一种覆盖，示例见图 17 。

注意，多边形的边（按经典意义）是简单曲线，然而，作为一个 $(\omega+2)$-边形 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 的边，弧 α 和 β 可能存在自交，因此 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 不一定是一个“真正的多边形”。我们称 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 为曲面上的特选多边形，这一名称由以下内容得到了合理解释

定理 2.32. 设 α 和 β 是标记曲面 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 上的两个 $\circ$-弧，它们共享一个公共端点 $q \in \mathcal{M}_\circ \cup \mathcal{P}_\circ$。将从$\alpha$ 到 β 的关联定向交点记为 $\mathbf{a}$，其权为 $w(\mathbf{a}) = \omega$，由此得到 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$ 中的一个映射。那么在上述记号下，与映射 $\mathbf{a}$ 对应的 Yoneda ω-扩张 $[\mathbf{a}]$ 如下:

$$[\mathbf{a}] = 0 \longrightarrow M_\beta \xrightarrow{\mathbf{b}_1} M_{\gamma_1} \xrightarrow{\mathbf{b}_2} \cdots \longrightarrow M_{\gamma_\omega} \xrightarrow{\mathbf{b}_{\omega+1}} M_\alpha \longrightarrow 0\ . \tag{2.2}$$

证明。我们证明 $\omega = 2$ 的情形。一般情形可以通过类似的方法，关于 ω 进行归纳证明。

为简洁起见，记 ℓ_{t+1} 为 ℓ 。我们分别用 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 表示由交点 α 到 ℓ 以及由交点 ℓ 到 β 所产生的定向交点，

。那么，权重 $\omega(\mathsf{a}_1)$ 和 $\omega(\mathsf{a}_2)$ 均为 1，因此得到两个态射，仍分别记为 a_1 和 a_2,，它们分别属于 $\mathrm{Ext}^1(M_\alpha, M_\ell)$ 和 $\mathrm{Ext}^1(M_\ell, M_\beta)$。不难看出，与 a_1 和 a_2 分别对应的 Yoneda 1-扩张为

$$[\mathbf{a}_1] = 0 \longrightarrow M_\ell \xrightarrow{\mathbf{b}_2''} M_{\gamma_2} \xrightarrow{\mathbf{b}_3} M_\alpha \longrightarrow 0 \quad \text{and}$$

$$[\mathbf{a}_2] = 0 \longrightarrow M_\beta \xrightarrow{\mathbf{b}_1} M_{\gamma_1} \xrightarrow{\mathbf{b}_2'} M_\ell \longrightarrow 0\ ,$$

其中，b_2' 和 b_2'' 是由弧平滑所得的典范边界交点所产生的自然态射。记 $\mathsf{a}_1 * \mathsf{a}_2$ 为 a_1与 a_2 在 $\mathrm{Ext}^2(M_\alpha, M_\beta)$ 中的 Yoneda 乘积。那么，与 $\mathsf{a}_1 * \mathsf{a}_2$ 相关联的 Yoneda 2-扩张为

$$[\mathbf{a}_1 * \mathbf{a}_2] = 0 \longrightarrow M_\beta \xrightarrow{\mathbf{b}_1} M_{\gamma_1} \xrightarrow{\mathbf{b}_2} M_{\gamma_2} \xrightarrow{\mathbf{b}_3} M_\alpha \longrightarrow 0\ . \tag{2.3}$$

由于定向交点的复合对应于相关联态射的复合（例如参见 [CS23b，注记 2.6], ），因此我们有态射之间的等式 $\mathsf{b}_2 = \mathsf{b}_2'\mathsf{b}_2''$，注意到 $\mathsf{b}_2 = \mathsf{b}_2'\mathsf{b}_2''$ 是定向交点。另一方面，Yoneda 乘积 $\mathsf{a}_1 * \mathsf{a}_2$ 对应于 $\mathrm{Hom}(P_\alpha^\bullet, P_\beta^\bullet[2])$ 中的复合 $\mathsf{a}_1(\mathsf{a}_2[1])$；根据 [CS23b，注记 2.6]，它等于映射 a。因此，(2.3) 正是 $\mathrm{Ext}^2(M_\alpha, M_\beta)$ 中与映射 a 相关联的 Yoneda 扩张。□

注记 2.33. 上述定理表明，特殊的（$\omega + 2$）边形 $\mathbb{P}(\mathsf{a})$ 表示 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$ 中某个映射的 Yoneda ω-扩张。此外，Yoneda乘积可以解释为这些多边形的粘合。更确切地说，设 a 和 b 是分别属于 $\mathrm{Ext}^\omega(M_\alpha, M_\beta)$ 和 $\mathrm{Ext}^\delta(M_\beta, M_\gamma)$ 的两个映射，它们源自边界上的同一个标记点。设 $\mathbb{P}(\mathsf{a})$ 和 $\mathbb{P}(\mathsf{b})$ 分别是与 $[\mathsf{a}]$ 和 $[\mathsf{b}]$ 相关联的多边形。则 ab 是 $\mathrm{Ext}^{\omega+\delta}(M_\alpha, M_\gamma)$ 中的一个非零映射，而与该 Yoneda扩张相关联的多边形是（$\omega + \delta + 2$）边形 $\mathbb{P}(\mathsf{ab})$，它是沿着弧 β 粘合 $\mathbb{P}(\mathsf{a})$ 和 $\mathbb{P}(\mathsf{b})$ 得到的。

