ω域的极大元集合不一定是一个 G_δ-集 t

Gaolin Li[a], Chong Shen[b,c], Kaiyun Wang[d], Xiaoyong Xi[a,*], Dongsheng Zhao[e]

[a]*School of Mathematics and Statistics, Yancheng Teachers University, Yancheng 224002, Jiangsu, China*
[b]*School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*
[c]*Key Laboratory of Mathematics and Information Networks (Beijing University of Posts and Telecommunications), Ministry of Education, China.*[d]*School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, Shaanxi, China*[e]*Mathematics and Mathematics Education, National Institute of Education, Nanyang Technological University, 1 Nanyang Walk, 637616, Singapore*

arXiv:2305.04012v1 [math.GN] 6 May 2023

摘要

如果一个拓扑空间同胚于某个域 P 的极大点空间 Max(P)，则称它具有域模型。Lawson 证明，每个波兰空间 X 都有一个 ω-域模型 P，并且对于这样的模型 P，Max(P) 是 P 的 Scott 空间中的一个 G_δ-集。Martin（2003）随后提出疑问：对于每个 ω-域 Q，Max(Q) 是否都是 Q 的 Scott 空间中的一个 G_δ-集？本文通过构造一个反例，对 Martin 长期未解的问题给出了否定答案。这里的反例实际上表明，即使对于 ω-代数域，答案也是否定的。

关键词：极大点空间，Scott拓扑， ω-连续有向完备偏序集， G_δ-子集*2010*年数学主题分类：06B35, 06B30, 54A05

Scott拓扑是域理论中最有用的拓扑。一般来说，这种拓扑只是 T_0。然而，通过取偏序集 P的所有极大点所组成的集合 Max(P)，并赋予相对 Scott拓扑，可以得到所有 T_1 空间（每个 T_1 空间都同胚于某个偏序集 P的子空间 Max(P)）[9]。一般而言，如果空间 X同胚于偏序集 P的 Max(P)，那么我们称 P 是 X的偏序集模型。许多学者研究了具有域模型的空间。Lawson证明，空间 X 是波兰空间，当且仅当它具有满足 Lawson条件 [4]的 ω-域模型。此外，如果 P 是满足 Lawson条件的 ω-域，那么 Max(P)是 P的 Scott 空间 ΣP中的一个 G_δ-集。正如 Martin 所指出的，在证明中，知道 Max(P) 是 ΣP的 G_δ-子集往往很有用：例如，Edalat在假设一个可分度量空间嵌入某个 ω-域为 G_δ-子集的前提下，建立了测度论与概率幂域 [1] 之间著名的联系。Martin还建立了关于 $E \subseteq$ Max(P)中 G_δ-子集的若干结果，包括：(i) 若 P 是一个 ω-域，且 Max(P) 正则，则 Max(P) 是一个 G_δ-集；(ii) 若 P 是一个 ω-域，且存在 Max(P) 的一个可数子集 $C \subseteq$，使得对每个 $x \in P\backslash$Max(P)都有 $\uparrow x \cap C \neq \emptyset$，则 Max($P$) 是一个 G_δ-集；(iii) 对任意 ω-理想域 P，Max(P) 是一个 G_δ-集。

然而，正如 Martin 在 [5, 第 8 节（1）], 中所述，以下问题的答案尚不清楚：

- 对于每个 ω-域 P，Max(P) 都是 ΣP 的 G_δ-集吗?

在本文中，我们构造了一个反例，对上述问题给出了否定的回答。我们的

*通讯作者。*Email address:* {xixy@yctu.edu.cn} (Xiaoyong Xi)

例子实际上表明，即使对于 ω-代数域 P，Max(P)也未必是 G_δ-集。本文的结果还引出了以下问题，以供进一步研究这一主题:

问题： 对于哪些 ω-域 P，Max(P) 是 G_δ-集?

1. 预备知识

本节简要回顾后文将用到的一些基本概念和记号。有关更多细节，请参阅 [2, 3]。

设 P 是一个偏序集。对于 P 的子集 A，我们采用以下标准记号:

$$\uparrow A = \{y \in P : \exists x \in A, x \leq y\};\ \downarrow A = \{y \in P : \exists x \in A, y \leq x\}.$$

对于每个 $x \in X$，我们分别将 $\uparrow\{x\}$ 和 $\downarrow\{x\}$ 简记为 $\uparrow x$ 和 $\downarrow x$。若 A 是 P 的子集，且 $A = \downarrow A$（分别地，$A = \uparrow A$），则称其为下（分别地，上）集。若元素 x 满足 $A \cap \uparrow x = \{x\}$，则称其为 $A \subseteq P$ 中的极大元。A 的所有极大元构成的集合记为 max$A$。A 的极小元集合记为 min$A$，其定义与此对偶。

若 D 是 P 的非空子集，且 D 中任意两个元素在 D 中都有一个上界，则称 D 为有向的。对于$x,\ y \in P$, x，若对于每个满足 $\bigvee D$ 存在的 P 的有向子集 D，$y \leq \bigvee D$ 蕴含着某个 $d \in D$ 满足 $x \leq d$，则称 x 远小于 y，记作 $x \ll y$。记作 $\Uparrow x = \{y \in P : x \ll y\}$ 和 $\Downarrow x = \{y \in P : y \ll x\}$。若对于每个 $x \in P$，集合 $\Downarrow x$ 都是有向的，且 $x = \bigvee \Downarrow x$，则称偏序集 P 为连续的。

元素 $a \in P$ 称为紧的，如果 $a \ll a$。P 的所有紧元的集合记为 $K(P)$。于是，如果对于每个 $x \in P$，集合 $\{a \in K(P) : a \leq x\}$ 是有向的且$x = \bigvee\{a \in K(P) : a \leq x\}$，则称 P为代数的。连续的（分别为代数的）有向完备偏序集也称为域（分别为代数域）。如果对于每个 $x \in P$，$B \cap \downarrow x$ 是有向的且 $\bigvee(B \cap \downarrow x) = x$，则称子集 $B \subseteq P$为 P的基。如果 P 具有可数基，则称 P 为 ω-连续有向完备偏序集或 ω-域。

