arXiv:2305.04016v1 [math.FA] 6 May 2023

´球内约翰域中的 $(\phi_{\frac{n}{s}}, \phi)$-庞加莱不等式

SHANGYING FENG 和 TIAN LIANG

摘要 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有 $n \geq 2$ 且 $s \in (0,1)$ 的有界域。假设 $\phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是满足加倍条件的杨函数，其常数为 $K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$。我们证明，若 Ω 是约翰域，则它支持 (ϕ_{ns}, ϕ)-庞加莱不等式。或者，进一步假设 Ω 是一个有界域，当 $n \geq 3$ 时与某个一致域拟共形等价，或者当 $n = 2$ 时是单连通域。我们证明，若 $(\phi_{\frac{n}{s}}, \phi)$- 庞加莱不等式成立，则 Ω 是约翰域。

1. 引言

设 $n \geq 2$ 且 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界域。假设 ϕ 是 $[0,\infty)$ 中的杨函数，即 $\phi \in C[0,\infty)$ 是凸函数，并满足 $\phi(0) = 0, \phi(t) > 0$，对 $t > 0$ 成立，且 $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$。对于任意 $s \in (0,1)$，定义内禀分数阶 Orlicz-Sobolev 空间 $\dot{V}^{s,\phi}_{*,}(\Omega)$，它由 Ω 中所有具有如下半范数的可测函数 u 构成

$$\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \int_{|x-y|<\frac{1}{2}d(x,\partial\Omega)} \phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n} \leq 1\right\} < \infty.$$

除常数函数外，$\dot{V}^{s,\phi}_{*,}(\Omega)$ 是一个巴拿赫空间。当 $s = 1$ 时，我们通常考虑经典 Orlicz-Sobolev 空间 $W^{1,\phi}(\Omega)$，其尖锐嵌入问题已在 [11] 中得到解决（另一种解的表述见 [3] ）。

Alberico 等人 [4] 建立了从 $\dot{V}^{s,\phi}_{*,}(\mathbb{R}^n)$ 到某些 Orlicz目标空间的嵌入。回顾一下，对于任意杨函数 ψ，Orlicz空间 $L^\psi(\Omega)$ 是所有满足其范数的 $u \in L^1{}_{loc}(\Omega)$ 的集合。

$$\|u\|_{L^\psi(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \psi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right)dx \leq 1\right\} < \infty.$$

以下是更为详尽的描述。

定理 1.1. 设 ϕ 是一个满足条件的杨函数。

$$\int_0^t \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau < \infty \tag{1.1}$$

and

$$\int_0^\infty \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau = \infty. \tag{1.2}$$

定义 $\phi_{\frac{n}{s}} := \phi \circ H^{-1}$，其中

$$H(t) = \left(\int_0^t \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau\right)^{\frac{n-s}{n}} \quad \forall\, t \geq 0. \tag{1.3}$$

日期：2023年5月9日。

那么 $\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\phi_{n/s}}(\mathbb{R}^n)$，也就是说，对于任意 $u \in \dot{V}^{s,\phi}_{*}(\mathbb{R}^n)$，若 $|\{x \in \mathbb{R}^n : |u(x)| > t\}| < \infty$ 对每个 $t > 0$ 均成立，则 $u \in L^{\phi_{n/s}}(\mathbb{R}^n)$，且 $\|u\|_{L^{\phi_{n/s}}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\mathbb{R}^n)}$，其中 C 是与 u 无关的常数。

他们还证明，$L^{\phi_{n/s}}(\mathbb{R}^n)$ 是将 $\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\mathbb{R}^n)$ 嵌入其中的最优目标空间，其意义在于：若对于另一个 Orlicz空间 $L^A(\mathbb{R}^n)$，有 $\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\mathbb{R}^n) \subset L^A(\mathbb{R}^n)$，则 $L^{\phi_{n/s}}(\mathbb{R}^n) \subset L^A(\mathbb{R}^n)$。

我们关注满足嵌入 $\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\Omega) \subset L^{\phi_{n/s}}(\Omega)$ 或 $(\phi_{\frac{n}{s}}, \phi)$-庞加莱不等式的有界域，即存在常数 $C \ge 1$，使得

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)} \le C\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\Omega)}, \tag{1.4}$$

对每个 $u \in L^1(\Omega)$，其中 $u_E = \fint_E u = \frac{1}{|E|}\int_E u dx$ 表示 u 在集合 E 上的平均值，且 $|E| > 0$。

本文的主要发现是在特定的 ϕ 倍增假设下，通过约翰域刻画嵌入 $\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\Omega) \subset L^{\phi_{n/s}}(\Omega)$；见下文定理 1.2。请注意，若有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，则称其为关于某个 $x_0 \in \Omega$ 的 c-John 域，其中 $c > 0$；若对每个 $x \in \Omega$，都存在一条可求长曲线 $\gamma : [0, T] \to \Omega$，以弧长参数化，使得 $\gamma(0) = x$，$\gamma(T) = x_0$，且对所有 $t > 0$，都有 $d(\gamma(t), \Omega^{\complement}) > ct$。关于 c-John 域的进一步研究，参见 [36, 38, 8, 37, 6, 7, 9] 及其中的参考文献。若杨函数 ϕ 具有倍增性质（$\phi \in \Delta_2$），则称其满足

$$K_\phi := \sup_{t>0} \frac{\phi(2t)}{\phi(t)} < \infty. \tag{1.5}$$

注意，如果杨函数 $\phi \in \Delta_2$ 具有 $K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$，那么 ϕ 满足 (1.1) 和 (1.2)；参见引理 2.3.

定理 1.2。设 $0 < s < 1$。假设 ϕ 是杨函数，且 $\phi \in \Delta_2$ 在 (1.5) 中具有 $K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$).

(i) 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 c-John 域，那么 Ω 支持 $(\phi_{\frac{n}{s}}, \phi)$-庞加莱不等式 (1.4)，其常数 C 依赖于 n、s、c 和 K_ϕ。(ii) 进一步假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界单连通平面域，或者是一个与某个一致域拟共形等价的有界域，其中 $n \ge 3$。如果 Ω 支持 $(\phi_{\frac{n}{s}}, \phi)$-庞加莱不等式，那么 Ω 是一个 c-John 域，其中常数 c 依赖于 n、s、C、K_ϕ 和 Ω。

定理 1.2 推广了文献中的若干已知结果；详情请见下述注记。

备注 1.1. (i) 对于 $1 \le p < n$，c-John 区域 Ω 支持 Sobolev $\dot{W}^{1,p}$-嵌入或（$\frac{np}{n-p}$，p）-Poincaré 不等式：

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} \le C\|u\|_{\dot{W}^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in \dot{W}^{1,p}(\Omega), \tag{1.6}$$

其中常数 C 取决于 n、p 和 c；对于 $1 < p < n$，参见 Reshetnyak [38] 和 Martio [37]；对于 $p = 1$，参见 Borjarski [5]（另见 Hajlasz [24]）。反之，进一步假设当 $n \ge 3$ 时，Ω 是有界单连通平面域，或是与某个一致域拟共形等价的区域。Buckley 和 Koskela [7] 证明，如果（1.6）成立，则 Ω 是 c-John 域。

(ii) 对于 $0 < s < 1$ 且 $1 \le p < \infty$，内在分数 Sobolev 空间 $\dot{W}^{s,p}_{*}(\Omega)$ 由所有满足 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的函数组成，且

$$\|u\|_{\dot{W}^{s,p}_{*}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_{|x-y|<\frac{1}{2}d(x,\partial\Omega)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{1/p} < \infty.$$

在特殊情形 $\phi(t) = t^p$ 且 $p \ge 1$，$\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\Omega)$ 恰好就是 $\dot{W}^{s,p}_{*}(\Omega)$。

对于 s $\in$ (0, 1) 且 $1 \le p < n/s$ 的情形，Dyda-Ihnatsyeva-V¨ah¨akangas [17]（当 $p = 1$ 时）以及 Hurri-Syrj¨anen- V¨ah¨akangas [26]（当 $1 < p < n/s$ 时）证明，c-John 域 Ω 满足以下分数阶 (np/(n − sp), p)-Poincar´e 不等式（或分数 Sobolev 嵌入 $\dot{W}^{s,p}_*(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-sp)}(\Omega)$），这意味着对于任意 $u \in \dot{W}^{s,p}_*(\Omega)$,

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{np/(n-sp)}(\Omega)} \le C\|u\|_{\dot{W}^{s,p}_*(\Omega)}, \tag{1.7}$$

成立，其中 C 取决于 n、s、p 和 c。另一方面，进一步假设 Ω 是有界单连通平面域，或者当 $n \ge 3$ 时，是与某个一致域拟共形等价的区域。他们 [17, 26] 还证明了，如果 (1.7) 成立，那么 Ω 是一个 c-John 域。

如果 $1 \le p < \frac{n}{s}$，则容易看出，对于任意 $t \ge 0$，有 $\phi_{\frac{n}{s}}(t) = Ct^{\frac{np}{n-sp}}$，其中 C 是正常数。如果$\phi(t) = t^p$，且 $p \ge 1$ 以及 $0 < s < 1$，那么 ($\phi_{\frac{n}{s}}, \phi$)-Poincar´e 不等式就是经典的分数阶（$\frac{np}{n-sp}$，p）-Poincar´e 不等式。

(iii) 对于内在分数阶 Hajlasz-Sobolev 空间$\dot{M}^{s,p}_*(\Omega)$，也建立了与 (ii) 类似的结果；详见 [42] fordetails。

我们还注意到，文献 [4, 29, 30, 41] 中也考察了分数阶 Sobolev 空间 $\dot{W}^{s,p}(\Omega)$ 和分数阶 Orlicz-Sobolev 空间 $\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)$ 的嵌入。定义分数阶 Orlicz-Sobolev 空间 $\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)$，它由所有满足以下条件的函数 u 组成：$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

$$\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \int_\Omega \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n} \le 1\right\} < \infty.$$

$\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)$ 的（半）范数显然是通过在 $\dot{V}^{s,\phi}_*(\Omega)$ 的（半）范数中，将变量 y 的取值范围 B(x, 1 2 dist (x, ∂Ω)) 替换为整个区域 Ω 得到的。不言而喻，$\dot{V}^{s,\phi}(\mathbb{R}^n) = \dot{V}^{s,\phi}_*(\mathbb{R}^n)$。对于一般区域 Ω，总有 $\dot{V}^{s,\phi}(\Omega) \subset \dot{V}^{s,\phi}_*(\Omega)$，且具有范数控制，但反向关系未必成立。当 $\phi(t) = t^p$ 且 $p \ge 1$，$\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)$ 为分数阶 Sobolev 空间$\dot{W}^{s,p}(\Omega)$ 时，该空间由所有满足以下条件的函数 u 组成：$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

$$\|u\|_{\dot{W}^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dxdy\right)^{1/p} < \infty.$$

注 1.2。（i）设 $s \in (0, 1)$，且 $1 \le p < n/s$。文献 [29, 30, 41] 证明，区域 Ω 支持 $\dot{W}^{s,p}$-嵌入式 全民彩票天天送

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)} \le C\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)} \quad \forall u \in \dot{V}^{s,\phi}(\Omega).$$

if a当且仅当 Ω 是 Ahlfors n-正则的，即存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$B(x, r) \cap \Omega| \ge Cr^n \quad \forall x \in \Omega,\ 0 < r < 2\,\mathrm{diam}\,\Omega.$$

注意，在 $|\Omega| = \infty$ 的情形下，我们设 $u_\Omega = 0$。

(ii) 假设 \(s\in\) $\in (0, 1)$，且杨函数 ϕ 满足 (1.1) 和 (1.2)。文献 [4] 证明，Lipschitz 区域 Ω 支持 $\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)$-嵌入。

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)} \le C\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)} \quad \forall u \in \dot{V}^{s,\phi}(\Omega).$$

但这并不清楚 Ahlfors n-正则区域是否刻画 $\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)$-嵌入区域。

本文的组织结构如下。定理 1.2(i) 的证明见第 2 节，其中用到了 Boman 链性质、立方体 Q 上的嵌入 $\dot{V}^{s,\phi}_*(Q) \hookrightarrow L^{\phi_{n/s}}(Q)$，以及 Hardy-Littlewood 极大算子在 Orlicz 范数中的向量值不等式。我们还在第 2 节给出了 $\phi \in \Delta_2$ 在 $K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$ 条件下的一些性质。反过来，在条件 (2.1) 下，结合