注意，利用字符串组合计算，字符串模之间的 1-扩张可描述为所谓的 重叠扩张 和 箭头扩张，例如参见 [BDMTY20、 CPS21、 CS17、 S99、 Z14]。注意，对于重叠扩张，相关正合序列的中项是两个不可分解字符串模的直和，而对于箭头扩张，中项是不可分解的。因此，在曲面模型的语言中，重叠扩张对应于定向无标记点内部交点，而箭头扩张对应于边界/带标记点处的定向交点。

3. A geometric model for the algebraic hearts of a gentle algebra

本节将利用上一节建立的温和代数模范畴的几何模型，为温和代数导出范畴中的任意代数心给出一个几何模型；这类心总是等价于某个温和代数的模范畴。

在本文其余部分，设 A 是由标记曲面（$\mathcal{S}$， $\mathcal{M}$， Δ_A^*）导出的温和代数，其中 Δ_A^* 是一个射影坐标。这里，我们用记号 Δ_p^*、 Δ_s^*、Δ_p 和 Δ_s 分别表示（$\mathcal{S}$， $\mathcal{M}$）上的任意坐标和剖分（而非初始坐标和剖分）。

我们引入以下记号，供后文使用。设 α 是一条 $\circ$弧， q 是 α的一个端点，我们用 s_q^α 表示 $\alpha \cap \Delta_A^*$ 中距离 q最近的交点，其中 $\alpha \cap \Delta_A^*$ 是 α 与 Δ_A^* 中各弧之间交点的集合。

定义 3.1. $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_A^*)$ 的一个简单心剖分是一个数对 (Δ_s, f)，其中 Δ_s 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 的一个简单剖分，$f = \{f_\alpha, \alpha \in \Delta_s\}$ 是从 Δ_s 出发的弧的分次集合，满足

$$f_\alpha(s_q^\alpha) < f_\beta(s_q^\beta),$$

当 q 是 Δ_s 中弧 α 和弧 β 的公共端点，且 β 在 q 处沿顺时针方向位于 α 之后时。

那么，我们得到以下关于$\mathcal{D}^b(A)$ 中简单心集合的几何描述，其证明方式与 [APS23, 定理 32] 的证明类似，而其逆命题则见[APS23，命题 37], ，其中给出了倾斜对象的几何刻画。需要注意的是，$\mathcal{D}^b(A)$ 中的简单心集合与 $\mathcal{K}^b(A)$ 中的倾斜对象之间存在某种对偶性，详见 [KY14，第 5]节。为方便读者，我们将在定理之后给出该证明的概要。

定理 3.2. 设 (Δ_s, f) 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_A^*)$ 的简单心剖分。那么

$$P^\bullet_{(\Delta_s, f)} := \{P^\bullet_{(\alpha, f_\alpha)}, (\alpha, f_\alpha) \in (\Delta_s, f)\}$$

是 $\mathcal{D}^b(A)$ 中的一个简单心集合。

反过来，$\mathcal{D}^b(A)$中的任意简单心集合都可以由此方式得到。也就是说，$(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_A^*)$ 上简单心剖分的同伦类集合与 $\mathcal{D}^b(A)$中简单心集合的同构类集合之间存在一个双射。

证明概要：假设我们有一个简单心剖分(Δ_s, f)，那么任意态射都来自弧 α 到弧 β 在公共端点 q处的一个定向交点。由于我们有 $f_\alpha(s_q^\alpha) < f_\beta(s_q^\beta)$，该态射的次数为 $f_\beta(s_q^\beta) - f_\alpha(s_q^\alpha)$，因此为正。所以，简单心集合定义中的条件（1）和（2）成立，定义见小节1.5。为证明条件（3）成立，也就是 $\mathcal{D}^b(A)$可以由对象 $P^\bullet_{(\alpha, f_\alpha)}, (\alpha, f_\alpha) \in (\Delta_s, f)$生成，只需证明每个简单模 M_γ 的投射分解的一个移位 $P^\bullet_{(\gamma, g)}$ 可以由这些对象生成。由于弧的平滑对应于对 $\mathcal{D}^b(A)$中关联对象之间的态射取锥（相差一个移位），见OPS18定理4.1], ，因此只需证明 γ 可以通过对 Δ_s中的弧反复进行平滑得到。为此，注意到 Δ_s 中的弧将曲面剖分成多边形。穿过一个多边形的弧 γ同伦于构成该多边形边界的若干线段的平滑；将此应用于 γ穿过的所有多边形，可得 γ 是 α的平滑。

反过来，若我们有一个简单心集合 $\{S_1, \ldots, S_n\}$，那么每个对象 S_i 都对应一条分级 $\circ$-弧 α_i。注意，对于任意 $1 \leqslant i, j \leqslant n$，$\alpha_i$ 与 α_j 之间都不存在内部交点。否则，交点将产生两个次数分别为 d 和 $1-d$ 的态射，参见 (1.2) 和 (1.3)，这与条件 (1) 和 (2) 矛盾。因此，这些弧只能在 $\circ$-点处相交。此外，利用 [APS23，引理 5.6]，中的类似论证，条件 (1) 和 (2) 蕴含这些弧 α_i 不围成任何无穿孔点的曲面。另一方面，由于有 n 条弧 α_i，它们将曲面切分成多个多边形，每个多边形恰好有一个 $\bullet$-点。因此，弧 α_i、$1 \leqslant i \leqslant n$ 构成一个简单剖分。最后，简单心剖分定义中的不等式可由条件 (1) 和 (2) 得出。□