注 1.1. (1) 一个 dcpo 是一个域，当且仅当它具有一个基。

（2）对于域 P 的每个基 B，$K(P) \subseteq B$。因此，每个代数域 P 都有最小的基，即 $K(P)$。

P 的子集 U 是*Scott*开集，如果满足：（i）$U = \uparrow U$；（ii）对于 P 的每个有向子集 D，若 $\bigvee D$ 存在，则 $\bigvee D \in U$ 蕴含 $D \cap U \neq \emptyset$。P 的所有 Scott 开子集在 P 上构成一个拓扑，称为*Scott* 拓扑，记作 $\sigma(P)$。空间 $\Sigma P = (P,\ \sigma(P))$ 称为 P 的*Scott* 空间。

设 X 为一个拓扑空间。若存在一个可数族$\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的开集，使得 $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$，则称子集 $G \subseteq X$ 为一个 G_δ-集。

2. Martin问题的一个反例

我们将使用以下记号:

> $\mathbb{N}$:= 所有非零自然数的集合; ω := 自然数的序数（也是基数）; ω_1 := 实数的序数（也是基数）; $\Sigma := \bigcup\{\mathbb{N}^k : k \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}\}$. 换句话说, Σ 是所有非空有限序列或可数无穷序列的集合, 其中元素取自 $\mathbb{N}$; $\Sigma^* := \{a^* : a \in \Sigma\}$, 它是 Σ.的一个副本

每个元素 $a \in \Sigma$ 都可以表示为 $\langle a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k\rangle$（如果它是有限序列）, 或者表示为 $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$（如果它是无限序列）。我们用记号 $\ell(a)$ 表示 a 的长度, 其定义如下:

$$\ell(a) = \begin{cases} k, & a = \langle a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k\rangle; \\ \omega, & a = \langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}. \end{cases}$$

我们还可以定义 $\ell(a^*) := \ell(a)$, 因为 a 和 a^* 的长度显然相等。

对于任意 $a \in \Sigma$, 若存在, 我们用 a_k （分别用 $(a^*)_k$）表示序列 a（分别表示 a^*）中的第 k 个元素。例如, 若 $a := \langle 1, 2, 3, 5, \cdots, n, n+1, \cdots\rangle$, 则可得 $\ell(a) = \omega$ 和 $a = \langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, 其中 $a_n = n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

定义 2.1。 对于每个 a, $b \in \Sigma$, a 被称为 b 的**子串**, 记作 $a \sqsubseteq b$, 当且仅当以下情形之一成立:

(s1) $\ell(a) \in \mathbb{N}$, 并且对于所有 $1 \le k \le \ell(a)$ 都有 $a_k = b_k$, 即, a 是 b 的前缀;

(s2) $\ell(a) = \omega$, 以及 $a = b$ （换言之, 对于所有 $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$）。

很容易验证, 定义在 Σ 上的关系 $\sqsubseteq$ 是一个偏序, 下面列出了理解主要例子所需的其中一些性质。

备注2.2。 (1) $(\Sigma, \sqsubseteq)$ 是一个代数域。

> 事实上, 对于每个 $k \in \mathbb{N}$, 集合 $\Sigma_k := \{a \in \Sigma : a_1 = k\}$ 与子串序 $\sqsubseteq$ 一起构成一个树状有向完备偏序集, 如图1所示。此外, 偏序集 $(\Sigma, \sqsubseteq)$ 是这些 Σ_k 的可数不交并, 其中 $k \in \mathbb{N}$。也就是说, 对于任意 $x, y \in \Sigma$, $x \sqsubseteq y$ 在 Σ 中当且仅当存在某个 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x, y \in \Sigma_{k_0}$ 且 $x \sqsubseteq y$ 在 Σ_{k_0} 中, 如图2所示。

(2) $\max\Sigma = \{a \in \Sigma : \ell(a) = \omega\}$, $|\Sigma| = |\max\Sigma| = \omega_1$ 和 $|\Sigma \setminus \max\Sigma| = \omega$。

(3) Σ 的紧元是 $\mathbb{N}$ 的非空有限序列。换言之,

$$K(\Sigma) = \{a \in \Sigma : \ell(a) \in \mathbb{N}\}.$$

(4) 对任意两个元素 a, $b \in \Sigma$, $\{a, b\}$ 有上界, 当且仅当 a 和 b 可比较（即 $a \le b$ 或 $b \le a$）。

