arXiv:2305.04019v1 [math.OC] 6 May 2023

平均场型控制问题、若干希尔伯特空间值前向后向随机微分方程及相关方程

Alain Bensoussan[1]
德克萨斯大学达拉斯分校纳文·金达尔管理学院决策与风险分析国际中心 Ho Man Tai[2]香港中文大学数学系与统计系

Sheung Chi Phillip Yam[3]
香港中文大学统计系

2023年5月9日

摘要

本文采用一种经过改进但并不相同的方法，对 $\mathbb{R}^n$ 上具有一般成本泛函的均值场型控制问题进行原创性的全时间系统分析。该方法最初由 P. L. Lions 提出，并在[7], 中以“提升”思想为基础。作为近期流行的主方程解析方法的替代方案，我们在由全部 L^2 随机变量构成的空间中的一个适当希尔伯特子空间内求解该控制问题；该子空间可视为附着于初始概率测度的切空间。本文还弥补了全时间可解性方面的空白，并将 [7, 11] 此前仅针对控制中的二次成本泛函所开展的研究加以拓展。该问题与希尔伯特空间值正倒向随机微分方程（FBSDE）的全局可解性相关，本文通过变分方法求解了这一方程。我们还利用该 FBSDE 解的雅可比流，建立值函数的正则性，包括其线性泛函可微性，从而得到贝尔曼方程的经典适定性。结合 FBSDE 解的线性泛函导数及其梯度，我们还得到了主方程的经典适定性。

关键词： 均值场型控制问题、Hilbert 空间值前向后向随机微分方程、变分方法、贝尔曼方程、主方程、雅可比流

AMS 主题分类（2020年）： 49N80,49J55, 49K45,60H30,93E20

[1]电子邮箱：axb046100@utdallas.edu[2]电子邮箱：hmtai@link.cuhk.edu.hk[3]电子邮箱：scpyam@sta.cuhk.edu.hk

目录

1 引言 **3**

1.1 背景与我们的方法.3 1.2 文章结构.6

2 L^2-随机变量的希尔伯特空间微积分 **6**

2.1 概率测度的 2-Wasserstein 空间.6 2.2 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 上的泛函及其导数.6 2.3 L^2-随机变量的希尔伯特空间.8 2.4 希尔伯特空间中的二阶盖托导数.10 2.5 L^2-随机变量空间中的随机微积分.11

3 Fo均值场型控制问题的表述与刻画 **14**

3.1 问题表述.14 3.2 假设.15 3.3 目标函数的可微性与凸性.17 3.4 最优性的充要条件.18 3.5 正倒向随机微分方程 (3.34)-(3.36) 解的正则性及其雅可比流.20

4 价值函数的正则性 泛函及其泛函导数 2 **5**

4.1 值函数及其导数的增长性与正则性.25 4.2 二阶盖托导数.26 4.3 线性泛函导数.27

5 贝尔曼方程和主方程 **31**

5.1 最优性原理与贝尔曼方程.31 5.2 主方程.32

6 附录 38

6.1 第2节中各命题的证明.38 6.1.1 定理 2.2 的证明.38 6.1.2 定理 2.2 的补充内容.41 6.2 第3节中各命题的证明.42 6.2.1 引理 3.4 的证明.42 6.2.2 命题 3.5 的证明.43 6.2.3 引理 3.12 的证明.46 6.2.4 引理 3.14 的证明.56 6.3 第4节中各命题的证明.59 6.3.1 命题 4.2 的证明.59 6.3.2 命题 4.3 的证明.62 6.3.3 命题 4.6 的证明.64 6.4 第 5 节中各命题的证明.71

6.4.1 定理 5.1 的证明.71

参考文献 **71**

1 引言

1.1 背景与我们的方法

每个均值场型控制问题（也称为 McKean-Vlasov 控制问题）都涉及一个动力系统，其状态受到其自身在 $\mathbb{R}^n$ 上的概率测度影响。许多研究者通过专著或期刊论文，为相关建模与方法作出了重要贡献。一个基础模型是线性二次型情形，Bensoussan、Sung、Yam 和 Yung [8]（另见 Bensoussan、Frehse 和 Yam [3]）以及 Carmona 、 Delarue 和 Lachapelle [22] 均对此进行了研究。他们求解了线性二次型平均场控制问题和平均场博弈：前者处理了 N 维情形，后者则针对一维情形；进一步的研究可见 Pham [41], Yong [47], 及其他参考文献。上述大多数研究通过将控制问题与 Riccati 型微分方程联系起来解决问题，并在成本泛函满足一定正定性条件时求解这些方程。

解决具有一般成本泛函和状态动力学的平均场控制问题的一种自然方法，是利用无限维贝尔曼方程对控制问题进行刻画。Bensoussan、Frehse 和 Yam [3, 4, 5], 首先在有共同噪声和无共同噪声的情况下，在非线性二次框架下推导并讨论了贝尔曼方程，以及用于平均场博弈的主方程。Laurière 和 Pironneau [36] 在早期的一项工作中也独立提出了这一方向的研究方法。然而，由于成本泛函对状态的平均场项存在非线性依赖，状态过程可能具有时间不一致性，这意味着通常的贝尔曼最优性原理不再成立。为解决这一问题，包括 Cosso、Gozzi、Kharroubi、Pham 和 Rosestolato [23, 24], 、Djete、Possamaï 和 Tan [26], ， 以及 Pham 和 Wei [42, 43], 在内的多位研究者，在一般框架下发展了动态规划原理。例如，Cosso、Gozzi、Kharroubi、Pham 和 Rosestolato [23] 以及 Pham 和 Wei [42, 43] 给出了验证定理，并证明值函数在粘性意义下满足贝尔曼方程。此外，Pham 和 Wei [42, 43] 利用粘性解的标准比较原理（见 [28]），确立了粘性解的唯一性。Cosso、Gozzi、Kharroubi、Pham 和 Rosestolato [24] 则利用 Wasserstein 空间中的光滑变分原理验证了唯一性。Wu 和 Zhang [46] 提出了一种新的粘性解定义，该定义不同于 Crandall-Lions 定义，其特点是在 Wasserstein 空间上的半鞅测度紧集上施加最大值/最小值条件。这一修正旨在降低证明唯一性的难度。

解决平均场控制问题的另一种方法，是将随机（庞特里亚金）最大值原理推广到平均场框架，从而可以用相应的哈密顿量来刻画最优性的必要条件。然而，由于涉及平均场项的状态动力学具有非马尔可夫性质，这种方法通常要求哈密顿量满足一定的凸性。Andersson 和 Djehiche [2], Li [37] 首次在凸动作空间中研究了这一方向，而 Buckdahn-Djehiche 和 Li [13] 则利用尖峰变分在一般情形下进行了研究。许多研究者已将随机最大值原理推广到各种情形，包括 [1, 15, 20]。最优性的充分条件涉及前向动力学与伴随后向动力学的可解性，并需满足一阶条件。该系统

称为平均场（或 McKean-Vlasov）前向后向随机微分方程（FBSDEs）。Buckdahn、Li、Peng 和 Rainer [17]研究了平均场随机微分方程。平均场后向随机微分方程最早由 Buckdahn、Djehiche、Li 和 Peng [14] 以及 Buckdahn、Li 和 Peng [16], 进行研究，而耦合平均场 FBSDEs 的适定性则最早由 Carmona 和 Delarue[19] 在相当一般的假设下进行了研究；他们不要求系数具有凸性，但要求系数关于状态变量满足一定的有界性。随后，Carmona 和 Delarue [20] 去除了这一有界性假设，并在线性前向动力学和后向动力学凸系数的框架下建立了 FBSDEs 的适定性。Bensoussan、Yam 和 Zhang [12] 也在系数满足另一组一般性假设的条件下研究了 FBSDEs 的适定性。

本工作的目标是将我们先前研究 [6]和 [7], 的结果推广到一般成本泛函的情形。先前的研究考虑了成本泛函可分、关于控制变量为二次且关于测度变量为非线性的平均场控制问题。与 [6] 和 [7], 类似，本研究中存在两类噪声：初始概率测度，以及用于模拟演化局部噪声的独立维纳过程。系统的状态同时依赖于初始条件和局部噪声；与此同时，系统的状态也同时依赖于初始条件和局部噪声。不同于我们另一篇早期文章[11], ，我们不能简单地将其中处理的“确定性情形”加以推广；也就是说，随机控制问题不能不加区分地在任意希尔伯特空间中处理。为克服这一障碍，我们从两个不同角度分别研究：(1) 受控扩散过程的初始条件；(2) 过程的演化部分。具体而言，我们将概率测度的初始条件视为一个参数，而将由维纳过程的局部噪声产生的演化部分视为一个特殊指定的希尔伯特空间中的元素，这种做法最早见于 [7]。这种方法的一大优点是，问题仍然是希尔伯特空间中的控制问题；该空间并非 L^2 随机变量所构成的整个空间，而是一种附着于初始概率测度的类切空间结构。然而，更常见的方法（例如[17] 中的方法）是在希尔伯特空间上使用值函数的提升形式，计算其关于 m的导数；这与 [5, 6, 7] 以及我们在此采用的方法不同。本文通过采用一般成本泛函，推广了我们先前 [6, 7]的研究成果； [7]中发展的理论仅考虑关于控制的二次运行成本泛函。此外，我们对 [7] 进行了完整的全时间分析；与此同时，本文也涵盖了书籍 [18] 中的讨论，即 $\mathbb{R}^n$ 中的情形，但不涉及紧环面。

回想一下，“提升”这一富有启发性的思想最早由 Lions [38] 在法兰西公学院的讲座中提出（另见 Carmona 和 Delarue [21], Cardialaguet、Delarue、Lasry 和 Lions [18]），旨在通过另一种方式研究测度空间上的 Wasserstein 导数；它将瓦瑟斯坦度量空间上的问题重新表述为线性空间上的问题。我们不再寻找测度的梯度流，而是在随机变量的希尔伯特空间中寻找最优流，使其分布与测度的最优流相匹配；相反，我们考虑随机向量场空间中的受控随机过程，其中每个过程都通过测度空间上的推前运算与初始概率测度相关联。这些过程可以视为在初始测度 m处与测度空间相切。随后，最优协态给出同一希尔伯特空间中值函数的梯度；令初始随机场为恒等映射，即可将其投影为瓦瑟斯坦测度空间上的导数。正如先前的工作 [7] 在一些特殊情形下所展示的，这种希尔伯特空间方法在求解平均场型控制问题的贝尔曼方程和主方程方面相当有效。更具体地说，我们旨在将推导分为两部分：一方面是在希尔伯特空间上的最优控制，

另一方面是关于初始分布的微分，从而避免对成本泛函关于测度变量的可微性作出某些苛刻的技术假设。此外，值函数在希尔伯特空间上的正则性可以转化为相应问题在瓦瑟斯坦度量空间上的正则性，这保证了在希尔伯特空间中求解主方程与在瓦瑟斯坦度量空间中求解主方程等价。

在通常的严格凸性框架下，均值场型控制问题存在唯一的最优控制，正如命题 3.5 所示，这一结论是通过变分方法得到的。基于最大值原理的标准论证保证了最优控制的存在性，并与状态和协态（伴随过程）动力学所对应的正倒向随机微分方程组的可解性相关。值得注意的是，平均场博弈则截然不同：由于缺乏平均场控制框架中所具备的泛函分析论证，我们必须通过控制伴随过程对扰动的敏感性，将一系列连续的局部解拼接起来，以求得相应正倒向随机微分方程的全局解；详情参见近期工作 [9] 。我们关于任意时间范围的全局结果，依赖于成本泛函关于测度变量满足的某些单调性假设，以及系数函数在控制变量上的通常凸性。其中一些假设与 [29], 中采用的位移单调性概念相似，尤其是涉及 (3.21)、(3.22)、(3.23) 和 (3.27) 时。此外，第 3.2 节中为证明命题 5.1 中贝尔曼方程的经典可解性而采用的许多实用假设，与广为认可的 Lasry-Lions 单调性相似。更多细节见注 3.1。

此外，我们在 (3.23) 中对随机变量 X 的 $F(X \otimes m)$ 的二阶弗雷歇导数有界性所作的假设并不苛刻，其中 F 是定义在概率测度空间上的泛函，而 $X \otimes m$ 是概率测度 m 经 X 映射后的推前测度。在此假设下，我们看到 $D_X^2 F(X \otimes m)$ 必须是从 $\mathbf{H}_m$ 到 $\mathbf{H}_m$ 的有界线性算子（关于二阶弗雷歇导数和 $\mathbf{H}_m$ 的正式定义，参见第 2.3 节）。用 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函导数来表述，只需假设对于任意的 (m, x) 和 $(m, x, \tilde{x})$，$D_x^2 \frac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 和 $D_{\tilde{x}} D_x \frac{d^2 F}{d\nu^2}(m)(x, \tilde{x})$ 分别有界。例如，$F(m) := \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 + e^{-x^2}\right) dm(x)$ 显然远非线性二次型，但仍满足我们提出的假设。另一种看似合理、但限制性很强的假设是，假设 $F(X \otimes m)$ 关于 X 的三阶弗雷歇导数是从 $\mathbf{H}_m \times \mathbf{H}_m$ 到 $\mathbf{H}_m$ 的有界线性算子；采用这一假设会略微降低分析的技术难度，却会对 F 施加极为严格的限制：事实上，在这一假设下，导数 $D_x^3 \frac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 必须为零，这当然会使系数函数的范围仅限于线性二次型，不再包括其他情形。因此，我们不应在此采用这一假设。我们目前的设定仅要求 $F(X \otimes m)$ 的二阶弗雷歇导数有界，既涵盖了广泛的实际应用，又大大简化了数学技术细节，使方法更加清晰。更重要的是，这一设定为我们在 Wasserstein 空间上表述问题时所涉及的所有估计提供了依据。另请参见作者近期的工作 [10], ，该工作允许采用比本文所述设定稍一般的框架，在驱动动力学和成本泛函方面均不作特定形式限制；例如，不要求 $F(X \otimes m)$ 的二阶弗雷歇导数有界，而是要求 $F(m)$ 的二阶瓦瑟斯坦梯度有界，不过这需要进行更繁复的分析。为此，我们还提及另一篇很有意思的近期研究 [29] ：该研究在不存在布朗噪声的情况下，针对本文所述的同一受控动力学过程，处理了 Wasserstein 度量空间上的主方程。最后但同样重要的是，我们相信本文的方法可以应用于更为特殊的框架；此处我们选择了一种便于处理的设定，以便大部分思路能够

以连贯的方式加以说明。

1.2 文章结构

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾 Wasserstein 空间和希尔伯特空间中的基本微积分。第3节介绍均值场型控制问题，并建立该问题与相应正倒向随机微分方程之间的联系。第 4 节验证值函数的一些正则性，这有助于贝尔曼方程的表述。第 5 节研究贝尔曼方程与主方程的经典可解性。第 2 节至第 5 节中各项结论的证明均列于附录。我们想强调的是，本文提出的方法可以推广用于研究存在共同噪声的问题，也可以用于具有一般驱动漂移函数和更一般成本泛函的情形。我们目前正基于本文以及 [10], 中所发展的技术研究这类推广；后者探讨了一般一阶平均场控制问题。

2 L^2-随机变量的希尔伯特空间微积分

2.1 概率测度的 2-Wasserstein 空间

考虑定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的概率测度 m' 所构成的空间，其中每个测度的二阶矩有限，即 $\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2dm(x)<\infty$。对于任意这样的 m 和 m'，它们之间的 2-Wasserstein 距离定义为

$$W_2(m,m'):=\inf_{\pi\in\Pi_2(m,m')}\left[\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|x-x'|^2\pi(dx,dx')\right]^{1/2},$$

其中，$\Pi_2(m,m')$ 表示边缘分布分别为 m 和 m' 的联合概率测度集合。赋予该空间 2-Wasserstein 距离后，记作 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$。下确界可以取到，因此存在分别与 m 和 m' 相关联的随机变量 $\hat{}X_m$ 和 $\hat{}X_{m'}$（它们可能相依），使得

$$W_2^2(m,m'):=\mathbb{E}\left|\hat{X}_m-\hat{X}_{m'}\right|^2. \tag{2.1}$$

我们还回顾这样一个事实：测度序列 $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$，当且仅当它弱收敛，并且同时

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2dm_k(x)\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2dm(x); \tag{2.2}$$

详情可参阅 Villani 的教材 [45] 。

2.2$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 上的泛函及其导数

考虑定义在 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续泛函 $F(m)$，我们研究 $F(m)$ 的几种导数概念。首先，$F(m)$ 在 m 处的线性泛函导数是一个函数 $(m,\ x)\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n\longmapsto\dfrac{dF}{d\nu}(m)(x)$，其在 —

乘积拓扑下连续，并满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{dF}{d\nu}(m)(x) \right|^2 dm(x) \leq c(m), \tag{2.3}$$

对于某个正常数 $c(m)$，它局部依赖于 m，且在紧集上有一致界；在本文余下部分，所有其他 $c(m)$ 均表示不同的常数，但具有相同的有界性。此外， $F(m)$ 关于 m （若存在）的弗雷歇导数 L_F 按照通常的方式给出：对于任意 m、 $m' \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$，有

$$\left| \frac{F\big(m + \epsilon(m' - m)\big) - F(m)}{\epsilon} - L_F(m - m') \right| \longrightarrow 0 \qquad \text{as } \epsilon \to 0. \tag{2.4}$$

如果 m 和 m' 的密度存在，分别记为 f_m 和 $f_{m'}$。根据 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的黎斯表示定理，存在一个 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 函数 $\frac{dF}{d\nu}(m)(x)$，称为泛函导数，使得

$$L_F(m - m') = L_F(f_m - f_{m'}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dF}{d\nu}(m)(x)\big[f_m(x) - f_{m'}(x)\big]\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dF}{d\nu}(m)(x)\big[dm(x) - dm'(x)\big]. \tag{2.5}$$

由所有具有 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 密度的测度 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 构成的 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 子集，显然在 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密；只要 L_F 可闭，式 (2.5) 的表示便可推广到所有测度。关于式 (2.5)，线性泛函导数 $\frac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 实际上就是 Carmona 和 Delarue [21] [1] 中定义的线性泛函导数 $\frac{\delta F}{\delta m}(m)(x)$。此外，式 (2.4) 和 (2.5) 给出

$$\frac{d}{d\theta} F\big(m + \theta(m' - m)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dF}{d\nu}\big(m + \theta(m' - m)\big)(x)\big[dm'(x) - dm(x)\big], \tag{2.6}$$

因此

$$F(m') - F(m) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dF}{d\nu}\big(m + \theta(m' - m)\big)(x)\big[dm'(x) - dm(x)\big]\,d\theta. \tag{2.7}$$

接下来我们转向二阶导数的概念。若 $\frac{d}{d\theta} F\big(m + \theta(m' - m)\big)$ 关于 θ 连续可微，则可写出公式

$$\frac{d^2F}{d\theta^2}\big(m + \theta(m' - m)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^2F}{d\nu^2}\big(m + \theta(m' - m)\big)(x, \tilde{x})\big[dm'(x) - dm(x)\big]\big[dm'(\tilde{x}) - dm(\tilde{x})\big], \tag{2.8}$$

其中，映射 $(m, x, \tilde{x}) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x, \tilde{x})$ 称为二阶线性泛函导数，它是连续的，并满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x, \tilde{x}) \right|^2 dm(x)dm(\tilde{x}) \leq c(m). \tag{2.9}$$

[1] 公式 (2.17) 将 X 替换为 $\mathcal{I}_x$ 后得到 $\frac{dF}{d\nu}(m)(x) - \frac{dF}{d\nu}(m)(0) = \int_0^1 D_X F(\mathcal{I} \otimes m)(\theta x) \cdot x\,d\theta$；当弗雷歇导数存在时，该式可作为线性泛函导数的定义。

此外，我们有如下公式

$$F(m')-F(m)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dF}{d\nu}(m)(x)\big[dm'(x)-dm(x)\big] \\ +\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\theta\frac{d^2F}{d\nu^2}\big(m+\lambda\theta(m'-m)\big)(x,\tilde{x})\big[dm'(x)-dm(x)\big]\big[dm'(\tilde{x})-dm(\tilde{x})\big]d\lambda d\theta. \tag{2.10}$$

在 $\frac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 上加一个常数不会改变公式 (2.5) 和 (2.6)，我们假设其满足归一化条件：$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dF}{d\nu}(m)(x)dm(x)=0$. 同样，在公式 (2.8) 和 (2.9) 中，我们可以将 $\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x})$ 替换为 $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x})+\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(\tilde{x},x)\right)$，而不改变其值；我们只需假设函数 $(x,\tilde{x})\longmapsto\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x})$ 是对称的。同样，给对称函数 $\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x})$ 加上形如 $\varphi(x)+\varphi(\tilde{x})$ 的函数，也不会改变其值。

2.3 希尔伯特空间中的 L^2-随机变量

我们所用的希尔伯特空间为$\mathcal{H}_m:=L^2\big(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P};L^2_m(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\big)$，它属于无原子概率空间 $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$。$\mathcal{H}_m$ 中的元素记作 $X_x=X(x,\omega)$，它将 $\mathbb{R}^n\times\Omega$映射到 $\mathbb{R}^n$；对于每个 x，X_x 都是一个$(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$上的随机变量。$\mathcal{H}_m$ 上的内积定义为

$$\langle X,Y\rangle_{\mathcal{H}_m}:=\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}X\cdot Ydm(x)\right]<\infty,\quad\text{for any } X,\,Y\in\mathcal{H}_m. \tag{2.11}$$

$m\otimes\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上经 X 得到的确定性推前概率测度记为 $X\#(m\otimes\mathbb{P})\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$。由于 $\mathbb{P}$ 固定不变，我们省略 $\mathbb{P}$，并简记为 $X\otimes m$。对于任意测试函数 φ，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)dX\otimes m(\xi)=\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(X_x)dm(x)\right). \tag{2.12}$$

此外，对于任意 $X\in\mathcal{H}_m$，X 的范数记为$\|X\|_{\mathcal{H}_m}=\sqrt{\langle X,X\rangle_{\mathcal{H}_m}}$。给定定义在$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$上的任意泛函 F，映射 $X\longmapsto F(X\otimes m)$现在是定义在$\mathcal{H}_m$上的泛函。由于 $X\longmapsto X\otimes m$ 是从$\mathcal{H}_m$ 到$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$的连续映射，只要 $F(m)$在$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$上连续，该泛函就是连续的。其盖托导数（若存在） $D_XF(X\otimes m)$作为$\mathcal{H}_m$中的一个元素，定义为

$$\frac{F\big((X+\epsilon Y)\otimes m\big)-F(X\otimes m)}{\epsilon}\longrightarrow\big\langle D_XF(X\otimes m),Y\big\rangle_{\mathcal{H}_m},\quad\text{as }\epsilon\to0,\text{ for any }Y\in\mathcal{H}_m. \tag{2.13}$$

此外，我们有

$$\frac{d}{d\theta}F\big((X+\theta Y)\otimes m\big)=\big\langle D_XF\big((X+\theta Y)\otimes m\big),Y\big\rangle_{\mathcal{H}_m}. \tag{2.14}$$

[2]按照惯例，我们用符号 # 表示测度空间中的推前运算。不过，为了强调随机变量空间 X 与符号测度空间 m中的双线性结构 $X\otimes m$，我们使用 $\otimes$ 而非 #。这两种记法各有其重要性。在未来的工作中，我们可能会交替使用 $\otimes$ 和 $\otimes$。

假设 $F(m)$ 存在线性泛函导数 $\frac{dF}{d\nu}(m)(x)$，且对每个 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$，其关于 x 可微。那么不难看出，当 $(m,x) \longmapsto D_x \frac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 连续且满足增长条件

$$\left| D_x \frac{dF}{d\nu}(m)(x) \right| \leq c(m)(1+|x|), \tag{2.15}$$

其中，D_x 是关于 x 的通常微分算子，作用于 $\mathbb{R}^n$ 中，且 $c(m)$在$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$的紧集上有界，则

$$D_X F(X \otimes m)(\cdot,\omega) = D_x \frac{dF}{d\nu}(X \otimes m)(x)\Big|_{x=X(\cdot,\omega)}, \tag{2.16}$$

它是$\mathcal{H}_m$中的一个元素；关于上述等式的严格证明，请读者参见 [5]中的第2.1节。注意，我们看到，$D_X F(X \otimes m)(u,\ \omega)$是关于$X(\cdot,\ \cdot)$可测的随机变量，定义在扩充概率空间$(\mathbb{R}^n \times \Omega,\ \mathcal{B} \times \mathcal{A}\ m \otimes \mathbb{P})$上。另一方面，它也可以视为由若干项乘积的线性组合所构成的极限函数，其中每一项都是 $X(u,\ \omega)$的函数与若干测试函数对测度 $X \otimes m$积分所得结果的多元函数的乘积。线性泛函导数可由以下公式计算

$$\frac{dF}{d\nu}(X \otimes m)(X_u) - \frac{dF}{d\nu}(X \otimes m)(0) = \int_0^1 D_X F(X \otimes m)(\theta X_u) \cdot X_u d\theta, \qquad \text{for any } u \in \mathbb{R}^n. \tag{2.17}$$