回忆一下，在简单坐标中，极小定向交点是一个逆时针角，参见小节 2.1。现在，对偶地，我们为简单剖分引入一个极小定向交点。更准确地说，简单剖分上的 极小定向交点 是Δ_s 一个从一条弧局部地形成的顺时针角 ℓ_i，从一条弧 ℓ_j 到 Δ_s 另一条弧，并且二者在一个公共端点处，

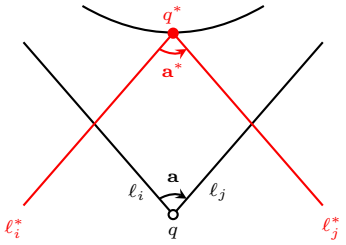


FIGURE 18. 极小定向交点 a 的对偶 $\mathbf{a}^*$ Δ_s。我们将分次记为 $F^*(\mathbf{a}^*) = 1 - F(\mathbf{a})$。

该角位于曲面的内部，并且在 Δ_s 之间没有其他弧。

令 Δ_s 为曲面上的一个简单剖分，其对偶简单坐标为 Δ_s^*。注意，对于任意从 $\mathbf{a}$ 的 Δ_s 到 ℓ_i 的 ℓ_j 的极小定向交点 $\mathbf{a}^*$，都存在唯一一个从 Δ_s^* 的 ℓ_i^* 到 ℓ_j^* 的极小定向交点，见图 18。此外，这建立了 Δ_s 上的极小定向交点集合与 Δ_s^*上的极小定向交点集合之间的双射。我们称 $\mathbf{a}^*$ 为 的$\mathbf{a}$的对偶。

定义 3.3. 设 A 是与曲面模型（$\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$, Δ_A^*）相关联的温和代数。设（Δ_s, f）是（$\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$, Δ_A^*）上的简单心剖分。
(1) 设 F 是从 Δ_s 的极小定向交点集合到整数集 $\mathbb{Z}$ 的映射，使得对于由 ℓ_i 和 ℓ_j 的公共端点 q 产生的每个极小定向交点 $\mathbf{a} : \ell_i \to \ell_j$，都有

$$F(\mathbf{a}) = f_{\ell_j}(s_q^{\ell_j}) - f_{\ell_i}(s_q^{\ell_i}).$$

我们称 $F(\mathbf{a})$ 为 a 的分次，并称有序对 (Δ_s, F) 为由 (Δ_s, f) 诱导的分次简单剖分。

(2) 设 F^* 是从 Δ_s^* 的极小定向交点集合到整数集 $\mathbb{Z}$ 的映射，使得对于每个极小定向交点 $\mathbf{a}^*$，都有

$$F^*(\mathbf{a}^*) = 1 - F(\mathbf{a}),$$

其中 $\mathbf{a}^*$ 是 a 的对偶。我们称有序对 (Δ_s^*, F^*) 为由 (Δ_s, f) 诱导的分次简单坐标。

让我们解释一下为何选择上述分次。由 F 确定的第一个分次实际上映射到集合 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$，它对应于彼此之间不存在非正扩张的心中的简单对象。对偶分次 F^* 是非正的，这意味着˜我们得到的代数 Γ将由一个倾斜对象导出，更多细节请参见定理 3.6。

定义 3.4. 设 A 是与曲面模型 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_A^*)$ 相关联的温和代数。设 (Δ_s, f) 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_A^*)$ 上的简单心剖分，其诱导的分次简单坐标为 (Δ_s^*, F^*)。

(1) 四元组 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*, F^*)$ 上的之字形曲线，是指与 Δ_s^* 的分次相容的、位于 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*)$ 上的之字形曲线；也就是说，对于曲线经过的任意极小定向交点 $\mathbf{a}^*$，$F^*(\mathbf{a}^*) = 0$。如果一个 $\circ$-弧是位于 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*, F^*)$ 上的之字形曲线，我们称它为之字形弧。如果一条（本原）闭曲线是位于 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*, F^*)$ 上的之字形曲线，我们称它为闭之字形曲线。

(2) 分次简单坐标 (Δ_s^*, F^*) 的代数定义为带分次的˜代数 $\Gamma = A(\Delta_s^*)$，其分次由分次 F^* 诱导；也就是说，每个箭头 $\mathrm{a}^* \in Q(\Delta_s^*)$ 的分次˜等于 $F^*(\mathrm{a}^*)$。记 Γ 中由分次为零的元素组成的子代数为 Γ 。

˜引理 3.5。代数 Γ 和 Γ 是温和代数。

˜证明。我们知道，Γ 是一个分次温和代数，因为 Δ_s^* 是一个简单坐标。于是˜Γ 也是一个温和代数，因为它是通过从 Γ 中删除具有非零分次的箭，并忽略包含这些箭的关系得到的。注意，Γ 可能不是连通的。□