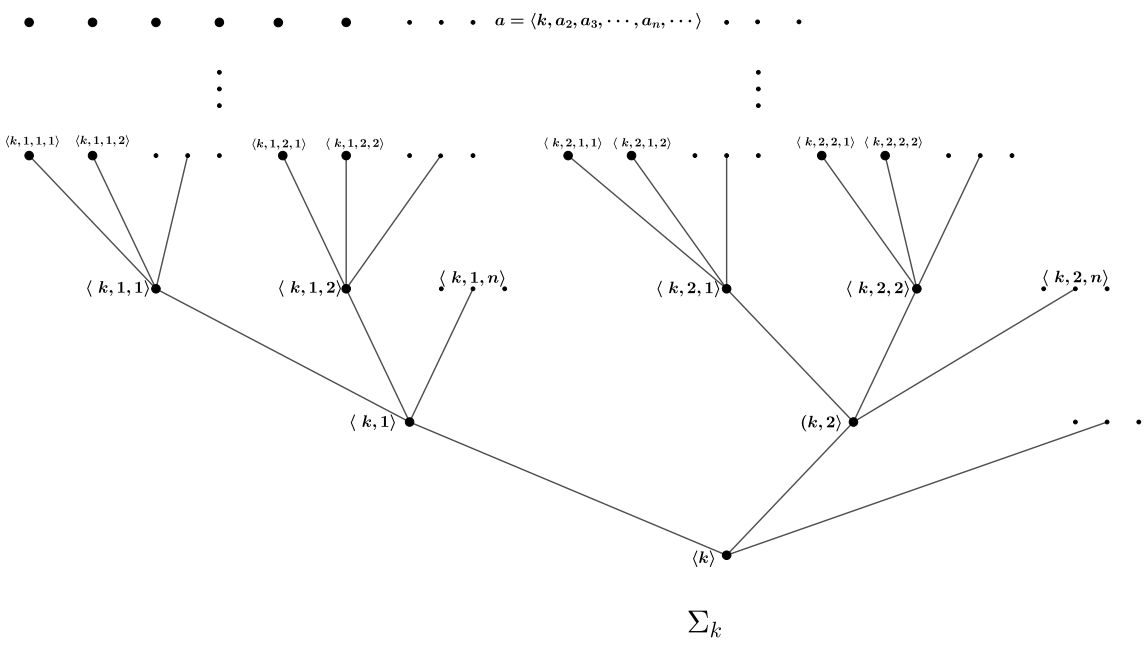

图1：子定向完备偏序集 Σ_k

我们还可以如下定义 Σ^* 上的偏序 $\sqsubseteq^*$： $\forall a,\ b \in \Sigma$,

$$a^* \sqsubseteq b^* \text{ iff } a \sqsubseteq b.$$

显然，偏序集 $(\Sigma, \sqsubseteq)$ 和 $(\Sigma^*, \sqsubseteq^*)$ 序同构。此外，备注2.2中列出的 $(\Sigma, \sqsubseteq)$ 的性质对于 $(\Sigma^*, \sqsubseteq^*)$ 也成立。

例2.3。 设 $X := \{x_{m,n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}\}$，其偏序 $\leq_X$ 定义如下：$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ 且 $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$,

$$x_{m_1,n_1} \leq_X x_{m_2,n_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ and } n_1 \leq n_2.$$

那么，如图3所示， X 是一个 ω-代数域。事实上，容易看出，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_{k,n} = x_{k,\omega}$。此外，我们有

$$\max X = \{x_{m,\omega} : m \in \mathbb{N}\} \text{ and } K(X) = X \setminus \max X = \{x_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

由此可得 $|K(X)| = |\max X| = |X| = \omega$。

在给出反例之前，我们先简要讨论由两个有序结构组合而成的序结构，这将有助于理解我们的主要反例中的序关系。

注 2.4。 设 $P = \{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}\}$。我们在$P$上定义两个关系 $\leq_1$ 和 $\leq_2$。

(1) 关系 $\leq_1$ 定义如下:

(P1) $x_1 \leq_1 x_2 \leq_1 x_3 \leq_1 \cdots \leq_1 x_n \leq_1 x_{n+1} \leq_1 \cdots \leq_1 x_\omega$;

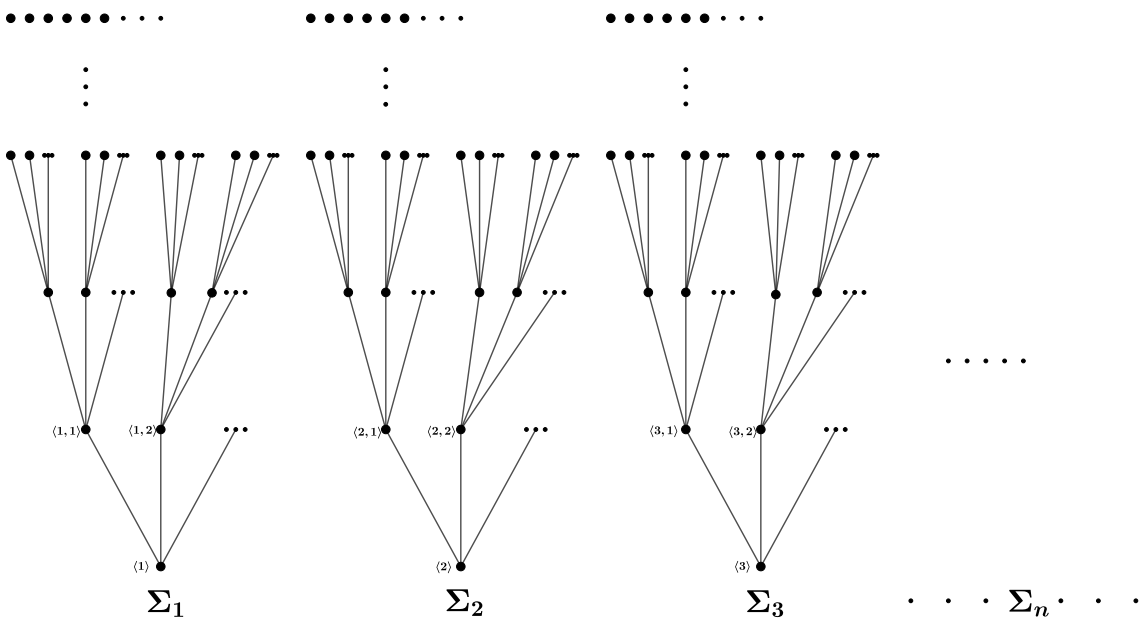

图2：代数域（$\Sigma, \sqsubseteq$）

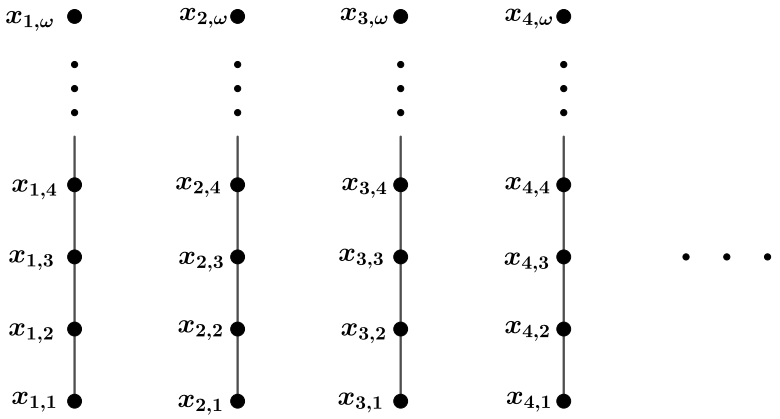

图3：代数域（$X, \leq_X$）

（P2） $y_1 \leq_1 y_2 \leq_1 y_3 \leq_1 \cdots \leq_1 y_n \leq_1 y_{n+1} \leq_1 \cdots \leq_1 y_\omega$;

(P3) $\forall m,\ n \in \mathbb{N}, x_m \leq_1 y_n \Leftrightarrow m \leq n$。

接着，我们定义 $\leq_2 := \leq_1 \cup \{(x_\omega, y_\omega)\}$。容易验证， $\leq_1$ 和 $\leq_2$ 都是 P上的偏序，如图4所示。