恒等函数$\mathcal{I}_\bullet$是 $X_\bullet$取为常随机变量的一种特殊选择，因此，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$\mathcal{I}_x = x$，从而$\mathcal{I}_x \otimes m = m$。因此，(2.16)变为

$$D_X F(m)(x,\omega) = D_X F(\mathcal{I} \otimes m)(x,\omega) = D_x \frac{dF}{d\nu}(\mathcal{I} \otimes m)(x) = D_x \frac{dF}{d\nu}(m)(x), \tag{2.18}$$

它与 Carmona 和 Delarue [21] 中的 L-导数 $\partial_m F(m)(x)$ 相同；L-导数可以解释为泛函 $F(X \otimes m)$ 在 $\mathcal{H}_m$ 上的弗雷歇导数，并在 $X = \mathcal{I}_x$ 处取值。另一方面，L-导数也可以通过取一个与 x 完全独立的 X_x 来实现，然后对每个 m 取 $X \otimes m = \mathcal{L}_X$（$X$ 的分布），于是 $F(X \otimes m) = F(\mathcal{L}_X)$，再令 $D_X F(X \otimes m) = \partial_\nu F(\mathcal{L}_X)(X)$。

现在我们考虑所有满足 $X_x(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} \in L^\infty(\mathbb{R}^n; L^2(\Omega, \mathcal{A}\ \mathbb{P};\ \mathbb{R}^n))$ 的 X_x，这意味着

$$\mathbb{E}|X_x|^2 \leq c(X)(1+|x|^2), \tag{2.19}$$

其中，$c(X)$ 是一个正常数，可能依赖于 $X(\cdot,\cdot)$，但不依赖于 $x_\circ$ 于是，对于每个 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$，都有 $X \in \mathcal{H}_m$，因此可将 X 和 m 视为 $F(X \otimes m)$ 中的两个独立变量。此外，我们可以考虑泛函 $m \longmapsto F(X \otimes m)$ 及其线性泛函导数 $\frac{\partial F}{\partial m}(X \otimes m)(x) = \frac{\delta F}{\delta \mu}(X \otimes \mu)(x)\Big|_{\mu=m}$，它与 $\frac{dF}{d\nu}(X \otimes m)(x) = \frac{\delta F}{\delta \nu}(\nu)(x)\Big|_{\nu=X\otimes m}$ 不同；事实上，根据 [7], 中的命题2.12, 当

若 $m \longmapsto \frac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 连续，且至多具有二次增长 $\left|\frac{dF}{d\nu}(m)(x)\right| \le c(m)(1+|x|^2)$，则有

$$\frac{\partial F}{\partial m}(X\otimes m)(x) = \mathbb{E}\left[\frac{dF}{d\nu}(X\otimes m)(X_x)\right]. \tag{2.20}$$

注 2.1. 为便于进一步展开，我们允许对记号作宽松使用： $D_X F(Y\otimes m)$ 始终表示 $F(\cdot\otimes m)$ 关于 $\cdot$ 的弗雷歇导数；即使在极端情况下，符号 $D_X F(Y_X\otimes m)$也表示 $D_X F(X\otimes m)\big|_{X=Y_X}$。

2.4 希尔伯特空间中的二阶盖托导数

若泛函 $F(X\otimes m)$ 在 $\mathcal{H}_m$ 中存在二阶盖托导数，记为 $D_X^2F(X\otimes m)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_m;\mathcal{H}_m)$，则对任意 $Y\in\mathcal{H}_m$，有

$$\frac{\langle D_X F((X+\epsilon Y)\otimes m) - D_X F(X\otimes m), Y\rangle_{\mathcal{H}_m}}{\epsilon} \longrightarrow \langle D_X^2 F(X\otimes m)(Y), Y\rangle_{\mathcal{H}_m}, \quad \text{as } \epsilon\to 0. \tag{2.21}$$

对任意 Z 和 $W\in\mathcal{H}_m$， $D_X^2F(X\otimes m)(Z)$ 通常定义为

$$\langle D_X^2 F(X\otimes m)(Z), W\rangle_{\mathcal{H}_m} = \frac{1}{4}\left[\langle D_X^2 F(X\otimes m)(Z+W), Z+W\rangle_{\mathcal{H}_m} - \langle D_X^2 F(X\otimes m)(Z-W), Z-W\rangle_{\mathcal{H}_m}\right]. \tag{2.22}$$

因此，根据定义，$D_X^2F(X\otimes m)$ 显然是自伴的。此外

$$\frac{d}{d\theta}\langle D_X F((X+\theta Z)\otimes m), W\rangle_{\mathcal{H}_m} = \langle D_X^2 F((X+\theta Z)\otimes m)(Z), W\rangle_{\mathcal{H}_m}. \tag{2.23}$$

于是，由 (2.23) 和 (2.14) 可得

$$\frac{d^2F}{d\theta^2}((X+\theta Y)\otimes m) = \langle D_X^2 F((X+\theta Y)\otimes m)(Y), Y\rangle_{\mathcal{H}_m}. \tag{2.24}$$

因此，我们可以将 F 的泰勒展开重写如下：

$$F((X+Y)\otimes m)) = F(X\otimes m) + \langle D_X F(X\otimes m), Y\rangle_{\mathcal{H}_m} + \int_0^1\int_0^1 \theta\langle D_X^2 F((X+\theta\lambda Y)\otimes m)(Y), Y\rangle_{\mathcal{H}_m} d\theta d\lambda. \tag{2.25}$$

由（2.16）可得 $\langle D_X F(X\otimes m)^W\rangle_{\mathcal{H}_m} = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} D_x \frac{dF}{d\nu}(X\otimes m)(X_x)\cdot W_x dm(x)\right]$，从而有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\epsilon}\langle D_X F((X+\epsilon Z)\otimes m) - D_X F(X\otimes m), W\rangle_{\mathcal{H}_m}\\ &\qquad = \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(D_x\frac{dF}{d\nu}((X+\epsilon Z)\otimes m)(X_x+\epsilon Z_x) - D_x\frac{dF}{d\nu}(X\otimes m)(X_x)\right)\cdot W_x dm(x)\right],\end{aligned}$$

进一步地，假设 $\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x})$、其导数 $D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x})$ 和 $D_x^2\frac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 存在，并且具有连续性性质，对等式两边取极限可得

$$\begin{aligned}\left\langle D_X^2F(X\otimes m)(Z),W\right\rangle_{\mathcal{H}_m}=&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}D_x^2\frac{dF}{d\nu}(X\otimes m)(X_x)Z_x\cdot W_xdm(x)\right]\\&+\mathbb{E}\left\{\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(X\otimes m)(X_x,\widetilde{X}_{\tilde{x}})\widetilde{Z}_{\tilde{x}}\cdot W_xdm(\tilde{x})dm(x)\right]\right\},\end{aligned}\tag{2.26}$$

其中，$(X_{\tilde{x}},Z_{\tilde{x}})$ 是 (X_x,Z_x)的独立副本；另请参阅 [5]第2.1节中的详细讨论。因此，我们可以写成

$$D_X^2F(X\otimes m)(Z)=D_x^2\frac{dF}{d\nu}(X\otimes m)(X_x)Z_x+\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(X\otimes m)(X_x,\widetilde{X}_{\tilde{x}})\widetilde{Z}_{\tilde{x}}dm(\tilde{x})\right].\tag{2.27}$$

我们注意到$D_X^2F(X\otimes m)(Z)$具有以下可测性性质：

$$D_X^2F(X\otimes m)(Z)=M(X)Z+L(X,Z),\tag{2.28}$$

其中，$M(X)$是矩阵值的 $\sigma(X(\cdot,\cdot))$-可测随机元，而 $L(X,Z)$是向量值的 $\sigma(X(\cdot,\cdot))$-可测随机元，它们定义在扩充概率空间$(\mathbb{R}^n\times\Omega,\mathcal{B}\times\mathcal{A}\ m\otimes\mathbb{P})$上，并以线性方式泛函地依赖于 Z。类似地，若取 $X_x=\mathcal{I}_x=x$，则得到

$$D_X^2F(m)(Z)=D_x^2\frac{dF}{d\nu}(m)(x)Z_x+\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x})\widetilde{Z}_{\tilde{x}}dm(\tilde{x})\right].\tag{2.29}$$

由公式(2.27)可立即推出，若 Z 与 X 独立且 $\mathbb{E}(Z)=0$，则第二项为零，因此

$$D_X^2F(X\otimes m)(Z)=D_x^2\frac{dF}{d\nu}(X\otimes m)(X_x)Z_x.\tag{2.30}$$

为了得到 $D_X^2F(X\otimes m)(X)\in\mathcal{H}_m$，我们需要假设

$$\left|D_x\frac{dF}{d\nu}(m)(x)\right|\le c(m),\quad\left|D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x})\right|\le c(m),\tag{2.31}$$

其中，$|\cdot|$ 在（2.31）中表示由 $|A|:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,|x|=1}|Ax|$ 定义的矩阵范数，对任意 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$均成立。

2.5 L^2-随机变量空间中的随机微积分

所考虑的概率空间 $(\Omega,\mathcal{A}\ \mathbb{P})$ 足够大，其中包含 $\mathbb{R}^n$ 上的标准维纳过程，记为 $w(t)$，对于 $t\ge0$，以及一些额外的随机变量，例如用于表示初始条件的随机变量，它们可以与滤过 $\mathcal{W}_t^s:=\sigma(w(\tau)-w(t);\ \tau\in[t,s])$（由维纳过程生成）相互独立。对于任意 $t\ge0$，后者这些随机变量可视为 $\mathcal{W}_0^t$-（或简称 $\mathcal{W}^t$-）可测的。对于每个 $t\in[0,T]$，令 $X_{tx}=X(x,\omega,t)$ 为 $\mathcal{H}_m$ 中任意一个与 $\mathcal{W}_t^T$ 独立的元素

（简称 W_t）。我们将推前概率测度称为 $X_t\bullet\otimes m$ 或简称 $X_t\otimes m$，它属于 $\mathsf{P}_2(\mathbb{R}^n)$。我们还定义 $\mathsf{W}_{tX}^s:=\sigma(X_t)\bigvee\mathsf{W}_t^s$，并将由 $\sigma-$代数 W_{tX}^s（$s\geq t$）生成的滤过记为 W_{tX}。我们用 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}_m)$ 表示 $L^2(t,T;\mathrm{H}_m)$ 中所有适应于滤过 W_{tX} 的元素构成的子空间。根据 [7], 中的引理 3.1，值得注意的是，由于 X_t 与 W_t^T 独立， $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}_m)$ 与 $L^2_{\mathcal{W}_t}(t,T;\mathrm{H}^{X_t\otimes m})$ 之间存在等距映射；事实上，对于 $Y(\cdot)\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}_m)$，存在一个随机场 $Y_{t\xi}(s)\in L^2_{\mathcal{W}_t}(t,T;\mathbb{R}^n)$，对于 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 和 $s\geq t$，使得 $Y(s)=Y_{t\xi}(s)\big|_{\xi=X_{tx}}$，因此 $\mathbb{E}|Y(s)|^2=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}|Y_{t\xi}(s)|^2\big|_{\xi=X_{tx}}\right)$。由此可得

$$\begin{aligned}\int_t^T\|Y(s)\|^2_{\mathcal{H}_m}ds=\int_t^T\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|Y(s)|^2dm(x)\right]ds&=\int_t^T\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}|Y_{t\xi}(s)|^2\Big|_{\xi=X_{tx}}dm(x)\right]ds\\&=\int_t^T\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|Y_{t\xi}(s)|^2d\big(X_t\otimes m\big)(\xi)\right]ds.\end{aligned}$$

我们考虑 $j=1$、2、.....、n 个系数函数 $\eta^j_{tX}(\cdot)\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathcal{H}_m)$，使得它们分别对应于随机场 $\eta^j_{t\xi}(\cdot)\in L^2_{\mathcal{W}_t}(t,T;\mathcal{H}^{X_t\otimes m})$，其中 $X_t\in\mathcal{H}_{m\cdot}$。我们定义随机积分

$$\sum_{j=1}^n\int_t^s\eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)=\sum_{j=1}^n\int_t^s\eta^j_{t\xi}(\tau)dw_j(\tau)\Big|_{\xi=X},\tag{2.32}$$

由此定义了一个属于 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathcal{H}_m)$ 的过程，且满足

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{j=1}^n\int_t^s\eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)\right|^2dm(x)\right]=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n\int_t^s\eta^j_{t\xi}(\tau)dw_j(\tau)\right|^2d\big(X_t\otimes m\big)(\xi)\right]\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n\int_t^s|\eta^j_{t\xi}(\tau)|^2d\tau\,d(X_t\otimes m)(\xi)\right]=\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^n\int_t^s|\eta^j_{tX}(\tau)|^2d\tau dm(x)\right].\end{aligned}\tag{2.33}$$

定义 2.1（广义 Itô 过程）。给定 X 关于 W_0^t 可测，且 $a_{tX}(s)\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\ H_m)$，对于给定的 $t\in[0,T)$，我们可以定义 *Itô* 过程如下：

$$\mathbb{X}_{tX}(s)=X+\int_t^s a_{tX}(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^n\int_t^s\eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau),\quad for\ s\in[t,T],\tag{2.34}$$

它属于 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\ H_m)$。

由此可验证下述微分法则

$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}\|\mathbb{X}_{tX}(s)\|^2_{\mathcal{H}_m}=2\big\langle\mathbb{X}_{tX}(s),a_{tX}(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m}+\displaystyle\sum_{j=1}^n\|\eta^j_{tX}(s)\|^2_{\mathcal{H}_m},\\ \quad\|\mathbb{X}_{tX}(t)\|^2_{\mathcal{H}_m}=\|X\|^2_{\mathcal{H}_m}.\end{cases}\tag{2.35}$$

固定 $t\in[0,T)$，我们现在继续推导 $F(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m,\ s)$ 演化的伊藤公式，其中 m 仍然

时刻 0 的初始分布和 $s \in [t,T]$。此外，我们作出以下假设：

(i) 令 $L^2\,\mathcal{W}_t^{\perp\!\!\!\perp}(\mathcal{H}_m) \subset \mathcal{H}_m$ 为$\mathcal{H}_m$ 中所有与$\mathcal{W}_t$独立元素构成的子空间，考虑映射 $X \in L^2\,\mathcal{W}_t^{\perp\!\!\!\perp}(\mathcal{H}_m) \longmapsto F(X \otimes m, s)$，该映射在$\mathcal{H}_m$上二阶盖托可微；

(ii) $$\left|F(X \otimes m, s+\epsilon) - F(X \otimes m, s)\right| \le C_T\epsilon\left(1 + \|X\|^2_{\mathcal{H}_m}\right); \tag{2.37}$$

(iii) $D_X F(X \otimes m, s_k)$ 在$\mathcal{H}_m$中收敛到 $D_X F(X \otimes m, s)$，当 $s_k \downarrow s$； (2.38)

(iv) 对任意 $X \in L^2\,\mathcal{W}_t^{\perp\!\!\!\perp}(\mathcal{H}_m)$，
$$\left\|D_X F(X \otimes m, s)\right\|_{\mathcal{H}_m} \le C_T(1 + \|X\|_{\mathcal{H}_m}) \quad \text{and} \quad \left\|D_X^2 F(X \otimes m, s)\right\|_{\mathcal{H}_m} \le c. \tag{2.39}$$

假设二阶导数具有以下连续性性质：

(v) 对于任意序列 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2\,\mathcal{W}_t^{\perp\!\!\!\perp}(\mathcal{H}_m)$，若其收敛于 $X \in L^2\,\mathcal{W}_t^{\perp\!\!\!\perp}(\mathcal{H}_m)$，当 $s_k \downarrow s$ 时，则 $D_X^2 F(X_k \otimes m, s_k)(Y) \longrightarrow D_X^2 F(X \otimes m, s)(Y)$ 在$\mathcal{H}_m$中关于有界集内的所有 Y 一致收敛；此外，若序列 $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在$\mathcal{H}_m$中有界，则 (2.40)

$$D^2{}_X F(X_k \otimes m, s_k)(Y_k) - D_X^2 F(X \otimes m, s_k)(Y_k) \longrightarrow 0, \quad \text{in } L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; L^1_m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)) \tag{2.41}$$

(vi) 过程 $a_{tX}(s)$、$\eta^j_{tX}(s) \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t, T; \mathcal{H}_m)$ 满足以下附加性质：

$$\text{(a)} \qquad \sup_{s\in[t,T]} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^n \left|\eta^j_{tX}(s)\right|^2\right)^2 dm(x)\right] < \infty;$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\int_s^{s+\epsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\eta^j_{tX}(\tau) - \eta^j_{tX}(s)\right|^2 dm(x)d\tau\right] \longrightarrow 0, \quad \text{as } \epsilon \to 0, \text{ a.e. } s \in [t,T]; \tag{2.42}$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{\epsilon}\int_s^{s+\epsilon} a_{tX}(\tau)d\tau \longrightarrow a_{tX}(s) \quad \text{in } \mathcal{H}_m, \text{ as } \epsilon \to 0, \text{ a.e. } s \in [t,T].$$

然后我们 st 在附录中给出平均场框架下以下伊藤引理及其证明。 ix.

<escape>定理 2.2 (**平均场伊藤公式**). 在假设 *(2.36)* 至 *(2.42)* 成立的条件下，函数 $s \longmapsto F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s)$ 在 (t,T) 上几乎处处可微，并且我们还有以下变量替换公式：**</escape>**

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s) &= \frac{\partial}{\partial s}F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s) + \left\langle D_X F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s), a_{tX}(s)\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\langle D_X^2 F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s)\left(\sum_{j=1}^n \eta^j_{tX}(s)\mathcal{N}^j_s\right), \sum_{j=1}^n \eta^j_{tX}(s)\mathcal{N}^j_s\right\rangle_{\mathcal{H}_m}, \ a.e. \ s \in (t,T),\end{aligned} \tag{2.43}$$

其中 N^j_s 是彼此独立的[3] 高斯随机变量，每个变量的均值为 0 且具有单位方差，并且每个 N^j_s都独立于 σ-代数 W^s_{tX}。如果将公式 *(2.27)* 与 *(2.29)* 和 *(2.30)* 之间的讨论结合使用，那么我们还可以得到

[3]我们可以扩充初始的 σ—代数，该代数还包含所有这些 $\mathcal{N}^j_s$，并且与 X 独立 $_t$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m,s\big)=&\frac{\partial}{\partial s}F\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m,s\big)+\Big\langle D_x\frac{dF}{d\nu}\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m,s\big)\big(\mathbb{X}_{tx}(s)\big),a_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle D_x^2\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m,s)(\mathbb{X}_{tX}(s))\eta_{tX}^j(s),\eta_{tX}^j(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m},\ \ a.e.\ s\in(t,T).\end{aligned}\tag{2.44}$$

3 均值场型控制问题的表述与刻画

3.1 问题表述

控制空间设为希尔伯特空间 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}_m)$。控制记为 $v_{tX}(s)$，其中时刻 t 的初始条件为 $X=\mathbb{X}_{tX}(t)\in\mathrm{H}_m$，对任意 X 可测于滤过 W_0^t 且独立于 $\mathsf{W}_t^s=\sigma(w(\tau)-w(t):\ t\le\tau\le s)$ 的量 $s\in[t,T]$ 均成立。因此，我们有一个可测随机场 $v_{t\xi}(s)$，$\xi\in\mathbb{R}^n$，并且对每个 ξ，$v_{t\xi}(\cdot)\in L^2_{\mathcal{W}_t}(t,T;\mathbb{R}^n)$，使得 $v_{t\xi}(s)\Big|_{\xi=X=\mathbb{X}_{tX}}(t)=v_{tX}(s)$；于是我们有如下等价关系：

$$\begin{aligned}\int_t^T\|v_{tX}(s)\|^2_{\mathcal{H}_m}ds=\mathbb{E}\left[\int_t^T\int_{\mathbb{R}^n}|v_{t\xi}(s)|^2d(X\otimes m)(\xi)ds\right]&=\mathbb{E}\left[\int_t^T\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\left(|v_{t\xi}(s)|^2\right)\Big|_{\xi=X}dm(x)ds\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_t^T\int_{\mathbb{R}^n}|v_{tX}(s)|^2dm(x)ds\right].\end{aligned}\tag{3.1}$$

与控制 $v_{tX}(\cdot)$ 相关的状态记为 $\mathbb{X}_{tX}(s)=\mathbb{X}_{tX}(s;\,v_{tX}(\cdot))$，按照第 2.5 节的定义，它是一个 Itô 过程

$$\mathbb{X}_{tX}(s)=X+\int_t^s v_{tX}(\tau)d\tau+\eta(w(s)-w(t)),\quad\text{for all } s\in[t,T],\tag{3.2}$$

其中，η 是取值于 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的常矩阵。可见，$\mathbb{X}_{tX}(s)$ 属于 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathcal{H}_m)$。更准确地说，$\mathbb{X}_{tX}(s)=\mathbb{X}_{t\xi}(s)\Big|_{\xi=X}=\mathbb{X}_{t\xi}(s;\,v_{t\xi})\Big|_{\xi=X}$，其中

$$\mathbb{X}_{t\xi}(s)=\xi+\int_t^s v_{t\xi}(\tau)d\tau+\eta(w(s)-w(t)),\quad\text{for }\xi\in\mathbb{R}^n.\tag{3.3}$$

$\mathbb{X}_{tX}(s)$ 在 $\mathbb{R}^n$，$\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m$ 上的概率分布就是其概率律。当 ξ 配备概率 $\mathbb{X}_t\otimes m$，时，它也是 $\mathbb{X}_{t\xi}(s)$ 的概率分布；更准确地说 $\mathbb{X}_{t\bullet}\otimes m$. 我们旨在最小化目标泛函：

$$J_{tX}(v_{tX})=\int_t^T\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\big[l\big(\mathbb{X}_{tX}(s),v_{tX}(s)\big)\big]\,dm(x)+F\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m\big)ds+\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\big[h(\mathbb{X}_{tX}(T)\big]\,dm(x)+F_T\big(\mathbb{X}_{tX}(T)\otimes m\big),\tag{3.4}$$

在 $v\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}_m)$ 上，其中代价函数为 $l(x,v):\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 $h(x):\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$。泛函$J_{tX}(v_{tX})$ 仅通过其概率分布依赖于 X；特别是，如果我们处理具有 $\mathbb{X}_{tX}(t)=X$ 的 Itô 过程$\mathbb{X}_{tX}(s)$，那么 $J_{tX}(v_{tX})$ 仅通过 $X\otimes m$ 依赖于 X。对于一个固定的关于 W_0^t 可测的 X，泛函 $v_{tX}\longmapsto J_{tX}(v_{tX})$ 定义在希尔伯特空间 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}_m)\subset L^2(t,T;\mathrm{H}_m)$ 上。

3.2 假设

以下所有常数均为正数，但允许 c_l'、 c_h'、 c' 和 c_T' 为非正数。对于任意 x、 v、 ξ 和 $\zeta \in \mathbb{R}^n$，我们假设 $l(x, v)$ 和 $h(x)$ 二次可微，并且满足以下条件：

$$\textbf{A(i)} \qquad |l(x,v)| \le c_l\big(1+|x|^2+|v|^2\big) \quad \text{and} \quad |l_x(x,v)|, |l_v(x,v)| \le c_l\big(1+|x|^2+|v|^2\big)^{\frac{1}{2}}; \tag{3.5}$$

$$\textbf{A(ii)} \qquad |l_{xx}(x,v)|, \quad |l_{vx}(x,v)|, \quad |l_{vv}(x,v)| \le c_l; \tag{3.6}$$

$$\textbf{A(iii)} \qquad |h(x)| \le c_h\big(1+|x|^2\big), \quad |h_x(x)| \le c_h\big(1+|x|^2\big)^{\frac{1}{2}}, \quad |h_{xx}(x)| \le c_h; \tag{3.7}$$

$$\textbf{A(iv)} \qquad l_{xx}(x,v), l_{vx}(x,v), l_{vv}(x,v), h_{xx}(x) \text{ are continuous}; \tag{3.8}$$

$$\textbf{A(v)} \qquad l_{xx}(x,v)\xi\cdot\xi + 2l_{vx}(x,v)\zeta\cdot\xi + l_{vv}(x,v)\zeta\cdot\zeta \ge \lambda|\zeta|^2 - c_l'|\xi|^2; \tag{3.9}$$

$$\textbf{A(vi)} \qquad h_{xx}\xi\cdot\xi \ge -c_h'|\xi|^2; \tag{3.10}$$

下标记法，例如， l_{xv} 表示二阶导数 $\partial_v\big[\partial_x l(x,\ v)\big]$。接下来我们描述定义在$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$上的泛函 $m \longmapsto F(m)$和 $m \longmapsto F_T(m)$所满足的假设。我们假设，对于任意$m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$,

$$|F(m)| \le c\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2 dm(x)\right), \quad |F_T(m)| \le c_T\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2 dm(x)\right), \tag{3.11}$$