借助 [7, 25, 34, 40, 41], 的一些思路，我们得到 Ω 的 LLC(2) 性质，继而通过容量论证证明定理 1.2(ii)；详情见第3节。

2. Proof of Theorem 1.2(i)

首先我们给出嵌入 $C_c^\infty(\Omega) \subset \dot{V}_*^{s,\phi}(\Omega)$。很容易知道

$$C_\phi := \sup_{t>0} \int_0^t \frac{\phi(\rho)}{\phi(t)} \frac{d\rho}{\rho} < \infty. \tag{2.1}$$

事实上，由于对于几乎所有的 $t, \ \geq 0\ \phi'(t) \geq 0$且 ϕ' 递增，我们知道

$$\frac{\phi(\rho)}{\rho} = \frac{\phi(\rho) - \phi(0)}{\rho} \leq \phi'(\rho).$$

因此

$$\int_0^t \frac{\phi(\rho)}{\phi(t)} \frac{d\rho}{\rho} \leq \frac{1}{\phi(t)} \int_0^t \phi'(\rho)\, d\rho \leq 1,$$

即 $C_\phi \leq 1$。

引理2.1. 设 $0 < s < 1$， ϕ 是满足（2.1）的杨函数。对于任意有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，有 $C_c^\infty(\Omega) \subset \dot{V}_{s,\phi}(\Omega) \subset \dot{V}_*^{s,\phi}(\Omega)$。

证明。 $\forall u \in C_c^1(\Omega)$，$L := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|Du\|_{L^\infty(\Omega)}$，且存在 $W \subset \Omega$ 使得 $V = \operatorname{supp} u \Subset W \Subset \Omega$，则

$$\begin{aligned} H :&= \int_\Omega \int_\Omega \phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n} \\ &\leq \int_W \int_W \phi\left(\frac{L|x-y|}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n} + 2 \int_V \int_{\Omega\setminus W} \phi\left(\frac{L}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n}. \end{aligned}$$

由 (2.1)，我们有

$$\begin{aligned} \int_W \int_W \phi\left(\frac{L|x-y|}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n} &\leq \int_W \int_{B(x, 2\operatorname{diam} W)} \phi\left(\frac{L|x-y|^{1-s}}{\lambda}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} dx \\ &= n\omega_n \int_W \int_0^{2\operatorname{diam} W} \phi\left(\frac{L\rho^{1-s}}{\lambda}\right) \frac{d\rho}{\rho} dx \\ &= n\omega_n \frac{1}{1-s} \int_W \int_0^{\frac{L(2\operatorname{diam} W)^{1-s}}{\lambda}} \phi(\mu) \frac{d\mu}{\mu} dx \\ &\leq C_\phi n\omega_n \frac{1}{1-s} \phi\left(\frac{L(2\operatorname{diam} W)^{1-s}}{\lambda}\right) |W|. \end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned} \int_V \int_{\Omega\setminus W} \phi\left(\frac{L}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n} &\leq \int_V \int_{\Omega\setminus B(y, \operatorname{dist}(V, W^\complement))} \phi\left(\frac{L}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dx}{|x-y|^n} dy \\ &\leq n\omega_n \int_V \int_{\operatorname{dist}(V, W^\complement)}^\infty \phi\left(\frac{L}{\lambda \rho^s}\right) \frac{d\rho}{\rho} dy \\ &= n\omega_n \frac{1}{s} \int_V \int_0^{\frac{L}{\lambda \operatorname{dist}(V, W^\complement)^s}} \phi(\mu) \frac{d\mu}{\mu} dy \end{aligned}$$

$$\leq C_\phi n\omega_n \frac{1}{s}\phi\left(\frac{L}{\lambda \operatorname{dist}(V, W^{\complement})^s}\right)|V|.$$

若 λ足够大，则有 $H \leq 1$，其中 $u \in \dot{V}_{s,\phi}(\Omega)$，因此 $C_c^1(\Omega) \subset \dot{V}_{s,\phi}(\Omega)$。结合 $C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^1(\Omega)$ 和 $\dot{V}_{s,\phi}(\Omega) \subset \dot{V}_{*}^{s,\phi,}(\Omega)$，即可得到所需结果。□

为证明定理 1.2(i)，我们需要在所有立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 上有嵌入 $\dot{V}_{s,\phi}(Q) \hookrightarrow L^{\phi_{n/s}}(Q)$。因此，我们先给出所需的一些引理。

引理 2.2. 设 $\phi \in \Delta_2$ 是一个杨函数，则 $\forall c > 1, \phi(cx) \leq c^{K_\phi - 1}\phi(x)$。

证明. 根据 ϕ' 的单调递增性质，

$$\phi(2x) - \phi(x) = \int_x^{2x} \phi'(t)dt \geq \phi'(x), \ \forall x > 0.$$

$\phi \in \Delta_2, \phi(2x) - \phi(x) \leq (K_\phi - 1)\phi(x)$，因此

$$(\ln \phi)'(x) = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \leq \frac{K_\phi - 1}{x}.$$

对于任意 $c > 1$，有

$$\ln\left(\frac{\phi(cx)}{\phi(x)}\right) = \int_x^{cx} (\ln\phi)'(t)dt \leq \int_x^{cx} \frac{K_\phi - 1}{t}dt = \ln(c^{K_\phi - 1}).$$

因此 $\phi(cx) \leq c^{K_\phi - 1}\phi(x)$。□

引理 2.3. 设 $\phi \in \Delta_2$ 是满足 $K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$ 的杨函数，则 ϕ 满足 (1.1) 和 (1.2)。

证明。根据 K_ϕ in (1.5) 的定义，我们得到 $\phi(2t) \leq K_\phi\phi(t)$。因此

$$\begin{aligned}\int_{\frac{t}{2}}^{t} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau &= \int_{\frac{t}{4}}^{\frac{t}{2}} \left(\frac{2\tau}{\phi(2\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} 2d\tau \\ &\geq \int_{\frac{t}{4}}^{\frac{t}{2}} \left(\frac{2\tau}{K_\phi\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} 2d\tau.\end{aligned}$$

Then

$$\int_{\frac{t}{4}}^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau \leq \frac{K_\phi^{\frac{s}{n-s}}}{2^{\frac{n}{n-s}}} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau.$$

通过归纳法，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\frac{t}{2^m}}^{\frac{t}{2^{m-1}}} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau &\leq \frac{K_\phi^{\frac{s}{n-s}}}{2^{\frac{n}{n-s}}} \int_{\frac{t}{2^{m-1}}}^{\frac{t}{2^{m-2}}} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau \\ &\leq \left(\frac{K_\phi^{\frac{s}{n-s}}}{2^{\frac{n}{n-s}}}\right)^{m-1} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau.\end{aligned}$$

将 m 从 1 变为 ∞ 并求和，我们可以得到

$$\int_0^t \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{K_\phi^{\frac{s}{n-s}}}{2^{\frac{n}{n-s}}}\right)^{m-1} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau.$$

该级数收敛，因为如果 K_ϕ 的范围，并且

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{\phi(t)}\right)'(t) &= \frac{\phi(t)-t\phi'(t)}{\phi^2(t)}\\ &= \frac{\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}-\phi'(t)}{\phi^2(t)}\\ &= \frac{\phi'(\xi)-\phi'(t)}{\phi^2(t)},\end{aligned}$$

其中 $0<\xi<t$，由 ϕ的凸性可知 $\left(\frac{t}{\phi(t)}\right)'(t)\le 0$，于是由$\frac{\tau}{\phi(\tau)}$的单调递减性质可得 (1.1)，事实上，

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t}\left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}}d\tau \le \left(\frac{\frac{t}{2}}{\phi(\frac{t}{2})}\right)^{\frac{s}{n-s}}\frac{t}{2}<\infty.$$

同理,

$$\begin{aligned}\int_0^{2^m}\left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}}d\tau &\ge \int_0^{2^{m-1}}\left(\frac{2\tau}{K_\phi\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}}2d\tau\\ &= \frac{2^{\frac{n}{n-s}}}{K_\phi^{\frac{s}{n-s}}}\int_0^{2^{m-1}}\left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}}d\tau\\ &\ge \cdots\\ &\ge \left(\frac{2^{\frac{n}{n-s}}}{K_\phi^{\frac{s}{n-s}}}\right)^m\int_0^1\left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}}d\tau,\ \forall m\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$，得到 (1.2)。 □

引理 2.4. 设 $\phi\in\Delta_2$ 是满足 $K_\phi<2^{\frac{n}{s}}$ 的杨函数，则

$$\frac{H(A)}{A}\le C\frac{1}{\phi(A)^{\frac{s}{n}}}. \tag{2.2}$$

证明. 由引理 2.3，得

$$\int_0^t\left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}}d\tau \le C\int_{\frac{t}{2}}^t\left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}}d\tau \le C\left(\frac{\frac{t}{2}}{\phi(\frac{t}{2})}\right)^{\frac{s}{n-s}}\frac{t}{2}.$$

Then

$$\frac{H(A)}{A}=\frac{\left(\int_0^A(\frac{\tau}{\phi(\tau)})^{\frac{s}{n-s}}d\tau\right)^{\frac{n-s}{n}}}{A}\le\frac{\left(C(\frac{\frac{A}{2}}{\phi(\frac{A}{2})})^{\frac{s}{n-s}}\frac{A}{2}\right)^{\frac{n-s}{n}}}{A}\le\frac{\left(C\left(\frac{\frac{A}{2}}{\frac{1}{K_\phi}\phi(A)}\right)^{\frac{s}{n-s}}\frac{A}{2}\right)^{\frac{n-s}{n}}}{A}\le C\frac{1}{\phi(A)^{\frac{s}{n}}}.$$

□

利用上述引理，我们证明了 $\dot{W}^{s,\phi}(Q)\hookrightarrow L^{\phi_{n/s}}(Q)$。

引理 2.5. 设 $0<s<1$ 和 $\phi\in\Delta_2$ 是满足 $K_\phi<2^{\frac{n}{s}}$ 的杨函数，则存在一个常数 $C_1=C_1(n,s)$，使得

$$\int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{u(x)-u_Q}{\lambda}\right)dx \le \int_Q\int_Q \phi\left(\frac{C|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n}. \tag{2.3}$$

对于所有立方体 Q $\subset \mathbb{R}^n$、u $\in$ $\dot{V}^{s,\ \phi}$(Q) 以及 $\lambda \ge C_1\|u\|_{\dot{V}^{s,\ \phi}(Q)}$。

证明。记以原点为中心、边长为 2 且平行于坐标轴的立方体为 Q(0, 1)。首先我们证明

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|u(x)-u_{Q(0,1)}|}{\lambda}\right)dx \le \int_{Q(0,1)}\int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n}, \tag{2.4}$$

其中 u $\in$ $\dot{V}^{s,\phi}$(Q(0, 1)), $\lambda \ge C_1\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(Q(0,1))}$。

$K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$，由引理 2.3 和 [4], ，我们有

$$\|u\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(Q(0,1))} \le C_1\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(Q(0,1))}.$$

其中

$$u \in \dot{V}_\perp^{s,\phi}(Q(0,1)), C_1 = C_1(n,s),$$

$$\dot{V}_\perp^{s,\phi}(Q(0,1)) := \left\{u \in \dot{V}^{s,\phi}(Q(0,1)) : u_{Q(0,1)} = 0\right\}.$$

将 u 替换为 u – u$_{Q(0,1)}$，我们有

$$\|u-u_{Q(0,1)}\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(Q(0,1))} \le C_1\|u-u_{Q(0,1)}\|_{\dot{V}^{s,\phi}(Q(0,1))},$$

其中 u $\in$ $\dot{V}^{s,\ \phi}$(Q(0, 1))。当 $\|u\|_{\dot{V}^{s,\ \phi}(Q(0,\ 1))}= 0$ 时，u 在 Q(0, 1) 上为常数，等号成立。假设 $\|u\|_{\dot{V}^{s,\ \phi}(Q(0,\ 1))} \ne 0$, ，则