(2) 在偏序集（$P, \leq_1$）中，链 $C := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 有两个不可比较的上界，即 x_ω和 y_ω。因此， C在（$P, \leq_1$）中的上确界不存在，进而$\bigvee_{(P,\leq_1)} C \neq x_\omega$。然而，由于 $x_\omega \leq_2 y_\omega$，显然 C 在（$P, \leq_2$）中的上确界存在且等于 x_ω，即$\bigvee_{(P,\leq_2)} C = x_\omega$。

例2.5。 令 $L := X \cup \Sigma \cup \Sigma^*$，其中 X 是例2.3中定义的偏序集。对于任意 $u,\ v \in L$，若满足以下任一条件，则定义 $u \leq v$：

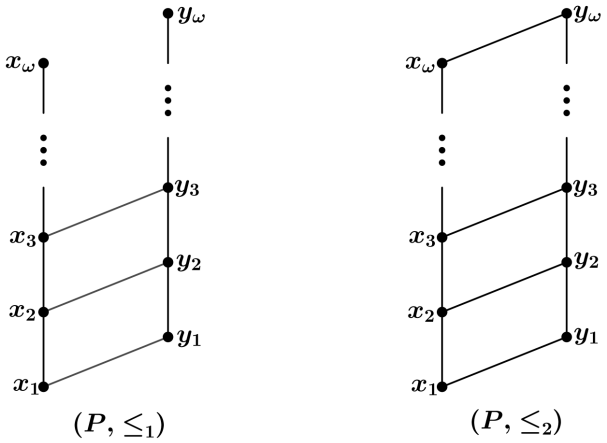

图4：偏序集 $(P, \leq_1)$ 和 $(P, \leq_2)$

(i) $u \sqsubseteq v$ 属于 Σ；(ii) $u \sqsubseteq^* v$ 属于 Σ^*；(iii) $u \leq_X v$ 属于 X；

(iv) $u \in \Sigma$、$v = b^* \in \Sigma^*$ 和 $u \sqsubseteq b$，如图5所示。

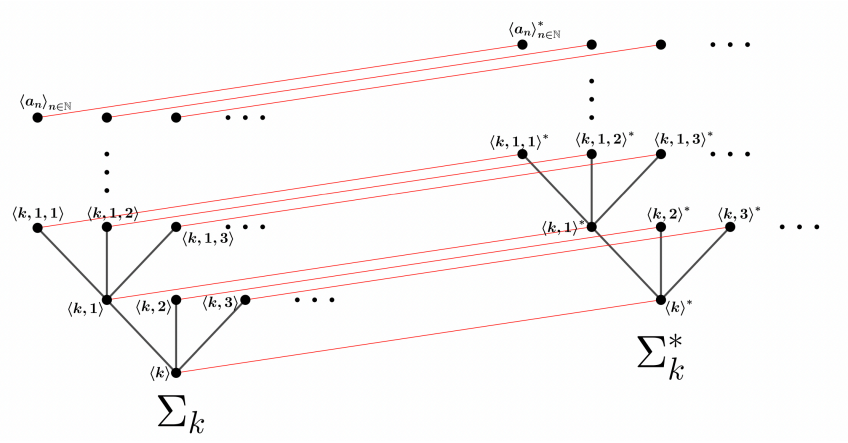

图5： Σ 和 Σ^* 之间的关系

(v) $\exists k, m \in \mathbb{N}$、$u = x_{k,m}$、$\ell(v) \geq k$ 和 $v_k \geq m$ （参见图 6，其中图中的黑线表示 X 和 Σ 中各点之间的关系，而红色虚线表示 Σ 中各点之间的关系。）

事实上，条件 (v) 描述了 X 和 $\Sigma \cup \Sigma^*$ 之间的关系，可将其表述如下：对于任意 $k, m \in \mathbb{N}$，$v \in \Sigma \cup \Sigma^*$，

$$x_{k,\ m} \leq v \text{ 当且仅当 } \exists n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } n_k \geq m \text{ 并且 } x_{k,\ m} \leq \langle n_1, n_2, \cdots, n_k \rangle \leq v.$$