其中 c 和 c_T 独立于 m。对于任意 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$、 $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，这些泛函还满足

$$\textbf{b(i)} \qquad \left|D_x\frac{dF}{d\nu}(m)(x)\right| \le \frac{c}{\sqrt{2}}(1+|x|), \quad \left|D_x\frac{dF_T}{d\nu}(m)(x)\right| \le \frac{c_T}{\sqrt{2}}(1+|x|); \tag{3.12}$$

$$\textbf{b(ii)} \quad \left|D_x^2\frac{dF}{d\nu}(m)(x)\right| \le \frac{c}{2}, \ \left|D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(\tilde{x},x)\right| \le \frac{c}{2}, \ \left|D_x^2\frac{dF_T}{d\nu}(m)(x)\right| \le \frac{c_T}{2}, \ \left|D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(m)(\tilde{x},x)\right| \le \frac{c_T}{2}; \tag{3.13}$$

$$\textbf{b(iii)} \quad D_x^2\frac{dF}{d\nu}(m)(x),\ D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\tilde{x}) \text{ are continuous in } (m,x) \text{ and } (m,x,\tilde{x}), \text{ respectively}; \tag{3.14}$$

$$\textbf{b(iv)} \quad D_x^2\frac{dF_T}{d\nu}(m)(x),\ D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(m)(x,\ \tilde{x}) \text{ 关于 } (m,\ x) \text{ 和 } (m,\ x,\ \tilde{x}) \text{ 分别连续}; \tag{3.15}$$

$$\textbf{b(v)}^* \qquad \begin{aligned} &D_x^2\frac{dF}{d\nu}(m)(x)x\cdot x \ge -c'|x|^2, \ D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})x\cdot\widetilde{x} \ge 0, \\ &D_x^2\frac{dF_T}{d\nu}(m)(x)x\cdot x \ge -c_T'|x|^2, \ D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})x\cdot\widetilde{x} \ge 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

or

$$\textbf{b(v)}^\dagger \qquad \begin{aligned} &D_x^2\frac{dF}{d\nu}(m)(x)x\cdot x + D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})x\cdot\widetilde{x} \ge -c'|x|^2, \\ &D_x^2\frac{dF_T}{d\nu}(m)(x)x\cdot x + D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})x\cdot\widetilde{x} \ge -c_T'|x|^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

注 3.1. 尽管平均场控制问题与平均场博弈在本质上有所不同，但它们的主方程具有一些共同结构。我们将本文的假设与平均场博弈主方程相关文献中常用的两种单调性条件进行比较，即 *Lasry-Lions* 单调性（ *[18]*中的 *(2.5)*）和位移单调性（ *[30]*中的假设 *3.2*、*3.5*）。在我们的表述中，运行成本泛函 F 和终端成本泛函 F_T 相应的线性泛函导数 $\frac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 和 $\frac{dF_T}{d\nu}(m)(x)$，分别等价于第 *20* 页引入的 $F(x,m)$ 和 $G(x,m)$

在 *[18]* 中，分别就主方程而言（见本文中的相应主方程 (5.12) 以及 *[18]*中的 ***(2.6)***）。若用我们的表述来写相应的 ***Lasry-Lions*** 单调性，则它等价于以下条件（见 *[30]*中的注***2.4***）：

$$LLM_{\text{modified}} := \mathbb{E}\widetilde{\mathbb{E}}\Big[D_x D_{\tilde{x}} \frac{d^2 F}{d\nu^2}(X \otimes m)(X, \widetilde{X})\widetilde{Y} \cdot Y\Big] \geq 0, \tag{3.18}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$对任意 $X, Y \in \boldsymbol{H}_m$，其中 (X, Y) 是(X, Y)的一个独立副本。因此，假设 $\mathbf{b(v)}^*$ 的 (3.16) 与修正后的 ***Lasry-Lions*** 单调性(3.18)一致。对于位移单调性，我们必须先定义哈密顿量：

$$\widetilde{H}(x, m, p) := l\big(x, u(x, p)\big) + u(x, p) \cdot p + \frac{dF}{d\nu}(m)(x), \tag{3.19}$$

其中 $u(x, p)$ 满足一阶条件 $l_v\big(x, u(x, p)\big) + p = 0$ （参见引理 ***3.4*** 和命题 ***3.6***）。若在我们的设定下表述，相应的位移单调性等价于以下条件（参见 *[30]* 中的注***2.4***）：

$$DM_{\text{modified}} : = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big\langle \nabla_x \nabla_{\tilde{x}} \frac{d}{d\nu}\widetilde{H}(x, m, \varphi(x))(\widetilde{x})v(\widetilde{x}) + \nabla_{xx}\widetilde{H}(x, m, \varphi(x))v(x), v(x)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n} dm(x)dm(\widetilde{x}) \geq 0, \tag{3.20}$$

对任意 $m \in \boldsymbol{P}_2(\mathbb{R}^n)$、 $\varphi \in C^1$ 和 $v \in L^2_m$。在当前设定下，我们将 (3.19) 代入(3.20)，得到

$$\begin{aligned}
&DM_{\text{modified}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big\langle \nabla_x \nabla_{\tilde{x}} \frac{d^2 F}{d\nu^2}(m)(x, \widetilde{x})v(\widetilde{x}) \\
&\qquad + \Big[l_{xx}\big(x, u(x, p)\big) + l_{xv}\big(x, u(x, p)\big)\nabla_x u(x, p) + \nabla_x^2 \frac{dF}{d\nu}(m)(x)\Big] v(x), v(x)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n} dm(x)dm(\widetilde{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big\langle \nabla_x \nabla_{\tilde{x}} \frac{d^2 F}{d\nu^2}(m)(x, \widetilde{x})v(\widetilde{x}) \\
&\qquad + \Big[l_{xx}\big(x, u(x, p)\big) - l_{xv}\big(x, u(x, p)\big)\big[l_{xv}\big(x, u(x, p)\big)\big]^{-1} l_{vx}\big(x, u(x, p)\big) + \nabla_x^2 \frac{dF}{d\nu}(m)(x)\Big] v(x), v(x)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n} dm(x)dm(\widetilde{x}).
\end{aligned}$$

借助假设 $\mathbf{A(v)}$ 的 (3.9)以及$\mathbf{b(v)}^*$ 的 (3.16) （或$\mathbf{b(v)}^\dagger$ 的 (3.17)），我们得到

$$DM_{\text{modified}} \geq -(c' + c_l')\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^2 dm(x).$$

乍一看，我们的假设似乎比位移单调性更弱，但如果我们的目标是在全局范围内求解该问题，那么(3.30) 中的条件表明，我们需要假设 $-(c' + c_l') \geq 0$。此外， *[30]* 中的哈密顿量还必须满足 C^5，且其三阶导数一致有界（转换到我们的设定中，这一要求等价于 $l(x, u)$、 $\dfrac{dF}{d\nu}(m)(x)$ 是 C^5，并且它们的三阶导数一致有界），这至多会使成本泛函呈线性增长。相比之下，我们的假设允许超越线性二次型的模型，例如引言中的 $F(m) := \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 + e^{-x^2}\right) dm(x)$。

我们还要指出，位移单调性并不蕴含*Lasry-Lions*单调性，反之亦然，但在某些情况下二者会重合；详见 *[33]*的工作。

注 3.2. 如果我们假设 F 和 F_T 除了依赖测度变量 m之外，还依赖于 x ，那么本文的结论仍然成立，即 $F = F(x, m)\colon \mathbb{R}^n \times \boldsymbol{P}_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 以及 $F_T = F_T(x, m)\colon \mathbb{R}^n \times \boldsymbol{P}_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$，并对空间变量的正则性作出一些标准假设。这不会带来任何技术上的困难，但为方便起见，此处我们假设 $F = F(m)$ 。

注 3.3. 基于假设 ***b(i)*** 至 ***b(v)***，我们给出泛函 $X \longmapsto F(X \otimes m)$ 和 $X \longmapsto F_T(X \otimes m)$ 在 $\boldsymbol{H}_m$ 上的相应性质。注意，以下假设是满足假设 ***b(i)*** 至 ***b(v)***的必要条件，但并非充分条件；从某种意义上说，以下条件是较弱的假设。对于任意 $m \in \boldsymbol{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 和$X \in \boldsymbol{H}_m$,

$$|F(X \otimes m)| \le c\big(1 + \|X\|^2_{\mathcal{H}_m}\big), \quad |F_T(X \otimes m)| \le c_T\big(1 + \|X\|^2_{\mathcal{H}_m}\big), \tag{3.21}$$

其中 c 和 c_T 与(3.11)中相同。这些泛函在 $\boldsymbol{H}_m$上具有二阶及以下的弗雷歇导数，使得对任意 $X \in \boldsymbol{H}_m$,

$$\textbf{B(i)} \qquad \|D_X F(X \otimes m)\|_{\mathcal{H}_m} \le c\big(1 + \|X\|_{\mathcal{H}_m}\big), \quad \|D_X F_T(X \otimes m)\|_{\mathcal{H}_m} \le c_T\big(1 + \|X\|_{\mathcal{H}_m}\big); \tag{3.22}$$

$$\textbf{B(ii)} \qquad \big\|D^2_X F(X \otimes m)\big\|_{\mathcal{H}_m} \le c, \quad \big\|D^2_X F_T(X \otimes m)\big\|_{\mathcal{H}_m} \le c_T; \tag{3.23}$$

$$\textbf{B(iii)} \quad X \longmapsto; D^2_X F(X \otimes m)(Y) \textit{ is continuous as a function from } \mathcal{H}_m \textit{ to } \mathcal{H}_m, \textit{ for each fixed } Y \tag{3.24}$$

$$\textbf{B(iv)} \quad X \longmapsto D^2_X F_T(X \otimes m)(Y) \text{ 对于每个固定的 } Y, \text{ 都是从 } \boldsymbol{H}_m \text{ 到 } \boldsymbol{H}_m \text{的连续函数;} \tag{3.25}$$

B(v) **(a)** 若存在一个序列 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\boldsymbol{H}_m$中收敛到 X ，且序列 $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是

在 $\boldsymbol{H}_m$的范数下有界，则

$$D^2_X F(X_k \otimes m)(Y_k) - D^2_X F(X \otimes m)(Y_k) \longrightarrow 0, \text{ 在 } L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; L^1_m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)), \text{ 且 } {}^4 \tag{3.26}$$
$$D^2_X F_T(X_k \otimes m)(Y_k) - D^2_X F_T(X \otimes m)(Y_k) \longrightarrow 0, \text{ 在 } L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; L^1_m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n));$$

B(v) **(b)** $\big\langle D^2_X F\ (X \otimes m)\ (Y)\ Y \big\rangle_{\mathcal{H}_m} \ge -c' k Y k^2_{\mathcal{H}_m} \quad and \quad \big\langle D^2_X F_T(X \otimes m)(Y)\ Y \big\rangle_{\mathcal{H}_m} \ge -c'_T k Y k^2_{\mathcal{H}_m},$ (3.27)

3.3 目标函数的可微性与凸性

现在，我们将研究作为希尔伯特空间 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,\ T;\ \mathcal{H}_m)$ 上泛函的目标泛函 $v_{tX} \longmapsto J_{tX}(v_{tX})$ 的可微性和凸性，得

引理 3.4. 在假设 *(3.5)*、*(3.7)* 和 *(3.22)* 下，对于任意 $v_{tX} \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t, T;\ \boldsymbol{H}_m)$，泛函$J_{tX}(v_{tX})$存在盖托导数，其表达式为:

$$D_v J_{tX}(v_{tX})(s) = l_v(\mathbb{X}_{tX}(s), v_{tX}(s)) + \mathbb{Z}_{tX}(s), \quad for\ s \in [t, T], \tag{3.28}$$

[4]这意味着，当 $k \to 0$ 时，$\mathbb{E}\big[\int_{\mathbb{R}^n} \big|D^2_X F(X_k \otimes m)(Y_k) - D^2_X F(X \otimes m)(Y_k)\big| dm(x)\big] \longrightarrow 0$。

其中 $\mathbb{Z}_{tX}(s) \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,\ T;\ \boldsymbol{H}_m)$，是倒向随机微分方程（*BSDE*）的解

$$\begin{cases} -d\mathbb{Z}_{tX}(s) = \Big[l_x\big(\mathbb{X}_{tX}(s), v_{tX}(s)\big) + D_X F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m)\Big]ds - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{r}_{tX,j}(s)dw_j(s), \quad \textit{for } s \in [t,T]; \\ \quad \mathbb{Z}_{tX}(T) = h_x\big(\mathbb{X}_{tX}(T)\big) + D_X F_T\big(\mathbb{X}_{tX}(T) \otimes m\big), \end{cases} \tag{3.29}$$

对于适应过程 $\mathbb{r}_{tX,j}(s) \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\boldsymbol{H}_m)$，其中 $j = 1, 2, \ldots, n$。

其证明见附录。记 $\mathbb{r}_{tX}(s) := \big(\mathbb{r}_{tX,1}(s), \mathbb{r}_{tX,2}(s) \ldots, \mathbb{r}_{tX,n}(s)\big)$ 为以$\mathbb{r}_{tX,j}(s)$作为其第 j 列向量的矩阵。接下来我们陈述最优控制的存在性与唯一性结果。

命题 3.5 (**存在性与唯一性**）。我们假设 *(3.5)*、*(3.6)*、*(3.7)*、*(3.9)*、*(3.10)*、*(3.21)*、*(3.22)*、*(3.23)*、*(3.27)* 以及

$$c_0 := \lambda - (c_T' + c_h')_+ T - (c_l' + c')_+ \frac{T^2}{2} > 0, \tag{3.30}$$

那么泛函 $J_{tX}(v_{tX})$ 关于 v_{tX} 严格凸，并且关于 v_{tX} 强制，即 $J_{tX}(v_{tX}) \longrightarrow \infty$ 当$\int_t^T \|v_{tX}(s)\|^2_{\mathcal{H}_m} ds \to \infty$ 时趋于无穷大，其中 $a_+ := \max\{a, 0\}$ 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 均成立。因此，对于满足 $v_{tX}(s) \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\ \boldsymbol{H}_m)$ 且 $\mathbb{X}_{tX}(s;\ v_{tX})$ 满足 *(3.3)* 的控制问题，存在唯一的最优控制$u_{tX}(s) \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\ \boldsymbol{H}_m)$，使 $J_{tX}(v_{tX})$ 达到最小。

其证明见附录。在本文的其余部分，我们假设条件 (3.30) 始终成立。

3.4 最优性的充要条件

根据命题 3.5，存在唯一的最优控制 $u_{tX}(s)$，它满足引理 3.4 中的第一条件$D_v J_{tX}(u_{tX}) \equiv 0$。特别地，最优控制 $u_{tX}(s)$ 是反馈控制；为此，我们将拉格朗日函数 L 定义为：$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 其中。

$$L(x,v,p) := l(x,v) + v \cdot p. \tag{3.31}$$

然后，根据假设 **A(v)** 的 (3.9)，对于每个 x、$p \in \mathbb{R}^n$，函数 $v \longmapsto L(x,v,p)$ 关于 v 严格凸且强制的，因此在 $v = u(x,p)$ 处取得唯一最小值。我们进一步定义哈密顿量

$$H(x,p) := \inf_{v \in \mathbb{R}^n} L(x,v,p) = l\big(x, u(x,p)\big) + u(x,p) \cdot p \tag{3.32}$$

这显然是 $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，其导数为 $H_x(x,\ p) = l_x(x,\ u(x,\ p))$，且 $H_p(x,\ p) = u(x,\ p)$。因此，我们可以将 $u_{tX}(s)$ 写成如下反馈形式：

$$u_{tX}(s) = H_p\big(\mathbb{Y}_{tX}(s), D_X V(\mathbb{Y}_{tX}(s) \otimes m, s)\big) = H_p\big(\mathbb{Y}_{tX}(s), \mathbb{Z}_{tX}(s)\big), \tag{3.33}$$

其中我们将验证 (4.4) 中最后一个等式，即 $D_X V(\mathbb{Y}_{tX}(s) \otimes m,\ s) = \mathbb{Z}_{tX}(s)$。将 $\mathbb{Y}_{tX}(s)$ 称为最优状态，并将 $\big(\mathbb{Z}_{tX}(s),\ \mathbb{r}_{tX}(s)\big)$ 称为在 $\mathbb{Y}_{tX}$ 影响下 BSDE (3.29) 的解，我们得到以下命题。

命题 3.6。对于 $t \in [0,T)$ 以及 $X \in \boldsymbol{H}_m$ 到 $\boldsymbol{W}_0^t$的可测的过程，过程 u_{tX} 是使 J_{tX}（v_{tX}）最小化的控制问题的最优控制，其约束条件为 v_{tX}（s）$\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}$（$t,T;\ \boldsymbol{H}_m$）以及 $\mathbb{X}_{tX}$（$s;\ v_{tX}$）满足（*3.3*）

当且仅当过程 $\big(\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \mathbb{Z}_{tX}(s)\ u_{tX}(s)，\mathbb{r}_{tX,j}(s)\big)$是 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\ H_m)$ 中的解，且满足该系统，对于$s\in[t,T]$,

$$\begin{cases}\mathbb{Y}_{tX}(s)=X+\int_t^s u_{tX}(\tau)d\tau+\eta(w(s)-w(t)); & (3.34)\\ \mathbb{Z}_{tX}(s)=h_x(\mathbb{Y}_{tX}(T))+D_XF_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)+\int_s^T\Big[l_x\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau)\big)+D_XF(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\Big]d\tau & (3.35)\\ \qquad\qquad -\int_s^T\sum_{j=1}^n\mathbb{r}_{tX,j}(\tau)dw_j(\tau);\end{cases}$$

满足
$$l_v\big(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s)\big)+\mathbb{Z}_{tX}(s)=0. \tag{3.36}$$

证明。 假设 u_{tX} 是最优控制，由引理 3.4 和定理 7.2.12 [27]可得

$$D_vJ_{tX}(v_{tX})(s)=l_v(\mathbb{X}_{tX}(s),v_{tX}(s))+\mathbb{Z}_{tX}(s)=0,$$

其中，过程 $\big(\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \mathbb{Z}_{tX}(s)\ u_{tX}(s)，\ \mathbb{r}_{tX,\ j}(s)\big)$满足 (3.34)-(3.36)。

假设 u_{tX}满足一阶条件 (3.36)，使得 $l_v(\mathbb{X}_{tX}(s)\ v_{tX}(s))+\mathbb{Z}_{tX}(s)=0$，其中 $\big(\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \mathbb{Z}_{tX}(s),\mathbb{r}_{tX,j}(s)\big)$ 相应地满足 (3.34)-(3.35)。若 $J_{tX}(v)$在 $v=u_{tX}$处未取得其最小值，则存在 $u^\dagger$使得 $J_{tX}(u^\dagger)<J_{tX}(u_{tX})$。 $J_{tX}(v)$关于 v 的凸性意味着，对于任意 $\theta\in[0,1]$， $J_{tX}(\theta u^\dagger+(1-\theta)u_{tX})\le\theta J_{tX}(u^\dagger)+(1-\theta)J_{tX}(u_{tX})$，即

$$\frac{J_{tX}(\theta u^\dagger+(1-\theta)u_{tX})-J_{tX}(u^\dagger)}{\theta}\le J_{tX}(u^\dagger)-J_{tX}(u_{tX})<0.$$

这与 $\dfrac{d}{d\theta}J_{tX}(u_{tX}+\underline{\theta(u^\dagger-u_{tX})})\Big|_{\theta=0}=0$ 矛盾。 ■

我们指出，根据假设 A(v) 的 (3.9) 和反函数定理，存在唯一的 $u(x,z)$，使得对于任意 $x,\ z\in\mathbb{R}^n$， $l_v(x,u(x,z))+z=0$。此外，如前所述， $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}_m)$ 与 $L^2_{\mathcal{W}_t}(t,T;\mathrm{H}_{X\otimes m})$ 等距同构，因此存在可测随机场 $\mathbb{Y}_{t\xi}(s)$、$\mathbb{Z}_{t\xi}(s)$、$u_{t\xi}(s)$、$\mathrm{r}_{t\xi,j}(s)\in L^2_{\mathcal{W}_t}(t,T;\mathrm{H}_{X_t\otimes m})$，使得 $\mathbb{Y}_{tX}(s)=\mathbb{Y}_{t\xi}(s)\big|_{\xi=X}$、 $\mathbb{Z}_{tX}(s)=\mathbb{Z}_{t\xi}(s)\big|_{\xi=X}$、 $u_{tX}(s)=u_{t\xi}(s)\big|_{\xi=X}$、$\mathrm{r}_{tX,j}(s)=\mathrm{r}_{t\xi,j}(s)\big|_{\xi=X}$。这些随机场 $\mathbb{Y}_{t\xi}(s)\ \mathbb{Z}_{t\xi}(s)\ u_{t\xi}(s)$、$\mathrm{r}_{t\xi,j}(s)$ 是下列正倒向随机微分方程组的解，其中 $s\in[t,T]$,

$$\begin{cases}\mathbb{Y}_{t\xi}(s)=\xi+\int_t^s u_{t\xi}(\tau)d\tau+\eta(w(s)-w(t)), & (3.37)\\ \mathbb{Z}_{t\xi}(s)=h_x(\mathbb{Y}_{t\xi}(T))+D_XF_T(\mathbb{Y}_{t\bullet}(T)\otimes(X\otimes m)) & (3.38)\\ \qquad\qquad +\int_s^T\Big[l_x\big(\mathbb{Y}_{t\xi}(\tau),u_{t\xi}(\tau)\big)+D_XF(\mathbb{Y}_{t\bullet}(\tau)\otimes(X\otimes m))\Big]d\tau-\int_s^T\sum_{j=1}^n\mathbb{r}_{t\xi,j}(\tau)dw_j(\tau),\end{cases}$$

满足 $l_v(\mathbb{Y}_{t\xi}(s)\ u_{t\xi}(s))+\mathbb{Z}_{t\xi}(s)=0$. 我们注意到， $\mathbb{Y}_{t\xi}(s)\ \mathbb{Z}_{t\xi}(s)\ u_{t\xi}(s)\mathbb{r}_{t\xi,\ j}(s)$ 在时刻仅依赖于 $m\qquad t$,

仅通过 $X \otimes m = X_t \otimes m$.

注3.7。 方程 *(3.34)-(3.36)* 仅在一个零测集之外定义。如果我们考虑无穷多个随机变量 X，这些过程可能无法定义。通过在 *(3.37)-(3.38)* 中考虑确定性的 ξ，我们令 $\xi = X$，从而避免了这类可测性问题。

我们可以表示值函数

$$\begin{aligned} V(X \otimes m, t) = \int_t^T \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} l\big(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)\big)\, dm(x) ds\right] + \int_t^T F(\mathbb{Y}_{tX}(s) \otimes m) ds \\ + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbb{Y}_{tX}(T)) dm(x)\right] + F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T) \otimes m). \end{aligned} \tag{3.39}$$

该量仅取决于概率测度 $X \otimes m = X_t \otimes m$ 和 $t.$，可写为如下形式。

$$\begin{aligned} V(X \otimes m, t) = \int_t^T \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} l\big(\mathbb{Y}_{t\xi}(s), u_{t\xi}(s)\big)\, d\big(X \otimes m\big)(\xi)\right] + \int_t^T F(\mathbb{Y}_{t\cdot}(s) \otimes (X \otimes m)) ds \\ + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbb{Y}_{t\xi}(T)) d\big(X \otimes m\big)(\xi)\right] + F_T(\mathbb{Y}_{t\cdot}(T) \otimes (X \otimes m)). \end{aligned} \tag{3.40}$$

注*3.8*。我们可以扩大 $L^2(t,T;H_m)$中的控制子空间，使 u_{tX}仍然保持最优；这样做有助于第*4*至*5*节中相关比较原理以及 $X \longmapsto V(X \otimes m, t)$~正则性的研究：在 H_m中引入一个额外的初始元素，记为 X，它也独立于 W_t~，但不一定与 X独立。为此，定义 σ-代数 $W^s_{tX\tilde{X}} = \sigma(X, X) \bigvee W^s_t$以及由所有 σ-代数 $W^s_{tX\tilde{X}}$生成的滤过 $W_{tX\tilde{X}} := W^T_{tX\tilde{X}}$，其中 $s \in [t,T]$取遍所有可能值。如果我们将控制空间从$L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;H_m)$改为$L^2_{\mathcal{W}_{tX\tilde{X}}}(t,T;H_m)$，容易验证，方程*(3.34)*、*(3.35)*和*(3.36)*所构成的系统仍满足控制问题的最优性必要条件，只是现在使用扩大的 σ-代数；根据最优性必要条件解的唯一性，最优控制仍与之前相同，只不过现在我们可以在扩大的 σ-代数上解释该解，而所有公式均保持不变。当然，除了~添加一个 X之外，也可以添加有限个 H_m中的元素，只要它们都独立于 W_t。

3.5 正倒向随机微分方程 (3.34)-(3.36) 解的正则性及其雅可比流

现在我们给出 $\mathbb{Y}_{tX}(s)$ $\mathbb{Z}_{tX}(s)$ $u_{tX}(s)$，$\mathbb{r}_{tX,\ j}(s)$ 的上界。

命题 3.9 (**正倒向随机微分方程解的界**)。在命题 *3.5* 的假设下，对于任意 $X \in H_m$ 关于 W^t_0 可测的以及 $s \in (t,T)$，正倒向随机微分方程 *(3.34)-(3.36)* 在 $[t,T]$ 上的解四元组 $\big(\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \mathbb{Z}_{tX}(s)\ u_{tX}(s),\ \mathbb{r}_{tX,\ j}(s)\big)$ 满足

$$\|\mathbb{Y}_{tX}(s)\|_{\mathcal{H}_m},\ \|\mathbb{Z}_{tX}(s)\|_{\mathcal{H}_m},\ \|u_{tX}(s)\|_{\mathcal{H}_m},\ \left[\sum_{j=1}^n \int_t^T \big\|\mathbb{r}_{tX,j}(s)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} ds\right]^{1/2} \leq C_4\big(1 + \|X\|_{\mathcal{H}_m}\big), \tag{3.41}$$

其中 C_4 为 仅依赖于 n、 λ、 η、 c、 c_l、 c_h、 c_T、 c'、 c'_l、 c'_h、 c'_T 和 T 的正常数 .