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|u-u_{Q(0,1)}|}{C_1\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(Q(0,1))}}\right)dx \le 1.$$

固定 u$_0$ $\in$ $\dot{V}^{s,\ \phi}$(Q(0, 1))，令

$$M := \int_{Q(0,1)}\int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u_0(x)-u_0(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n} \ne 0.$$

令 $\overline{\phi} = \frac{\phi}{M}$，则 $\phi_{\frac{n}{s}}(t) = \frac{1}{M}\phi_{\frac{n}{s}}(tM^{\frac{s}{n}})$，且 $C_1 = C_1(n, s)$，因此

$$\|u-u_{Q(0,1)}\|_{L^{\overline{\phi}_{\frac{n}{s}}}(Q(0,1))} \le C_1\|u\|_{\dot{V}^{s,\overline{\phi}}(Q(0,1))}.$$

于是得到

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|u-u_{Q(0,1)}|}{C_1M^{\frac{s}{n}}\|u\|_{\dot{V}^{s,\overline{\phi}}(Q(0,1))}}\right)dx \le M.$$

并且 $C_1\|u_0\|_{\dot{V}^{s,\ \overline{\phi}}(Q(0,\ 1))} \le 1$，否则，

$$\begin{aligned} 1 &< \int_{Q(0,1)}\int_{Q(0,1)} \overline{\phi}\left(\frac{C_1|u_0(x)-u_0(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n} \\ &= \frac{1}{M}\int_{Q(0,1)}\int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u_0(x)-u_0(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n} = 1, \end{aligned}$$

由此得到矛盾。

特别地，当 $u = u_0$，时，我们有

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}} \left(\frac{|u_0 - u_{0Q(0,1)}|}{(\int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u_0(x)-u_0(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n})^{\frac{s}{n}}} \right) dx$$
$$\leq \int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}} \left(\frac{|u_0 - u_{0Q(0,1)}|}{C_1 M^{\frac{s}{n}} \|u_0\|_{\dot{V}^{s,\phi}(Q(0,1))}} \right) dx$$
$$\leq \int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u_0(x) - u_0(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n}.$$

由于 u_0，的任意性，我们有

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}} \left(\frac{|u - u_{Q(0,1)}|}{(\int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n})^{\frac{s}{n}}} \right) dx$$
$$\leq \int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u(x) - u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n}.$$

将 u 替换为 $\frac{u}{\lambda}$，

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}} \left(\frac{|u - u_{Q(0,1)}|}{\lambda(\int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n})^{\frac{s}{n}}} \right) dx \tag{2.5}$$
$$\leq \int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u(x) - u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n}. \tag{2.6}$$

令 $\lambda \geq C_1 \|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(Q(0,1))}$，则

$$\int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u(x) - u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n} \leq 1,$$

so

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}} \left(\frac{|u - u_{Q(0,1)}|}{\lambda}\right) dx \leq \int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}} \left(\frac{|u - u_{Q(0,1)}|}{\lambda(\int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n})^{\frac{s}{n}}} \right) dx$$
$$\leq \int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|u(x) - u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n}.$$

现在证明一般立方体 Q 的情形。设 Q 是一个中心为 a、边长为 2l 的立方体，则存在一个正交变换 T，使得 $T(Q - a) = Q(0, l)$。$\forall u \in \dot{V}^{s,\phi}(Q)$，且 u 不是常数。令 $v(x) = u(T^{-1}(lx)+a)\, l^s$，其中 $x \in Q(0, 1)$，则 $v \in \dot{V}^{s,\phi}(Q(0, 1))$，且 $v_{Q(0,1)} = u_Q\, l^s$。并且

$$\int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|v(x) - v(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n}$$
$$= \int_{Q(0,1)} \int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|\frac{u(T^{-1}(lx)+a)}{l^s} - \frac{u(T^{-1}(ly)+a)}{l^s}|}{\lambda|x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n},$$

通过变换 $z_1 = T^{-1}(lx) + a$、$z_2 = T^{-1}(ly) + a$，可得 $|x - y| = \left|\frac{T(z_1-a)}{l} - \frac{T(z_2-a)}{l}\right| = \frac{|z_1-z_2|}{l}$，因此

$$\int_{Q(0,1)}\int_{Q(0,1)} \phi\left(\frac{C_1|v(x)-v(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n} = \int_Q\int_Q \phi\left(\frac{C_1|u(z_1)-u(z_2)|}{\lambda|z_1-z_2|^s}\right)\frac{dz_1dz_2}{l^n|z_1-z_2|^n},$$

and

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|v-v_{Q(0,1)}|}{\lambda(\int_{Q(0,1)}\int_{Q(0,1)}\phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n})^{\frac{s}{n}}}\right)dx$$
$$= \int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|v-v_{Q(0,1)}|}{\lambda(\int_Q\int_Q\phi\left(\frac{C_1|u(z_1)-u(z_2)|}{\lambda|z_1-z_2|^s}\right)\frac{dz_1dz_2}{l^n|z_1-z_2|^n})^{\frac{s}{n}}}\right)dx.$$

通过变换 $y = T^{-1}(lx) + a$，得到

$$\int_{Q(0,1)} \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|v-v_{Q(0,1)}|}{\lambda(\int_{Q(0,1)}\int_{Q(0,1)}\phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n})^{\frac{s}{n}}}\right)dx$$
$$= \int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|u(y)-u_Q|}{\lambda(\int_Q\int_Q\phi\left(\frac{C_1|u(z_1)-u(z_2)|}{\lambda|z_1-z_2|^s}\right)\frac{dz_1dz_2}{|z_1-z_2|^n})^{\frac{s}{n}}}\right)\frac{dy}{l^n}.$$

由 (2.5)，有

$$\int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|u(y)-u_Q|}{\lambda(\int_Q\int_Q\phi\left(\frac{C_1|u(z_1)-u(z_2)|}{\lambda|z_1-z_2|^s}\right)\frac{dz_1dz_2}{|z_1-z_2|^n})^{\frac{s}{n}}}\right)dy$$
$$\le \int_Q\int_Q \phi\left(\frac{C_1|u(z_1)-u(z_2)|}{\lambda|z_1-z_2|^s}\right)\frac{dz_1dz_2}{|z_1-z_2|^n}.$$

令 $\lambda \ge C_1\|u\|_{\dot{V}^{s,\ \phi}(Q)}$，则

$$\int_Q\int_Q \phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n} \le 1.$$

因此，

$$\int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|u-u_Q|}{\lambda}\right)dx \le \int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|u-u_Q|}{\lambda(\int_Q\int_Q\phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n})^{\frac{s}{n}}}\right)dx$$
$$\le \int_Q\int_Q \phi\left(\frac{C_1|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n}.$$

□

我们还需要 Orlicz空间中 Hardy-Littlewood极大算子的 Fefferman-Stein 型向量值不等式。记 $\mathcal{M}$ 为 Hardy-Littlewood 极大算子，

$$\mathcal{M}(g)(x) = \sup_{x\in Q} \fint_Q |g|dx$$

上确界取遍所有包含 x 的立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$。杨函数 ϕ 属于 ∇_2，如果存在一个 > 1，使得

$$\phi(x) \le \frac{1}{2a}\phi(ax),\ \forall x \ge 0.$$

引理 2.6. 若 $\phi \in \Delta_2$ 是满足 $K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$ 的杨函数，则 $\phi_{ns} \in \Delta_2 \cap \nabla_2$。证明. 我们知道

$$H(2t) = \left(\int_0^{2t} (\frac{\tau}{\phi(\tau)})^{\frac{s}{n-s}} d\tau\right)^{\frac{n-s}{n}}$$
$$\geq \left(\int_0^{t} (\frac{2\tau}{K_\phi \phi(\tau)})^{\frac{s}{n-s}} 2d\tau\right)^{\frac{n-s}{n}} = \frac{2}{K_\phi^{\frac{s}{n}}} H(t).$$

令 $2y = H(2t)$，则 $K_{sn}\phi\, y \geq H\left(H^{-1}(2\cdot\frac{y}{2})\right) = y$。因此，

$$H^{-1}(2y) \leq 2H^{-1}(K_\phi^{\frac{s}{n}} y) \leq 2^2 H^{-1}(K_\phi^{\frac{s}{n}} \frac{K_\phi^{\frac{s}{n}}}{2} y) \leq \ldots \leq 2^{m+1} H^{-1}(K_\phi^{\frac{s}{n}} \left(\frac{K_\phi^{\frac{s}{n}}}{2}\right)^m y).$$

由于 K 的取值范围，我们得到 $K_{sn}\frac{\phi}{2} < 1$。取 m 足够大，使得 $K_{sn}\frac{\phi}{2}\left(K_{sn}2!\right) < 1$。于是有 $H^{-1}(2y) < CH^{-1}(y)$。因此 $H^{-1} \in \Delta_2$ 且 $\phi_{\frac{n}{s}} = \phi \circ H^{-1} \in \Delta_2$。

根据 $\frac{\tau}{\phi\,\tau()}$ 的单调递减性质，

$$H(2^{\frac{n}{s}}x) = \left(\int_0^{2^{\frac{n}{s}}x} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} d\tau\right)^{\frac{n-s}{n}}$$
$$= \left(\int_0^{x} \left(\frac{2^{\frac{n}{s}}\tau}{\phi(2^{\frac{n}{s}}\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} 2^{\frac{n}{s}} d\tau\right)^{\frac{n-s}{n}}$$
$$\leq \left(\int_0^{x} \left(\frac{\tau}{\phi(\tau)}\right)^{\frac{s}{n-s}} 2^{\frac{n}{s}} d\tau\right)^{\frac{n-s}{n}}$$
$$= 2^{\frac{n-s}{s}} H(x).$$

因此 $2_{ns}x \leq H^{-1}(2^{\frac{n-s}{s}}H(x))$，于是 $2^{\frac{n}{s}}H^{-1}(x) \leq H^{-1}(2_{n-ss}x)$。

并且有

$$2^{\frac{n}{s}}\phi \circ H^{-1}(x) \leq \phi(2^{\frac{n}{s}}H^{-1}(x)) \leq \phi \circ H^{-1}(2^{\frac{n-s}{s}}x).$$

令 $a = 2^{\frac{n-s}{s}} > 1$，我们有 $\phi_{ns}(x) \leq \frac{1}{2}a\phi_{ns}(ax)$ 和 $\phi_{ns} \in \nabla_2$。 □

注 2。 1. 若 $K_\phi \geq 2^{\frac{n}{s}}$，则存在 $\phi \in \Delta_2$，使得 $\phi_{ns} \notin \Delta_2$。[4]例 6.4：令 ϕwit h

$$\phi(t) = \begin{cases} t^{\frac{n}{s}}(\log\frac{1}{t})^{\alpha_0} & near\ zero, \\ t^{\frac{n}{s}}(\log t)^{\alpha} & near\ infinity, \end{cases}$$

其中 $\alpha_0 > n_s - 1$，$\alpha \leq n_s - 1$。并由一个凸函数连接，则

$$\phi_{\frac{n}{s}}(t)\ is\ equivalent\ to \begin{cases} e^{-t^{-\frac{n}{s(\alpha_0+1)-n}}} & near\ zero, \\ e^{t^{\frac{n}{n-s(\alpha+1)}}} & near\ infinity, \alpha < \frac{n}{s} - 1, \\ e^{e^{t^{\frac{n}{n-s}}}} & near\ infinity, \alpha = \frac{n}{s} - 1, \end{cases}$$

所以 $\phi_{\frac{n}{s}} \notin \Delta_2$。

接下来我们提出几个引理，可用于支持定理 1.2(i) 的论断。

引理 2.7 ([16])。设 $\psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ 为一个杨函数。对于任意 $0 < q < \infty$，存在一个常数 $C > 1$，其取决于 n、q、K_ψ和 a，使得对于所有序列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\left[\sum_{j\in\mathbb{N}} (\mathcal{M}(f_j))^2\right]^{\frac{1}{q}}\right) dx \le C(n, K_\psi, a) \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\left[\sum_{j\in\mathbb{N}} (f_j)^2\right]^{\frac{1}{q}}\right) dx.$$