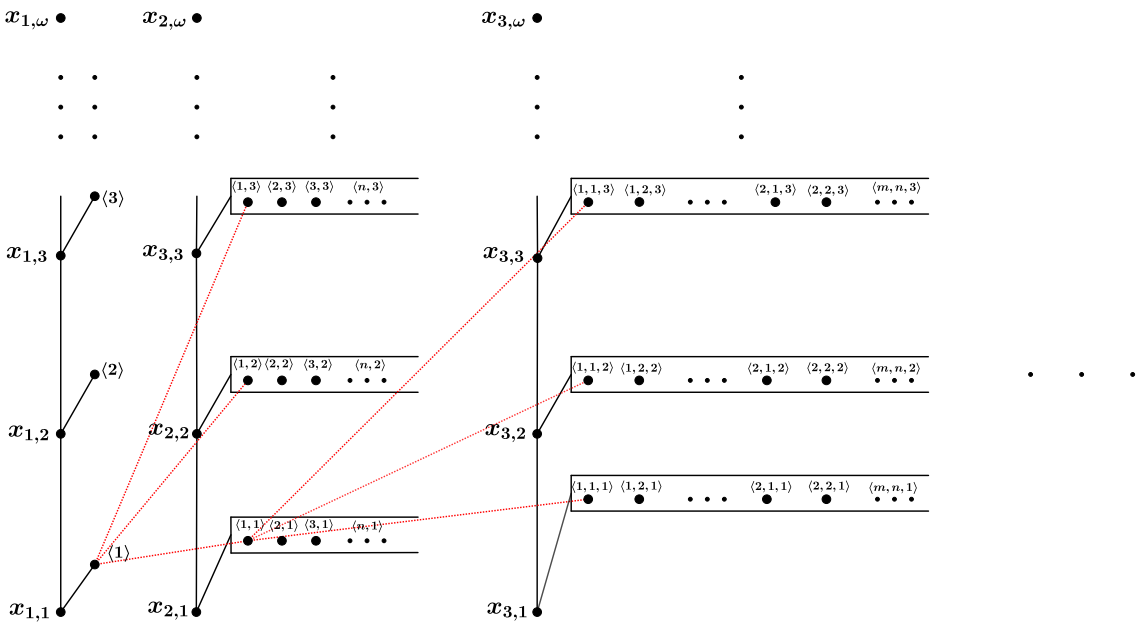

图 6: L的子集 $X \cup \Sigma$

例如，我们有以下事实：

$$x_{4,11} \le \langle 1,5,7,11\rangle \le \langle 1,5,7,11,11\rangle^* \le \langle 1,5,7,11,11,22,22\rangle^*;$$
$$x_{4,11} \le \langle 1,5,7,11\rangle \le \langle 1,5,7,111\rangle \le \langle 1,5,7,111,11\rangle^* \le \langle 1,5,7,111,11,22,22\rangle^*;$$
$$x_{3,3} \le \langle 1,2,3\rangle \le \langle 1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\rangle \le \langle 1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\rangle^*;$$
$$x_{3,3} \le \langle 2,3,4\rangle \le \langle 2,3,4,\cdots,n,n+1,\cdots\rangle \le \langle 2,3,4,\cdots,n,n+1,\cdots\rangle^*.$$

接下来，我们证明 L 是一个 ω-代数有向完备偏序集，并且在 L的 Scott 空间中，$\max L$ 不是一个 G_δ-集。我们分几步来证明。

(1) 关系 $\le$ 是 L上的偏序。

自反性和反对称性几乎是显然的。为证明传递性，我们需要以下内容：

断言 *1*: $\forall k, m \in \mathbb{N}, \forall a \in \Sigma,\ x_{k,m} \le a \ \Leftrightarrow\ x_{k,m} \le a^*$.

根据 a^*的定义，有 $\ell(a^*) = \ell(a)$且$(a^*)_k = a_k$。因此，断言 1 可由以下事实推出：

$$x_{k,m} \le a \text{ iff } \ell(a^*) = \ell(a) \ge k \text{ and } (a^*)_k = a_k \ge m \ \text{ iff } \ x_{k,m} \le a^*.$$

断言 *2*: $\forall a, b \in \Sigma,\quad a \le b \ \Leftrightarrow\ a \le b^* \ \Leftrightarrow a^* \le b^* \Leftrightarrow a \sqsubseteq b$。

断言 2 由以下事实得出：

$$a \le b \overset{(i)}{\Leftrightarrow} a \sqsubseteq b \text{ in } \Sigma \overset{(iv)}{\Leftrightarrow} a \le b^* \overset{(iv)}{\Leftrightarrow} a \sqsubseteq b \text{ in } \Sigma \ \Leftrightarrow\ a^* \sqsubseteq^* b^* \text{ in } \Sigma^* \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} a^* \le b^*.$$

现在，我们只通过考察以下情形来验证传递性：对于任意 k, m, k', $m' \in \mathbb{N}$和a, b, $c \in \Sigma$,

(c1) $x_{k,m} \leq x_{k',m'} \leq a \leq b$。然后，由于 $x_{k,m} \leq x_{k',m'}$，我们有 $k = k'$ 和 $m \leq m'$。此外，由于$x_{k',m'} \leq a \leq b$，我们有 $\ell(b) \geq \ell(a) \geq k' = k$ 和 $b_k = b_{k'} = a_k = a_{k'} \geq m' \geq m$，并且由 (v) 可知 $x_{k,m} \leq b$;

(c2) $x_{k,\ m} \leq a \leq b$。于是，$\ell(b) \geq \ell(a) \geq k$ 且 $b_k = a_k \geq m$，这意味着 $x_{k,\ m} \leq b$;

(c3) 根据断言 1 和断言 2，两种情况 $x_{k,\ m} \leq a \leq b^*$ 和 $x_{k,\ m} \leq a^* \leq b^*$ 都等价于 $x_{k,\ m} \leq a \leq b$。然后由 (c2)，可推出 $x_{k,\ m} \leq b$，而根据断言 1，这等价于 $x_{k,\ m} \leq b^*$ 。

(c4) 根据断言 2，两种情况 $a \leq b^* \leq c^*$ 和 $a \leq b \leq c^*$ 都等价于 $a \leq b \leq c$，这意味着$a \sqsubseteq b \sqsubseteq c$ 在 Σ 中。这推出 $a \sqsubseteq c$，它等价于 $a \leq c^*$。

(2) $\max L = \max\Sigma^* \cup \max X$ 和 $|\max L| = \omega_1$。

首先，很容易观察到，

$$\begin{aligned} \max\Sigma &= \mathbb{N}^\omega; \\ \max\Sigma^* &= \{a^* : a \in \mathbb{N}^\omega\}; \\ \max X &= \{x_{m,\omega} : m \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

and

$$|\max\Sigma| = |\max\Sigma^*| = \omega_1,\ |\max X| = \omega.$$

此外，根据 $\leq$ 在 L 上的序关系定义，我们有 $\uparrow x_{m,\ \omega} \cap L = x_{m,\ \omega}$，因此 $\max X \subseteq \max L$。于是，我们得出 $\max L = \max\Sigma^* \cup \max X$，且 $|\max L| = \omega_1$。

鉴于注 2.4，我们需要验证以下事实。

(3) L 是一个有向完备偏序集。

在证明这一点之前，我们需要先说明关于点$X \cup \Sigma$之间关系特征的以下注。

注：对于任意 $m \in \mathbb{N}$，满足 $x_{m,\ k} \leq a$ 且对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $\ell(a) = m$ 的所有元素 $a \in \Sigma$ 构成的集合 A_m 是一个反链。也就是说，$A_m = \mathbb{N}^m = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \min(\uparrow x_{m,\ k} \cap \Sigma)$ 是一个反链。例如，A_3 是图 7 中右侧所有黑点构成的反链。根据注 2.2(4)，我们看到，A_m 中的任意两个不同元素在 L中都没有上界。因此，对于任意 $a \in \Sigma$ 和 k，$l \in \mathbb{N}$，有 $a \geq x_{m,\ k}$ 当且仅当存在唯一元素 $b \in A_m$ 使得 $a \geq b$。这一事实对于保证链 $\{x_{m,k} : k \in \omega\}$ 的上确界 $x_{m,\ \omega}$ 存在且等于该值至关重要（与注 2.4 对比）。 X 中所有此类链收敛到各自极大点，是证明 L 为有向完备偏序集的关键，如下文断言 1 所示。