定理3.6. 设 A 是一个与曲面模型$(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_A^*)$相关联的温和代数。设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{D}^b(A)$的一个心，它由一个简单心集合 $\{S_1, \cdots, S_n\}$导出，其相关联的简单心剖分为(Δ_s, f)。那么 $\mathcal{H}$ 等价于温和代数 Γ的模范畴。此外，$\mathcal{H}$ 中的任意不可分解对象都具有以下形式：对于某个位于$(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*, F^*)$上的之字形弧 α 及某个分次 g，其形式为 $P^\bullet_{(\alpha,g)}$；或者对于某个位于$(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*, F^*)$上的之字形闭曲线 α 及某个分次 g 和 $\lambda \in k^*$, $m \in \mathbb{N}$，其形式为 $P^\bullet$（α，g，λ，m）。

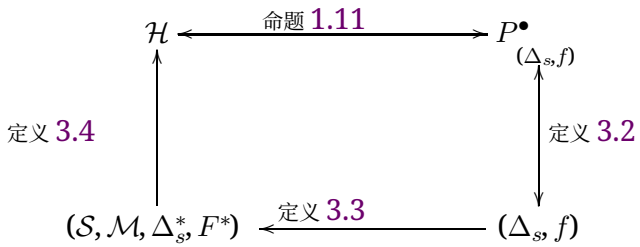
证明。由 [KY14，引理 5.3]，，心 $\mathcal{H}$ 等价于与相应倾斜对象相关联的端同态代数 $B = kQ/I$ 的模范畴；根据 [APS23，命题 3.7]，该代数是温和代数。由于 S_1、$\cdots$、S_n 是 $\mathcal{H}$ 中的简单对象，Q 的顶点与 Δ_s 中的弧相对应。Q 的箭与 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(S, S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(S, S[1])$ 的一组基相对应，其中 $S = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} S_i$，因此对应于 (Δ_s, f) 中分次弧之间分次为一的定向交点。此外，对于两条箭头 a：$P^\bullet(\alpha, f_\alpha) \to P^\bullet_{(\beta, f_\beta)}$ 和 b：$P^\bullet(\beta, f_\beta) \to P^\bullet(\gamma, f_\gamma)$，复合 ab 属于 I，当且仅当分别产生 a 和 b 的 α 与 β 的公共端点，以及 β 与 γ 的公共端点彼此不同。

另一方面，根据构造，Γ 是一个非正分次代数，其零次部分 Γ 与˜代数 B同构。注意，分次 $F^*(\mathrm{a}^*)$ 定义为 $1 - F(\mathrm{a})$，当且仅当 $F(\mathrm{a}) = 1$ 当且仅当 $F^*(\mathrm{a}^*) = 0$ 时，a 才在 Q 中给出一个箭头。

根据构造，简单对象 $S_i \in \mathcal{H}$ 具有如下形式：$P^\bullet_{(\ell_i, f_{\ell_i})}$，对应于一个分次弧（$\ell_i$，$f_{\ell_i}$），其中 $\ell_i \in \Delta_s$。此外，$\mathcal{H}$ 中的任意不可分解对象都由简单对象 $P^\bullet_{(\ell_i, f_{\ell_i})}$ 通过迭代生成，也就是说，可通过对 Δ_s中的弧反复进行平滑得到。因此，根据定理 2.8，$\mathcal{H}$ 中的不可分解对象本质上总是由（$\mathcal{S}$，$\mathcal{M}$，Δ_s^*，F^*）上的一条之字形曲线给出。也就是说，第二个结论得证。□

下图描绘了定理 3.6中出现的构造。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{命题 1.11}"] & P^\bullet_{(\Delta_s, f)} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{定义 3.2}"] \\
(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_s^*, F^*) \arrow[u, "\text{定义 3.4}"] & (\Delta_s, f) \arrow[l, "\text{定义 3.3}"']
\end{tikzcd}$$

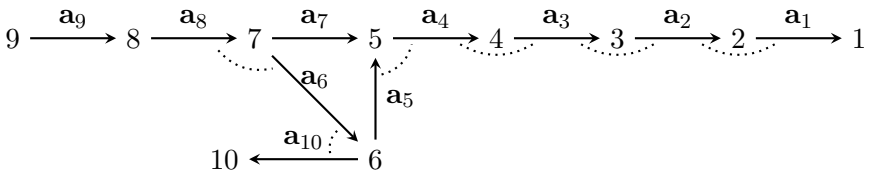


注记 3.7. 对于 $\mathcal{H}$ 中的不可分解对象 $P^\bullet(\alpha, g)$ 或 $P^\bullet_{(\alpha, g, \lambda, m)}$，分次 g 由生成它的扩张以及扩张中出现的弧 ℓ_i的分次决定。

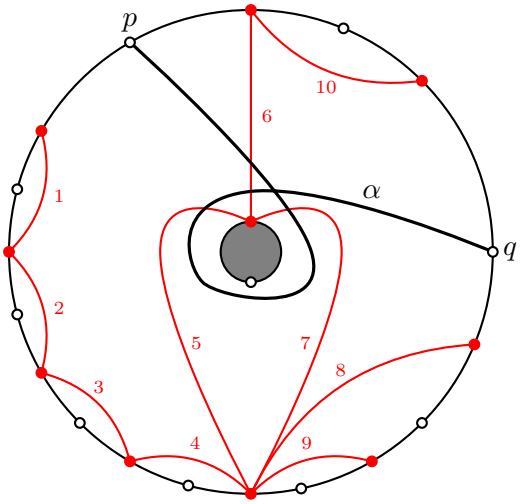
作为上述定理的直接推论，我们得到曲面 $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \Delta_A^*)$ 上分次简单坐标的同伦类与 $\mathcal{D}^b(A)$ 中心的等价类之间的双射（模平移）。