证明。 为简便起见，在不致引起歧义的情况下，我们省略 tX 在 $\mathbb{Y}_{tX}(s)$、 $\mathbb{Z}_{tX}(s)$、 $u_{tX}(s)$ 和$\mathbb{r}_{tX}(s)$中的下标。回顾描述 $\mathbb{Z}(s)$ 动力学的 (3.35) 以及刻画 $\mathbb{Z}(s)$ 的 (3.36)，应用

乘积法则可得

$$d\Big\langle \mathbb{Z}(s), \mathbb{Y}(s) - \eta(w(s) - w(t)) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} = -\Big\langle l_x(\mathbb{Y}(s), u(s)) + D_X F(\mathbb{Y}(s) \otimes m), \mathbb{Y}(s) - \eta\big(w(s) - w(t)\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds - \Big\langle l_v(\mathbb{Y}(s), u(s)), u(s) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds.$$

从 t 积分到 T，我们得到

$$\begin{aligned} \big\langle \mathbb{Z}(t), X \big\rangle_{\mathcal{H}_m} = & \int_t^T \Big\langle l_v(\mathbb{Y}(s), u(s)), u(s) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds + \int_t^T \Big\langle l_x(\mathbb{Y}(s), u(s)) + D_X F(\mathbb{Y}(s) \otimes m), \mathbb{Y}(s) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ & - \int_t^T \Big\langle l_x(\mathbb{Y}(s), u(s)) + D_X F(\mathbb{Y}(s) \otimes m), \eta\big(w(s) - w(t)\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ & + \Big\langle h_x(\mathbb{Y}(T)) + \ D_X F_T(\mathbb{Y}(T) \otimes m), \mathbb{Y}(T) - \eta\big(w(T) - w(t)\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

另一方面，利用（3.35）中关于 $\mathbb{Z}(s)$ 动态变化的定义，我们可以看到

$$\big\langle \mathbb{Z}(t), X \big\rangle_{\mathcal{H}_m} = \left\langle \int_t^T l_x(\mathbb{Y}(s), u(s)) + D_X F(\mathbb{Y}(s) \otimes m) ds, X \right\rangle_{\mathcal{H}_m} + \Big\langle h_x(\mathbb{Y}(T)) + \ D_X F_T(\mathbb{Y}(T) \otimes m), X \Big\rangle_{\mathcal{H}_m}. \tag{3.43}$$

因此，将（3.43）式从（3.42）式中相减，我们得到

$$\begin{aligned} 0 = & \int_t^T \Big\langle l_v(\mathbb{Y}(s), u(s)), u(s) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds + \int_t^T \Big\langle l_x(\mathbb{Y}(s), u(s)) + D_X F(\mathbb{Y}(s) \otimes m), \mathbb{Y}(s) - X - \eta\big(w(s) - w(t)\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ & + \Big\langle h_x(\mathbb{Y}(T)) + \ D_X F_T(\mathbb{Y}(T) \otimes m), \mathbb{Y}(T) - X - \eta\big(w(T) - w(t)\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \end{aligned} \tag{3.44}$$

经过望远镜求和后，我们得到

$$\begin{aligned} 0 = & \int_t^T \Big\langle l_v(\mathbb{Y}(s), u(s)) - l_v(X + \eta(w(s) - w(t)), 0), u(s) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ & + \int_t^T \Big\langle l_x(\mathbb{Y}(s), u(s)) - l_x(X + \eta(w(s) - w(t)), 0) + D_X F(\mathbb{Y}(s) \otimes m) - D_X F((X + \eta(w(s) - w(t))) \otimes m), \\ & \qquad \mathbb{Y}(s) - X - \eta\big(w(s) - w(t)\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ & + \Big\langle h_x(\mathbb{Y}(T)) - h_x\big(X + \eta\big(w(T) - w(t)\big)\big) + D_X F_T(\mathbb{Y}(T) \otimes m) - D_X F_T\big((X + \eta(w(T) - w(t))) \otimes m\big), \\ & \qquad \mathbb{Y}(T) - X - \eta(w(T) - w(t)) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\ & + \int_t^T \Big\langle l_v(X + \eta(w(s) - w(t)), 0), u(s) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ & + \int_t^T \Big\langle l_x(X + \eta(w(s) - w(t)), 0) + D_X F((X + \eta(w(s) - w(t))) \otimes m), \mathbb{Y}(s) - X - \eta\big(w(s) - w(t)\big) \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ & + \left\langle h_x\big(X + \eta\big(w(T) - w(t)\big)\big) + D_X F_T\big((X + \eta(w(T) - w(t))) \otimes m\big), \int_t^T u(s) ds \right\rangle_{\mathcal{H}_m}. \end{aligned}$$

由中值定理以及假设 **A(iii)** 的 **(3.7)**、**A(iv)** 的 **(3.9)**、**A(vi)** 的 **(3.10)** 和 **B(i)** 的 **(3.22)**，可得

$$\begin{aligned}\lambda\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\le{}&(c_l'+c')\int_t^T\|\mathbb{Y}(s)-X-\eta(w(s)-w(t))\|_{\mathcal{H}_m}^2ds+(c_h'+c_T')\left\|\int_t^T u(s)ds\right\|_{\mathcal{H}_m}^2\\&+c_l\big(1+\|X+\eta(w(T)-w(t))\|_{\mathcal{H}_m}\big)\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}ds\\&+(c_l+c)\big(1+\|X+\eta(w(T)-w(t))\|_{\mathcal{H}_m}\big)\int_t^T\|\mathbb{Y}(s)-X-\eta(w(s)-w(t))\|_{\mathcal{H}_m}ds\\&+(c_h+c_T)\big(1+\|X+\eta(w(T)-w(t))\|_{\mathcal{H}_m}\big)\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}ds.\end{aligned}$$

进一步应用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}\lambda\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\le{}&(c_l'+c')_+\frac{T^2}{2}\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds+\left[(c_h'+c_T')_++\frac{1}{4\kappa_4}\right]T\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\\&+\kappa_4c_l^2\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}+\|\eta(w(T)-w(t))\|_{\mathcal{H}_m}\big)^2\\&+\kappa_5(c_l+c)^2\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}+\|\eta(w(T)-w(t))\|_{\mathcal{H}_m}\big)^2+\frac{T^2}{4\kappa_5}\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\\&+\kappa_6(c_h+c_T)^2\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}+\|\eta(w(T)-w(t))\|_{\mathcal{H}_m}\big)^2+\frac{T}{4\kappa_6}\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds,\end{aligned}$$

对于之后确定的某些正常数 κ_i，其中 $i=3$，4，5，6。这等价于

$$\begin{aligned}&\left\{\lambda-\left[(c_h'+c_T')_++\frac{1}{4\kappa_4}+\frac{T}{4\kappa_5}+\frac{1}{4\kappa_6}\right]T-(c_l'+c')_+\frac{T^2}{2}\right\}\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\\&\le\kappa_4c_l^2\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}+|\eta|\sqrt{nT}\big)^2+\kappa_5(c_l+c)^2\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}+|\eta|\sqrt{nT}\big)^2+\kappa_6(c_h+c_T)^2\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}+|\eta|\sqrt{nT}\big)^2\\&\le2\big[\kappa_4c_l^2+\kappa_5(c_l+c)^2+\kappa_6(c_h+c_T)^2\big]\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2+4\big[\kappa_4c_l^2+\kappa_5(c_l+c)^2+\kappa_6(c_h+c_T)^2\big](1+|\eta|^2nT).\end{aligned}\tag{3.45}$$

取适当的 κ_i 使得 $i=3$，4，5，6，并利用（3.30）确保（3.45）第一行中的系数严格为正，由此我们得出结论：

$$\int_t^T\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\le A_1\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2\big),\tag{3.46}$$

对于某个 $A_1>0$，它取决于 n、λ、η、c、c_l、c_h、c_T、c'、c_l'、c_h'、c_T' 和 T。接下来，由 **(3.34)** 中 $\mathbb{Y}(s)$ 的动力学可得，

$$\|\mathbb{Y}(s)-X\|_{\mathcal{H}_m}^2\le(s-t)(1+\kappa_7)\int_t^T\|u(\tau)\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau+n|\eta|^2(s-t)\left(1+\frac{1}{\kappa_7}\right),\tag{3.47}$$

对于某个 $\kappa_7>0$。对 s 积分 **(3.47)**，得到

$$\int_t^T\|\mathbb{Y}(s)-X\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\le\frac{(1+\kappa_7)T^2}{2}\int_t^T\|u(\tau)\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau+\frac{n|\eta|^2T^2}{2}\left(1+\frac{1}{\kappa_7}\right).\tag{3.48}$$

由 (3.46) 和 (3.47)，可推得

$$\sup_{s\in(t,T)}\|\mathbb{Y}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 \le 2\sup_{s\in(t,T)}\|\mathbb{Y}(s)-X\|_{\mathcal{H}_m}^2+2\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2 \le A_2\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2\big). \tag{3.49}$$

由 (3.29) 和 (2.35) 中的伊藤公式可得

$$\frac{d}{ds}\|\mathbb{Z}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 = -2\Big\langle \mathbb{Z}(s), l_x\big(\mathbb{Y}(s),u(s)\big)+D_XF(\mathbb{Y}(s)\otimes m)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}+\sum_{j=1}^n\|\mathbb{r}_j(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2$$

从而

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{Z}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2+\sum_{j=1}^n\int_s^T\|\mathbb{r}_j(\tau)\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau\\ &\quad=\big\|h_x(\mathbb{Y}(T))+D_XF_T(\mathbb{Y}(T)\otimes m)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2+2\int_s^T\Big\langle\mathbb{Z}(\tau),l_x(\mathbb{Y}(\tau),u(\tau))+D_XF(\mathbb{Y}(\tau)\otimes m)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau.\end{aligned}$$

利用假设 **A(i)** 的 (3.5)、**A(iii)** 的 (3.7)、**B(i)** 的 (3.22) 以及 (3.36)，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{s\in(t,T)}\|\mathbb{Z}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2+\sum_{j=1}^n\int_t^T\|\mathbb{r}_j(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds \\ &\le 2(c_h^2+2c_T^2)\big(1+\|Y(T)\|_{\mathcal{H}_m}^2\big)+3c_l^2\int_t^T1+\|\mathbb{Y}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2+\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds+4c^2\int_t^T1+\|\mathbb{Y}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2ds.\end{aligned} \tag{3.50}$$

利用 (3.49) 和 (3.46)，可得所需的 $\sup_{s\in(t,T)}\|\mathbb{Z}(s)\|^2{}_{\mathcal{H}_m}$ 和 $\sum_{j=1}^n\int_t^T\|\mathbb{r}_j(s)\|^2{}_{\mathcal{H}_m}ds$ 的上界。最后，由 (3.36)、假设 (3.5)、(3.9) 以及杨氏不等式，可得

$$\lambda\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2\le\frac{\lambda}{4}\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2+\frac{c_l^2}{\lambda}\big(1+\|\mathbb{Y}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2\big)+\frac{1}{\lambda}\|\mathbb{Z}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2+\frac{\lambda}{4}\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2. \tag{3.51}$$

(3.49) 和 (3.50) 的结果表明

$$\sup_{s\in(t,T)}\|u(s)\|_{\mathcal{H}_m}\le A_3\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}\big). \tag{3.52}$$

这就完成了命题 3.9 的证明。 ■

给定 $X,\Psi\in L^2\,\mathcal{w}_t^{\perp}(\mathcal{H}_m)\subset\mathcal{H}_m$，我们旨在考察解关于初始条件 X 沿方向 Ψ 的盖托导数在 $[t,T]$ 上是否存在。定义 $\mathcal{W}_{tX\Psi}^s:=\sigma(X,\Psi)\bigvee\mathcal{W}_t^s$，并将由 σ-代数 $\mathcal{W}_{tX\Psi}^s$ 生成的滤过记为 $\mathcal{W}_{tX\Psi}$。对于 $\epsilon>0$，我们定义差过程

$$\begin{aligned}\Delta_\Psi^\epsilon\mathbb{Y}_{tX}(s)&:=\frac{\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(s)-\mathbb{Y}_{tX}(s)}{\epsilon},\ \Delta_\Psi^\epsilon\mathbb{Z}_{tX}(s):=\frac{\mathbb{Z}_{t,X+\epsilon\Psi}(s)-\mathbb{Z}_{tX}(s)}{\epsilon},\\ \Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(s)&:=\frac{u_{t,X+\epsilon\Psi}(s)-u_{tX}(s)}{\epsilon},\ \Delta_\Psi^\epsilon\mathbb{r}_{tX,j}(s):=\frac{\mathbb{r}_{t,X+\epsilon\Psi,j}(s)-\mathbb{r}_{tX,j}(s)}{\epsilon}.\end{aligned} \tag{3.53}$$

接下来，我们旨在对它们进行界定。

引理 3.10. 设 $X,\ \Psi \in L^2\mathcal{W}_t^{\amalg}(H_m) \subset H_m,\ \epsilon > 0$ 和 $s \in [t,T]$。在命题 *3.5* 的假设下，式 *(3.53)* 中定义的差过程满足

$$\left\|\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m},\ \left\|\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Z}_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m},\ \left\|\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m},\ \left[\sum_{j=1}^n \int_t^T \left\|\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{r}_{tX,j}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds\right]^{1/2} \le C_4' \|\Psi\|_{\mathcal{H}_m}, \tag{3.54}$$

其中，C_4'是仅依赖于 λ、η、c、c_l、c_h、c_T、c'、c_l'、c_h'、c_T'和 T的正常数。

注 3.11. 我们强调，C_4' 与 ϵ的选取无关。

证明*fen*From (3.34)-(3.36), the quadruple $\left(\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(s), \Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Z}_{tX}(s), \Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(s), \Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{r}_{tX}(s)\right)$ solves the syst

$$\begin{cases}
\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(s) = \Psi + \int_t^s \Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau)d\tau; & (3.55)\\
\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Z}_{tX}(s) = \int_0^1 h_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T) \\
\qquad\qquad + D_X^2 F_T\big((\mathbb{Y}_{tX}(T) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T)) \otimes m\big)(\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta \\
\quad + \int_s^T \int_0^1 l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau) \\
\qquad\qquad + l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(\tau), u_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau)\big)\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau)d\theta d\tau \\
\quad + \int_s^T \int_0^1 D_X^2 F\big((\mathbb{Y}_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau)) \otimes m\big)(\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta d\tau \\
\quad - \int_s^T \sum_{j=1}^n \Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{r}_{tX,j}(\tau)dw_j(\tau), & (3.56)
\end{cases}$$

同时，

$$\int_0^1 l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(s) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)\big)\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(s) + l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(s), u_{tX}(s) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(s)\big)\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(s)d\theta + \Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Z}_{tX}(s) = 0. \tag{3.57}$$

事实上，证明过程与命题 3.9 的证明步骤相同：对内积$\left\langle \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(s)\,\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}$应用伊藤引理，并利用上述方程即可。此处略去证明。■

引理 *3.12.* 设 $X,\ \Psi \in L^2\mathcal{W}_t^{\amalg}(H_m) \subset H_m$. 在命题 *3.5* 的假设下，过程 $\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(s)\,\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(s)$ 和 $\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Z}_{tX}(s)$ 在 $L^\infty_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,T;H_m)$ 中收敛，且 $\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{r}_{tX,j}(s)$ 在 $L^2_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,T;H_m)$ 中收敛，当 $\epsilon \to 0$。它们称为正倒向随机微分方程 *(3.34)-(3.36)* 解的雅可比流（盖托导数）。$\left(\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(s)、\ \Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Z}_{tX}(s)、\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{r}_{tX,j}(s)\right)$ 的极限是下列替代正倒向随机微分方程在 $L^2_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,T;H_m)$ 中的唯一解

$$\begin{cases}
D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s) = \Psi + \int_t^s \Big[D_y u(\mathbb{Y}_{tX},\mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]\Big[D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau)\Big]d\tau + \int_t^s \Big[D_z u(\mathbb{Y}_{tX},\mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]\Big[D\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(\tau)\Big]d\tau; \\
D\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(s) = h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T) + D_X^2 F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)(D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)) \\
\qquad + \int_s^T \Big\{l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u(\tau))D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau) + l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u(\tau))\Big[D_y u(\mathbb{Y}_{tX},\mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau) \\
\qquad\qquad + l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u(\tau))\Big[D_z u(\mathbb{Y}_{tX},\mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]D\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(\tau) + D_X^2 F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\big(D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau)\big)\Big\}d\tau \\
\qquad - \int_s^T \sum_{j=1}^n D\mathbb{r}_{tX,j}^\Psi(\tau)dw_j(\tau),
\end{cases} \tag{3.58}$$

注 3.13. 我们称满足一阶条件 *(3.36)* 的控制过程 $u_{tX}(s)$ 是一个映射 $u(y,z)$，在$(y,z)=(\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \mathbb{Z}_{tX}(s))$ 处取值，使得它由方程 $l_v(y,u(y,z))+z=0$ 隐式确定。关于第一和第二个自变量的雅可比矩阵 $D_y u$ 和 $D_z u$分别有界于

$$|D_y u| \le \frac{c_l}{\lambda} \qquad and \qquad |D_z u| \le \frac{1}{\lambda},$$

这可以通过对一阶条件 *(3.36)* 求导来验证。

引理 3.12 的证明见附录。

引理 *3.14.* 设 $X,\ \Psi \in L^2\mathcal{W}_t^{\amalg}(\mathcal{H}_m) \subset \mathcal{H}_m$ *and* $s\in[t,T]$。在命题 *3.5* 的假设下，雅可比流 $\big(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(s)\ D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi}(s)\ Du_{tX}^{\Psi}(s)\ D\mathbb{r}_{tX,j}^{\Psi}(s)\big)$ 关于 Ψ 是线性的，并且对于给定的 Ψ，它们各自在 X 上部分连续。因此，它们的弗雷歇导数均存在，分别记为 $D\mathbb{Y}_{tX}(s)\ D\mathbb{Z}_{tX}(s)\ Du_{tX}(s), D\mathbb{r}_{tX,j}(s)$。

证明见附录。

4 值函数及其泛函导数的正则性

本节中，四元组 $(\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \mathbb{Z}_{tX}(s)\ u_{tX}(s),\ \mathbb{r}_{tX}(s))$ 是正倒向随机微分方程 (3.34)-(3.36) 的解，而 $V(X\otimes m,\ t)$ 是式 (3.39) 中定义的相应值函数。

4.1 值函数及其导数的增长性与正则性

由于运行成本泛函和终端成本泛函在 x 中呈二次增长，值函数在 X 中也具有相同的增长性。

命题 4.1 (**的二次增长** V**在** X**)**。在命题 *3.5* 的假设下，对于任意 $X\in\mathcal{H}_m$可测的 $\mathcal{W}_0^t$，我们有

$$|V(X\otimes m,t)| \le C_5\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2\big), \tag{4.1}$$

其中 C_5 是一个正常数，仅依赖于 n、 λ、 η、 c、 c_l、 c_h、 c_T、 c'、 c'_l、 c'_h、 c'_T 和 T。

证明。回顾公式 (3.39)，值函数可写为

$$V(X\otimes m,t)=\int_t^T \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} l\big(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s)\big)dm(x)\right]+F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)ds+\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbb{Y}_{tX}(T))dm(x)\right]+F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m).$$

应用假设 **A(i)** 的 (3.5)、**A(iii)** 的 (3.7)、(3.21)，以及命题 3.9 中 $\mathbb{Y}_{tX}$、 u_{tX} 的界，我们便可推出估计式 (4.1)。■

接下来，我们得到关于 $X\in L^2\mathcal{W}_t^{\amalg}(\mathcal{H}_m)$ 的导数 $D_X V(X\otimes m,t)$ 的 Lipschitz 性质，该导数在 (2.36) 中定义。

命题 4.2 (**在 中的 Lipschitz 连续性** $D_X V$ **在** X**)**。 在命题 *3.5* 的假设下，泛函 $X \in L^2\, \mathcal{W}_t^{\amalg}(\boldsymbol{H}_m) \longmapsto V(X \otimes m, t)$ 是 ***Fréchet*** 可微的，并且

$$D_X V(X \otimes m, t) = \mathbb{Z}_{tX}(t). \tag{4.2}$$

此外，对于任意 $X^1, X^2 \in L^2\, \mathcal{W}_t^{\amalg}(\boldsymbol{H}_m)$，导数是 ***Lipschitz*** 连续的，使得

$$\left\| D_X V(X^1 \otimes m, t) - D_X V(X^2 \otimes m, t) \right\|_{\mathcal{H}_m} \leq C_6 \left\| X^1 - X^2 \right\|_{\mathcal{H}_m}, \tag{4.3}$$

其中 C_6 仅取决于 λ, c, c_l, c_h, c_T, c', c'_h, c'_T, c'_l和 T。

证明见附录。根据第 5.1 节提到的最优性原理，我们有时间一致性，即对于带有初始条件（$s, \mathbb{Y}_{tX}(s)$)的问题，控制 $u_{tX}(\tau)$（对于 $\tau \in [s, T)$，且满足 $s \in [t, T)$）仍然是最优的，因此我们还有

$$D_X V(\mathbb{Y}_{tX}(s) \otimes m, s) = \mathbb{Z}_{s\mathbb{Y}_{tX}(s)}(s) = \mathbb{Z}_{tX}(s), \tag{4.4}$$

根据流性质 (5.2)。接下来我们讨论值函数及其导数关于时间的正则性。

命题 4.3 (**关于** V**和** $D_X V$**的时间 Hölder 连续性)**。在命题 *3.5* 的假设下，对于任意 $X \in L^2\, \mathcal{W}_t^{\amalg}(\boldsymbol{H}_m)$ 以及 $t_1, t_2 \in [0, T]$,

$$\left| V(X \otimes m, t_1) - V(X \otimes m, t_2) \right| \leq C_7 (1 + \|X\|^2_{\mathcal{H}_m}) \left| t_1 - t_2 \right| \quad \textit{and} \tag{4.5}$$

$$\left\| D_X V(X \otimes m, t_1) - D_X V(X \otimes m, t_2) \right\|_{\mathcal{H}_m} \leq C_8 \Big(\left| t_1 - t_2 \right|^{\frac{1}{2}} + \|X\|_{\mathcal{H}_m} |t_1 - t_2| \Big), \tag{4.6}$$

其中， C_7 和 C_8 仅依赖于 n、 λ、 η、 c、 c_l、 c_h、 c_T、 c'、 c'_l、 c'_h、 c'_T 和 T。

证明见附录。

注 4.4. 对于 $t_1 < t_2$，由于 $\mathbb{Z}_{t_1 X}(t_2) = \mathbb{Z}_{t_2, \mathbb{Y}_{t_1 X}(t_2)}(t_2)$ （见 *(5.2)*），结合 *(4.2)*、*(4.3)*、*(4.6)* 和 *(3.47)*，我们有 $\left\| \mathbb{Z}_{t_1 X}(t_2) - \mathbb{Z}_{t_2 X}(t_2) \right\|_{\mathcal{H}_m} \leq C_6 \left\| \mathbb{Y}_{t_1 X}(t_2) - X \right\|_{\mathcal{H}_m}$ 以及 $\left\| \mathbb{Z}_{t_1 X}(t_2) - \mathbb{Z}_{t_1 X}(t_1) \right\|_{\mathcal{H}_m} \leq C'_8 \Big(\left| t_1 - t_2 \right|^{\frac{1}{2}} + |t_1 - t_2| \|X\|_{\mathcal{H}_m} \Big)$。

4.2 二阶盖托导数

在以下命题中，我们通过雅可比流刻画值函数的二阶盖托导数，将其视为 (3.58) 中后向方程的解。

命题 4.5. 设 $X, \Psi \in \boldsymbol{H}_m \in L^2\, \mathcal{W}_t^{\amalg}(\boldsymbol{H}_m)$。在假设 *(3.5)-(3.10)*、*(3.21)-(3.27)* 和 *(3.30)* 下，值函数 $V(X \otimes m, t)$ 关于 X 的二阶盖托导数为

$$D_X^2 V(X \otimes m, t)(\Psi) = D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi}(t) \quad \textit{and} \tag{4.7}$$

$$\left\| D_X^2 V(X \otimes m, t)(\Psi) \right\|_{\mathcal{H}_m} \leq C_9 \|\Psi\|_{\mathcal{H}_m}, \tag{4.8}$$