现在， L 是有向完备偏序集这一点可以由以下四个断言得到确认。

断言*3*：对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 以及任意无限子集 $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ 属于 $\mathbb{N}$， $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} x_{m,\ n_k} = x_{m,\ \omega}$。

与注 2.4 相比，这一点并不明显。

首先，注意到 $x_{m,\ \omega}$ 是 L 中 $\{x_{m,n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ 的一个上界。接下来只需验证 $x_{m,\ \omega}$ 是唯一上界。我们分以下两种情况进行证明：

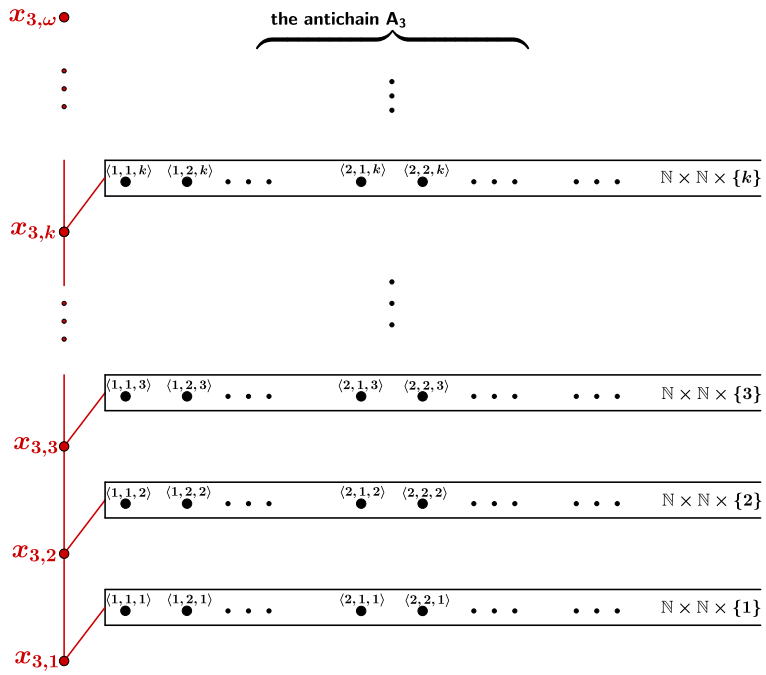

图 7：集合 $\{x_{3,k}:\ k\in\mathbb{N}\cup\{\omega\}\}\cup A_3$

(i) 假设 $\{x_{m,n_k}:\ k\in\mathbb{N}\}$ 在 Σ 中有上界。那么，由于 $\Sigma\subseteq{\downarrow}\max\Sigma$，必定存在一个元素 $a:=\langle a_k\rangle_{k\in\mathbb{N}}\in\max\Sigma$，使得对所有 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $x_{m,\,n_k}\leq a$。一方面，由于 $\{n_k:\ k\in\mathbb{N}\}$ 是无限的，可知 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}}n_k=\omega>a_m\in\mathbb{N}$，因此存在 $k_0\in\mathbb{N}$ 使得 $n_{k_0}>a_m$。另一方面，由于 $x_{m,\,n_{k_0}}\leq a$，我们有 $a_m\geq n_{k_0}>a_m$，这与图8所示相矛盾。因此，

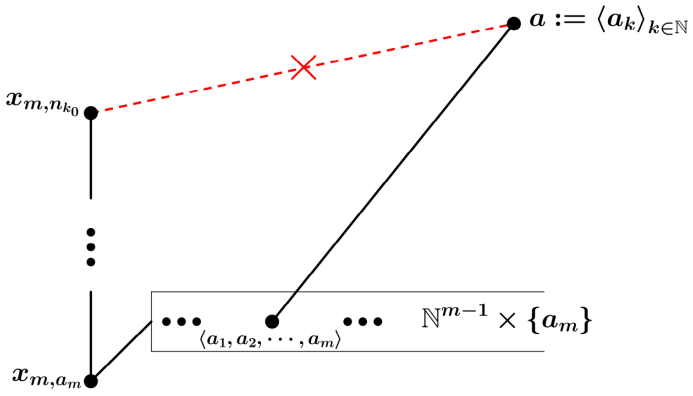

图8：$x_{m,\,a_m}$、$x_{m,\,n_{k_0}}$ 和 a 的序关系

$\{x_{m,n_k}:\ k\in\mathbb{N}\}$ 在 Σ 中没有上界。

(ii) 假设存在 $a^*\in\Sigma^*$，它是 $\{x_{m,n_k}:\ k\in\mathbb{N}\}$ 的上界。于是，根据 (1) 中的断言 1，$a\in\Sigma$ 也是 $\{x_{m,n_k}:\ k\in\mathbb{N}\}$ 的上界，这与 (i) 矛盾。

于是，(i) 和 (ii) 共同表明，$\{x_{m,n_k}:\ k\in\mathbb{N}\}$ 在 $\Sigma\cup\Sigma^*$中没有上界；显然，X 中的唯一上界是 $x_{m,\omega}$，因此我们推得 $x_{m,\omega}$ 是 L中 $\{x_{m,n_k}:\ k\in\mathbb{N}\}$ 的唯一上界。因此，$\bigvee_{k\in\mathbb{N}}x_{m,n_k}=x_{m,\omega}$。

断言*4*：所有集合 X,Σ 和 Σ^* 都是 L的子有向完备偏序集。

显然， Σ 和 Σ^* 都是 L的子有向完备偏序集。现在我们来验证 X 是 L的子有向完备偏序集。注意，X在限制序 $\leq$ 下恰好就是例2.3中定义的 $\leq_X$。注意， X 的所有无限有向子集都具有如下形式：$\{x_{m,n_k}: k\in\mathbb{N}\}$，其中 $m\in\mathbb{N}$，且 $\{n_k: k\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{N}$的一个无限子集，因此我们只需证明$\bigvee_{k\in\mathbb{N}} x_{m,n_k}=x_{m,\omega}$。