4. An example

在本节中，我们给出一个具体例子来说明我们所获得的结果。我们考虑以下温和代数 A:



根据推论 2.29，有限维数 $\mathrm{fd}\, A$ 为 5，等于内射模 I_6的投射维数，也对应从 6 到 1 的具有连续关系的最长路径。与 A 相关联的曲面模型是一个环带（$\mathcal{S}$， $\mathcal{M}$， Δ_s^*）：



（1）我们考虑上图所示的一条弧 α，其端点为 p 和 q。根据构造 1，与之关联的模是

$$M_\alpha = \begin{matrix} 6\ 7 \\ 5\ 6. \end{matrix}$$

注意， p 和 q 分别属于多边形 $\mathbb{P} = \{1,2,3,4,5,6\}$ 和 $\mathbb{P}' = \{6,7,8,10\}$。 α 在 p 和 q 处的权重为

$$w_p(\alpha) = 6 - 1 = 5, w_q(\alpha) = 2 - 1 = 1.$$

因此，根据推论 2.28， 的投射维数 M_α 是

$$\mathrm{pd}\, M_\alpha = max\{w_p(\alpha), w_q(\alpha)\} = 5.$$

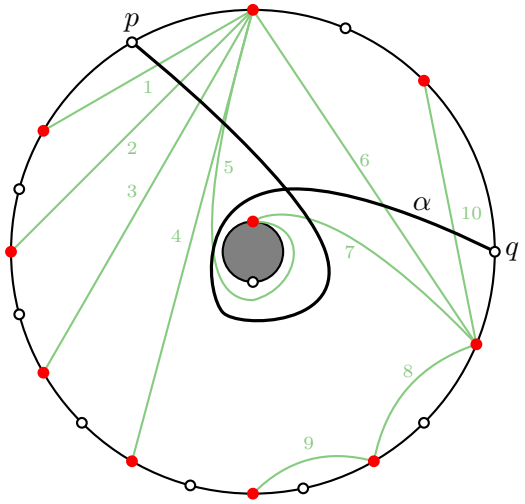
事实上，与 M_α 相关联的字符串是

$$\omega = (\mathbf{a}_5)(\mathbf{a}_7^{-1})(\mathbf{a}_6).$$

将命题中所给复形内处于同一度数的投射模合并后，2.23的最小投射分解如下：

$$P_\alpha^\bullet = P_1 \xrightarrow{\mathbf{a}_1} P_2 \xrightarrow{\mathbf{a}_2} P_3 \xrightarrow{\mathbf{a}_3} P_4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{a}_4 \end{pmatrix}} P_{10} \oplus P_5 \oplus P_5 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{10} & 0 \\ \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_7 \\ 0 & \mathbf{a}_6\mathbf{a}_5 \end{pmatrix}} P_6 \oplus P_7,$$

可通过射影坐标 $\Delta_p^* = t(\Delta_s)$（绿色弧）直接读取：



(2) α 处的余权为 p 和 q 处的余权。

$$cw_p(\alpha) = 1 - 1 = 0, cw_q(\alpha) = 3 - 1 = 2.$$

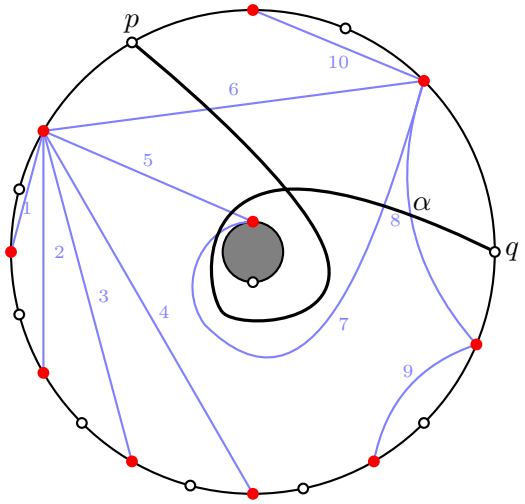
因此，根据推论 2.28， M_α 的内射维数为

$$\mathrm{id}\, M_\alpha = max\{cw_p(\alpha), cw_q(\alpha)\} = 2.$$

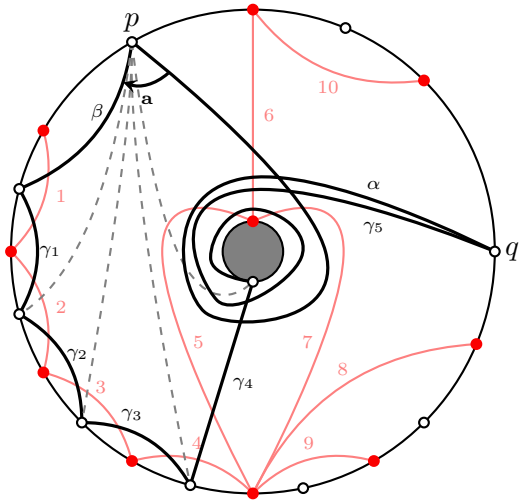
M_α 的最小内射分解为：

$$I_\alpha^\bullet = P_5 \oplus P_6 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathbf{a}_6\mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_7 \\ 0 & \mathbf{a}_6 \end{pmatrix}} P_7 \oplus P_7 \xrightarrow{\mathbf{a}_8,} P_8$$