其中 C_9 是一个正常数，仅取决于 $n, \lambda, \eta, c, c_l, c_h, c_T, c', c'_l, c'_h, c'_T$ 和 T。

证明。由于命题 4.2，$\mathbb{Z}_{tX}(t) = D_X V(X \otimes m, t)$，对等式两边求导，并利用 (2.21) 中 Gâteaux 二阶导数的定义以及引理 3.12 中的强收敛，我们得到

$$\begin{aligned}\left\langle D_X^2 V(X \otimes m, t)(\Psi), \Psi \right\rangle_{\mathcal{H}_m} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\langle D_X V((X + \epsilon\Psi) \otimes m, t) - D_X V(X \otimes m, t), \Psi \right\rangle_{\mathcal{H}_m} = \lim_{\epsilon \to 0} \left\langle \Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Z}_{tX}(t), \Psi \right\rangle_{\mathcal{H}_m} \\ &= \left\langle D\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(t), \Psi \right\rangle_{\mathcal{H}_m},\end{aligned}$$

结合 (3.54) 中的界取极限，我们还得到 (4.8) 中的上界。 ■

接下来，我们陈述二阶导数的其他逐点连续性性质，它与 (2.41) 类似，具体如下：

命题 4.6。设 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是一个递减至 $t \in [0, T)$ 的序列。假设 $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 和 $\{\Psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是分别收敛至 X 和 Ψ 的 $\boldsymbol{H}_m$ 中的序列，且每个 $X_k, \Psi_k \in L^2\, \mathcal{W}_{t_k}^{\amalg}(\boldsymbol{H}_m)$。在命题 *4.5* 的假设下，我们有

$$D_X^2 V(X_k \otimes m, t_k)(\Psi_k) \longrightarrow D_X^2 V(X \otimes m, t)(\Psi) \quad in\ \mathcal{H}_m. \tag{4.9}$$

注 4.7。因此，作 用柯西-施瓦茨不等式，我们可以推出 L^1-收敛

$$D_X^2 V(X_k \otimes m, t_k)(\Psi_k) - D_X^2 V(X \otimes m, t_k)(\Psi_k) \longrightarrow 0 \quad in\ L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; L_m^1(\mathbb{R}^n));$$

事实上，该量

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left[\left| D_X^2 V(X_k \otimes m, t_k)(\Psi_k) - D_X^2 V(X \otimes m, t_k)(\Psi_k) \right|\right] dm(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left[\left| D_X^2 V(X_k \otimes m, t_k)(\Psi_k) - D_X^2 V(X \otimes m, t)(\Psi) \right| + \left| D_X^2 V(X \otimes m, t)(\Psi) - D_X^2 V(X \otimes m, t_k)(\Psi_k) \right|\right] dm(x) \\ &\leq \left\| D_X^2 V(X_k \otimes m, t_k)(\Psi_k) - D_X^2 V(X \otimes m, t)(\Psi) \right\|_{\mathcal{H}_m} + \left\| D_X^2 V(X \otimes m, t)(\Psi) - D_X^2 V(X \otimes m, t_k)(\Psi_k) \right\|_{\mathcal{H}_m}\end{aligned}$$

当 $k \to \infty$ 时趋于零。这种 L^1-收敛确保了在第 *5* 节中有效应用伊藤引理（定理 *2.2*）。

命题 4.6 的证明见附录。

4.3 线性泛函导数

在前面的讨论中，我们使用过程 $\mathbb{Y}_{tX}(s)$、$\mathbb{Z}_{tX}(s)$、$u_{tX}(s)$、$\mathbb{r}_{tX,j}(s)$ 的记号，以强调其对初始随机变量 X 的依赖。在本节中，我们取 $X = \mathcal{I}_x = x$，并将过程 $\mathbb{Y}_{t\mathcal{I}}(s)$、$\mathbb{Z}_{t\mathcal{I}}(s)$、$u_{t\mathcal{I}}(s)$、$\mathbb{r}_{t\mathcal{I}\,j}(s)$ 记为 $\mathbb{Y}_{txm}(s)$、$\mathbb{Z}_{txm}(s)$、$u_{txm}(s)$、$\mathbb{r}_{txm,j}(s)$，以强调其对初始分布 m 和初始点 x 的依赖。采用新记号后，系统 (3.34)-

(3.36) 可以改写为

$$\begin{cases} \mathbb{Y}_{txm}(s) = x + \int_t^s u_{txm}(\tau)d\tau + \eta(w(s) - w(t)); & (4.10) \\ \mathbb{Z}_{txm}(s) = h_x(\mathbb{Y}_{txm}(T)) + D_x\dfrac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{txm}(T)\big) \\ \qquad\qquad + \int_s^T l_x\big(\mathbb{Y}_{txm}(\tau), u_{txm}(\tau)\big) + D_x\dfrac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{txm}(\tau)\big)d\tau - \int_s^T \sum_{j=1}^n \mathbb{r}_{txm,j}(\tau)dw_j(\tau); & (4.11) \end{cases}$$

满足

$$l_v\big(\mathbb{Y}_{txm}(s), u_{txm}(s)\big) + \mathbb{Z}_{txm}(s) = 0. \tag{4.12}$$

命题 3.9 表明，由于当 x 较大时， $1+|x|^2$ 与 $(1+|x|)^2$ 渐近相同，因此对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $s \in [t,T]$，期望值 $\mathbb{E}\left[(v_{tx}(\frac{s}{\sqrt{1+|x|^2}}))\right]$ 有限，从而~~对每~~个 $s \in [t,T]$，$\frac{v_{tx}}{\sqrt{1+|x|^2}}$ ~~$\in L^2$~~( ) 属于 $(\Omega, \mathrm{A}\ \mathbb{P};\ \mathbb{R}^n)$。因此，对于几乎处处固定的 $x \in \mathbb{R}^n$，过程 $\frac{v_{tx}}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^\infty(t,T;\ L^2$ 属于 $(\Omega, \mathrm{A}\ \mathbb{P};\ \mathbb{R}^n))$。因此，最优控制 u_{txm} 属于空间 $L^2_m\big(\mathbb{R}^n;\ L^\infty(t,T;\ L^2(\Omega, \mathrm{A}\ \mathbb{P};\ \mathbb{R}^n))\big)$，并且对每个 $m \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}^n)$，它是 x 的函数。为了研究第 5 节中的主方程，有必要考虑值函数关于 m 的线性泛函导数。显然 $\mathrm{I}_x \otimes m = m$，我们写作 $V(m,t) = V(\mathrm{I}\otimes m, t)$，其表达式为

$$V(m,t) = \int_t^T \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} l\big(\mathbb{Y}_{txm}(s), u_{txm}(s)\big)dm(x)\right] + F(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s)\otimes m)ds + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbb{Y}_{txm}(T))dm(x)\right] + F_T(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m). \tag{4.13}$$

回顾命题 4.2， V 的盖托导数等于

$$D_X V(m,t) = D_X V(X\otimes m)\Big|_{X=\mathcal{I}} = \mathbb{Z}_{t\mathcal{I}}(t) = \mathbb{Z}_{txm}(t). \tag{4.14}$$

接下来，我们想讨论线性泛函导数 $\frac{dV}{d\nu}(m,\ t)$。

命题 4.8。 在命题 4.5的假设下，值函数 $V(m,t)$ 具有线性泛函导数 $\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x)$ ，满足

(a)

$$\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x) = \int_t^T \left\{\mathbb{E}\big[l(\mathbb{Y}_{txm}(s), u_{txm}(s))\big] + \mathbb{E}\left[\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s)\otimes m)(\mathbb{Y}_{txm}(s))\right]\right\}ds + \mathbb{E}\big[h(\mathbb{Y}_{txm}(T))\big] + \mathbb{E}\left[\frac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)(\mathbb{Y}_{txm}(T))\right], \tag{4.15}$$

其中所有期望 $\mathbb{E}$均仅针对布朗运动取值;

(b)

$$D_x\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x) = \mathbb{Z}_{txm}(t); \tag{4.16}$$

(c)

$$\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x) = \int_0^1 \mathbb{Z}_{t,\theta x,m}(t)\cdot x d\theta + C(t), \tag{4.17}$$

其中， $C(t)$ 仅取决于 t ，而不取决于 x；如果采用归一化条件$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dV}{d\nu}(m,t)(x)dm(x) = 0$ ，则可以将其选为0 。

注 4.9。 公式 *(4.4)* 和 *(4.16)* 告诉我们，对于 $\mathbb{Z}_{txm}(s) = D_x \frac{dV}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\underline{\bullet}m}(s) \otimes m, s)(\mathbb{Y}_{txm}(s))$ 以及 $s \in (t,T]$,

证明。 由于盖托导数 $D_X V(X \otimes m, t)$ 根据命题 4.2 存在，并满足 (3.41) 中的正则性，因此线性泛函导数也存在，并由 (2.17) 给出，这是因为 [11] 中的命题 4.1。利用 (2.16) 以及 $\mathbb{Z}_{tX}(t) = D_X V(X \otimes m, t)$ 这一事实，我们知道 (4.16) 成立，通过简单的积分和中值定理可得 (4.17)。现在我们转而证明 (4.15)。

将 (4.15) 右端的函数记为 $\mathcal{S}(x,m,t)$，只需证明

$$\mathbb{Z}_{txm}(t) = D_x \mathcal{S}(x,m,t) \tag{4.18}$$

由于线性泛函导数的定义只确定到一个与 x 无关、但可能依赖于 t 的常数函数（另见 (2.5)）。为此，我们考虑如下控制问题：对于任意控制 $\alpha_{tx} \in L^2_{\mathcal{W}_t}(t, T; \mathbb{R}^n)$，状态过程满足

$$\mathbb{A}_{tx}(s) = x + \int_t^s \alpha_{tx}(\tau)d\tau + \eta(w(s) - w(t)). \tag{4.19}$$

我们的目标是最小化以下目标函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^*_{tx}(\alpha_{tx}) := \mathbb{E}\left[\int_t^T l(\mathbb{A}_{tx}(s), \alpha_{tx}(s))ds\right] + \int_t^T \mathbb{E}\left[\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s) \otimes m)(\mathbb{A}_{tx}(s))ds\right] + \mathbb{E}\big[h(\mathbb{A}_{tx}(T))\big] \\ + \mathbb{E}\left[\frac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T) \otimes m)(\mathbb{A}_{tx}(T))\right], \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中， $\mathbb{Y}_{txm}(s)$ 由系统 (4.10)-(4.12) 给出。通过与引理 3.4 类似的推导，可得最优性必要条件:

$$l_v(\mathbb{A}_{tx}(s), \alpha_{tx}(s)) + \mathbb{K}_{tx}(s) = 0, \tag{4.21}$$

其中

$$\begin{cases} -d\mathbb{K}_{tx}(s) = \Big[l_x\big(\mathbb{A}_{tx}(s), \alpha_{tx}(s)\big) + D_x \frac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s) \otimes m)\big(\mathbb{A}_{tx}(s)\big)\Big] ds - \sum_{j=1}^n \kappa_{tx,j}(s) dw_j(s), \quad \text{for } s \in [t,T]; \\ \mathbb{K}_{tx}(T) = h_x\big(\mathbb{A}_{tx}(T)\big) + D_x \frac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T) \otimes m)\big(\mathbb{A}_{tx}(T)\big), \end{cases} \tag{4.22}$$

对于某些适应过程 $\kappa_{tx,\ j}(s) \in L^2_{\mathcal{W}_t}(t, T; \mathcal{H}_m)$，其中 $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$。显然， $\mathbb{A}_{tx} = \mathbb{Y}_{txm}$、 $\mathbb{K}_{tx} = \mathbb{Z}_{txm}$、 $\alpha_{tx} = u_{txm}$、 $\kappa_{tx,\ j} = \mathbb{r}_{txm,\ j}$ 分别满足 (4.19)、(4.22) 和 (4.21)。由于根据本命题的假设，(3.30) 成立，因此目标函数 $\mathcal{S}^*_{tx}(\alpha_{tx})$ 严格凸，从而最优受控过程唯一。因此，最优控制为 $u_{txm}(s)$，最优状态为 $\mathbb{Y}_{txm}(s)$。(4.19)-(4.20) 的贝尔曼方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial s} + H(x, D_x\Phi) + \dfrac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s)\otimes m)(x) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} D_x^2\Phi\eta^j\cdot\eta^j = 0, \\ \Phi(x,T) = h(x) + \dfrac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)(x), \end{cases} \tag{4.23}$$

其中，η^j 是矩阵 η 的第 j 列向量。根据贝尔曼方程的唯一性可知，$\Phi(x,\ t) = \mathcal{S}(x,\ m,\ t)$，且 $\mathbb{Z}_{txm}(t) = D_x\mathcal{S}(x,\ m,\ t)$，由此得到 (4.18)。■

接下来，我们研究值函数 V 的线性泛函导数与 V 的二阶盖托导数之间的二阶导数及其联系。令 $X = \mathcal{I}_x = x$，与上文一样，我们采用雅可比流 $D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(s) = D\mathbb{Y}_{txm}^{\Psi}(s)$、$D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi}(s) = D\mathbb{Z}_{txm}^{\Psi}(s)$、$Du_{tX}^{\Psi}(s) = Du_{txm}^{\Psi}(s)$ 以及 $D\mathbb{r}_{tX}^{\Psi}(s) = D\mathbb{r}_{txm}^{\Psi}(s)$ 的记号，使得控制系统（3.58）可以改写为

$$\begin{cases} D\mathbb{Y}_{txm}^{\Psi}(s) = \Psi + \displaystyle\int_t^s \Big[D_y u(\mathbb{Y}_{txm},\mathbb{Z}_{txm})(\tau)\Big]\Big[D\mathbb{Y}_{txm}^{\Psi}(\tau)\Big] + \Big[D_z u(\mathbb{Y}_{txm},\mathbb{Z}_{txm})(\tau)\Big]\Big[D\mathbb{Z}_{txm}^{\Psi}(\tau)\Big]d\tau; \\ D\mathbb{Z}_{txm}^{\Psi}(s) = h_{xx}(\mathbb{Y}_{txm}(T))D\mathbb{Y}_{txm}^{\Psi}(T) + D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{txm}(T)\otimes m)(D\mathbb{Y}_{txm}^{\Psi}(T)) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_s^T \Big\{l_{xx}(\mathbb{Y}_{txm}(\tau),u(\tau))D\mathbb{Y}_{txm}^{\Psi}(\tau) + l_{xv}(\mathbb{Y}_{txm}(\tau),u(\tau))\Big[D_y u(\mathbb{Y}_{txm},\mathbb{Z}_{txm})(\tau)\Big]D\mathbb{Y}_{txm}^{\Psi}(\tau) \\ \qquad\qquad\qquad + l_{xv}(\mathbb{Y}_{txm}(\tau),u(\tau))\Big[D_z u(\mathbb{Y}_{txm},\mathbb{Z}_{txm})(\tau)\Big]D\mathbb{Z}_{txm}^{\Psi}(\tau) + D_X^2F(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(D\mathbb{Y}_{txm}^{\Psi}(\tau)\big)\Big\}d\tau \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_s^T\sum_{j=1}^{n} D\mathbb{r}_{txm,j}^{\Psi}(\tau)dw_j(\tau). \end{cases} \tag{4.24}$$

上述系统解的存在性显然由引理 3.12 得出。结果（4.7）也可以改写为

$$D\mathbb{Z}_{txm}^{\Psi}(t) = D_X^2V(m,t)(\Psi). \tag{4.25}$$

另一方面，我们考虑 $\big(\mathbb{Y}_{txm}(s)\ \mathbb{Z}_{txm}(s)\ u_{txm}(s)\mathbb{r}_{txm,j}(s)\big)$ 关于 x 的导数。例如，记号 $D_x\mathbb{Y}_{txm}(s)$ 表示一个矩阵值随机过程，其第 (i,j) 个元素为 $\big[D\mathbb{Y}_{txm}^{e_j}(s)\big]_i$，这里 e_j 的第 l 个坐标为 δ_{jl}。不引入测试随机向量 Ψ，系统（4.24）可以改写为

$$\begin{cases} D_x\mathbb{Y}_{txm}(s) = Id + \displaystyle\int_t^s \Big[D_y u(\mathbb{Y}_{txm},\mathbb{Z}_{txm})(\tau)\Big]\Big[D_x\mathbb{Y}_{txm}(\tau)\Big] + \Big[D_z u(\mathbb{Y}_{txm},\mathbb{Z}_{txm})(\tau)\Big]\Big[D_x\mathbb{Z}_{txm}(\tau)\Big]d\tau; \\ D_x\mathbb{Z}_{txm}(s) = h_{xx}(\mathbb{Y}_{txm}(T))D_x\mathbb{Y}_{txm}(T) + D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{txm}(T)\otimes m)(D_x\mathbb{Y}_{txm}(T)) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_s^T \Big\{l_{xx}(\mathbb{Y}_{txm}(\tau),u(\tau))D_x\mathbb{Y}_{txm}(\tau) + l_{xv}(\mathbb{Y}_{txm}(\tau),u(\tau))\Big[D_y u(\mathbb{Y}_{txm},\mathbb{Z}_{txm})(\tau)\Big]D_x\mathbb{Y}_{txm}(\tau) \\ \qquad\qquad\qquad + l_{xv}(\mathbb{Y}_{txm}(\tau),u(\tau))\Big[D_z u(\mathbb{Y}_{txm},\mathbb{Z}_{txm})(\tau)\Big]D_x\mathbb{Z}_{txm}(\tau) + D_X^2F(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(D_x\mathbb{Y}_{txm}(\tau)\big)\Big\}d\tau \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_s^T\sum_{k=1}^{n} D_x\mathbb{r}_{txm,k}(\tau)dw_j(\tau). \end{cases} \tag{4.26}$$

由于系统 (3.58) 的唯一性以及引理 3.14，通过比较系统 (4.24) 和 (4.26)，可得

that

$$D\mathbb{Y}^{\Psi}_{txm}(s)=D_x\mathbb{Y}_{txm}(s)\Psi\ ,D\mathbb{Z}^{\Psi}_{txm}(s)=D_x\mathbb{Z}_{txm}(s)\Psi\ ,Du^{\Psi}_{txm}(s)=D_xu_{txm}(s)\Psi\ ,D\mathbb{r}^{\Psi}_{txm,k}(s)=D_x\mathbb{r}_{txm,k}(s)\Psi, \tag{4.27}$$

其中，右侧的每一项都是梯度矩阵与随机向量 Ψ的矩阵乘积。由 (2.27) 可知

$$\begin{aligned}D^2_XF(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s)\otimes m)(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{txm}(s))&=D^2_x\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}\otimes m)(\mathbb{Y}_{txm})D\mathbb{Y}^{\Psi}_{txm}(s)\\&\quad+\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s)\otimes m)(\mathbb{Y}_{txm}(s),\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{x}m}(s))D\widetilde{\mathbb{Y}}^{\tilde{\Psi}}_{t\tilde{x}m}(s)dm(\tilde{x})\right].\end{aligned} \tag{4.28}$$

这里，$(\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{x}m}(s)\ D\widetilde{\mathbb{Y}}^{\tilde{\Psi}}_{t\tilde{x}m}(s))$ 是 $(\mathbb{Y}_{txm}(s)\ D\mathbb{Y}^{\Psi}_{txm}(s))$ 的一个独立副本。对 F_T 也有类似的表达式。若 Ψ 与 $\mathcal{W}^s_0$ 独立，且 $\mathbb{E}(\Psi)=0$，则
(a) 我们利用 (4.27) 得到

$$\begin{aligned}D^2_XF(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s)\otimes m)(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{txm}(s))&=D^2_x\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}\otimes m)(\mathbb{Y}_{txm})D\mathbb{Y}^{\Psi}_{txm}(s)\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(s)\otimes m)(\mathbb{Y}_{txm}(s),\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{x}m}(s))D_x\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{x}m}(s)\right]\widetilde{\mathbb{E}}\big(\widetilde{\Psi}\big)\,dm(\tilde{x})\\&=D^2_x\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}\otimes m)(\mathbb{Y}_{txm})D\mathbb{Y}^{\Psi}_{txm}(s);\end{aligned} \tag{4.29}$$

(b) 此外，在命题 4.5 的假设下，与 (4.29) 类似，命题 4.5 和 (4.27) 可推出

$$D^2_x\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x)\Psi=D^2_XV(m,t)(\Psi)=D\mathbb{Z}^{\Psi}_{txm}(t)=D_x\mathbb{Z}_{txm}(t)\Psi. \tag{4.30}$$

5 贝尔曼方程与主方程

5.1 最优性原理与贝尔曼方程

动态规划原理是建立贝尔曼方程的关键，其表述如下：对于 $\epsilon\in(0,\ T-t)$,

$$V(X\otimes m,t)=\int_t^{t+\epsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\Big[l\big(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s)\big)\Big]dm(x)+F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)\,ds+V(\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)\otimes m,t+\epsilon). \tag{5.1}$$

上述结论可由常规论证得出，即证明对于 $X^\epsilon=\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)$ 和 $s\in[t+\epsilon,T]$，.....的流性质

$$\mathbb{Y}_{t+\epsilon,X^\epsilon}(s)=\mathbb{Y}_{tX}(s),\ \mathbb{Z}_{t+\epsilon,X^\epsilon}(s)=\mathbb{Z}_{tX}(s),\ u_{t+\epsilon,X^\epsilon}(s)=u_{tX}(s)\quad\text{and}\quad\mathbb{r}_{t+\epsilon,X^\epsilon,j}(s)=\mathbb{r}_{tX,j}(s), \tag{5.2}$$

这显然成立，因为正倒向随机微分方程 (3.34)-(3.36) 的解具有唯一性。由此可知

$$\begin{aligned} V(\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)\otimes m, t+\epsilon) = &\int_{t+\epsilon}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\Big[l\big(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)\big)\Big]dm(x) + F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)\,ds \\ &+\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\big[h(\mathbb{Y}_{tX}(T)\big]\,dm(x) + F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big). \end{aligned} \tag{5.3}$$

现在可以陈述如下结论。

定理 5.1。 令 $X\in L^2\,\mathcal{W}_t^{\amalg}(H_m)$。在假设 *(3.5)-(3.10)*、*(3.21)-(3.27)* 和 *(3.30)* 下，有如下结论：

(a). 在 *(3.39)* 中定义的值函数 $V(X\otimes m, t)$ 是贝尔曼方程的一个解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}(X\otimes m,t) + \mathbb{E}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} H\big(X, D_X\Phi(X\otimes m,t)\big)\,dm(x)\right] + F(X\otimes m) + \dfrac{1}{2}\left\langle D_X^2\Phi(X\otimes m,t)\left(\sum_{j=1}^{n}\eta^j\mathcal{N}_t^j\right), \sum_{j=1}^{n}\eta^j\mathcal{N}_t^j\right\rangle_{\mathcal{H}_m} = 0; \\ \Phi(X\otimes m, T) = \mathbb{E}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h(X)dm(x)\right] + F_T(X\otimes m), \end{cases} \tag{5.4}$$

其中， η^j 是矩阵 η 的第 j 列向量， H 是在 *(3.32)* 中定义的哈密顿量；N_t^j 是高斯随机变量，每个变量的均值为 0 、方差为 *1*，且它们彼此独立，也与 X 独立；

(b). 在所有满足 *(4.1)*、*(4.3)*、*(4.6)*、*(4.5)*、*(4.8)* 和 *(4.9)* 中正则性条件的函数中， $V(X\otimes m, t)$ 是贝尔曼方程 *(5.4)* 的唯一解。

其证明见附录。特别地，当 $X=\mathcal{I}_x$ 时，由于（4.30），我们有

$$\begin{aligned} \left\langle D_X^2V(m,t)\left(\sum_{j=1}^{n}\eta^j\mathcal{N}_t^j\right), \sum_{j=1}^{n}\eta^j\mathcal{N}_t^j\right\rangle_{\mathcal{H}_m} &= \left\langle D_x^2\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x)\sum_{j=1}^{n}\eta^j\mathcal{N}_t^j, \sum_{j=1}^{n}\eta^j\mathcal{N}_t^j\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n} D_x^2\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x)\eta^j\cdot\eta^j dm(x), \end{aligned} \tag{5.5}$$

此时，本例中的贝尔曼方程写为

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial t}(m,t) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} D_x^2\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x)\eta^j\cdot\eta^j dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} H\left(x, D_x\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x)\right)dm(x) + F(m), \\ V(m,T) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dm(x) + F_T(m). \end{cases} \tag{5.6}$$

5.2 主方程

到上一节为止，均值场型控制问题 (3.3)-(3.4) 已经完全解决。本节中，我们引入均值场型控制问题的主方程，并说明如何运用目前为止得到的结论来求解该主方程。利用 (4.30)，(5.6) 中的贝尔曼方程可写为：

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(m,t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}D_\xi\mathbb{Z}_{t\xi m}(t)\eta^j\cdot\eta^j dm(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}H(\xi,\mathbb{Z}_{t\xi m}(t))dm(\xi)+F(m). \tag{5.7}$$