断言*5*：对于 L的任意有向子集 D，若 $\bigvee D\in\Sigma^*$，则 $D\cap\Sigma^*$ 是一个有向集，使得$\bigvee D=\bigvee(D\cap\Sigma^*)$。

只需证明 $D\subseteq\downarrow(D\cap\Sigma^*)$。注意， $X\cup\Sigma$ 既是 L的下集，也是其子有向完备偏序集，因此是Scott闭集。于是， $\Sigma^*=L\setminus(X\cup\Sigma)$是 L的一个Scott开子集，因此存在 $d_0\in D\cap\Sigma^*$，由此可得 $\uparrow d_0\subseteq\uparrow\Sigma^*=\Sigma^*$。因此， $D\subseteq\downarrow(D\cap\uparrow d_0)\subseteq\downarrow(D\cap\Sigma^*)$。这表明 $D\cap\Sigma^*$ 在 D中共终，因此 $D\cap\Sigma^*$ 是一个有向集，其上确界等于 $\bigvee D$（见 [3]第61页）。

断言*6*：对于 L 的任意有向子集 D，若 $\bigvee D\in\Sigma$，则 $D\cap\Sigma$ 是一个有向集，使得$\bigvee D=\bigvee(D\cap\Sigma)$。

为此，我们只需证明 $D\subseteq\downarrow(D\cap\Sigma)$。根据 L 上 $\leq$ 的定义，我们有 $D\subseteq\downarrow\bigvee D\subseteq\downarrow\Sigma=\Sigma\cup(X\setminus\max X)$，因此 $D=(D\cap\Sigma)\cup(D\cap(X\setminus\max X))$。于是，要证明 $D\subseteq\downarrow(D\cap\Sigma)$，只需证明 $D\cap(X\setminus\max X)\subseteq\downarrow(D\cap\Sigma)$。令 $x_{m,n}\in D\cap(X\setminus\max X)$。注意到 $D\cap\Sigma\neq\emptyset$（若$D\cap\Sigma=\emptyset$，则 $D\subseteq X$；又由于 X 是 L 的子定向完备偏序集， $\bigvee D\in X$，这就导致矛盾），因此我们任取一点 $b\in D\cap\Sigma$。由于 D 是有向的，存在 $e\in D$，使得 $b\leq e$ 且 $x_{m,n}\leq e$。回想一下， $D\subseteq\downarrow\Sigma$ 且 $\uparrow b\cap\downarrow\Sigma\subseteq\Sigma$（因为 $b\in\Sigma$），所以 $e\in\uparrow b\cap D\subseteq(\uparrow b\cap\downarrow\Sigma)\cap D\subseteq\Sigma\cap D$，这意味着$x_{m,n}\in\downarrow e\subseteq\downarrow(\Sigma\cap D)$。因此， $D\cap(X\setminus\max X)\subseteq\downarrow(D\cap\Sigma)$。由此， $D\subseteq\downarrow(D\cap\Sigma)$。这表明$D\cap\Sigma$ 在 D 中共终，因此 $D\cap\Sigma$ 是一个有向集，使得 $\bigvee D=\bigvee(D\cap\Sigma)$（参见 [3] 第61页）。

(5) L 是一个 ω代数域，且 $K(L)=L\setminus(\max(\Sigma)\cup\max(\Sigma^*)\cup\max X)$。

设 $B:=L\setminus(\max(\Sigma)\cup\max(\Sigma^*)\cup\max X)$。那么， $B=\{x_{m,n}: m, n\in\mathbb{N}\}\cup\{a\in\Sigma: \ell(a)\in\mathbb{N}\}\cup\{a^*: a\in\Sigma, \ell(a)\in\mathbb{N}\}$。假设 $m\in\mathbb{N}$ 且 $a=\langle a_1,a_2,\cdots,a_m\rangle\in\Sigma_\circ$

步骤*1*：我们证明 $a^*\in K(L)$。

假设 D 是 L 的一个有向子集，且满足 $a^*\leq\bigvee D$。那么， $\bigvee D\in\uparrow a^*\subseteq\Sigma^*$，因此由(3)中的断言3可知， $D\cap\Sigma^*$ 是 L 的一个有向子集，且 $a^*\leq\bigvee D=\bigvee(D\cap\Sigma^*)$。由此可得， $D\cap\Sigma^*$ 是 Σ^* 的一个有向子集，且 $a^*\sqsubseteq\bigvee D=\bigvee(D\cap\Sigma^*)$。注意， a^* 是一个由 Σ^*构成的有限序列，因此它在$(\Sigma^*, \sqsubseteq^*)$中是紧的，继而存在 $b^*\in D\cap\Sigma^*$ 使得 $a^*\sqsubseteq^* b^*$。这意味着 $a\leq b^*$ 属于 L。因此，$a^*\in K(L)$。

步骤 *2*：我们证明 $a\in K(L)$。

假设 D 是 L 的一个有向子集，且满足 $a\leq\bigvee D$。那么， $\bigvee D\in\uparrow a\subseteq\Sigma\cup\Sigma^*$。我们考虑以下两种情况：

(e1) $\bigvee D\in\Sigma^*$。

那么，由 (1) 的断言 2 可知， $a^*\leq\bigvee D$；又如我们在步骤 1 中已证明 $a^*\in K(L)$，因此存在 $e\in D$ 使得 $a\leq a^*\leq e$，所以 $a\leq e$。

(e2) $\bigvee D\in\Sigma$。

然后，根据（3）的断言 2， $D\cap\Sigma$ 是 L 和 $a\le\bigvee D=\bigvee(D\cap\Sigma)$ 的有向子集。因此，$D\cap\Sigma$ 是 Σ 和 $a\sqsubseteq\bigvee D=\bigvee(D\cap\Sigma)$ 的有向子集。注意， a 是 Σ的有限序列，因此它在（Σ， $\sqsubseteq$）中是紧的，于是存在 $e\in D\cap\Sigma$ 使得 $a\sqsubseteq e$。这意味着 $a\le e$ 属于 L。