引理 2.8。对于任意常数 $k \ge 1$、序列 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$以及立方体 $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，其中 $P_j \chi_{Q_j} \le k$，有

$$\sum_j |a_j| \chi_{kQ_j} \le C(k, n) \sum_j [\mathcal{M}(|a_j|^{\frac{1}{2}} \chi_{Q_j})]^2.$$

证明。根据 $\mathcal{M}$的定义，我们知道

$$\chi_{kQ_j} \le k^n \mathcal{M}(\chi_{Q_j}).$$

So

$$\sum_j |a_j| \chi_{kQ_j} = \sum_j (|a_j|^{\frac{1}{2}} \chi_{kQ_j})^2 \le k^{2n} \sum_j [\mathcal{M}(|a_j|^{\frac{1}{2}} \chi_{Q_j})]^2.$$

□

现在我们开始给出定理 1.2(i) 的证明。

定理 1.2(i) 的证明。设 Ω 是一个 c-John 域。根据 Boman [6] 和 Buckley [9], , Ω 具有以下链性质：对于每个整数 $\kappa > 1$，存在一个正常数 $C(\kappa, \Omega)$ 以及一个立方体集合 $\mathcal{F}$，使得

(i) 对所有 $Q \in \mathcal{F}$，$\Omega = \cup_{Q\in\mathcal{F}} Q$ 和

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}} \chi_{\kappa Q} \le C_{\kappa,c} \chi_\Omega.$$

(ii) $Q_0 \in \mathcal{F}$是一个固定的立方体。对于任意其他的 $Q \in \mathcal{F}$，存在一个子序列 $\{Q_j\}_{j=1}^N \subset \mathcal{F}$，满足 $Q = Q_N \subset C_{\kappa,c} Q_j$, $C_{\kappa,c}^{-1} |Q_{j+1}| \le |Q_j| \le C_{\kappa,c} |Q_{j+1}|$且 $|Q_j \cap Q_{j+1}| \ge C_{\kappa,c}^{-1} \min\{|Q_j|, |Q_{j+1}|\}$，对所有 $j = 0, \ldots, N-1$均成立。

令 $\kappa = 5n$，由 (i) 可知，对每个 $Q \in \mathcal{F}$，$Q \subset 5nQ \subset \Omega$,

$$d(Q, \partial\Omega) \ge d(Q, \partial(5nQ) \ge \frac{5n-1}{2} l(Q) \ge 2nl(Q),$$

因此

$$|x-y| \le \sqrt{n} l(Q) \le nl(Q) \le \frac{1}{2} d(Q, \partial\Omega) \le \frac{1}{2} d(x, \partial\Omega), \ \forall x, y \in Q \in \mathcal{F}.$$

设 $u \in \dot{V}_*^{s\phi}(\Omega)$。通过用 $\min\{\max\{u, -N\}, N\}$ 进行逼近，不妨假设 $u \in L^\infty(\Omega)$，并且由于 Ω 有界，$u \in L^1(\Omega)$。

By

$$\forall x, y \in Q, |x-y| \le \frac{1}{2} d(x, \partial\Omega),$$

我们知道

$$\int_Q \int_Q \phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dxdy}{|x-y|^n} \le \int_Q \int_{B(x, \frac{1}{2}d(x,\partial\Omega))} \phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda |x-y|^s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^n},$$

那么 $\|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(Q)} \le \|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}_*(\Omega)}$，因此

$$\lambda \ge \|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}(Q)} \text{ when } \lambda \ge \|u\|_{\dot{V}^{s,\phi}_*(\Omega)}. \tag{2.7}$$

由于 $\phi_{\frac{n}{s}}$ 的凸性，我们有

$$\begin{aligned} I :&= \int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|u(z)-u_\Omega|}{\lambda}\right)dz \\ &\le \int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2|u(z)-u_{Q_0}|+2|u_\Omega-u_{Q_0}|}{\lambda}\right)\right)dz \\ &\le \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{2|u(z)-u_{Q_0}|}{\lambda}\right)dz + |\Omega|\phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{2|u_\Omega-u_{Q_0}|}{\lambda}\right)\right]. \end{aligned}$$

由詹森不等式,

$$|\Omega|\phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{2|u_\Omega-u_{Q_0}|}{\lambda}\right) \le \int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{2|u(z)-u_{Q_0}|}{\lambda}\right)dz.$$

在 (i) 中，我们有 $\chi_\Omega \le \mathrm{P}_{Q\in\mathcal{F}}\chi_Q$，因此

$$\begin{aligned} I &\le \int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{2|u(z)-u_{Q_0}|}{\lambda}\right)dz \\ &\le \sum_{Q\in\mathcal{F}}\int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{2|u(z)-u_{Q_0}|}{\lambda}\right)dz \\ &\le \frac{1}{2}\sum_{Q\in\mathcal{F}}\int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{4|u(z)-u_Q|}{\lambda}\right)dz + \frac{1}{2}\sum_{Q\in\mathcal{F}\setminus\{Q_0\}}|Q|\phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{4|u_Q-u_{Q_0}|}{\lambda}\right) \\ &:= \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2. \end{aligned}$$

根据不等式 (2.3)、(2.7) 以及

$$\forall x, y \in Q, |x-y| \le \frac{1}{2}d(x,\partial\Omega),$$

我们知道

$$\begin{aligned} I_1 &\le \sum_{Q\in\mathcal{F}}\int_Q\int_Q \phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\frac{\lambda}{4C_1}|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^n} \\ &\le \sum_{Q\in\mathcal{F}}\int_Q\int_{B(x,\frac{1}{2}d(x,\partial\Omega))} \phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\frac{\lambda}{4C_1}|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n}. \end{aligned}$$

使用上文 (i) 中的 $\mathrm{P}_{Q\in\mathcal{F}}\chi_{\kappa Q} \le C_{\kappa,\ c}\chi_\Omega$ in,

$$\begin{aligned} I_1 &\le C_{\kappa,c}\int_\Omega\int_{B(x,\frac{1}{2}d(x,\partial\Omega))} \phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\frac{\lambda}{4C_1}|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n} \\ &\le \int_\Omega\int_{B(x,\frac{1}{2}d(x,\partial\Omega))} \phi\left(\frac{\tilde{C}|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n}. \end{aligned}$$

对于 I_2, 中的每个 $Q \in \mathcal{F}$，由 (ii) $\forall Q$ ， Q_0, 可得 $Q = Q_N$，并且

$$\begin{aligned}|u_Q - u_{Q_0}| &\le \sum_{j=0}^{N-1} |u_{Q_j} - u_{Q_{j+1}}| \\ &\le \sum_{j=0}^{N-1} \left(|u_{Q_j} - u_{Q_{j+1}\cap Q_j}| + |u_{Q_{j+1}} - u_{Q_{j+1}\cap Q_j}|\right).\end{aligned}$$

对于相邻的立方体 Q_j 和 Q_{j+1}，有

$$\begin{aligned}|Q_j - Q_{j+1}| &\ge C_{\kappa,c}^{-1} \min\{|Q_j|, |Q_{j+1}|\}, \\ C_{\kappa,c}^{-1}|Q_{j+1}| &\le |Q_j| \le C_{\kappa,c}|Q_{j+1}|.\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}|u_{Q_j} - u_{Q_{j+1}\cap Q_j}| &\le \frac{1}{|Q_{j+1} \cap Q_j|} \int_{Q_{j+1}\cap Q_j} |u(v) - u_{Q_j}| dv \\ &\le \frac{{C_{\kappa,c}}^2}{|Q_j|} \int_{Q_j} |u(v) - u_{Q_j}| dv.\end{aligned}$$

同理,

$$|u_{Q_{j+1}} - u_{Q_{j+1}\cap Q_j}| \le \frac{{C_{\kappa,c}}^2}{|Q_{j+1}|} \int_{Q_{j+1}} |u(v) - u_{Q_{j+1}}| dv.$$

因此，我们得到

$$|u_Q - u_{Q_0}| \le 2{C_{\kappa,c}}^2 \sum_{j=0}^{N} \fint_{Q_j} |u(v) - u_{Q_j}| dv.$$

对于每个 Q_j，由 ϕ^{ns}的凸性和詹森不等式,

$$\begin{aligned}\fint_{Q_j} \frac{|u(v) - u_{Q_j}|}{\lambda} dv &= {\phi_{\frac{n}{s}}}^{-1} \circ \phi_{\frac{n}{s}} \left(\fint_{Q_j} \frac{|u(v) - u_{Q_j}|}{\lambda} dv\right) \\ &\le {\phi_{\frac{n}{s}}}^{-1} \left(\fint_{Q_j} \phi_{\frac{n}{s}} \left(\frac{|u(v) - u_{Q_j}|}{\lambda}\right) dv\right).\end{aligned}$$

由不等式 (2.3)、(2.7) 以及 $\forall v, w \in Q_j$， $|v - w| \le \frac{1}{2} d(v, \partial\Omega)$,

$$\begin{aligned}\int_{Q_j} \phi_{\frac{n}{s}} \left(\frac{|u(v) - u_{Q_j}|}{\lambda}\right) dv &\le \int_{Q_j} \int_{Q_j} \phi \left(\frac{|u(v) - u(w)|}{\frac{\lambda}{C_1}|v - w|^s}\right) \frac{dvdw}{|v - w|^n} \\ &\le \int_{Q_j} \int_{B(v, \frac{1}{2}d(v,\partial\Omega))} \phi \left(\frac{|u(v) - u(w)|}{\frac{\lambda}{C_1}|v - w|^s}\right) \frac{dwdv}{|v - w|^n} \\ &:= \int_{Q_j} f(v) dv.\end{aligned}$$

因此

$$\fint_{Q_j} \frac{|u(v) - u_{Q_j}|}{\lambda} dv \le {\phi_{\frac{n}{s}}}^{-1} \left(\fint_{Q_j} f(v) dv\right),$$

and

$$\frac{4|u_Q - u_{Q_0}|}{\lambda} \le 8C_{\kappa,c}{}^2 \sum_{j=0}^{N} \phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\fint_{Q_j} f(v)dv\right).$$

根据引理 2.2,

$$\phi_{\frac{n}{s}}\left(8C_{\kappa,c}{}^2 \sum_{j=0}^{N} \phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\fint_{Q_j} f(v)dv\right)\right) \le C\phi_{\frac{n}{s}}\left(\sum_{j=0}^{N} \phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\fint_{Q_j} f(v)dv\right)\right).$$

应用 (ii) 中给出的 $Q = Q_N \subset C_{\kappa,c}Q^j$,

$$|Q|\phi_{\frac{n}{s}}\left(\sum_{j=0}^{N} \phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\fint_{Q_j} f(v)dv\right)\right) \le \int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\sum_{P\in\mathcal{F}} \phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\fint_P f(v)dv\right)\chi_{C_{\kappa,c}P}\right)(x)dx.$$

利用上文 (i) 中的 $\sum_{Q\in\mathcal{F}} \chi_Q \le \sum_{Q\in\mathcal{F}} \chi_{\kappa Q} \le C_{\kappa,c}\chi_\Omega$,

$$\begin{aligned} I_2 &\le C\sum_{Q\in\mathcal{F}} \int_Q \phi_{\frac{n}{s}}\left(\sum_{P\in\mathcal{F}} \phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\fint_P f(v)dv\right)\chi_{C_{\kappa,c}P}\right)(x)dx \\ &\le \tilde{C}\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\sum_{P\in\mathcal{F}} \phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\fint_P f(v)dv\right)\chi_{C_{\kappa,c}P}\right)(x)dx. \end{aligned}$$

由引理 2.8,

$$I_2 \le C\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\sum_{P\in\mathcal{F}}\left\{\mathcal{M}\left[\left(\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}(\fint_P f(v)dv)\right)^{\frac{1}{2}}\chi_P\right]\right\}^2\right)(x)dx.$$

由引理 2.6, $\phi_{\frac{n}{s}} \in \Delta_2 \cap \nabla_2$。令 $\psi(t) := \phi_{\frac{n}{s}}(t^2)$, 则 $\psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$。将引理 2.7 应用于 $q = 2$和 ψ, 得到

$$I_2 \le C\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\sum_{P\in\mathcal{F}}\left(\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}(\fint_P f(v)dv)\right)\chi_P\right)(x)dx.$$