因为若 $\mathbb{Z}_{t\xi m}(s)$ 和 $D_\xi\mathbb{Z}_{t\xi m}(s)$ 关于 m 的线性泛函导数存在（其存在性将分别在命题 5.2 和 5.3 中得到证明），并分别记作 $\frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)$ 和 $\frac{dD_\xi\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)$，此外，若令

$$U(x,m,t):=\frac{dV}{d\nu}(m,t)(x), \tag{5.8}$$

对 (5.7) 两边关于 m 求导，可得

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial U}{\partial t}(x,m,t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}D_x\mathbb{Z}_{txm}(t)\eta^j\cdot\eta^j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dD_\xi\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,t)\eta^j\cdot\eta^j dm(\xi)\\&=H(x,\mathbb{Z}_{txm}(t))+\int_{\mathbb{R}^n}H_p(\xi,\mathbb{Z}_{t\xi m}(t))\frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,t)dm(\xi)+\frac{dF}{d\nu}(m)(x).\end{aligned} \tag{5.9}$$

(4.16) 的关系意味着

$$D_xU(x,m,t)=\mathbb{Z}_{txm}(t)\quad\text{and}\quad D_x^2U(x,m,t)=D_x\mathbb{Z}_{txm}(t). \tag{5.10}$$

特别地，我们利用引理 3.14 证明了 (5.10) 中第二项的弗雷歇可微性。该项是将引理 3.14 中提到的 $D\mathbb{Z}_{tX}(t)$（如 (4.27) 所示）中的 $X=\mathcal{I}_x=x$ 代入后得到的，而 $D\mathbb{Z}_{tX}(t)$ 的方程化简为 (4.26) 中 $D_x\mathbb{Z}_{txm}(s)$ 的方程。进一步地，对 m 求导可得，

$$D_\xi\frac{dU}{d\nu}(\xi,m,t)(x)=\frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,t)\quad\text{and}\quad D_\xi^2\frac{dU}{d\nu}(\xi,m,t)(x)=\frac{dD_\xi\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,t). \tag{5.11}$$

因此，将 (5.11) 代入方程 (5.9)，最终得到主方程的柯西问题

$$\begin{cases}-\frac{\partial U}{\partial t}(x,m,t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}D_x^2U(x,m,t)\eta^j\cdot\eta^j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}D_\xi^2\frac{dU}{d\nu}(\xi,m,t)(x)\eta^j\cdot\eta^j dm(\xi)\\\qquad=H(x,D_xU(x,m,t))+\int_{\mathbb{R}^n}H_p(\xi,D_\xi U(\xi,m,t))D_\xi\frac{dU}{d\nu}(\xi,m,t)(x)dm(\xi)+\frac{dF}{d\nu}(m)(x)\\U(x,m,T)=h(x)+\frac{dF_T}{d\nu}(m)(x),\end{cases} \tag{5.12}$$

另请参见 [4, 5] 中的讨论。接下来，我们旨在证明导数 $\frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\ s)$ 和 $\frac{dD_\xi\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\ s)$ 的存在性。为此，我们考虑针对 $\mathbb{Y}_{t\xi m}(s)$、$\mathbb{Z}_{t\xi m}(s)$、$u_{t\xi m}(s)$、$\mathrm{r}_{t\xi m,\ j}(s)$ 的线性泛函导数的线性系统，它们分别记为 $\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\ s)$、$\frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\ s)$、$\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\ s)$、$\frac{d\mathrm{r}_{t\xi m,\ j}}{d\nu}(x,\ s)$。根据

系统 (4.10)-(4.11)，利用关于 m 的求导法则，我们得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s) = \displaystyle\int_t^s \frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau; & (5.13)\\
\dfrac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s) = h_{xx}(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T))\dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T) + D_x^2\dfrac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T)\big)\dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T)\\
\qquad + \widetilde{\mathbb{E}}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T),\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}(T)\big)\frac{d\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}}{d\nu}(x,T)dm(\widetilde{\xi})\right]\\
\qquad + \widetilde{\mathbb{E}}\left[D_x\dfrac{d^2F_T}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T),\widetilde{\mathbb{Y}}_{txm}(T)\big)\right]\\
\qquad + \displaystyle\int_s^T\left[l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),u_{t\xi m}(\tau)\big) + D_x^2\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau)\big)\right]\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau\\
\qquad + \displaystyle\int_s^T l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),u_{t\xi m}(\tau)\big)\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau\\
\qquad + \displaystyle\int_s^T\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_{\mathbb{R}^n} D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}(\tau)\big)\frac{d\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}}{d\nu}(x,\tau)dm(\widetilde{\xi})\right]d\tau\\
\qquad + \displaystyle\int_s^T\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_x\frac{d^2F}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),\widetilde{\mathbb{Y}}_{txm}(\tau)\big)\right]d\tau - \int_s^T\sum_{j=1}^n\frac{d\mathbb{r}_{t\xi m,j}}{d\nu}(x,\tau)dw_j(\tau). & (5.14)
\end{cases}
$$

为保证系统 (5.13)-(5.14) 有效，我们对 F 和F_T 进一步作出正则性假设。

假设 5.1. 对于任意 x、 $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$，我们假设

(i). 二阶线性泛函导数的正则性：

$$
\left|D_x\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})\right|\le c(1+|\widetilde{x}|),\quad \left|D_x\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})\right|\le c_T(1+|\widetilde{x}|); \tag{5.15}
$$

$$
\left|D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})\right|\le c,\quad \left|D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})\right|\le c_T; \tag{5.16}
$$

(ii). (i) 和 *(ii)* 中的所有导数分别关于 (m,x) 和 $(m,x,\widetilde{x})$ 连续。

于是有

命题 5.2. 在假设 *(3.5)-(3.10)*、*(3.21)-(3.27)*、*(3.30)* 以及假设 *5.1* 下，若存在一个 $\delta_1\in(0,1)$ 使得

$$
(1-\delta_1)\lambda - (c_h'+c_T'+c_T)T - (c+c'+c_l')\frac{T^2}{2} > 0, \tag{5.17}
$$

那么，系统 *(5.13)-(5.14)* 有唯一解 $\left(\dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\ \dfrac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\ \dfrac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\ d\mathbb{r}_{t\xi m,j}\right)$，它们是 $\mathbb{Y}_{t\xi m}(s)$ $\mathbb{Z}_{t\xi m}(s)$ $u_{t\xi m}(s)$, $\mathbb{r}_{t\xi m,j}(s)$ 的线性泛函导数。此外，对于任意 $s\in[t,T]$，它们满足以下 L^2-有界性

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\right|^2 dm(\xi)\right],\quad \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\right|^2 dm(\xi)\right],\\&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\right|^2 dm(\xi)\right],\quad \sum_{j=1}^n\int_t^T\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{d\mathbb{r}_{t\xi m,j}}{d\nu}(x,s)\right|^2 dm(\xi)\right]ds\le C_{10}(1+|x|^2),\end{aligned}\tag{5.18}$$

其中 C_{10} 是一个 p 仅依赖于 δ_1, n, λ, η, c, c_l, c_h, c_T, c', c'_l, c'_h, c'_T 和 T 的正数。

证明。与引理 3.12 的证明类似，通过考虑这些过程的有限差分，我们可以证明，方程 (5.13)-(5.14) 的唯一解等于 $\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(s)\ \mathbb{Z}_{t\xi m}(s)\ u_{t\xi m}(s),\ \mathbb{r}_{t\xi m,\ j}(s)\big)$ 的线性泛函导数。此处省略证明。为建立 (5.18) 中的估计，我们对一阶条件 (3.36) 关于 m 求导，使得

$$l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(s),u_{t\xi m}(s)\big)\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)+l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(s),u_{t\xi m}(s)\big)\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)+\frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)=0.\tag{5.19}$$

然后，我们对内积 $\left\langle \frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\ s)\ \frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\ s)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}$ 应用伊藤引理，再结合 (5.19)，从 t 积分到 T，得到

$$\begin{aligned}&\Big\langle \frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T),h_{xx}(\mathbb{Y}_{txm}(T))\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T)+D_x^2\frac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{txm}(T)\big)\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T)\\&\quad+\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T),\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}(T)\big)\frac{d\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}}{d\nu}(x,T)dm(\widetilde{\xi})\right]\\&\qquad\qquad+\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_x\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T),\widetilde{\mathbb{Y}}_{txm}(T)\big)\right]\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\=&-\int_t^T\Big\langle\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau),\left[l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),u_{t\xi m}(\tau)\big)+D_x^2\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau)\big)\right]\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\\&\quad+l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),u_{t\xi m}(\tau)\big)\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)+\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}D_xD_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}(\tau)\big)\frac{d\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}}{d\nu}(x,\tau)dm(\widetilde{\xi})\right]\\&\qquad\qquad+\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_x\frac{d^2F}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),\widetilde{\mathbb{Y}}_{txm}(\tau)\big)\right]\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\&\quad-\int_t^T\Big\langle\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau),l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),u_{t\xi m}(\tau)\big)\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)+l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau),u_{t\xi m}(\tau)\big)\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau.\end{aligned}$$

注意，$\mathbb{R}^n$ 中涉及的 $\mathcal{H}_m$-内积上的积分对应于变量 ξ。利用 (5.15)-(5.16) 中的假设、假设**A(v)** 的 (3.9)、**A(vi)** 的 (3.10)、**b(i)** 的 (3.12)、**b(ii)** 的 (3.13)、**b(v)** 的 (3.16)、**B(v)(b)** 的 (3.27)，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda\int_t^T\left\|\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau\le&\,(c+c'+c'_l)\int_t^T\left\|\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau+(c'_h+c'_T+c_T)\left\|\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2\\&+c\int_t^T\left\|\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}\widetilde{\mathbb{E}}\left[1+\left|\widetilde{\mathbb{Y}}_{txm}(\tau)\right|\right]d\tau+c_T\left\|\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T)\right\|_{\mathcal{H}_m}\widetilde{\mathbb{E}}\left[1+\left|\widetilde{\mathbb{Y}}_{txm}(T)\right|\right].\end{aligned}\tag{5.20}$$

(5.13)中的方程意味着

$$\left\|\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2 \le T\int_t^T \left\|\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2 d\tau \text{ and } \int_t^T \left\|\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2 d\tau \le \frac{T^2}{2}\int_t^T \left\|\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2 d\tau. \tag{5.21}$$

重复命题 3.9 的证明，我们还可以得到如下事实：$\sup_{\tau\in(t,T)}\mathbb{E}\big(|\mathbb{Y}_{txm}(\tau)|^2\big) \le C_4(1+|x|^2)$。将其代入 (5.20) 的第二行，并结合 (5.21)，可将 (5.20) 中的不等式改写为

$$\left[(1-\delta_1)\lambda - (c_h' + c_T' + c_T)T - (c + c' + c_l')\frac{T^2}{2}\right]\int_t^T \left\|\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2 d\tau \le \frac{C_4(c^2+c_T^2)}{\lambda\delta_1}(1+|x|^2), \tag{5.22}$$

对任意 $\delta_1 \in (0,1)$。因此，所需的 $\frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)$ 估计成立。类似地，按照命题 3.9 证明中的步骤并利用 (5.22)，$\frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s), \frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)$ $d\mathbb{I}_{t\xi m,}{}^{j}{}_{d\nu}(x,s)$ 的估计也成立。证明完毕。■

为进一步推进　至线性泛函导数的梯度存在性，我们假设 e:

假设 5.2。对于任意 $x,\ \widetilde{x},\ v\in\mathbb{R}^n$,

(i). 导数的有界性：

$$|l_{xxx}(x,v)|,\ |l_{xxv}(x,v)|,\ |l_{xvv}(x,v)|,\ |l_{vvv}(x,v)| \le c,\ |h_{xxx}(x)| \le c_T; \tag{5.23}$$

(ii). 一阶线性泛函导数的正则性：

$$\left|D_x^3\frac{dF}{d\nu}(m)(x)\right| \le c,\ \left|D_x^3\frac{dF_T}{d\nu}(m)(x)\right| \le c_T; \tag{5.24}$$

(iii). 二阶线性泛函导数的正则性：

$$\left|D_x^2\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})\right| \le c(1+|\widetilde{x}|),\ \left|D_x^2\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})\right| \le c_T(1+|\widetilde{x}|); \tag{5.25}$$

$$\left|D_x^2D_{\tilde{x}}\frac{d^2F}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})\right| \le c,\ \left|D_x^2D_{\tilde{x}}\frac{d^2F_T}{d\nu^2}(m)(x,\widetilde{x})\right| \le c_T. \tag{5.26}$$

(iv). (i)、*(ii)* 和 *(iii)* 中的所有导数分别在 (x,v)、(m,x) 和 $(m,x,\widetilde{x})$ 上连续。

由 (5.13)-(5.14)，对 ξ 求梯度，得到系统

$$
\begin{cases}
D_\xi \dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s) = \displaystyle\int_t^s D_\xi \frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau; & (5.27)\\
D_\xi \dfrac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s) = \Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T)) + D_x^2 \dfrac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet_m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T)\big)\Big] D_\xi \dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T)\\
\quad + \Big[h_{xxx}(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T)) + D_x^3 \dfrac{dF_T}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet_m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T)\big)\Big] D_\xi \mathbb{Y}_{t\xi m}(T) \dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,T)\\
\quad + \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} D_x^2 D_{\tilde{x}} \frac{d^2F_T}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet_m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T), \widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi} m}(T)\big) D_\xi \mathbb{Y}_{t\xi m}(T) \frac{d\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}}{d\nu}(x,T) dm(\widetilde{\xi})\Big]\\
\quad + \widetilde{\mathbb{E}}\Big[D_x^2 \dfrac{d^2F_T}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet_m}(T)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(T), \widetilde{\mathbb{Y}}_{txm}(T)\big)\Big] D_\xi \mathbb{Y}_{t\xi m}(T)\\
\quad + \displaystyle\int_s^T \Big[l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau), u_{t\xi m}(\tau)\big) + D_x^2 \dfrac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet_m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau)\big)\Big] D_\xi \dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau\\
\quad + \displaystyle\int_s^T \Big[l_{xxx}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau), u_{t\xi m}(\tau)\big) + D_x^3 \dfrac{dF}{d\nu}(\mathbb{Y}_{t\bullet_m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau)\big)\Big] D_\xi \mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau) \dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau\\
\quad + \displaystyle\int_s^T \Big[l_{xxv}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau), u_{t\xi m}(\tau)\big)\Big] D_\xi u_{t\xi m}(\tau) \dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau\\
\quad + \displaystyle\int_s^T l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau), u_{t\xi m}(\tau)\big) D_\xi \frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau) + l_{xvx}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau), u_{t\xi m}(\tau)\big) D_\xi \mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau) \frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau\\
\quad + \displaystyle\int_s^T l_{xvv}\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau), u_{t\xi m}(\tau)\big) D_\xi u_{t\xi m}(\tau) \frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,\tau)d\tau\\
\quad + \displaystyle\int_s^T \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} D_x^2 D_{\tilde{x}} \frac{d^2F}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet_m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau), \widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}(\tau)\big) D_\xi \mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau) \frac{d\widetilde{\mathbb{Y}}_{t\tilde{\xi}m}}{d\nu}(x,\tau) dm(\widetilde{\xi})\Big] d\tau\\
\quad + \displaystyle\int_s^T \widetilde{\mathbb{E}}\Big[D_x^2 \dfrac{d^2F}{d\nu^2}(\mathbb{Y}_{t\bullet_m}(\tau)\otimes m)\big(\mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau), \widetilde{\mathbb{Y}}_{txm}(\tau)\big) D_\xi \mathbb{Y}_{t\xi m}(\tau)\Big] d\tau\\
\quad - \displaystyle\int_s^T \sum_{j=1}^n D_\xi \frac{d\mathbb{r}_{t\xi m,j}}{d\nu}(x,\tau)dw_j(\tau). & (5.28)
\end{cases}
$$

于是我们可以陈述：

命题 5.3. 在假设 *(3.5)-(3.10)*、*(3.21)-(3.27)*、*(3.30)*、*(5.17)*、假设 *5.1* 和 *5.2* 下，系统 *(5.27)-(5.28)* 存在唯一解，且它们是 $\dfrac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)$ $\dfrac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)$, $\dfrac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)$ $\dfrac{d\mathbb{r}_{t\xi m,j}}{d\nu}(x,s)$ 关于 ξ 的梯度，其中

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|D_\xi \frac{d\mathbb{Y}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\right|^2 dm(\xi)\right], \quad \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|D_\xi \frac{d\mathbb{Z}_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\right|^2 dm(\xi)\right],\\
&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|D_\xi \frac{du_{t\xi m}}{d\nu}(x,s)\right|^2 dm(\xi)\right], \quad \sum_{j=1}^n \int_t^T \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|D_\xi \frac{d\mathbb{r}_{t\xi m,j}}{d\nu}(x,s)\right|^2 dm(\xi)\right] \le C_{11}(1+|x|^2),
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

其中 C_{11} 是一个仅依赖于 δ_1, n, λ, η, c, c_l, c_h, c_T, c', c'_l, c'_h, c'_T和 T的正常数。证明。证明与命题 5.2 的证明类似。 ■

这证明了可以对贝尔曼方程关于 m 求导，因此 $U(x,\ m,\ t) = \dfrac{dV}{d\nu}(m,\ t)(x)$

是 (5.12) 中主方程的一个解。若 $U^*(x,m,t)$ 是 (5.12) 的另一个解，则定义 $\mathbb{Z}^*_{txm}(t) := D_xU^*(x,m,t), \mathbb{Y}^*_{txm}(s) := \int_t^s u\big(\mathbb{Y}^*_{txm}(\tau), \mathbb{Z}^*_{\tau\mathbb{Y}^*_{txm}(\tau)m}(\tau)\big)d\tau + \eta\big(w(s) - w(t)\big)$ 以及 $\mathbb{Z}^*_{txm}(\tau) := \mathbb{Z}^*_{\tau\mathbb{Y}^*_{txm}(\tau)m}(\tau) = D_xU^*(\mathbb{Y}^*_{txm}(\tau), m, \tau)$。接着对 (5.12) 关于 x 求导，并在 $x = \mathbb{Y}^*_{txm}(s)$ 处代入所得方程。利用定理 2.2 中的平均场伊藤引理，向后推导可知，$\mathbb{Z}^*_{txm}(s)$ 满足倒向动力学方程 (3.29)。由于正倒向随机微分方程 (3.34)-(3.35) 有唯一解，因此可知 $\mathbb{Y}_{txm}(s) = \mathbb{Y}^*_{txm}(s)$， $\mathbb{Z}_{txm}(s) = \mathbb{Z}^*_{txm}(s)$，进而由 (5.12) 中的终端条件得到 $U = U^*$。由此命题得出 (5.12) 中主方程的适定性。

命题 *5.4.* 在假设 *(3.5)-(3.10)*、*(3.21)-(3.27)* 和 *(3.30)* 下，值函数 $V(m,t)$ 经典地满足 *(5.1)* 中的贝尔曼方程。此外，若假设 *5.1*、*5.2* 和 *(5.17)* 成立，则 $V(m,t)$ 的线性泛函导数 $U(x,m,t) = \frac{dV}{d\nu}(m,t)(x)$ 是 *(5.12)* 中主方程的唯一经典解（按逐点意义），且所有导数 $\frac{\partial U}{\partial t}(x,m,t)$、 $D_xU(x,m,t)$、$D_x^2U(x,m,t)$、$D_\xi\frac{dU}{d\nu}(\xi,m,t)(x)$ 和 $D_\xi^2\frac{dU}{d\nu}(\xi,m,t)(x)$ 均存在。

致谢。作者谨向2019年4月在爱丁堡大学举行的 ICMS 工作坊“平均场博弈、能源系统及其他应用”中聆听 Phillip Yam 演讲的与会者致以诚挚谢意，感谢他们提出的启发性建议。本文的初步构想萌芽于 Michael Man Ho Chau 在伦敦帝国理工学院和香港大学攻读博士期间的最后阶段（2016年），当时 Phillip Yam 是他的导师；部分具体成果已收入他的博士学位论文。作者也谨向 Michael Chau 致以衷心感谢，感谢他所做的卓越工作。Alain Bensoussan 获美国国家科学基金会项目 NSF-DMS-1905449 和 NSF-DMS-2204795 以及香港特别行政区研究资助局普通研究基金 14301321 资助。Ho Man Tai 谨向 Yam 教授及香港中文大学统计系致以最诚挚的谢意，感谢他们提供的经费支持。Phillip Yam 感谢 HKGRF-14301321 项目“无限维随机控制的一般理论：平均场与若干经典问题”提供的经费支持。他还感谢哥伦比亚大学在其学术休假期间诚邀他担任统计系访问 faculty 成员。他还回忆起与挚爱的父亲共度的难忘时光和分享的幸福，并以此项工作纪念父亲勇敢抗击肝癌。

6 附录

6.1 第 2 节中各命题的证明

6.1.1 定理 2.2 的证明

我们注意到，以下证明中的常数 C 可能在不同行之间有所不同，但为避免歧义，我们仍用相同的符号 C 表示。我们先介绍一些预备知识。如果假设 (2.41) 中的序列$\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 进一步满足

$$\sup_k \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |Y_k|^4 dm(x)\right] < \infty, \tag{6.1}$$

then

$$\left\langle D_X^2F(X_k\otimes m, s_k)(Y_k) - D_X^2F(X\otimes m, s_k)(Y_k), Y_k\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \longrightarrow 0 \quad \text{as } k\to\infty; \tag{6.2}$$

事实上，对于表达式 (6.2)，记 $\mathscr{I}_k$，我们写作 $\mathscr{I}_k =: \mathscr{I}^1_{\epsilon k} + \mathscr{I}^2_{\epsilon k}$，对于任意 $\epsilon > 0$，其中

$$\mathscr{I}^1_{\epsilon k} := \left\langle D^2_X F(X_k \otimes m, s_k)(Y_k) - D^2_X F(X \otimes m, s_k)(Y_k), \frac{Y_k}{1+\epsilon|Y_k|} \right\rangle_{\mathcal{H}_m},$$

$$\mathscr{I}^2_{\epsilon k} := \epsilon \left\langle D^2_X F(X_k \otimes m, s_k)(Y_k) - D^2_X F(X \otimes m, s_k)(Y_k), \frac{Y_k|Y_k|}{1+\epsilon|Y_k|} \right\rangle_{\mathcal{H}_m}.$$

由假设 (2.39) 和 (6.1)，我们有 $|\mathscr{I}^2_{\epsilon k}| \le C\epsilon$，其中 $C > 0$ 与 ϵ 无关；又由 (2.41)，当 $k \to \infty$, 时，对每个 $\epsilon > 0$，都有 $\mathscr{I}^1_{\epsilon k} \longrightarrow 0$。结合这两个收敛结果，我们得到，当 $k \to \infty$.时， $\mathscr{I}_k \longrightarrow 0$ 。接下来，利用 (2.25)，我们写出

$$\frac{1}{\epsilon}\Big[F\big(\mathbb{X}_{tX}(s+\epsilon)\otimes m, s+\epsilon\big) - F\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon\big)\Big] =: \mathrm{I}_\epsilon + \mathrm{II}_\epsilon + \mathrm{III}_\epsilon + \mathrm{IV}_\epsilon,$$

其中

$$\mathrm{I}_\epsilon := \frac{1}{\epsilon}\left\langle D_X F\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon\big), \int_s^{s+\epsilon} a_{tX}(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau) dw_j(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m};$$

$$\mathrm{II}_\epsilon := \frac{1}{\epsilon}\int_0^1\int_0^1 \theta \Bigg\langle D^2_X F\Big(\big\{\mathbb{X}_{tX}(s) + \theta\lambda\big[\mathbb{X}_{tX}(s+\epsilon) - \mathbb{X}_{tX}(s)\big]\big\}\otimes m, s+\epsilon\Big)\left(\int_s^{s+\epsilon} a_{tX}(\tau)d\tau\right), \int_s^{s+\epsilon} a_{tX}(\tau)d\tau + 2\sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)\Bigg\rangle_{\mathcal{H}_m} d\theta d\lambda,$$

（因 $D^2_X F(X\otimes m,\ s)$ 自伴，故出现因子 2）；

$$\mathrm{III}_\epsilon := \frac{1}{\epsilon}\int_0^1\int_0^1 \theta \Bigg\langle D^2_X F\Big(\big\{\mathbb{X}_{tX}(s) + \theta\lambda\big[\mathbb{X}_{tX}(s+\epsilon) - \mathbb{X}_{tX}(s)\big]\big\}\otimes m, s+\epsilon\Big)\left(\sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)\right) - D^2_X F(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon)\left(\sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)\right), \sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)\Bigg\rangle_{\mathcal{H}_m} d\theta d\lambda;$$

and

$$\mathrm{IV}_\epsilon := \frac{1}{2\epsilon}\left\langle D^2_X F(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon)\left(\sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)\right), \sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}.$$

首先，通过写出下式来展开第一项 I_ϵ

$$\mathrm{I}_\epsilon = \big\langle D_X F(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon), a_{tX}(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m} + \left\langle D_X F(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon), \frac{1}{\epsilon}\int_s^{s+\epsilon} a_{tX}(\tau)d\tau - a_{tX}(s)\right\rangle_{\mathcal{H}_m} + \left\langle D_X F\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon\big), \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau)dw_j(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}.$$