这可通过使用内射坐标看出$\Delta_i^* = t^{-1}(\Delta_s)$（参见注记2.27）：



(3) 现在，设 β 为与简单模 S_1相关联的弧，见下图。则 α 与 β 相交于点 p，从而产生一个定向交点 **a**，其方向为从α 到 β，权为 5。因此 **a** 根据定理 2.30，对应于 Ext 中的一个映射$^5(M_\alpha, M_\beta)$。



此外，根据定理 2.32，相应的 Yoneda 5-扩张如下：

$$[\mathbf{a}] = 0 \longrightarrow M_\beta \longrightarrow M_{\gamma_1} \longrightarrow M_{\gamma_2} \longrightarrow M_{\gamma_3} \longrightarrow M_{\gamma_4} \longrightarrow M_{\gamma_5} \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow 0\ ,$$

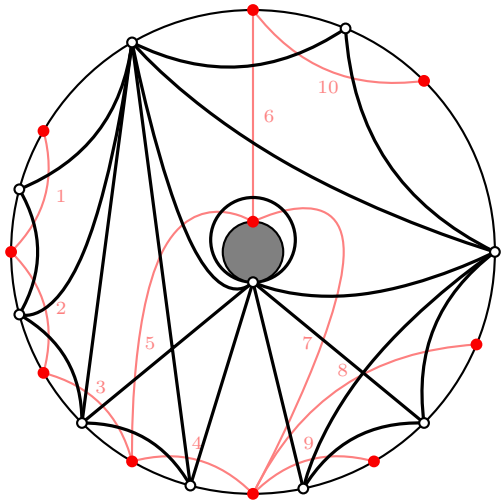
也就是说，

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} & 6\ 7 & \\ 5\ 6 & & \\ & 5 & \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 6\ 7 \\ 5\ 6 \end{smallmatrix} \longrightarrow 0\ .$$

(4) 现在我们给出 $\mathcal{D}^b(A$中的一个心的几何模型示例。如第3节所述，下文将Δ_A^* 记作与 A相关联的初始简单坐标。我们考虑一个简单心集合

$$P^\bullet_{(\Delta_s, f)} = \{S_i, i \neq 4, 5\} \cup \{S_5[-1], \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\},$$

在 $\mathcal{D}^b(A)$。根据定义3.3中的构造，所对应的分次简单坐标（Δ_s^*， F^*）如下图所示，以红色弧表示



对于箭头 a*，其对应的分次 $F^*(a^*)$ 等于零，但箭头 $a_1^*: 6 \longrightarrow 5$ 和 $a_2^*: 7 \longrightarrow 4$除外，其中 $F^*(a_1^*) = -1$ 且 $F^*(a_2^*) = 1$。此外，根据定理3.6，由 $P^\bullet_{(\Delta_s, f)}$ 生成的心 $\mathcal{H}$ 中的不可分解对象，是相对于分次简单坐标（Δ_s^*, F^*）而言的锯齿形弧，即图中的黑色弧。

注 4.1。 注意，简单坐标 Δ_s^* 是由 Δ_A^* 经过某种翻转得到的，也就是说，我们将 Δ_A^* 中的弧 5 替换为弧 5 和弧 4 的平滑，并保留Δ_A^*中的其他弧。事实上，心 $\mathcal{H}$ 是模范畴 mod-A 中扭挠对 (,) 的（简单）HRS 倾斜 [HRS96, W10]，或者等价地，简单心集合 $P^\bullet_{(\Delta_s, f)}$ 是由 mod-A 中的简单对象构成的典范简单心集合的变异。

<escape>上述现象表明，将（简单）HRS 倾斜解释为相关分次简单坐标的一种特定翻转，是一种普遍现象。事实上，作者在 [CS23b]，中将 silting 突变解释为剖分的翻转，并指出倾斜对象与 simple-minded 集合之间存在某种对偶性，相关示例可参见 [KY14]。</escape>