令 $a^P = \fint_P f(v)dv$。对于每个 $x \in \Omega$, 我们有

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{n}{s}}\left(\sum_{P\in\mathcal{F}}\left(\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}(a_P)\right)\chi_P(x)\right) &= \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{\sum_{P\in\mathcal{F}}\chi_P(x)}{\sum_{P\in\mathcal{F}}\chi_P(x)}\sum_{P\in\mathcal{F}}\left(\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}(a_P)\right)\chi_P(x)\right) \\ &\le \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{C_{\kappa,c}}{\sum_{P\in\mathcal{F}}\chi_P(x)}\sum_{P\in\mathcal{F}}\left(\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}(a_P)\right)\chi_P(x)\right) \\ &\le \sum_{P\in\mathcal{F}}\frac{\chi_P(x)}{\sum_{P\in\mathcal{F}}\chi_P(x)}\phi_{\frac{n}{s}}(C_{\kappa,c}\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}(a_P)) \\ &\le \sum_{P\in\mathcal{F}}\chi_P(x)\tilde{C}a_P. \end{aligned}$$

So

$$I_2 \le C\int_\Omega \sum_{P\in\mathcal{F}} a_P\chi_P(x)dx$$

$$\leq C \sum_{P\in\mathcal{F}} a_P|P| = C \sum_{P\in\mathcal{F}} \int_P f(v)dv$$
$$\leq C(n, C_{\kappa,c}, K_\phi) \int_\Omega \int_{B(v,\frac{1}{2}d(v,\partial\Omega))} \phi\left(\frac{C|u(v)-u(y)|}{\lambda|u-w|^s}\right)\frac{dwdv}{|u-w|^n}.$$

最终，我们得到

$$I \leq \int_\Omega \int_{B(v,\frac{1}{2}d(v,\partial\Omega))} \phi\left(\frac{C|u(v)-u(y)|}{\lambda|u-w|^s}\right)\frac{dwdv}{|u-w|^n},$$

其中 C = C(n, s, Kϕ)，$\lambda > 4C_1\|u\|_{\dot{V}^{s,\ *\phi}(\Omega)}$以及 C ≥ 4C1。设 $\lambda > C\|u\|_{\cdot V_*^{s\phi,\ (\Omega)}}$，我们有 I ≤ 1 . □

3. Proof of Themrem 1.2(ii)

为证明定理 1.2 (ii)，最重要的方法是获得引理 3.5 所表达的事实。我们首先需要选择一个特殊的测试函数，以估计其范数与其半径之间的关系。

设 z ∈Ω，d(z, ∂Ω) ≤m < diam Ω。将 $\Omega_{z,m}$ 称为 Ω \ BΩ(z, m) 的一个连通分支。对于满足 $\Omega_{z,m}$, ∅ 的 t > r ≥m，定义 Ω 中的 $u_{z,r,t}$ 为

$$u_{z,r,t}(y) = \begin{cases} 0 & y \in \Omega \setminus [\Omega_{z,m} \setminus B_\Omega(z,r)] \\ \frac{|y-z|-r}{t-r} & y \in \Omega_{z,m} \cap [B(z,t) \setminus B(z,r)], \\ 1 & y \in \Omega_{z,m} \setminus B_\Omega(z,t), \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 BΩ(z, t) = B(z, t) ∩Ω。

不难得知以下性质。

引理 3.1。$u_{z,r,t}$ 是利普希茨函数，其利普希茨常数为 $^1{}_{t-r}$。

证明。我们将其分为三种情况来证明。

情形 1. 对于 x ∈Ω \ [Ωz,m \ BΩ(z, r)], , 这意味着 $u_{z,r,t}$(x) = 0。由于当 y ∈Ω \ [Ωz,m \ BΩ(z, r)], 时，$u_{z,r,t}$(y) = $u_{z,r,t}$(x) = 0 , 我们只需考虑 y ∈Ωz,m ∩ [B(z, t) \ B(z, r)] 或 y ∈Ωz,m \ BΩ(z, t)。若 y ∈Ωz,m ∩ [B(z, t) \ B(z, r)], , 我们知道 |x − z| ≤ r。因此

$$|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)| = \frac{|y-z|-r}{t-r} \leq \frac{|y-z|-|x-z|}{t-r} \leq \frac{|x-y|}{t-r}.$$

如果 y ∈Ωz, m \ 球Ω(z, t)，我们得到 |x − y| ≥ t − r。因此，

$$|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)| = 1 \leq \frac{|x-y|}{t-r}.$$

情形2。对于 x ∈Ωz, m ∩ [B(z, t) \ B(z, r)], , 则 $u_{z,r,t}$(x) = $^{|x-z|-r}{}_{t-r}$。若 y ∈Ωz, m ∩ [B(z, t) \ ~~B(z,~~ r)] , 且 $u_{z,\ r,\ t}$(y) = $^{|y-z|-r}{}_{t-r}$,

$$|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)| = \left|\frac{|x-z|-r}{t-r} - \frac{|y-z|-r}{t-r}\right| \leq \frac{|x-z|-|y-z|}{t-r} \leq \frac{|x-y|}{t-r}.$$

如果 y ∈Ω \ [Ωz,m \ 球Ω(z, r)] , 其中 $u_{z,r,t}$(y) = 0, 则有 |y − z| ≤ r。接着

$$|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)| = \frac{|x-z|-r}{t-r} \leq \frac{|y-z|-|x-z|}{t-r} \leq \frac{|x-y|}{t-r}.$$

若 y ∈Ωz,m \ 球Ω(z, t)，且 $u_{z,r,t}$(y) = 1，则 |y − z| ≥ t。结合 |x − z| ≤ t，可得

$$|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)| = \left|\frac{|x-z|-r}{t-r} - 1\right| = \left|\frac{|x-z|-t}{t-r}\right| = \frac{t-|x-z|}{t-r}$$

$$\leq \frac{|y-z|-|x-z|}{t-r} \leq \frac{|x-y|}{t-r}.$$

情形 3。对于 x $\in \Omega_{z,m} \setminus$ 球$_\Omega$(z, t)，则 $u_{z,r,t}$(x) = 1。由于当 y $\in \Omega_{z,m} \setminus$ 球$_\Omega$(z, t) 时，$u_{z,r,t}$(y) = $u_{z,r,t}$(x) = 1，我们只需考虑 y $\in \Omega \setminus [\Omega_{z,m} \setminus$ 球$_\Omega$(z, r)]，或 y $\in \Omega_{z,m} \cap$ [球(z, t) $\setminus$ 球(z, r)]。若 y $\in \Omega \setminus [\Omega_{z,m} \setminus$ 球$_\Omega$(z, r)]，且 $u_{z,r,t}$(y) = 0，结合 |x − y| ≥ t − r，可知

$$|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)| = 1 \leq \frac{|x-y|}{t-r}.$$

若 y $\in \Omega_{z,\ m} \cap$ [B(z, t) $\setminus$ B(z, r)] 且 $u_{z,\ r,\ t}$(y) = $\frac{1}{|y-z|-r\ t-r}$，则 |y − z| ≤ t。此外，|x − z| ≥ t。因此

$$\begin{aligned} |u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)| &= \left|1 - \frac{|y-z|-r}{t-r}\right| \\ &\leq \frac{|x-z|-|y-z|}{t-r} \leq \frac{|x-y|}{t-r}. \end{aligned}$$

Co综合以上情况，我们知道 $u_{z,r,t}$ 是利普希茨函数，其利普希茨常数为 ^{1} t−r —. □

接下来，我们估计测试函数。

引理 3.2。设 s $\in$ (0, 1)，且 ϕ 是一个杨函数。对于任意有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 以及 z $\in \Omega$，满足 d(z, $\partial\Omega$) ≤m < Ω 的直径。当 t > r ≥m 时，我们有 $u_{z,\ r,\ t} \in \dot{V}^{s,\phi}_{*,}$ (Ω)，且

$$\|u_{z,r,t}\|_{\dot{V}^{s,\phi}_*(\Omega)} \leq C\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_{z,m} \setminus B(z,r)|}\right)\right)^{-1} \frac{1}{(t-r)^s},$$

其中 C = =C(n, s, Cϕ) ≥ 1。

证明. 对于任意 x $\in \Omega$ 和 y $\in$ B(x, $\frac{1}{2}$d(x, $\partial\Omega$)) $\subset \Omega$, $|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)|$, 0 表示 x 或 y 在 $\Omega_{z,m} \setminus$ B(z, r)。

$$\begin{aligned} H :&= \int_\Omega \int_{|x-y|<\frac{1}{2}d(x,\partial\Omega)} \phi\left(\frac{|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n} \\ &\leq 2\int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \int_\Omega \phi\left(\frac{|u_{z,r,t}(x) - u_{z,r,t}(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n} \\ &\leq 2\int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \int_{B(x,t-r)} \phi\left(\frac{|x-y|^{1-s}}{\lambda(t-r)}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n} \\ &\quad + 2\int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,t-r)} \phi\left(\frac{1}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n} \\ &:= 2H_1 + 2H_2. \end{aligned}$$

利用变量替换和 (2.1)，我们得到

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \int_0^{t-r} n\omega_n \phi\left(\frac{\rho^{1-s}}{\lambda(t-r)}\right)\frac{d\rho}{\rho}dx \\ &= \int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \int_0^{\frac{1}{\lambda(t-r)^s}} n\omega_n \frac{1}{1-s}\phi(\mu)\frac{d\mu}{\mu}dx \\ &\leq \int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \frac{C_\phi n\omega_n}{1-s}\phi\left(\frac{1}{\lambda(t-r)^s}\right)dx \end{aligned}$$

$$= \frac{C_\phi n\omega_n}{1-s}\phi\left(\frac{1}{\lambda(t-r)^s}\right)|\Omega_{z,m} \setminus B(z,r)|,$$

and

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \int_{t-r}^{\infty} n\omega_n \phi\left(\frac{1}{\lambda\rho^s}\right)\frac{d\rho}{\rho}dx \\ &= \int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \int_0^{\frac{1}{\lambda(t-r)^s}} n\omega_n \frac{1}{s}\phi(\mu)\frac{d\mu}{\mu}dx \\ &\le \int_{\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)} \frac{C_\phi n\omega_n}{s}\phi\left(\frac{1}{\lambda(t-r)^s}\right)dx \\ &= \frac{C_\phi n\omega_n}{s}\phi\left(\frac{1}{\lambda(t-r)^s}\right)|\Omega_{z,m} \setminus B(z,r)|. \end{aligned}$$

令 $\lambda = \mathrm{M}\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)|}\right)\right)^{-1} \frac{1}{(tr)^s}$，其中 $\mathrm{M} \ge \max\left\{{}^{4}C_{1-}^{\phi}{}^{\omega_n}{}_{ns},\ {}^{4}C_{\phi n}{}^{\omega_n}{}_{s},\ 1\right\}$。我们有 $H_1 \le \frac{1}{4}$，$H_2 \le \frac{1}{4}$，因此 $H \le 1$。由此

$$\|u_{z,r,t}\|_{\dot{V}_*^{s,\phi}(\Omega)} \le C\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_{z,m}\setminus B(z,r)|}\right)\right)^{-1}\frac{1}{(t-r)^s}.$$

□

对于 $x_0, z \in \Omega$，取 $r > 0$ 使得 $d(z, \partial\Omega) < r < |x_0 - z|$。定义

$$\omega_{x_0,z,r}(y) := \frac{1}{r}\inf_{\gamma(x_0,y)} l(\gamma \cap B(z,r)), \forall y \in \Omega,$$

其中，下确界取遍所有连接 x_0 和 y 的可 rectifiable 曲线 γ。

引理 3.3. $s \in (0,1)$，且 ϕ 是一个杨函数。对于任意有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $x_0, z \in \Omega$ 和满足 $d(z, \partial\Omega) \le r < |x_0 - z|$ 的 $r > 0$，有 $\omega_{x_0,z,r} \in \dot{V}_*^{s,\phi}(\Omega)$，其中

$$\|\omega_{x_0,z,r}\|_{\dot{V}_*^{s,\phi}(\Omega)} \le C\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)\right)^{-1}\frac{1}{r^s},$$