由 (2.42) 的假设 (c) 和 (2.39)，第一行中的第二项趋于零。而对于

第二行中的这一项，由于随机积分在 $[s, s+\epsilon]$ 上涉及未来的布朗增量，应用塔式性质后它也会消失。最后，对于剩余项，根据假设 (2.38)，我们得到

$$\mathrm{I}_\epsilon \longrightarrow \left\langle D_X F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s), a_{tX}(s) \right\rangle_{\mathcal{H}_m}, \quad \text{as } \epsilon \to 0. \tag{6.3}$$

对于项 II_ϵ，利用 (2.39) 中的第二个假设以及 (2.42) 中的假设 (b) 和 (c)，可得

$$\mathrm{II}_\epsilon \longrightarrow 0, \quad \text{as } \epsilon \to 0. \tag{6.4}$$

对于项 III_ϵ，利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式，可得

$$\frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{t\xi}(\tau) dw_j(\tau)\right|^4\right] \le \frac{4}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_s^{s+\epsilon} \sum_{j=1}^n \left|\eta_{t\xi}(\tau)\right|^2 d\tau\right)^2\right] \le \frac{4}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\int_s^{s+\epsilon}\left(\sum_{j=1}^n \left|\eta_{t\xi}(\tau)\right|^2\right)^2 d\tau\right],$$

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 均成立。因此，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}_t}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \eta^j_{tX}(\tau) dw_j(\tau)\right|^4 dm(x)\right] &\le \frac{C}{\epsilon}\mathbb{E}_{\mathcal{W}_t}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\int_s^{s+\epsilon}\left(\sum_{j=1}^n \left|\eta_{tX}(\tau)\right|^2\right)^2 d\tau dm(x)\right] \\
&\le C \sup_{s\in[t,T]} \mathbb{E}_{\mathcal{W}_t}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^n \left|\eta_{tX}(s)\right|^2\right)^2 dm(x)\right] \\
&\le C
\end{aligned}$$

根据 (2.42) 中的第一个假设 (a)。基于此界，由假设 (2.41)，可利用断言 (6.2) 得出，对于每个 $(\lambda,\ \theta)$，III_ϵ 的被积函数收敛于零。接下来，在 (2.39) 中第二个假设的条件下，直接应用控制收敛定理可得

$$\mathrm{III}_\epsilon \longrightarrow 0, \quad \text{as } \epsilon \to 0. \tag{6.5}$$

此外，由第二个假设 (2.42)，可得

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\sum_{j=1}^n \int_s^{s+\epsilon} \left[\eta^j_{tX}(\tau) - \eta^j_{tX}(s)\right] dw_j(\tau) \longrightarrow 0, \quad \text{as } \epsilon \to 0, \text{ in } \mathcal{H}_m$$

因此，利用 (2.39) 中的第二个假设可得

$$\mathrm{IV}_\epsilon - \frac{1}{2}\left\langle D^2_X F(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon)\left(\sum_{j=1}^n \eta^j_{tX}(s)\frac{w_j(s+\epsilon)-w_j(s)}{\sqrt{\epsilon}}\right), \sum_{j=1}^n \eta^j_{tX}(s)\frac{w_j(s+\epsilon)-w_j(s)}{\sqrt{\epsilon}}\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \longrightarrow 0.$$

另一方面，由公式 (2.26) 可知，яда

$$\left\langle D^2_X F(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m, s+\epsilon)\left(\sum_{j=1}^n \eta^j_{tX}(s)\frac{w_j(s+\epsilon)-w_j(s)}{\sqrt{\epsilon}}\right), \sum_{j=1}^n \eta^j_{tX}(s)\frac{w_j(s+\epsilon)-w_j(s)}{\sqrt{\epsilon}}\right\rangle_{\mathcal{H}_m}$$

$$= \left\langle D_X^2 F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s+\epsilon) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right), \sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right\rangle_{\mathcal{H}_m},$$

对于任意一个与 $\mathcal{N}_s^j$ 相互独立的标准正态分布随机变量，由于 $w_j(s+\epsilon) - w_j(s)$ 的分布为均值为 0、方差为 $\sqrt{\epsilon}$ 为 1 的正态分布，因此它与 ϵ 的选择无关。

由假设 (2.40)，我们已经证明了，可以得出

$$\left\langle D_X^2 F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s+\epsilon) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right), \sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right\rangle_{\mathcal{H}_m} \to \left\langle D_X^2 F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right), \sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right\rangle_{\mathcal{H}_m},$$

如 $\epsilon \to 0$ 所示。汇总所有这些结果，我们已经证明

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\epsilon}\Big[F(\mathbb{X}_{tX}(s+\epsilon) \otimes m, s+\epsilon) - F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s+\epsilon)\Big] \longrightarrow \\ &\big\langle D_X F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s), a_{tX}(s) \big\rangle_{\mathcal{H}_m} + \frac{1}{2} \left\langle D_X^2 F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right), \sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right\rangle_{\mathcal{H}_m}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

最后，由假设 (2.37)，根据拉德马赫定理，

$$\frac{1}{\epsilon}\big[F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s+\epsilon) - F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s)\big] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial s} F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s), \quad \text{a.e. } s \in [t,T].$$

因此，得到 (2.43) 中的结果。如果公式 (2.27) 适用，则结合 (2.29) 与 (2.30) 之间的讨论，

$$\begin{aligned} D_X^2 F(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right) &= D_x^2 \frac{dF}{d\nu}(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s)(\mathbb{X}_{tX}(s)) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right) \\ &\quad + \widetilde{\mathbb{E}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} D_x D_{\tilde{x}} \frac{d^2 F}{d\nu^2}(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s) \Big(\mathbb{X}_{tX}(s), \widetilde{\mathbb{X}}_{t\widetilde{X}}(s) \Big) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{t\widetilde{X}}^j(s) \widetilde{\mathcal{N}}_s^j \right) dm(\tilde{x}) \right] \\ &= D_x^2 \frac{dF}{d\nu}(\mathbb{X}_{tX}(s) \otimes m, s)\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\big) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{tX}^j(s) \mathcal{N}_s^j \right), \end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\mathcal{N}}_s^j$ 与 $\mathcal{W}_{t\widetilde{X}}^s$ 相互独立。证明完毕。 ■

6.1.2 定理 2.2 的补充

如果我们在公式 (2.44) 中取 $X_t = \mathcal{I}_x$，那么过程 $\mathbb{X}_{t\mathcal{I}}(s)$ 就是一个由参数 x 索引的经典 Itô 过程，其中 x 是时刻 t 的初始条件，记作 $\mathbb{X}_{tx}(s)$。它写作

$$\mathbb{X}_{tx}(s) = x + \int_t^s a_{tx}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n \int_t^s \eta_{tx}^j(\tau) dw_j(\tau), \quad \text{for } s \geq t. \tag{6.7}$$

过程 $a_{tx}(s)$ 和 $\eta_{tx}^j(s)$ 都适应于滤过 $\mathcal{W}_t^s$，并且满足

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} |a_{tx}(s)|^2 ds\, dm(x)\right] \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} |\eta^j_{tx}(s)|^2 ds\, dm(x)\right] < \infty.$$

我们可以将 (2.44) 写成

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}F(\mathbb{X}_{tx}(s)\otimes m, s) = \frac{\partial}{\partial s}F(\mathbb{X}_{tx}(s)\otimes m, s)\\
&+\mathbb{E}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[D_x\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{X}_{tx}(s)\otimes m, s)(\mathbb{X}_{tx}(s))\cdot a_{tx}(s) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n D_x^2\frac{dF}{d\nu}(\mathbb{X}_{tx}(s)\otimes m, s)(\mathbb{X}_{tx}(s))\eta^j_{tx}(s)\cdot\eta^j_{tx}(s)\right]dm(x)\right\}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

例如，取 $F(m,\ s) = \int_{\mathbb{R}^n}\Psi(x,\ s)dm(x)$，则 $F(\mathbb{X}_{tx}(s)\otimes m,\ s) = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\Psi(\mathbb{X}_{tx}(s)\ s)dm(x)\right]$ 和 $\frac{dF}{d\nu}(m,\ s)(x) = \Psi(x,\ s)$。因此，(6.8) 化简为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\Psi(\mathbb{X}_{tx}(s),s)dm(x)\right] = \mathbb{E}\Bigg\{\int_{\mathbb{R}^n}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial s}\Psi(\mathbb{X}_{tx}(s),s) + D_x\Psi(\mathbb{X}_{tx}(s),s)\cdot a_{tx}(s)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n D_x^2\Psi(\mathbb{X}_{tx}(s),s)\eta^j_{tx}(s)\cdot\eta^j_{tx}(s)\Bigg]dm(x)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{6.9}$$

这与作用于任意测试函数 Ψ时的经典伊藤公式相同。

6.2 第3节中陈述的证明

6.2.1 引理 3.4 的证明

对于满足 $\theta\in\mathbb{R}$and $\tilde{v}_{tX}(s)\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathcal{H}_m)$ 的扰动控制 $v_{tX}(s)+\theta\tilde{v}_{tX}(s)$，相应的状态为$\mathbb{X}_{tX}(s)+\theta\int_t^s\tilde{v}_{tX}(\tau)d\tau$。利用 (3.5)、(3.7)、(3.22) 和控制收敛定理，我们首先验证

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}J_{tX}\big(v_{tX}+\theta\tilde{v}_{tX}\big)\Big|_{\theta=0} = &\int_t^T\big\langle l_v\big(\mathbb{X}_{tX}(s),v_{tX}(s)\big),\tilde{v}_{tX}(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m}ds\\
&+\int_t^T\left\langle l_x\big(\mathbb{X}_{tX}(s),v_{tX}(s)\big)+D_XF\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m\big),\int_t^s\tilde{v}_{tX}(\tau)d\tau\right\rangle_{\mathcal{H}_m}ds\\
&+\left\langle h_x\big(\mathbb{X}_{tX}(T)\big)+D_XF_T\big(\mathbb{X}_{tX}(T)\otimes m\big),\int_t^T\tilde{v}_{tX}(\tau)d\tau\right\rangle_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

为处理 (6.10) 中的第二项和第三项，我们将 Γ_{tX} 定义如下：

$$\Gamma_{tX} := \int_t^T l_x\big(\mathbb{X}_{tX}(s),v_{tX}(s)\big)+D_XF\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m\big)ds + h_x\big(\mathbb{X}_{tX}(T)\big)+D_XF_T\big(\mathbb{X}_{tX}(T)\otimes m\big), \tag{6.11}$$

显然，它是一个取值于 $\mathbb{R}^n$ 的随机变量，并且是 $\mathcal{W}_{tX}^T$-可测的，因此可将其写成对几乎每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 都是$\mathcal{W}_t^T$-可测的随机场 $\Gamma_{t\xi}$，然后用 X 替换 ξ。现在，

$$\mathbb{E}(\Gamma_{tX}|\mathcal{W}_{tX}^s) = \mathbb{E}(\Gamma_{t\xi}|\mathcal{W}_t^s)\Big|_{\xi=X}.$$

根据适用于Wiener滤过的标准鞅表示定理，我们可以写成

$$\mathbb{E}(\Gamma_{t\xi}|\mathcal{W}_t^s) = \mathbb{E}(\Gamma_{t\xi}) + \sum_{j=1}^n \int_t^s \mathbb{r}_{t\xi,j}(\tau) dw_j(\tau).$$

因此，我们可以写成

$$\mathbb{E}(\Gamma_{tX}|\mathcal{W}_{tX}^s) = \mathbb{E}(\Gamma_{tX}|X) + \sum_{j=1}^n \int_t^s \mathbb{r}_{tX,j}(\tau) dw_j(\tau),$$

其中 $\mathbb{r}_{tX,j}(s) \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathcal{H}_m)$.接下来，我们定义 Itô 过程：

$$\mathbb{Z}_{tX}(s) := \mathbb{E}(\Gamma_{tX}|X) - \int_t^s l_x\big(\mathbb{X}_{tX}(\tau), v_{tX}(\tau)\big) + D_X F\big(\mathbb{X}_{tX}(\tau)\otimes m\big) d\tau + \sum_{j=1}^n \int_t^s \mathbb{r}_{tX,j}(\tau) dw_j(\tau). \tag{6.12}$$

注意到 $\mathbb{Z}_{tX}(T) = h_x(\mathbb{X}_{tX}(T)) + D_X F_T(\mathbb{X}_{tX}(T)\otimes m)$，因为 Γ_{tX} 与 $\mathcal{W}_{tX}^T$ 相互独立。这一事实结合分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_t^T \big\langle \mathbb{Z}_{tX}(s), \widetilde{v}_{tX}(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds = &\int_t^T \Big\langle l_x\big(\mathbb{X}_{tX}(s), v_{tX}(s)\big) + D_X F\big(\mathbb{X}_{tX}(s)\otimes m\big), \int_t^s \widetilde{v}_{tX}(\tau) d\tau \Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ &+ \Big\langle h_x(\mathbb{X}_{tX}(T)) + D_X F_T(\mathbb{X}_{tX}(T)\otimes m), \int_t^T \widetilde{v}_{tX}(\tau) d\tau \Big\rangle_{\mathcal{H}_m}.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{d}{d\theta} J_{tX}\big(v_{tX} + \theta\tilde{v}_{tX}\big)\Big|_{\theta=0} = \int_t^T \big\langle l_v\big(\mathbb{X}_{tX}(s), v_{tX}(s)\big) + \mathbb{Z}_{tX}(s), \tilde{v}_{tX}(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds,$$

对 v_{tX} 取一阶变分后，即得结果 (3.28) . ■

6.2.2 命题 3.5 的证明

第 1A 部分. 凸性：
考虑两个控制 $v_{tX}^1(s)\ v_{tX}^2(s) \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,\ T;\mathcal{H}_m)$。我们将验证其强凸性，即

$$\int_t^T \Big\langle D_v J_{tX}\big(v_{tX}^1\big)(s) - D_v J_{tX}\big(v_{tX}^2\big)(s), v_{tX}^1(s) - v_{tX}^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \geq c_0 \int_t^T \big\|v_{tX}^1(s) - v_{tX}^2(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds. \tag{6.13}$$

对于某个常数 $c_0 > 0$。那么，命题中的结论便可立即得出。为简化记号，我们记 $v^1(s) = v_{tX}^1(s)\ v^2(s) = v_{tX}^2(s)$，$\mathbb{X}^1(s) = \mathbb{X}_{tX}\big(s;\ v_{tX}^1\big)$和 $\mathbb{X}^2(s) = \mathbb{X}_{tX}\big(s;\ v_{tX}^2\big)$。令 $\mathbb{Z}^1(s)$ 和 $\mathbb{Z}^2(s)$ 分别为与 $\mathbb{X}^1(s)$ 和 $\mathbb{X}^2(s)$ 对应的方程 (3.29) 的解。

由公式 (3.28)，我们有

$$\begin{aligned}\int_t^T \Big\langle D_v J_{tX}(v^1)(s) - D_v J_{tX}(v^2)(s), v^1(s) - v^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ = \int_t^T \Big\langle l_v\big(\mathbb{X}^1(s), v^1(s)\big) - l_v\big(\mathbb{X}^2(s), v^2(s)\big), v^1(s) - v^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ + \int_t^T \Big\langle \mathbb{Z}^1(s) - \mathbb{Z}^2(s), v^1(s) - v^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds.\end{aligned} \tag{6.14}$$

接下来，由于 $v^1(s) - v^2(s) = \frac{d}{ds}\big[\mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s)\big]$ 且 $\mathbb{X}^1(t) - \mathbb{X}^2(t) = 0$，等式 (6.14) 等价于

$$\begin{aligned}&\int_t^T \Big\langle D_v J_{tX}(v^1)(s) - D_v J_{tX}(v^2)(s), v^1(s) - v^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ &= \int_t^T \Big\langle l_v\big(\mathbb{X}^1(s), v^1(s)\big) - l_v\big(\mathbb{X}^2(s), v^2(s)\big), v^1(s) - v^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ &\quad + \int_t^T \Big\langle l_x(\mathbb{X}^1(s), v^1(s)) - l_x(\mathbb{X}^2(s), v^2(s)) + D_X F(\mathbb{X}^1(s)\otimes m) - D_X F(\mathbb{X}^2(s)\otimes m), \mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ &\quad + \Big\langle h_x(\mathbb{X}^1(T)) + D_X F_T(\mathbb{X}^1(T)\otimes m) - h_x(\mathbb{X}^2(T)) - D_X F_T(\mathbb{X}^2(T)\otimes m), \mathbb{X}^1(T) - \mathbb{X}^2(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}.\end{aligned} \tag{6.15}$$

中值定理、假设 **A(ii)**、**A(v)**、**A(vi)** 和**B(v)(b)** 告诉我们

$$\begin{aligned}&\int_t^T \Big\langle D_v J_{tX}(v^1)(s) - D_v J_{tX}(v^2)(s), v^1(s) - v^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\ &\geq \int_t^T \inf_{x,v\in\mathbb{R}^n} \Big[\Big\langle l_{vv}(x,v)\big[v^1(s) - v^2(s)\big] + l_{vx}(x,v)\big[\mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s)\big], v^1(s) - v^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\ &\qquad\qquad + \Big\langle l_{xv}(x,v)\big[v^1(s) - v^2(s)\big] + l_{xx}(x,v)\big[\mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s)\big], \mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}\Big] ds \\ &\quad - c'\int_t^T \big\|\mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds - (c'_T + c'_h)\big\|\mathbb{X}^1(T) - \mathbb{X}^2(T)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 \\ &\geq \lambda\int_t^T \big\|v^1(s) - v^2(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds - (c' + c'_l)\int_t^T \big\|\mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds - (c'_T + c'_h)\big\|\mathbb{X}^1(T) - \mathbb{X}^2(T)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2\end{aligned} \tag{6.16}$$

事实是，对于任意 $s \in (t, T]$，都有 $\mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s) = \int_t^s v^1(\tau) - v^2(\tau) d\tau$；再结合柯西-施瓦茨不等式的简单应用，可得

$$\big\|\mathbb{X}^1(T) - \mathbb{X}^2(T)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 \leq (T-t)\int_t^T \big\|v^1(s) - v^2(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds \quad \text{and} \tag{6.17}$$

$$\int_t^T \big\|\mathbb{X}^1(s) - \mathbb{X}^2(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds \leq \frac{(T-t)^2}{2}\int_t^T \big\|v^1(s) - v^2(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds. \tag{6.18}$$

将 (6.17) 和 (6.18) 代入 (6.16)，即可证明其严格凸性

$$c_0 := \lambda - (c'_T + c'_h)_+ T - (c'_l + c')_+ \frac{T^2}{2} > 0. \tag{6.19}$$

第 1B 部分：强制性：

关于强制性，由公式 (6.13) 可得

$$\int_t^T \Big\langle D_v J_{tX}\big(v_{tX}\big)(s) - D_v J_{tX}(0)(s), v_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \geq c_0 \int_t^T \big\|v_{tX}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds, \tag{6.20}$$

此外，可以写成

$$J_{tX}\big(v_{tX}\big) - J_{tX}(0) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} J_{tX}\big(\theta v_{tX}\big)\, d\theta = \int_0^1 \int_t^T \Big\langle D_v J_{tX}(\theta v_{tX})(s), v_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds d\theta.$$

结合 (6.20)，可得

$$J_{tX}(v_{tX}) - J_{tX}(0) \geq \int_t^T \Big\langle D_v J_{tX}(0)(s), v_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds + \frac{c_0}{2} \int_t^T \big\|v_{tX}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds,$$

其中注意到 $\int_0^1 \theta d\theta = \frac{1}{2}$。至此，强制性的证明完成。

第2部分：最优控制的存在性与唯一性：

根据假设 **A(i)** 的 (3.5)、**A(iii)** 的 (3.7) 和 **B(i)** 的 (3.22)， l、 h、 F 和 F_T 均为连续函数；再结合由 (3.2) 可知 $\mathbb{X}_{tX}$ 在 v_{tX} 中关于强 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathcal{H}_m)$-范数连续这一事实，可知泛函$J_{tX}\big(v_{tX}\big)$显然在 v_{tX} 中连续。结合该泛函的凸性与强制性，根据 [27] 中的定理 7.2.12，可保证最优控制的存在性与唯一性。为求完整起见，我们在此给出自己的证明。

第2部分A. $J_{tX}\big(v_{tX}\big)$**的弱序列下半连续性：**

设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m)$，使得 $u_n \longrightarrow u_\infty$ 弱收敛。令 $\gamma_1 := \underset{n\to\infty}{\text{下极限}}\ J_{tX}(u_n)$，则存在一个子序列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得 $J_{tX}(u_{n_k}) \longrightarrow \gamma_1$。取 $\epsilon > 0$足够小，对于任意充分大的 k，有 $u_{n_k} \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m) \cap \{J_{tX}(u) \leq \gamma_1 + \epsilon\}$。由于 $J_{tX}(u)$是连续的，因此集合 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m) \cap \{J_{tX}(u) \leq \gamma_1 + \epsilon\}$是闭集。此外，$J_{tX}(u)$关于 u是凸的，因此集合 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m) \cap \{J_{tX}(u) \leq \gamma_1 + \epsilon\}$也是凸集，从而是弱闭的（见 [27]中的练习2.1.40。这是 Hahn-Banach 定理的一个简单推论：注意到凸集 $L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m) \cap \{J_{tX}(u) \leq \gamma_1 + \epsilon\}$与 $\{u_\infty\}$不能被线性泛函分离，因为u_∞是 u_{n_k}的弱极限）。由于 $\epsilon > 0$是任意的，我们看到 $u_\infty \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m) \cap \{J_{tX}(u) \leq \gamma_1\}$，从而$J_{tX}(u_\infty) \leq \gamma_1 =$下极限$_{n\to\infty}\ J_{tX}(u_n)$。

第 2B 部分：结论

令 $\gamma_2 = \inf_{v\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m)} J_{tX}(v)$ and $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m)$ 为一个满足 $J_{tX}(v_n) \longrightarrow \gamma_2$ 的极小化序列。由 $J_{tX}(v)$的强制性可知，存在一个 $\Gamma_1 > 0$，使得若 $v \in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m)$ 且 $\mathbf{k}u\mathbf{k}_{L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m)} \geq \Gamma_1$，则 $J_{tX}(v) > 2\gamma_2$。由于 $J_{tX}(v_n) \longrightarrow \gamma_2$，因此对足够大的 n，我们可以假设 $\mathbf{k}v_n\mathbf{k}_{L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathrm{H}m)} \leq \Gamma_1$。于是存在一个子序列 $\{v_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $v_{n_k} \longrightarrow v_\infty$ 弱收敛，因此 $J_{tX}\big(v_{tX}\big)$ 的弱序列下半连续性意味着

$$\inf_{v\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathcal{H}_m)} J_{tX}(v) \leq J_{tX}(v_\infty) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{tX}(v_{n_k}) = \gamma_2 = \inf_{v\in L^2_{\mathcal{W}_{tX}}(t,T;\mathcal{H}_m)} J_{tX}(v).$$

由此得出， v_∞ 是最优控制。根据本证明第 1A 部分所述的严格凸性，唯一性很容易得证。

■

6.2.3 引理 3.12 的证明

步骤 1. 弱收敛：

From (3.34)-(3.36), the quadruple $\big(\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(s), \Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Z}_{tX}(s), \Delta^\epsilon_\Psi u_{tX}(s), \Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{r}_{tX}(s)\big)$ solves the system

$$\begin{cases} \Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(s) = \Psi + \int_t^s \Delta^\epsilon_\Psi u_{tX}(\tau)d\tau; & (6.21)\\ \Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Z}_{tX}(s) = \int_0^1 h_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) + \theta\epsilon\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(T) \\ \qquad\qquad + D_X^2 F_T\big((\mathbb{Y}_{tX}(T) + \theta\epsilon\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(T)) \otimes m\big)(\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta \\ \qquad + \int_s^T \int_0^1 l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(\tau) \\ \qquad\qquad + l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(\tau), u_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta^\epsilon_\Psi u_{tX}(\tau)\big)\Delta^\epsilon_\Psi u_{tX}(\tau)d\theta d\tau \\ \qquad + \int_s^T \int_0^1 D_X^2 F\big((\mathbb{Y}_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(\tau)) \otimes m\big)(\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta d\tau \\ \qquad - \int_s^T \sum_{j=1}^n \Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{r}_{tX,j}(\tau)dw_j(\tau), & (6.22) \end{cases}$$

同时，

$$\int_0^1 l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(s) + \theta\epsilon\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)\big)\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(s) + l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(s), u_{tX}(s) + \theta\epsilon\Delta^\epsilon_\Psi u_{tX}(s)\big)\Delta^\epsilon_\Psi u_{tX}(s)d\theta + \Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Z}_{tX}(s) = 0. \tag{6.23}$$

由于根据 (3.54)，对于所有的 ϵ，$\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(s)$、$\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Z}_{tX}(s)$ 和 $\Delta^\epsilon_\Psi u_{tX}(s)$ 在 $L^\infty_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,\ T; \mathcal{H}_m)$ 中一致有界，因此根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，这些有限差分过程沿着某个子序列收敛到 $L^2_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,\ T; \mathcal{H}_m)$ 中的弱极限 $\mathscr{D}\mathbb{Y}^\Psi_{tX}(s)$、$\mathscr{D}\mathbb{Z}^\Psi_{tX}(s)$ 和 $\mathscr{D}u^\Psi_{tX}(s)$，当 $\epsilon \to 0$。方程 (6.21) 沿着该子序列变为，当 $\epsilon \to 0$。

$$\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(s) \longrightarrow \mathscr{D}\mathbb{Y}^\Psi_{tX}(s) = \Psi + \int_t^s \mathscr{D}u^\Psi_{tX}(\tau)d\tau, \quad \text{weakly in } L^2_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,T;\mathcal{H}_m), \tag{6.24}$$