References

[A21] C. Amiot, 《利用轨形研究 skew-gentle 代数导出范畴中的不可分解对象》。*EMS Ser. Congr. Rep.* 欧洲数学会（EMS），苏黎世，-。AB C. Amiot 和 T. Brustle, 《利用轨形研究 skew-gentle 代数之间的导出等价》。*Doc. Math.* 27 (2022 933 982 2)，-。ABCJP I. Assem、T. Brustle、C-J. Gabrielle 和 P-G. Plamondon, 《源于曲面三角剖分的温和代数》。 *Algebra Number Theory* 4 2010 2, 201 229 2 ()，第-期。AG C. Amiot 和 Y. Grimeland, 《曲面代数的导出不变量》。 *J. Pure Appl. Algebra* 220 (2016 9, 3133 3155 2)，第-期。AH I. Assem 和 D. Happel, 《Dynkin型 A_n的广义倾斜代数》。 *Comm. Algebra* 9 (1981)，第 20, 2101 2125 2 -期。ALP K-K. Arnesen、R. Laking 和 D. Pauksztello, 《温和代数有界导出范畴中不可分解复形之间的态射》。 *J. Algebra* 467 (2016 1 46 10)，-。ALP C. Amiot、D. Labardini-Fragoso 和 P-G. Plamondon, 《整体维数为2的曲面切割代数的导出不变量II：带穿孔情形》。 *Comm. Algebra* 49 (2021)，第1期，114-150。2[APS23] C. Amiot、P-G. Plamondon 和 S. Schroll, 《通过线数和Arf 不变量得到温和代数的完备导出不变量》。 *Selecta Math. (N.S.)* 29 (2023)，第2期，论文编号30，共36页。2,[AS] I. Assem 和 A. Skowro´nski, 《仿射 A_n型的迭代倾斜代数》。 *Math. Z.* 195 (1987)，第 2, 269 290 2 -期。B T. Bridgeland, 《三角范畴上的稳定性条件》。 *Ann. Math.* (2 2, 317 166 2007 345 2) ( )，第-期。[B11] G. Bobi´nski, 《温和代数上完美复形的几乎分裂三角》。 *J. Pure Appl. Algebra* 215 2011 4, 642 654 ()，第-期。[BCS] B R. Bocklandt, 《带穿孔曲面的非交换镜像对称》。附录由 Mohammed Abouzaid 撰写。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 368 (2016 1, 429 469 2)，第-期。BBD A. A. Beilinson、J. Bernstein 和 P. Deligne, 《奇异空间上的分析与拓扑》。 *Astérisque* 100, 1982 12 ，第 *Astérisque* 100, 1982 12 卷，法国数学会，（法文）。BBM K. Baur、A. B. Buan 和 R. J. Marsh, 《管中的挠对与刚性对象》。 *Algebr.* ，卷、页码-（）。 *Represent. Theory* 17, 565 591 2014 2 BPP N. Broomhead、D. Pauksztello 和 D. Ploog, 《离散导出范畴II：silting 对的 CW 复形与稳定流形》。 *J. London Math. Soc.*, 93 2016 273 300 2 ()，–。BPP N. Broomhead、D. Pauksztello 和 D. Ploog, 《离散导出范畴I：同态、自等价与t-结构》。 *Math. Z.*, 285 2017 39 89 2 ()，–。BC K. Baur 和 R. Coelho Simoes, 《温和代数模范畴的几何模型》。*Int. Math. Res. Not. IMRN* (2021)，第15期，11357-11392。1, 2, 3, 7, 9, 13, 14, 16, 17, 19, 25

[BD18] I. Burban 和 Y. Drozd, 《非交换节点曲线与导出驯性代数》。（2018）预印本 arXiv: 1805 05174 2。. [20] BDMTY T. Brustle、G. Douville、K. Mousavand、H. Thomas 和 E. Yıldırım, 《温和代数的组合学》。 *Can. J. Math.* 72 (6 2020 1551 1580 3, 32) () -。BM V. Bekkert 和 H A. Merklen, 《温和代数导出范畴中的不 [03] 可分解对象》。 *Algebr.* (), 第-期。 *Represent. Theory* 6 2003 36 285 302 [87] BR M. C. R. Butler 和 C. M. Ringel, 《中项较少的 Auslander-Reiten 序列及其在串代数 中的应用》。 *Comm. Algebra* 15 (1987 1 2, 145 179 5), 第--期。BS K. [21] Baur 和 S. Schroll, 《温和代数的高阶扩张》。 *Bull. Sci. Math.* 170 (2021), 论文编号 103010, 21 3, 4, 30 页。BPT T. [ ] 5 Brustle、D. Pauksztello 和 H. R. Tyler, 《通过几何模型研究温和代数的复形上同调》。准备中。[11] BZ T. Brustle 和 J. Zhang, 《无穿孔标记曲面的簇范畴》。 *Algebra Number Theory* 5 2011 4, 529 566 (), 第-期。 2 [06] CCS P. Caldero、F. Chapoton 和 R. Schiffler, 《由簇导出的带关系箭图（An 情形）》。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 358 (2006 3, 1347 1364 2), 第-期。CD A. Chan 和 L. Demonet, 《温和 [20] 代数挠类的分类》。（2020）预印本 arXiv:2009.10266。2[CJS22] W. Chang、H. B. Jin 和 S. Schroll, 《分次温和代数导出范畴的再拼接与 曲面切割》。(2022 2206 11196 2)预印本 arXiv: 。. CHS W. Chang、F. Haiden 和 S. Schroll, [23] 《分歧覆盖上的辫群作用与完全例外序列》。(2023 2301 04398 2)预印本 arXiv: 。. CP R. ~ [16] Coelho Simoes 和 D. Pauksztello, 《由球面对象生成的三角范畴中的挠对》。 *J. Algebra* 448, (2016 1 47 2): -。CPS I. Canakci、D. Pauksztello 和 S. Schroll, 《温和代数有界导出范畴中的映 [19] 射锥》。 *J. Algebra* 530 (2019 163 194 3), -。CPS I. Canakci、D. Pauksztello 和 S. Schroll, 《温和 [21] 代数的扩张》。 *Canad. J. Math.* (), 第-期。 73 2021 13, 249 292 [17] CS I. Canakci 和 S. Schroll, 《标记曲面的Jacobian 代数与簇范畴中的扩张》。 *Adv. Math.* 313 (2017 1 49 3, 32) -。CS a W. Chang 和 S. Schroll, 《温和代数导出范畴中的例外序列》。 [23] *Selecta Math. (N.S.)* 29 (2023 3, 33 41 2), 第期。论文编号。页。CS b W. Chang 和 S. [23] Schroll, 《温和代数silting 理论的几何实现》。 *Math. Z.* (), 第期。论文编号。页。 303 2023 3, 67, 37 2, 32, 39 [14] D L. David-Roesler, 《亏格0曲面代数的分次等价导出等价》。 *Algebr. Represent. Theory*第 17 2014 1, 1 30 2卷(), 第-期。DS L. David-Roesler 和 R. [12] Schiffler, 《无穿孔曲面的代数》。 *J. Algebra* 350 (2012 218 244 2), -。FGLZ C. J. Fu、S. F. Geng、P. Liu 和 Y. Zhou, 《温和代 [23] 数支撑 τ *J.*-倾斜图》。(), –。 *Algebra* 628 2023 189 212 [08] FST S. Fomin、M. Shapiro 和 D. Thurston, 《簇代数与三角剖分曲面，第一部分：簇复形》, *Acta Mathematica* **201** 2008 83 146 2() –。HJR T. Holm、P. Jorgensen 和 M. Rubey, 《托勒密图与Dynkin型 [11] An簇范畴中的挠对》。 *J. Algebraic Combin.* 34, 第 3 2011 507 23 2期 [17] (): -。HKK F. Haiden、L. Katzarkov 和 M. Kontsevich, 《平坦曲面与稳定性结构》。 *Publ. Math.Inst. Hautes Études Sci.* 126 (2017 247 318 2, 7), -。HRS D. Happel、I. Reiten 和 S. Smalø, 《阿贝尔范畴中的倾斜与拟倾斜代数》。 [96] *Mem.* () viii。 *Amer. Math. Soc.* 120 1996 +88 39 [05] HS B. Huisgen-Zimmermann 和 S. O. Smalø, 《串代数的同调。I》。 *J. Reine Angew.* (), -。 *Math.* 580 2005 1 37 3, 24 [23] HZZ P. He、Y. Zhou 和 B. Zhu, 《skew-gentle 代数模范畴的几何模型》。*Math. Z.* 304 (2023 1, 18, 41 2), 第期。论文编号。页。GHZ E. L. Green、D. Happel 和 D. Zacharia, 《带零关 [85] 系的Artin代数上的投射分解》。 *Illinois J. Math.* 29 (1985 1, 180 190 21), 第-期。K M. Kalck, [15] 《温和代数的奇异范畴》。 *Bull. Lond. Math. Soc.* 47 (1 2015 65 74 3) () -。KY S. Koenig 和 D. Yang, [14] 《有限维代数的silting 对象、简单心集合、t-结构与co-t-结构》。 *Doc. Math.* 19 (2014), 403-438。12, 33, 35, 39