其中 $C = C(n, s, C_\phi) \ge 1$。

证明。对于 $x \in \Omega \setminus B(z, 6r)$，以及 $y \in B(x, \frac{1}{2}d(x, \partial\Omega))$，我们有

$$d(x,\partial\Omega) \le |x-z| + d(z,\partial\Omega) \le |x-z| + r,$$

and

$$\begin{aligned} |y-z| &\ge |x-z| - |y-x| \\ &\ge |x-z| - \frac{1}{2}(|x-z| + r) \\ &= \frac{1}{2}|x-z| - \frac{r}{2} \\ &\ge 3r - \frac{r}{2} \ge 2r. \end{aligned}$$

因此 $B(x, \partial\Omega)) \cap B(z, 2r) = \varnothing$。令 $\gamma_{x,y}$ 为连接 x、y 且包含于 $B(x, \frac{1}{2}d(x, \partial\Omega))$ 的线段，则 $\gamma_{x,y} \subset \Omega \setminus B(z, r)$。对于任意 $\gamma(x_0, x)$，$\gamma(x_0, x) \cup \gamma_{x,y}$ 都是连接 x_0 和 y 的曲线，且

$$l((\gamma(x_0,x) \cup \gamma_{x,y}) \cap B(z,r)) = l(\gamma(x_0,x) \cap B(z,r)).$$

因此$\omega_{x_0,\ z,\ r}(y) \le \omega_{x_0,\ z,\ r}(x)$。

相似地，对于 $\omega_{x_0,\ z,\ r}(x) \le \omega_{x_0,\ z,\ r}(y)$。因此，对于任意 $x \in \Omega \setminus B(z, 6r)$，以及 $y \in B(x, \frac{1}{2}d(x, \partial\Omega))$，有$\omega_{x_0,\ z,\ r}(x) = \omega_{x_0,\ z,\ r}(y)$。

对于任意 $x \in \Omega$，$|x - y| < \frac{1}{2}d(x, \partial\Omega)$，我们知道 $l(\gamma_{x,\ y} \cap B(z, r)) \le |x - y|$。由于 $\gamma(x_0, x) \cup \gamma_{x,\ y}$ 是一条连接 x_0 和 y 的曲线，因此我们得到

$$\omega_{x_0,z,r}(y) \le \omega_{x_0,z,r}(x) + \frac{1}{r}|x - y|.$$

相似地，$\omega_{x_0,\ z,\ r}(x) \le \omega_{x_0,\ z,\ r}(y) + \frac{1}{r}|x - y|$。因此 $|\omega_{x_0,\ z,\ r}(y) - \omega_{x_0,\ z,\ r}(x)| \le \frac{1}{r}|x - y|$。

对于 $x \in \Omega \cap B(z, 6r)$，有 $d(x, \partial\Omega) \le 6r + d(z, \partial\Omega) < 8r$。

$$\begin{aligned}
H :&= \int_\Omega \int_{|x-y|<\frac{1}{2}d(x,\partial\Omega)} \phi\left(\frac{|\omega_{x_0,z,r}(x) - \omega_{x_0,z,r}(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n} \\
&= \int_{\Omega\cap B(z,6r)} \int_{|x-y|<\frac{1}{2}d(x,\partial\Omega)} \phi\left(\frac{|\omega_{x_0,z,r}(x) - \omega_{x_0,z,r}(y)|}{\lambda|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^n} \\
&\le \int_{\Omega\cap B(z,6r)} \int_0^{4r} n\omega_n \phi\left(\frac{\rho^{1-s}}{\lambda}\right)\frac{d\rho}{\rho}dx \\
&\le \int_{\Omega\cap B(z,6r)} \frac{C_\phi n\omega_n}{1-s}\phi\left(\frac{4^{1-s}}{\lambda r^s}\right)dx \\
&\le \frac{C_\phi n\omega_n^2}{1-s}\phi\left(\frac{4^{1-s}}{\lambda r^s}\right)(6r)^n
\end{aligned}$$

设 $\lambda = M\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)\right)^{-1}\frac{1}{r^s}$，其中 $M > \max\left\{\frac{C_\phi n\omega_n^2 4^{1-s}}{1-s}6^n, 4^{1-s}\right\}$，则 $H \le 1$。因此

$$\|\omega_{x_0,z,r}\|_{\dot{V}_*^{s,\phi}(\Omega)} \le C\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)\right)^{-1}\frac{1}{r^s}.$$

□

引理 3.4. 设 $s \in (0, 1)$，且 $\phi \in \Delta_2$ 为满足 $K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$ in (1.5) 的杨函数；有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 支持 $(\phi_{\frac{n}{s}}, \phi)$-Poincar´e 不等式 (1.4)。取一点 x_0，使得 $r_0 := \max\{d(x, \partial\Omega) : x \in \Omega\} = d(x_0, \partial\Omega)$。假设 $x, x_0 \in \Omega \setminus B(z, r)$ 对某个 $z \in \Omega$ 及 $r \in (0, 2\ \Omega$ 的直径) 成立，则存在正常数 b_0，使得 x, x_0 包含在 $\Omega \setminus B(z, b_0 r)$ 的同一连通分支中。

证明。令 $b_{x,z,r} := \sup\{c \in (0, 1] : x, x_0$ 属于 $\Omega \setminus B(z, cr)$o 的同一连通分支。我们需要证明 $b_{x,z,r}$ 具有一个与 x、z、r 无关的正下界，即

$$b = \inf\left\{b_{x,z,r} : \exists z \in \Omega, r \in (0, 2\operatorname{diam}\Omega) \text{ such that } x, x_0 \in \Omega \setminus \overline{B(z,r)}\right\} > 0.$$

于是令 $b_0 = \frac{b}{2}$，便得到结论。由于这是一个下确界问题，我们可以假设 $b_{x,z,r} \le \frac{1}{10}$。

我们要证明

$$\frac{r}{C}\left(\frac{1}{2} - 2b_{x,z,r}\right) \le |\Omega_x|^{\frac{1}{n}} \le 2Cb_{x,z,r}r,\ C \ge 1.$$

then

$$b_{x,z,r} \ge \frac{1}{4(C^2+1)},$$

因此球 > 0。

首先，对于固定的 x、z、r，我们有球$_{x,\ z,\ r} > 0$。由于 $z \in \Omega$，因此存在 $0 < \delta < 1$ 使得球 $B(z, \delta r) \subset \Omega$，且 $x_0 \notin B(z, \delta r)$。对于 $h = \frac{\delta}{2}$，以及一条曲线 $\gamma(x, x_0)$，如果

$$\gamma(x, x_0) \cap \overline{B(z, hr)} = \varnothing,$$

则 x、x_0 包含于 Ω \ 球(z, hr) 的同一个连通分支中。

若 $\gamma(x, x_0) \cap$ 球(z, hr) ∅，记 t_0 := 下确界 {t ∈ [0, 1] : $\gamma(x, x_0)(t) \in \partial$球 (z, δr)}，$t_1$:= 上确界 {t ∈ [0, 1] : $\gamma(x, x_0)(t) \in \partial$球(z, δr)} 且 A := $\gamma(x, x_0)(t_0)$，B := $\gamma(x, x_0)(t_1)$。于是我们有 e

$$\tilde{\gamma} = \gamma(x, x_0)|_{t\in(0,t_0)} \cup \widehat{AB} \cup \gamma(x, x_0)|_{t\in(t_0,1)} \subset \Omega \setminus \overline{B(z, hr)}.$$

a且 x、x_0 包含于 Ω \ 球(z, hr) 的同一个连通分支中。因此 b$_{x,\ z,\ r} \geq h > 0$。

令 $c_0 = 2b_{x,\ z,\ r} \leq \frac{1}{5}$，则 $x_0 \notin$ 球(z, c_0r)。记 Ω_{x_0} 为 Ω \ 球(z, c_0r) 中包含 x_0的连通分支。由 $b_{x,\ z,\ r} < \frac{2}{3}c_0 < 1$，可知 x、$x_0$不包含于 Ω \ 球(z, $_{2\,3}c_0$r) 的同一个连通分支中。现在我们证明球 (z, c_0r) ∩ ∂Ω ∅。否则，由于 z ∈Ω，我们有

$$B(z, \frac{2}{3}c_0) \subset B(z, c_0 r) \subset \Omega.$$

根据以上讨论，x 和 x_0 位于 Ω \ B(z, $_{2\,3}c_0$r) 的同一个连通分支中，这就产生了矛盾。因此，B(z, c_0r) ∩ ∂Ω ∅。于是

$$r_0 = d(x_0, \partial\Omega) \leq \max_{y\in B(z,c_0 r)} |x_0 - y| \leq r + c_0 r + d(x_0, B(z, r)) \leq \frac{6}{5}r + d(x_0, B(z, r)).$$

$$d(x_0, B(z, c_0 r)) \geq |x_0 - z| - \frac{r}{5} = d(x_0, B(z, r)) + \frac{4}{5}r.$$

因此，d(x_0, B(z, c_0r)) $\geq \frac{a}{2}$，，并且

$$B(x_0, \frac{r_0}{2}) \subset \Omega_{x_0} \subset \Omega \setminus \Omega_x. \tag{3.2}$$

定义

$$\omega(y) := \frac{1}{c_0 r} \inf_{\gamma(x_0,y)} l(\gamma \cap B(z, c_0 r)),\ \forall y \in \Omega.$$

由于 B(z, c_0r) ∩ ∂Ω ∅，且 $x_0 \notin$ B(z, c_0r)，我们有 d(z, ∂Ω) < c_0r < |x_0 − z|。根据引理 3.3，我们知道

$$\|\omega\|_{\dot{V}^{s,\phi}_{*}(\Omega)} \leq C\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{(c_0 r)^n}\right)\right)^{-1} \frac{1}{(c_0 r)^s},$$

根据 $(\phi_{\frac{n}{s}},\phi)$-庞加莱不等式 (1.4),

$$\|\omega - \omega_\Omega\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)} \leq C\|\omega\|_{\dot{V}^{s,\phi}(\Omega)} \leq C\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{(c_0 r)^n}\right)\right)^{-1} \frac{1}{(c_0 r)^s}.$$

另一方面，由（3.2）可得，y ∈B(x_0, $\frac{1}{2}$$r_0$)，$\omega$(y) = 0。由于 Ω 有界，$r_0 > 0$，我们有 |直径 Ω|$r_0^n$ ≤C。利用 $\phi_{\frac{n}{s}}$ 的凸性，

$$\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega(x)|}{\lambda}\right)dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega(x) - \omega_\Omega|}{\lambda}\right)dx + \frac{|\Omega|}{2}\phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega_{B(x_0,\frac{1}{2}r_0)} - \omega_\Omega|}{\lambda}\right).$$

根据詹森不等式,

$$\begin{aligned}|\Omega|\phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega_{B(x_0,\frac{1}{2}r_0)}-\omega_\Omega|}{\lambda}\right) &\le |\Omega| \fint_{B(x_0,\frac{1}{2}r_0)} \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega(x)-\omega_\Omega|}{\lambda}\right)dx \\ &\le \frac{|\Omega|}{|B(x_0,\frac{1}{2}r_0)|}\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega(x)-\omega_\Omega|}{\lambda}\right)dx \\ &\le 2^n C^n \int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega(x)-\omega_\Omega|}{\lambda}\right)dx.\end{aligned}$$

因此,

$$\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega(x)|}{\lambda}\right)dx \le C\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega(x)-\omega_\Omega|}{\lambda}\right)dx,$$

and

$$\|\omega\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)} \le C\|\omega-\omega_\Omega\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)}. \tag{3.3}$$

由于 $\forall y \in \Omega_x$, $\omega(y) \ge 1$, 我们有

$$\int_\Omega \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{|\omega(x)|}{\lambda}\right)dx \ge \phi_{\frac{n}{s}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)|\Omega_x|,$$

and

$$\|\omega\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)} \ge \left(\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_x|}\right)\right)^{-1}.$$

So

$$C\phi^{-1}\left(\frac{1}{(c_0r)^n}\right)(c_0r)^s \le \phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_x|}\right).$$

由 (2.2),

$$\frac{H(A)}{A} \le C\frac{1}{\phi(A)^{\frac{s}{n}}}.$$

Let

$$A = \phi^{-1}\left(\frac{1}{(c_0r)^n}\right),$$

我们有

$$\frac{\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\frac{1}{(c_0r)^n}\right)}{\phi^{-1}\left(\frac{1}{(c_0r)^n}\right)} \le C(c_0r)^s.$$