由 (e1) 和 (e2)，我们得出 $a\in K(L)$。

步骤*3*： $\forall k,\ m\in\mathbb{N}, x_{k,\ m}\in K(L)$。

事实上，假设 D 是 L 的一个有向子集，且满足 $x_{k,\ m}\le\bigvee D$。

(i) 设 $\bigvee D\in X$。于是， $D\subseteq{\downarrow}X=X$。注意，在 L 中，$x_{k,\ m}\le\bigvee D$ 蕴含 $x_{k,\ m}\le_X\bigvee D$ 属于 X，并且显然 $x_{k,\ m}\in K(X)$。于是，存在 $e\in D$ 使得 $x_{k,\ m}\le_X e$，因此 $x\le e$ 属于 L。

(ii) 设 $\bigvee D\in\Sigma\cup\Sigma^*$。于是，由于 $x_{k,\ m}\le\bigvee D$，存在 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k\in\mathbb{N}$ 使得 $n_k\ge m$ 和 $x_{k,\ m}\le\langle n_1,n_2,\cdots,n_k\rangle\le\bigvee D$。正如我们在步骤2中所证明的， $\langle n_1,n_2,\cdots,n_k\rangle\in K(L)$，存在$e\in D$ 使得 $\langle n_1,n_2,\cdots,n_k\rangle\le e$。因此，$x_{k,\ m}\le e$。

因此，根据上述 (i)–(ii)，$x_{k,\ m}$ 是紧的。

由步骤 1–3，我们推得 $B\subseteq K(L)$。显然， L 的每个元素都可以表示为 B的某个有向子集的上确界，这意味着 B 是 L的一个基。注意， $K(L)$包含于 L的任意基中，因此 $K(L)\subseteq B$。因此 $B=K(L)$。此外，很容易看出 $|B|=|K(L)|=\omega$。所以，L 是一个 ω-代数域。

(6) max$L$ 不是 G_δ-集 ΣL中的一个 Gδ 集。

反设 max$L$ 是一个 G_δ-集。那么，存在一个可数族 $\{U_k:k\in\mathbb{N}\}\subseteq\sigma(L)$，使得 max$L=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}U_k$。回顾 max$L=$max(Σ*) ∪max$X$。

步骤 *1*： 由于 $x_{1,\ \omega}=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}x_{1,\ n}\in$ max$X\subseteq$ max$L\subseteq U_1\in\sigma(L)$，存在 $n_1\in\mathbb{N}$ 使得$x_{1,\ n_1}\in U_1$。注意到$\langle n_1\rangle\ge x_{1,\ n_1}\in U_1=\uparrow U_1$，因此

$$\langle n_1\rangle\in U_1.$$

步骤 *2*： 由于 $x_{2,\ \omega}=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}x_{2,\ n}\in$ max$X\subseteq$ max$L\subseteq U_2\in\sigma(L)$，存在 $n_2\in\mathbb{N}$ 使得$x_{2,\ n_2}\in U_2$。注意到$\langle n_1,n_2\rangle\ge x_{2,\ n_2}\in U_2=\uparrow U_2$，因此 $\langle n_1,n_2\rangle\in U_2$。由于 $\langle n_1,n_2\rangle\ge\langle n_1\rangle\in U_1=\uparrow U_1$，我们有 $\langle n_1,n_2\rangle\in U_1$，由此可得

$$\langle n_1,n_2\rangle\in U_1\cap U_2.$$

过程 *3*： 由于 $x_{3,\ \omega}=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}x_{3,\ n}\in$ max$X\subseteq$ max$L\subseteq U_3\in\sigma(L)$，存在 $n_3\in\mathbb{N}$ 使得 $x_{3,\ n_3}\in U_3$。注意到$\langle n_1,n_2,n_3\rangle\ge x_{3,\ n_3}\in U_3=\uparrow U_3$，因此 $\langle n_1,n_2,n_3\rangle\in U_3$。由于 $\langle n_1,n_2,n_3\rangle\ge\langle n_1,n_2\rangle\in U_1\cap U_2=\uparrow(U_1\cap U_2)$，我们有 $\langle n_1,n_2,n_3\rangle\in U_1\cap U_2$，由此可得

$$\langle n_1,n_2,n_3\rangle\in U_1\cap U_2\cap U_3.$$

重复上述过程，我们得到一个可数无穷序列 $a:=\langle n_k\rangle_{k\in\mathbb{N}}\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}U_k$。注意到 $a\notin$ max$L$ （因为 $a<a^*$），这与我们的假设 max$L=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}U_k$ 矛盾。因此，max$L$ 不是 ΣL 中的 G_δ-集。

由前面的例子，我们得到如下主要结果，它对 Martin问题给出了否定答案。

推论 2.6。 存在一个 ω代数域 P，使得 $Max(P)$ 不是 *Scott* 空间 ΣP中的 G_δ集。

致谢：本研究得到国家自然科学基金委员会（1210010153、12071188）、江苏省教育厅（21KJB110008）和国际博士后交流奖学金计划（编号：PC2022013）的资助。

利益声明：作者声明，他们没有已知的竞争性经济利益或个人关系，可能会对本文所报告的研究产生影响。

参考文献

[1] A. Edalat, 《Scott 在顶端较弱》，数学结构与计算机科学 7 (1997) 401–417。[2] G. Gierz、K. H. Hofmann、K. Keimel、J. D. Lawson、M. W. Mislove 和 D. S. Scott, 《连续格与域》，剑桥大学出版社，2003。[3] J. Goubault-Larrecq, 《非豪斯多夫拓扑与域论：点集拓扑专题》，剑桥大学出版社，2013。[4] J. Lawson, 《极大点空间》，数学结构与计算机科学 7 (5) (1997) 543–555。[5] K. Martin, 《空间的理想模型》，理论计算机科学 305 (1–3) (2003) 277–297。[6] K. Martin, 《具有可数基模型的正则空间》，理论计算机科学 305 (1–3) (2003) 299–310。[7] K. Martin, 《紧域中的极大元空间》，理论计算机科学电子笔记 40 (2001) 244–253。[8] K. Martin, 《拓扑空间的域论模型》，理论计算机科学电子笔记 13 (1998) 173–181。[9] D. Zhao 和 X. Xi, 《空间的有向完备偏序集模型》，剑桥哲学学会数学学报 164 (1) (2018) 125–134。