[L09] D. Labardini-Fragoso, 《与三角剖分曲面相关的带势箭图》, *Proc. Lond.* ( ) : ( ) – . *Math. Soc.* 3 98 3 2009 797 839 2
[22] LGH Y. Z. Liu、H. P. Gao 和 Z. Y. Huang, 《通过几何模型研究温和代数的同调维数》。(2022 2208 13180 25) 预印本 arXiv: . . LP Y. Lekili 和 A. Polishchuk, 《通过 Fukaya 范畴研究温和代数的导
[20] 出等价》。 *Math.* ( ), 第 - - 期。 *Ann.* 376 2020 1 2, 187,225
[22] LSV D. Labardini-Fragoso、S. Schroll 和 Y. Valdivieso, 《skew-gentle 代数与轨形的导出范畴》。 *Glasg. Math. J.* 64 (2022 3, 649 674 2), 第 – 期。O S. Opper, 《温和代数的自等价
[19] 与完备导出不变量》。 (2019) 预印本 arXiv:1904.04859。2[OPS18] S. Opper、P-G Plamondon 和 S. Schroll, 《温和代数导出范畴的几何模型》, (2018 1801 09659 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 19, 21, 23, 33) 预印本 arXiv: . . OZ S. Opper 和 A.
[22] Zvonareva, 《Brauer 图代数的导出等价分类》, *Adv.* ( ), 论文编号 pp. *Math.* 402 2022 108341, 59 2
[19] PPP Y. Palu、V. Pilaud 和 P-G Plamondon, 《局部温和代数的非亲吻与非交叉复形》。 *J. Comb. Algebra* 3 (2019 4, 401 438 7, 9), 第 - 期。PPP Y. Palu、V. Pilaud 和 P-G
[21] Plamondon, 《温和代数的非亲吻复形与 tau-倾斜理论》。 *Mem. Amer. Math. Soc.* 274 (2021 1343, +110 7), 第 vii 期, pp. QZZ Y. Qiu、C. Zhang 和 Y. Zhou, 《分次
[22] skew-gentle 代数的两种几何模型》, (2022) 预印本 arXiv: 2212 10369 2 . . S J. Schroer, 《温和代数上无自扩张的模》。 3, 32 [99] ¨
J. Algebra, 216 (1999), 1, 178-189。[10] W J. Woolf, 《稳定性条件、挠理论与倾斜》。 *J. Lond. Math. Soc.*, (2) 82 (2010), 第 3, 663 682 39 - 期。Z J. Zhang, 《温和代数上的不可分解例外模》。 *Comm. Algebra*, 42 (7) (2014) 3096-3119。3, 32
[14]

School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China
Email address: changwen161@163.com