So

$$\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\frac{1}{(c_0r)^n}\right) \le C\phi_{\frac{n}{s}}{}^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_x|}\right).$$

由引理 2.6、 $\phi_{\frac{n}{s}} \in \Delta_2$ 和引理 2.2 可得

$$\frac{1}{(c_0r)^n} \le C\frac{1}{|\Omega_x|},$$

and

$$|\Omega_x|^{\frac{1}{n}} \le C(c_0r). \tag{3.4}$$

取 $c_j > c^{j-i}$，使得对 $j \geq 1$ 有

$$|\Omega_x \setminus B(z, c_j r)| = \frac{1}{2}|\Omega_x \setminus B(z, c_{j-1} r)| = 2^{-j}|\Omega_x|.$$

对满足 $\Omega_x \setminus$ 球$(z, c_j r)$ $\varnothing$ 的 $j \geq 0$，定义 $v_j \in \Omega$ 为

$$v_j(y) = \begin{cases} 0 & y \in \Omega \setminus [\Omega_x \setminus B_\Omega(z, c_{j+1} r)] \\ \frac{|y-z|-c_j r}{c_{j+1} r - c_j r} & y \in \Omega_x \cap [B(z, c_j r) \setminus B(z, c_{j+1} r)], \\ 1 & y \in \Omega_x \setminus B_\Omega(z, c_j r), \end{cases}$$

设 $\Omega_{z,x} = \Omega_x$，$r = c_j r$ 且 $t = c_{j+1} r$，则 $v_j(y) = u_{z,c_j r, c^{j+1} r}(y)$，其中 $u_{z,c_j r, c^{j+1} r}(y)$ 在 (3.1) 中定义。应用引理 3.2，可得

$$\|v_j\|_{\dot{V}_*^{s,\phi}(\Omega)} \leq C\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_x \setminus B(z, c_j r)|}\right)\right)^{-1} \frac{1}{(c_{j+1} r - c_j r)^s}.$$

应用 (3.2)，可得 $v_j(y) = 0$ 对于 $y \in$ 球$(x_0, \frac{1}{2} r_0)$。类似于 (3.3)，可得

$$\|v_j\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)} \leq C\|v_j - v_{j\Omega}\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)}. \tag{3.5}$$

并且 $v_j(y) = 1$ 对于 $y \in \Omega_x \setminus$ 球$_\Omega(z, c_j r)$，于是可得

$$\|v_j\|_{L^{\phi_{\frac{n}{s}}}(\Omega)} \geq \left(\phi_{\frac{n}{s}}^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_x \setminus B_\Omega(z, c_j r)|}\right)\right)^{-1}.$$

由 $(\phi_{\frac{n}{s}}, \phi)$-庞加莱 ′不等式 (1.4)，可得

$$\phi_{\frac{n}{s}}^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_x \setminus B_\Omega(z, c_j r)|}\right) \geq C\phi^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_x \setminus B(z, c_j r)|}\right)(c_{j+1} r - c_j r)^s.$$

由 (2.2) 式,

$$\frac{H(A)}{A} \leq C\frac{1}{\phi(A)^{\frac{s}{n}}}.$$

并令

$$A = \phi^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_x \setminus B(z, c_j r)|}\right),$$

then

$$(c_{j+1} r - c_j r)^s \leq C|\Omega_x \setminus B(z, c_j r)|^{\frac{s}{n}}.$$

因此 $c_{j+1} - c_j r \leq C|\Omega_x \setminus$ 球$(z, c_j r)|^{\frac{1}{n}} \leq C 2^{-j} r |\Omega_x|^{\frac{1}{n}}$。

现在我们证明 sup $nc_j o > 1$。否则，我们有 $\forall c_j \leq 1$。由 $x \in \Omega \setminus$ ~~球(x, r)~~，可得 $\exists \delta > 0$ 使得

$$B(x, \delta) \subset \Omega \setminus \overline{B(x, r)} \subset \Omega \setminus \overline{B(x, c_0 r)}.$$

由球 $B(x, \delta)$ 的连通性可知，$B(x, \delta) \subset \Omega_x$。于是

$$B(x, \delta) \subset \Omega_x \setminus \overline{B(x, r)} \subset \Omega_x \setminus B(x, c_j r),$$

and

$$0 < |B(x, \delta)| \leq |\Omega_x \setminus \overline{B(x, r)}| \leq |\Omega_x \setminus B(x, c_j r)| = 2^{-j}|\Omega_x|.$$

令 $j \to \infty$，我们得到矛盾，因此 $\sup nc_j o > 1$。所以存在 c_j，使得 $c_j \geq \frac{1}{2}$。令 $j_0 = \inf n j \geq 1 : c_j \leq \frac{1}{2}o$，则

$$(\frac{1}{2} - c_0)r \leq (c_{j_0} - c_0)r = \sum_{j=0}^{j_0-1}(c_{j+1} - c_j)r \leq C\sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{-\frac{j}{n}}|\Omega_x|^{\frac{1}{n}} \leq 2C|\Omega_x|^{\frac{1}{n}}.$$

因此 $\frac{r}{C}(\frac{1}{2} - 2b_{x,z,r}) \leq |\Omega_x|^{\frac{1}{n}}$。由 (3.4)，我们有

$$\frac{r}{C}(\frac{1}{2} - 2b_{x,z,r}) \leq |\Omega_x|^{\frac{1}{n}} \leq C2b_{x,z,r}r,\ C \geq 1.$$

Then

$$b_{x,z,r} \geq \frac{1}{4(C^2 + 1)},$$

这意味着 $b > 0$。 □

引理 3.5. 设 $s \in (0, 1)$，且 $\phi \in \Delta_2$ 是满足 (1.5) 中 $K_\phi < 2^{\frac{n}{s}}$ 条件的杨函数。若有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 支持 $(\phi_{\frac{n}{s}}, \phi)$-庞加莱不等式 (1.4)，则 Ω 具有 LLC(2) 性质，即存在常数 $b \in (0, 1)$，使得对于所有 $z \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$，$\Omega \setminus B(z, r)$ 中任意一对点都可以通过 $\Omega \setminus B(z, br)$ 中的路径连接。

证明。固定 x_0，使得 $r_0 := \max(d(x, \partial\Omega) : x \in \Omega) = d(x_0, \partial\Omega))$，并令 b_0 为引理 3.4 中的常数。然后我们分三种情况来证明。

情形 1. 对于 $z \notin$ 球 $\left(x_0, \frac{r_0}{8\,\Omega\text{ 的直径 }\Omega}r\right)$，我们考虑半径 r。

如果 $r > \frac{16(\Omega\text{ 的直径 }\Omega)^2 r_0}{r_0}$，那么 $\forall y \in$ 球 $\left(z, \frac{r_0}{16\,\Omega\text{ 的直径 }\Omega}r\right)$，我们有

$$|y - x_0| \geq |z - x_0| - |z - y| \geq \frac{r_0}{16\operatorname{diam}\Omega}r > \operatorname{diam}\Omega.$$

由 $\Omega \subset$ 球$(x_0, \Omega$ 的直径$)$，我们得到 $\Omega \cap$ 球 $\left(z, \frac{r_0}{16\,\Omega\text{ 的直径 }\Omega}r\right) = \varnothing$。这里，$\Omega \setminus$ 球(z, r) 中的任意一对点都可以在 $\Omega \setminus$ 球$(z, \frac{r_0}{16\,\Omega\text{ 的直径 }\Omega}r) = \Omega$ 中由一条路径连接。

如果 $r \leq \frac{16(\Omega\text{ 的直径})^2 r_0}{r_0}$ 且 $d(z, \partial\Omega) > b_0\frac{0}{32}r\,\Omega$ 的直径 r。当 $z \notin \Omega$ 时，$\Omega \setminus$ 球(z, r) 中的任意一对点都可以在 $\Omega \setminus$ 球 $\left(z, b_0\frac{0}{32}r\,\Omega\text{ 的直径 }r\right) = \Omega$ 中由一条路径连接。当 $z \in \Omega$ 时，球 $\left(z, b_0\frac{0}{64}r\,\Omega\text{ 的直径 }r\right) \subset$ 球 $\left(z, b_0\frac{0}{32}r\,\Omega\text{ 的直径 }r\right) \subset \Omega$。类似于证明引理 3.4 中 $b_{x,z,r} > 0$ 的过程，我们知道 $\Omega \setminus$ 球 $\left(z, b_0\frac{0}{64}r\,\Omega\text{ 的直径 }r\right)$ 是一个连通集。这里，$\Omega \setminus$ 球(z, r) 中的任意一对点都可以在 $\Omega \setminus$ 球 $\left(z, b_0\frac{0}{64}r\,\Omega\text{ 的直径 }r\right)$ 中由一条路径连接。

若 $r \leq \frac{16(\Omega\text{ 的直径 }\Omega)^2 r_0}{r_0}$ 且 $d(z, \partial\Omega) \leq \frac{b_0}{32}r\,\Omega\text{ 的直径 }\Omega\,r$。取 $y \in$ 球 $\left(z, \frac{b_0}{16}r\,\Omega\text{ 的直径 }\Omega\,r\right) \cap \Omega$。由 $B\left(y, (1 - \frac{b_0}{2})\frac{r_0}{8\,\Omega\text{ 的直径 }\Omega}r\right) \subset B\left(z, \frac{r_0}{8\,\Omega\text{ 的直径 }\Omega}r\right) \subset B(z, r)$，可知

$$\forall x \in \Omega \setminus \overline{B(z, r)}, x, x_0 \in \Omega \setminus \overline{B\left(y, (1 - \frac{b_0}{2})\frac{r_0}{8\operatorname{diam}\Omega}r\right)}.$$

根据引理 3.4，x、x_0 位于 $\Omega \setminus$ 球 $\left(y, b_0(1 - \frac{b_0}{2})\frac{r_0}{8\,\text{直径 }\Omega}r\right)$ 的同一连通分支中。由

$$\forall w \in B\left(z, \frac{b_0(1 - b_0)r_0}{16\operatorname{diam}\Omega}r\right),$$

我们有

$$|w-y|\le|w-z|+|z-y|<\frac{b_0(1-b_0)r_0}{16\operatorname{diam}\Omega}r+\frac{b_0r_0}{16\operatorname{diam}\Omega}r=b_0\left(1-\frac{b_0}{2}\right)\frac{r_0}{8\operatorname{diam}\Omega}r.$$

Then

$$B\left(z,\frac{b_0(1-b_0)r_0}{16\operatorname{diam}\Omega}r\right)\subset B\left(y,b_0\left(1-\frac{b_0}{2}\right)\frac{r_0}{8\operatorname{diam}\Omega}r\right),$$

且 Ω \ B $\left(y, b_0\left(1-\frac{b_0}{2}\right)r_{8^{0}\text{直径}\,\Omega}r\right)\subset\Omega\setminus B\left(z, b_{00}16_0(1-b)r\text{直径}\,\Omega\,r\right)$。这里，Ω \ B(z, r) 中任意两点都可以通过 $\Omega\setminus B\left(z, b_{00}16_0(1-b)r\text{直径}\,\Omega\,r\right)$连接。

情形2。若 $z\in B\left(x_0, r_{8^{0}\text{直径}\,\Omega}r\right)$，对于任意 $x\in\Omega\setminus B(z,r)$，

$$r-\frac{r_0}{8\operatorname{diam}\Omega}r\le|x-z|-|x_0-z|\le|x-x_0|\le\operatorname{diam}\Omega,$$

so

$$r\le\frac{\operatorname{diam}\Omega}{1-\frac{r_0}{8\operatorname{diam}\Omega}}\le2\operatorname{diam}\Omega.$$

Then

$$B\left(z,\frac{r_0}{8\operatorname{diam}\Omega}r\right)\subset B\left(x_0,\frac{r_0}{4\operatorname{diam}\Omega}r\right)\subset B\left(x_0,\frac{r_0}{2}\right)\subset B(x_0,r_0)\subset\Omega$$

类似于引理 3.4 中证明 $b_{x,z,r}>0$的过程，我们有 $\Omega\setminus B\left(z, r_{8^{0}\text{直径}\,\Omega}r\right)$是一个连通集。并且根据

$$\Omega\setminus\overline{B(z,r)}\subset\Omega\setminus\overline{B\left(z,\frac{r_0}{8\operatorname{diam}\Omega}r\right)},$$

我们知道，Ω \ B(z, r) 中的任意一对点都可以通过 $\Omega\setminus B\left(z, r_{8^{0}\text{直径}\,\Omega}r\right)$中的一条曲线连接起来。

综合以上情形，当 $b=\min n\, r16^{0}\text{直径}\,\Omega$，$b_{00}64\,r\text{直径}\,\Omega$，$b_{00}16_0(1-b)r\text{直径}\,\Omega\,o$ 时，即可得到所需结果。 □

定理 1.2(ii) 的证明。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个单连通平面域，或者当 $n\le3$时，是一个与某个一致域拟共形等价的有界域。假设 Ω 支持 $(\phi_{\frac{n}{s}},\phi)$-Poincar´e 不等式。

由于 [7, 8], Ω 具有分离性质，其中 $x_0\in\Omega$ 且存在某个常数 $C_0\ge1$，也就是说 $\forall x\in\Omega$，$\exists$一条曲线 $\gamma:\ [0,1]\to\Omega$，满足 $\gamma(0)=x$，$\gamma(1)=x_0$，，并且对任意 $\forall t\in[0,1]$，或者 $\gamma([0,1])\subset B:=B(\gamma(t),C_0d(\gamma(t),\Omega^{\complement}))$，或者 $\forall y\in\gamma([0,1])\setminus B$ 属于 Ω \ B 的不同连通分支。对于任意 $x\in\Omega$，令 γ 为如上所述的一条曲线。根据 [36], 中的论证，只需证明存在一个常数 $C>0$使得

$$d(\gamma(t),\Omega^{\complement})\ge C\operatorname{diam}\gamma([0,t]),\ \forall t\in[0,1]. \tag{3.6}$$

事实上，(3.6) 可以加以修改 γ，从而得到一条经过 x 的约翰曲线。

由引理 3.5，Ω 具有 LLC(2) 性质。令 $a=2+C^0b$，其中 b 是引理 3.5 中的常数。对于 $t\in[0,1]$。 (1) 若 $d(\gamma(t),\Omega^{\complement})\ge d(x_0,\Omega^{\complement})\,\alpha$，则

$$\gamma([0,t])\subset\Omega\subset B\left(\gamma(t),\frac{ad(\gamma(t),\Omega^{\complement})}{d(x_0,\Omega^{\complement})}\operatorname{diam}\Omega\right).$$

So

$$\operatorname{diam}\gamma([0,t])\le\frac{2ad(\gamma(t),\Omega^{\complement})}{d(x_0,\Omega^{\complement})}\operatorname{diam}\Omega.$$

and

$$d(\gamma(t),\Omega^{\complement}) \geq \frac{d(x_0,\Omega^{\complement})}{2a\,\mathrm{diam}\,\Omega}\,\mathrm{diam}\ \gamma([0,t]).$$

(2) 若 $d(\gamma(t),\Omega^{\complement}) < \frac{d(x_0,\Omega^{\complement})}{a}$，我们证明

$$\gamma([0,t]) \subset \overline{B\left(\gamma(t),(a-1)d(\gamma(t),\Omega^{\complement})\right)}.$$

否则，存在 $y \in \gamma([0,t]) \setminus$ 球 $\overline{\left(\gamma(t),\ (a-1)d(\gamma(t),\Omega^{\complement})\right)}$。由

$$|x_0-\gamma(t)| \geq d(x_0,\Omega^{\complement}) - d(\gamma(t),\Omega^{\complement}) > (a-1)d(\gamma(t),\Omega^{\complement}),$$

我们知道 $x_0, y \in \Omega \setminus$ 球 $\overline{\left(\gamma(t),\ (a-1)d(\gamma(t),\Omega^{\complement})\right.}$。根据引理 3.5，$x_0$ 和 y 包含在 $\Omega \setminus$ 球 $\left(\gamma(t)\right.$ 的同一个补集中，其中 $\left.\overline{b(a-1)d(\gamma(t),\Omega^{\complement})}\right)$。由于 $b(a-1) \geq C_0$，，因此 x_0 和 y 包含在 $\Omega \setminus$ 球 $\left(\gamma(t)\right.$ 的同一个补集中，~~其中 $C_0 d(\gamma(t),\Omega^{\complement})$~~，这与分离性质矛盾。因此

$$\gamma([0,t]) \subset \overline{B\left(\gamma(t),(a-1)d(\gamma(t),\Omega^{\complement})\right)},$$

then

$$\mathrm{diam}\ \gamma([0,t]) \leq 2(a-1)d(\gamma(t),\Omega^{\complement}).$$

So

$$d(\gamma(t),\Omega^{\complement}) \geq \frac{1}{2(a-1)}\,\mathrm{diam}\ \gamma([0,t]).$$

令 $C = \min\left\{\frac{d(x_0,\Omega^{\complement})}{2a\,\mathrm{diam}\,\Omega},\ \frac{1}{2(a-1)}\right\}$，则 (3.6) 成立。证明完毕。

□

致谢。作者感谢周源教授就本文进行的多次宝贵讨论。作者部分获得国家自然科学基金（编号：12201238）和广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2022A1515111056）的资助。

参考文献

[1] R. A. Adams. 索伯列夫空间. Academic Press, 1975.[2] R. A. Adams. 关于奥利奇-索伯列夫嵌入定理. 《泛函分析杂志》, 24(3):241–257, 1977.[3] A. Alberico. 各向异性变分问题解的有界性. 《偏微分方程通讯》, 36(3):470–486, 2010.[4]A. Alberico, A. Cianchi, L. Pick, and L. Slav´ıkov´a. 分数阶奥利奇 - 索伯列夫嵌入 . Journal de Math´ematiques Pures et Appliqu´ees, 149:216–253, 2021.[5] B. Bojarski. 关于索伯列夫嵌入不等式的评注. 载于《约恩苏复分析 1987》, 第 52–68 页. 施普林格, 1988.[6] J. Boman. 强椭圆系统的 L^p-估计. 斯德哥尔摩大学数学系 , 1982.[7] S. Buckley and P. Koskela. 索博列夫 - 庞加莱不等式蕴含 John. 《数学研究快报》, 2(5):577–593, 1995.[8] S. M. Buckley and P. Koskela. 索博列夫-庞加莱型嵌入的判据. International Mathematics Re- search Notices (IMRN), 1996(18):881–901, 1996.[9] S. M. Buckley, P. Koskela, and G. Lu. Boman 等价于 John. 载于《第十六届罗尔夫·内万林纳讨论会论文集》, 第 91–99 页. 德格鲁伊特, 1996.[10] A. Calder´on. 可微函数与广义函数的勒贝格空间. 载于《纯粹数学专题讨论会论文集》, 第 4 卷, 第 33–49 页, 1961.

[11] A. Cianchi. Orlicz-索博列夫空间的一个尖锐嵌入定理. 《印第安纳大学数学杂志》, 第 39–65 页, 1996. 出版方：JSTOR.[12] A. Cianchi. 一个完全各向异性索博列夫不等式. 《太平洋数学杂志》, 196(2):283–294, 2000.[13] A. Cianchi. 最优 Orlicz-索博列夫嵌入. Revista Matem ´atica Iberoamericana, 20(2):427–474, 2004.[14] A. Cianchi. Orlicz空间中的高阶索博列夫不等式与庞加莱不等式. 《数学论坛》, 18(5):745–767, 2006.[15] A. Cianchi and V. Maz'ya. 任意区域上的索博列夫不等式. 《数学进展》, 293:644–696, 2016. 出版方：爱思唯尔.[16] D. V. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. P ´erez. 权、外推与 Rubio de Francia 理论, 第 215 卷. 施普林格科学与商业媒体, 2011.[17] B. Dyda, L. Ihnatsyeva, and A. V. V¨ah¨akangas. 关于改进的分数阶索博列夫-庞加莱不等式. Arkiv f¨or Matematik, 54(2):437–454, 2016. 出版方：施普林格.[18] D. E. Edmunds, R. Kerman, and L. Pick. 涉及重排不变准范数的最优索博列夫嵌入. 《泛函分析杂志》, 170(2):307–355, 2000. 出版方：爱思唯尔.[19] D. Gallardo. Hardy-Littlewood极大算子有界的 Orlicz空间. Publicacions Matema- tiques, 第 261–266 页, 1988. 出版方：JSTOR.[20] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. 二阶椭圆型偏微分方程, 第 224 卷. 施普林格, 1977.[21] A. Gogatishvili, P. Koskela, and Y. Zhou. 度量测度空间上 Besov 空间与 Triebel-Lizorkin 空间的刻画. 《数学论坛》, 25(4):787–819, 2013.[22] L. Grafakos. 经典傅里叶分析, 第 2 卷. 施普林格, 2008.[23] L. Grafakos. 现代傅里叶分析, 第 250 卷. 施普林格, 2009.[24] P. Hajłasz. 索博列夫不等式、截断方法与约翰域. Rep. Univ. Jyv¨askyl¨a Dep. Math. Stat., 83:1096–126, 2001.[25] T. Heikkinen and H. Tuominen. Orlicz-索博列夫延拓与测度密度条件. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 368(2):508–524, 2010.[26] R. Hurri-Syrj¨anen and A. V. V¨a h¨akangas. 关于分数阶庞加莱不等式. Journal d'Analyse Math ´ematique, 120(1):85–104, 2013.[27] P. W. Jones. BMO 的延拓定理. 《印第安纳大学数学杂志》, 29(1):41–66, 1980.[28] P. W. Jones. 拟共形映射与索伯列夫空间中函数的可延拓性. 《数学学报》, 147:71–88, 1981.[29] A. Jonsson and H. Wallin. L^p 与 Besov 空间中的 Whitney延拓定理. 载于 Annales de l'institut Fourier, 第 28 卷, 第 139–192 页, 1978.[30] A. Jonsson and H. Wallin. $\mathbb{R}^n$ 子集上的函数空间. Mathematical Reports, 2(1):221, 1984.[31] R. Kerman and L. Pick. 最优索博列夫嵌入. 《数学论坛》, 18(4):535–570, 2006.[32] G. Leoni. 索伯列夫空间入门. 美国数学会, 2017.[33] T. Liang. Ahlfors n-正则区域上的分数阶 Orlicz–索博列夫延拓/嵌入. Zeitschrift f¨ur Analysis und ihre Anwendungen, 39(3):245–275, 2020.[34] T. Liang. 约翰域上的分数阶 Orlicz-索博列夫庞加莱不等式. 《数学学报》, 37(6):854–872, 2021.[35] T. Liang and Y. Zhou. Orlicz-Besov延拓与 Ahlfors n-正则区域. 《中国科学：数学》, 51(12):1993–2012, 2020.[36] O. Martio. 平面与空间中的单射定理. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. Ser. A, 14:384–401, 1978.[37] O. Martio. 约翰域、双 Lipschitz 球与庞加莱不等式. Rev. Roumaine Math. Pures Appl, 33(1-2):107–112, 1988.[38] Y. G. Reshetnyak. 具有非光滑边界的区域中可微函数的积分表示. 《西伯利亚数学杂志》, 21(6):108–116, 1980.[39] E. M. Stein. 奇异积分与函数的可微性, 第 2 卷. 普林斯顿大学出版社, 1970.[40] H. Sun. 通过约翰域得到的 Orlicz-Besov 庞加莱不等式. 《函数空间杂志》, 2019:5234507, 2019.[41] Y. Zhou. Hajłasz-索博列夫函数最优整体可积性的判据. 《伊利诺伊数学杂志》, 55(3):1083–1103, 2011.[42]Y. Zhou. Hajłasz-索博列夫嵌入与延拓. Journal of mathematical analysis and applications, 382(2):577–593, 2011.

Shangying Feng：北京师范大学数学系，中华人民共和国北京市 100191；电子邮箱地址：202021130044@mail.bnu.edu.cn

Tian Liang：惠州学院数学与统计学院，中华人民共和国广东省 516007；电子邮箱地址：liangtian@hzu.edu.cn