其中 $\mathscr{D}u^\Psi_{tX}(\tau)$ 可表示为

$$\mathscr{D}u^\Psi_{tX}(\tau) = \Big[D_y u(\mathbb{Y}_{tX}, \mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]\Big[\mathscr{D}\mathbb{Y}^\Psi_{tX}(\tau)\Big] + \Big[D_z u(\mathbb{Y}_{tX}, \mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]\Big[\mathscr{D}\mathbb{Z}^\Psi_{tX}(\tau)\Big] \tag{6.25}$$

根据一阶条件 (3.36) 和注 3.13，我们还有

$$\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(T) \longrightarrow \mathscr{D}\mathbb{Y}^\Psi_{tX}(T) = \Psi + \int_t^T \mathscr{D}u^\Psi_{tX}(\tau)d\tau, \quad \text{weakly in } L^2_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(\mathcal{H}_m) \text{ up to a subsequence.} \tag{6.26}$$

此外，根据 (3.54)，对所有 ϵ in $L^2_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,T;\mathcal{H}_m)$ 中的取值，$\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{r}_{tX,j}(s)$ 都是一致有界的，因此，除去一个子序列后，它收敛到弱极限 $\mathscr{D}\mathbb{r}^\Psi_{tX,j}(s)$。定义 $\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(s) := \mathbb{Y}_{tX}(s) + \epsilon\theta\Delta^\epsilon_\Psi \mathbb{Y}_{tX}(s)$ 和 $u_{\theta\epsilon}(s) := u_{tX}(s) + \epsilon\theta\Delta^\epsilon_\Psi u_{tX}(s)$，我们通过补充逐点有界的测试函数，改写 (6.22) 的右端。

随机变量 $\varphi \in L^{\infty}_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,T;\mathcal{H}_m)$ 在内积下，经望远镜求和后，

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle \int_0^1 \Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) + D_X^2 F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)\otimes m\big)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle \int_s^T \int_0^1 l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(\tau), u_{\theta\epsilon}(\tau))\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau) \\
&\qquad\qquad + \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau), u_{tX}(\tau)) + D_X^2 F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau)\otimes m)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta d\tau, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&= \Big\langle \int_0^1 \Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) + D_X^2 F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)\otimes m\big) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T)) - D_X^2 F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle \int_0^1 \Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T)) + D_X^2 F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle \int_s^T \int_0^1 \Big[l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(\tau), u_{\theta\epsilon}(\tau)) - l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X}(\tau), u_{t,X}(\tau))\Big]\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau)d\theta d\tau, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle \int_s^T \int_0^1 l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X}(\tau), u_{t,X}(\tau))\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau)d\theta d\tau, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle \int_s^T \int_0^1 \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau), u_{tX}(\tau)) - l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)) \\
&\qquad\qquad + D_X^2 F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau)\otimes m) - D_X^2 F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta d\tau, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle \int_s^T \int_0^1 \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)) + D_X^2 F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta d\tau, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

我们断言，以下各项

$$
\Big\langle \int_0^1 \Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) + D_X^2 F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)\otimes m\big) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T)) - D_X^2 F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \tag{6.28}
$$

$$
\Big\langle \int_s^T \int_0^1 \Big[l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(\tau), u_{\theta\epsilon}(\tau)) - l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X}(\tau), u_{t,X}(\tau))\Big]\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau)d\theta d\tau, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}, \tag{6.29}
$$

$$
\Big\langle \int_s^T \int_0^1 \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau), u_{tX}(\tau)) - l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)) + D_X^2 F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau)\otimes m) - D_X^2 F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta d\tau, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \tag{6.30}
$$

收敛于零，其中 $\epsilon \to 0$ 表示取一个子序列。例如，对于 (6.28)，

$$
\begin{aligned}
&\Big|\Big\langle \int_0^1 \Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}\Big| \\
&\le \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \|\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))\|_{\mathcal{H}_m} \cdot \int_0^1 \big\|h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\big\|_{\mathcal{H}_m} d\theta.
\end{aligned}
$$

$\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau)$ 的定义以及 (3.54) 中的界告诉我们，

$$
\int_0^1 \big\|\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) - \mathbb{Y}_{tX}(T)\big\|_{\mathcal{H}_m} d\theta = \int_0^1 \epsilon\theta \big\|\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T)\big\|_{\mathcal{H}_m} d\theta \le \frac{\epsilon C_4'}{2}\|\Psi\|_{\mathcal{H}_m} \longrightarrow 0 \quad \text{as } \epsilon \to 0. \tag{6.31}
$$

(6.31) 中的强收敛和 Borel–Cantelli 引理表明，存在 ϵ 的一个子序列，使得

$$\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) - \mathbb{Y}_{tX}(T) \longrightarrow 0, \quad m \otimes \mathbb{P}\text{-a.s., a.e. } \theta \in [0,1], \text{ as } \epsilon \to 0, \text{ and} \tag{6.32}$$

$$\left\|\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) - \mathbb{Y}_{tX}(T)\right\|_{\mathcal{H}_m} \longrightarrow 0, \quad \text{for a.e. } \theta \in [0,1] \text{ as } \epsilon \to 0. \tag{6.33}$$

沿着此子序列，(6.32) 中的收敛性以及假设 **A(iv)** 的 (3.8) 中的 h_{xx} 连续性告诉我们

$$h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T)) \longrightarrow 0 \quad m \otimes \mathbb{P}\text{-a.s., a.e. } \theta \in [0,1], \text{ as } \epsilon \to 0. \tag{6.34}$$

由于根据 **A(iii)** 的 (3.7)， h_{xx}是逐点有界的，因此 $|h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))| \le 2\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |h_{xx}(x)| \le 2c_h$，$m \otimes \mathbb{P}$-几乎处处，几乎处处于 $\theta \in [0,1]$。利用控制收敛定理和 (6.34)，我们可知当 $\epsilon \to 0$ 时，有

$$\int_0^1 \left\|h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\right\|_{\mathcal{H}_m} d\theta \longrightarrow 0. \tag{6.35}$$

由 (3.54) 中 $\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(\tau)$ 的$\mathcal{H}_m$-有界性以及 (6.33) 中对几乎处处 $\theta \in [0,1]$ 的强收敛，假设 **B(v)(a)** 的 (3.26) 推出

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big) - D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\right| dm(x)\right] \longrightarrow 0,$$

对几乎处处的 $\theta \in [0,1]$，当 $\epsilon \to 0$ 时。根据假设 **B(ii)** 的 (3.23)、柯西-施瓦茨不等式和 (3.54)，我们还可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big) - D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\right| dm(x)\right] \\
&\le \left\|D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big) - D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\right\|_{\mathcal{H}_m} \\
&\le \left\|D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\right\|_{\mathcal{H}_m} + \left\|D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\right\|_{\mathcal{H}_m} \\
&\le 2c_T \left\|\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T))\right\|_{\mathcal{H}_m} \\
&\le 2c_T C_4' \|\Psi\|_{\mathcal{H}_m}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

对几乎处处的 $\theta \in [0,1]$ 一致有界。应用控制收敛定理可得，当 $\epsilon \to 0$ 时

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \int_0^1 \Big[D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) \otimes m\big) - D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) \otimes m\big)\Big](\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta, \varphi \right\rangle_{\mathcal{H}_m}\right| \\
&\le \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \int_0^1 \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big) - D^2_X F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) \otimes m\big)\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\right| dm(x)\right] d\theta \\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

结合 (6.35) 和 (6.37)，可知当 $\epsilon \to 0$ 时，(6.28) 收敛于零。因此，以类似的方式，当 $\epsilon \to 0$ 时，(6.29)-(6.30) 也收敛于零。于是，由于 $\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(\tau)$、 $\Delta^{\epsilon}_{\Psi}u_{tX}(\tau)$ 的弱收敛，弱

收敛 (6.26) 以及 (6.28)-(6.30) 的收敛，(6.27) 当 $\epsilon \to 0$ 时沿某个子序列收敛，

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T \Big\langle \int_0^1 \Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)) + D_X^2 F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)\otimes m\big)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\
&\quad + \int_t^T \int_s^T \Big\langle \int_0^1 l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(\tau), u_{\theta\epsilon}(\tau))\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau) \\
&\qquad\qquad + \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau), u_{tX}(\tau)) + D_X^2 F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(\tau)\otimes m)\Big](\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} d\tau ds \\
&\longrightarrow \int_t^T \Big\langle \Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T)) + D_X^2 F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big)\Big](\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)), \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\
&\quad + \int_t^T \int_s^T \Big\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X}(\tau), u_{t,X}(\tau))\mathscr{D}u_{tX}^\Psi(\tau) \\
&\qquad\qquad + \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)) + D_X^2 F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\Big](\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau)), \varphi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} d\tau ds,
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

因为（6.27）中的其余项仅涉及作用于 $\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}$ 和 $\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}$的线性算子。（6.22）的后向方程以及（6.38）的收敛性表明

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(s) = {} & h_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T) + D_X^2 F_T\big((\mathbb{Y}_{tX}(T))\otimes m\big)(\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)) \\
& + \int_s^T l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau) + l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t,X}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\mathscr{D}u_{tX}^\Psi(\tau)d\tau \\
& + \int_s^T D_X^2 F\big((\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m\big)(\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau))d\tau - \int_s^T \sum_{j=1}^n \mathscr{D}\mathbb{r}_{tX,j}^\Psi(\tau)dw_j(\tau).
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

类似地，我们也注意到，当 $\epsilon \to 0$ 沿着一个子序列时，

$$
\begin{aligned}
\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Z}_{tX}(t) = {} & \int_0^1 h_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(T) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T) \\
& \qquad + D_X^2 F_T\big((\mathbb{Y}_{tX}(T) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))\otimes m\big)(\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta \\
& + \int_t^T \int_0^1 l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau) \\
& \qquad + l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon\Psi}(\tau), u_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau)\big)\Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(\tau)d\theta d\tau \\
& + \int_t^T \int_0^1 D_X^2 F\big((\mathbb{Y}_{tX}(\tau) + \theta\epsilon\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau))\otimes m\big)(\Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta d\tau - \int_t^T \sum_{j=1}^n \Delta_\Psi^\epsilon \mathbb{r}_{tX,j}(\tau)dw_j(\tau) \\
\longrightarrow {} & h_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\big)\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T) + D_X^2 F_T\big((\mathbb{Y}_{tX}(T))\otimes m\big)(\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)) \\
& + \int_t^T l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau) + l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t,X}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\mathscr{D}u_{tX}^\Psi(\tau)d\tau \\
& + \int_t^T D_X^2 F\big((\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m\big)(\mathscr{D}\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau))d\tau - \int_s^T \sum_{j=1}^n \mathscr{D}\mathbb{r}_{tX,j}^\Psi(\tau)dw_j(\tau) \\
= {} & \mathscr{D}\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(t), \qquad \text{weakly in } L^2_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(\mathcal{H}_m).
\end{aligned}
$$

在满足一阶条件 (3.36) 的前提下，我们看到 (3.58) 是一个线性系统，因此可以证明其解是唯一的。下文将证明这一点。暂且接受这一结论，我们看到

(6.24) 和 (6.39) 的解是唯一的，且等于 $\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Z}_{tX}(s)\ \Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{r}_{tX}(s)\big)$ 的弱极限，其中 $u_{tX}(s)$ 满足一阶条件 (3.36)。因此，这意味着沿任意子序列，当 $\epsilon\to 0$ 时，$\big(\Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{Z}_{tX}(s)\ \Delta^{\epsilon}_{\Psi}\mathbb{r}_{tX}(s)\big)$ 的弱极限都相同（若该极限存在）。因此，我们现在可以将 $\big(\mathscr{D}\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\ \mathscr{D}\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\ \mathscr{D}u^{\Psi}_{tX}(s)\ \mathscr{D}\mathbb{r}^{\Psi}_{tX}(s)\big)$ 认定为 $\big(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\ D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\ Du^{\Psi}_{tX}(s)\ D\mathbb{r}^{\Psi}_{tX}(s)\big)$，后者确实是雅可比流。

(3.58)[5]的唯一性：
如果我们有两组具有相同初始条件 Ψ 的系统（3.58）的解，那么只需证明它们之间的差为零即可；还要注意，这些差满足以下一阶条件（6.41）。由于系统（3.58）是线性的，只需证明具有零初始条件的系统的任意解$\big(D\mathbb{Y}^{*}(s)\ D\mathbb{Z}^{*}(s)\ Du^{*}(s)\ D\mathbb{r}^{*}(s)\big)$，即

$$\begin{cases} D\mathbb{Y}^{*}(s)=\displaystyle\int_t^s Du^{*}(\tau)d\tau;\\ D\mathbb{Z}^{*}(s)=h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))D\mathbb{Y}^{*}(T)+D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)(D\mathbb{Y}^{*}(T))\\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_s^T\Big\{l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u(\tau))D\mathbb{Y}^{*}(\tau)+l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u(\tau))Du^{*}(\tau)+D_X^2F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\big(D\mathbb{Y}^{*}(\tau)\big)\Big\}d\tau\\ \qquad\qquad -\displaystyle\int_s^T\sum_{j=1}^n D\mathbb{r}_j^{*}(\tau)dw_j(\tau), \end{cases}\tag{6.40}$$

必须为零。由（3.36）中的一阶条件，我们得到

$$l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s)\big)D\mathbb{Y}^{*}(s)+l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s)\big)Du^{*}(s)+D\mathbb{Z}^{*}(s)=0.\tag{6.41}$$

考虑内积 $\big\langle D\mathbb{Y}^{*}(s)\ D\mathbb{Z}^{*}(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m}$，结合（6.41），我们得到以下方程

$$\begin{aligned} &\Big\langle h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))D\mathbb{Y}^{*}(T)+D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big)(D\mathbb{Y}^{*}(T)),D\mathbb{Y}^{*}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\ &=-\int_t^T\Big\langle l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau)\big)D\mathbb{Y}^{*}(\tau)+l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau)\big)Du^{*}(\tau),Du^{*}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\ &\quad-\int_t^T\Big\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))Du^{*}(\tau)+l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))D\mathbb{Y}^{*}(\tau)+D_X^2F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)(D\mathbb{Y}^{*}(\tau)),D\mathbb{Y}^{*}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau. \end{aligned}$$

假设 **A(v)'s**（3.9）、**A(vi)'s**（3.10）和 **B(v)(b)'s**（3.27）意味着

$$\int_t^T\lambda\big\|Du^{*}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2-(c_l'+c')\big\|D\mathbb{Y}^{*}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2ds-(c_h'+c_T')\big\|D\mathbb{Y}^{*}(T)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2\le 0.\tag{6.42}$$

将（6.40）中的 $D\mathbb{Y}^{*}(s)$方程与柯西-施瓦茨不等式简单应用相结合，可得

$$\big\|D\mathbb{Y}^{*}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2\le s\int_t^T\big\|Du^{*}(\tau)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau\quad\text{and}\quad\int_t^T\big\|D\mathbb{Y}^{*}(\tau)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau\le\frac{T^2}{2}\int_t^T\big\|Du^{*}(\tau)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau.\tag{6.43}$$

[5]众所周知，即使在常系数情形下，一般线性正倒向随机微分方程的整体唯一性也不成立。例如，可以通过系统 $dX_t=Y_t$ 和 $dY_t=-X_t$（其中 $X_0=Y_{\pi/2}=0$）验证这一点：对于任意 $a\in\mathbb{R}$，$(X_t,Y_t)=(a\sin t,a\cos t)$ 都可以是一个解。(3.58) 的唯一性主张严重依赖于正倒向随机微分方程的某些凸性结构，即 (3.30)。

将（6.43）代入（6.42），得到

$$\left[\lambda-(c_h'+c_T')_+T-(c_l'+c')_+\frac{T^2}{2}\right]\int_t^T\left\|Du^*(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\leq 0.$$

(3.30)中的条件意味着 $\int_t^T\left\|Du^*(s)\right\|^2{}_{\mathcal{H}_m}ds=0$，由此进一步可推出，对几乎处处的$s\in[t,T]$，$Du^*(s)=0$，$m\otimes\mathbb{P}$-几乎必然成立。因此，由于过程 $D\mathbb{Y}^*(s)$ 和 $D\mathbb{Z}^*(s)$ 关于时间 s连续，根据 (6.40) 和 (6.41)，我们很容易看出，对所有 $s\in[t,T]$，$D\mathbb{Y}^*(s)=D\mathbb{Z}^*(s)=0$, $m\otimes\mathbb{P}$-几乎必然成立；并且对几乎处处的 $s\in[t,T]$，$D\mathbb{r}^*(s)=0$, $m\otimes\mathbb{P}$-几乎必然成立。

步骤 2：强收敛：

接下来，我们将证明有限差分过程 $\left(\Delta_\Psi^\epsilon\mathbb{Y}_{tX}(s)\ \Delta_\Psi^\epsilon\mathbb{Z}_{tX}(s)\ \Delta_\Psi^\epsilon u_{tX}(s)\ \Delta_\Psi^\epsilon\mathbb{r}_{tX}(s)\right)$ 在 $\epsilon\to 0$ 时于 $L^2_{\mathcal{W}_{tX\Psi}}(t,\ T;\mathcal{H}_m)$ 中强收敛到 $\left(D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\ D\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(s)\ Du_{tX}^\Psi(s)\ D\mathbb{r}_{tX}^\Psi(s)\right)$。否则，存在一个序列 $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得 $\epsilon_k\longrightarrow 0$，且不失一般性，我们假设

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{s\in[t,T]}\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_k}\mathbb{Y}_{tX}(s)-D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}>0.\tag{6.44}$$

根据本证明中的步骤 1，我们可以从 $\{\epsilon_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$中提取一个子序列 $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\left(\Delta_\Psi^{\epsilon_{k_j}}\mathbb{Y}_{tX}(s),\Delta_\Psi^{\epsilon_{k_j}}\mathbb{Z}_{tX}(s)\ \Delta_\Psi^{\epsilon_{k_j}}u_{tX}(s)\ \Delta_\Psi^{\epsilon_{k_j}}\mathbb{r}_{tX}(s)\right)$弱收敛到 $\left(D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\,D\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(s)\,Du_{tX}^\Psi(s)\,D\mathbb{r}_{tX}^\Psi(s)\right)$，其中 $j\to 0$，且该极限是满足 (6.25) 的 $Du_{tX}^\Psi(s)$ 对应的方程 (3.58) 的唯一解。为简洁起见，我们用 ϵ_j 代替 ϵ_{k_j}，以避免繁琐的记号，同时不影响本证明后续部分的主要论证。

注意到 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)$ 是有限变差过程，我们对$\left\langle\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)\,\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(s)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}$应用传统伊藤引理，得到该方程。

$$\begin{aligned}\left\langle\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(t),\Psi\right\rangle_{\mathcal{H}_m}=&\left\langle\int_0^1h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T))\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)+D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)\otimes m\big)(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta,\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\\&-\int_t^T\left\langle\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(\tau),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\&+\int_t^T\left\langle\int_0^1l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(\tau),u_{\theta\epsilon_j}(\tau))\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(\tau)+l_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(\tau),u_{tX}(\tau))\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\right.\\&\qquad\left.+D_X^2F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(\tau)\otimes m)(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta,\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau,\end{aligned}$$

结合（6.23）中的一阶条件，我们还可得

$$\begin{aligned}&\left\langle\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(t),\Psi\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\\&=\left\langle\int_0^1h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T))\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)+D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)\otimes m\big)(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T))d\theta,\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\\&\quad+\int_t^T\left\langle\int_0^1l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(\tau),u_{tX}(\tau)\big)\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(\tau)+l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(\tau),u_{\theta\epsilon_j}(\tau)\big)\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(\tau)d\theta,\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\&\quad+\int_t^T\left\langle\int_0^1l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(\tau),u_{\theta\epsilon_j}(\tau))\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(\tau)+l_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(\tau),u_{tX}(\tau))\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\right.\\&\qquad\left.+D_X^2F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(\tau)\otimes m)(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(\tau))d\theta,\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau.\end{aligned}\tag{6.45}$$

通过定义线性算子 $Q_{1\epsilon_j}:=\ h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T))+D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)\ \otimes m)$, $Q_{2\epsilon_j}:=\ l_{vx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(\tau)\ u_{tX}(\tau))$,$Q_{3\epsilon_j}:=l_{vv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(\tau)\,u_{\theta\epsilon_j}(\tau))$, $Q_{4\epsilon_j}:=l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(\tau)\,u_{\theta\epsilon_j}(\tau))$,$Q_{5\epsilon_j}:=l_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(\tau)\ u_{tX}(\tau))+D_X^2F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(\tau)\otimes m)$，直接利用（6.39）中雅可比流的后向方程和伊藤引理，我们还可以写成

$$\begin{aligned}\left\langle D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi}(t),\Psi\right\rangle_{\mathcal{H}_m}=&\left\langle Q_1^*(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}+\int_t^T\left\langle Q_2^*(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(\tau)),Du_{tX}^{\Psi}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\&+\int_t^T\left\langle Q_3^*(Du_{tX}^{\Psi}(\tau)),Du_{tX}^{\Psi}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau+\int_t^T\left\langle Q_4^*(Du_{tX}^{\Psi}(\tau)),D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\&+\int_t^T\left\langle Q_5^*(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(\tau)),D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau,\end{aligned}\tag{6.46}$$

例如， $Q_1^*=h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\ +D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)$，这是通过注意到 (6.31) 的强收敛，以及 h_{xx} 和 $D_X^2F_T$ 分别在假设 **A(iv)**的 (3.8) 和**B(iv)**的 (3.25) 下的连续性得到的。

步骤 2A. $\left\langle\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(t)\ ^{\Psi}\right\rangle_{\mathcal{H}_m}-\left\langle D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi}(t)\ ^{\Psi}\right\rangle_{\mathcal{H}_m}$**的估计：**

参照 (6.45) 和 (6.46)，我们首先考察这一项，以研究 $\left\langle\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(t)\ ^{\Psi}\right\rangle_{\mathcal{H}_m}-\left\langle D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi}(t)\ ^{\Psi}\right\rangle_{\mathcal{H}_m}$的极限

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left\langle Q_{1\epsilon_j}(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}-\left\langle Q_1^*(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\theta\\&=\int_0^1\left\langle Q_{1\epsilon_j}\left(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\\&\quad+\left\langle Q_{1\epsilon_j}(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}+\left\langle Q_{1\epsilon_j}(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T))-Q_1^*(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\theta.\end{aligned}\tag{6.47}$$

(6.47) 第三行的第一项为

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left\langle Q_{1\epsilon_j}(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\theta\\&=\int_0^1\left\langle(Q_{1\epsilon_j}-Q_1^*)(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}+\left\langle Q_1^*(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\theta.\end{aligned}\tag{6.48}$$

由于根据 (6.26)，$\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)$ 弱收敛于 $D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)$，因此 (6.48) 第二行的第二项收敛于零。(6.48) 第二行的第一项可估计为

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left|\left\langle(Q_{1\epsilon_j}-Q_1^*)(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\right|d\theta\\&\le\int_0^1\left|\left\langle\left[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T))-h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\right](D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\right|\\&\quad+\left|\left\langle\left[D_X^2F_T\left(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)\otimes m\right)-D_X^2F_T\left(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\right)\right](D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)),\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\right|d\theta\\&\le\int_0^1\left\|\left[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T))-h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\right](D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T))\right\|_{\mathcal{H}_m}\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\|_{\mathcal{H}_m}\\&\quad+\left\|\left[D_X^2F_T\left(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)\otimes m\right)-D_X^2F_T\left(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\right)\right](D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T))\right\|_{\mathcal{H}_m}\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(T)\right\|_{\mathcal{H}_m}d\theta.\end{aligned}$$

根据（3.54），鉴于线性算子范数的性质、Fatou 引理以及 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T)$ 的弱收敛

由（6.26）可见,

$$\left\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\|_{\mathcal{H}_m} \le C_4'\|\Psi\|_{\mathcal{H}_m}. \tag{6.49}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\left\langle (Q_{1\epsilon_j}-Q_1^*)(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)), \Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\right| d\theta \\
&\le 2C_4'\|\Psi\|_{\mathcal{H}_m}\int_0^1 \left\|\left[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T))-h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\right](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))\right\|_{\mathcal{H}_m} d\theta \qquad (6.50)\\
&\quad + 2C_4'\|\Psi\|_{\mathcal{H}_m}\int_0^1 \left\|\left[D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)\otimes m\big)-D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big)\right](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))\right\|_{\mathcal{H}_m} d\theta. \qquad (6.51)
\end{aligned}$$

由于根据假设 **A(iii)** 的 **(3.7)**，$|h_{xx}|$ 也有界，因此由 **(6.34)**、**(6.49)** 和控制收敛定理可知，**(6.50)** 沿 $\epsilon_j\to 0$ 的某个子序列收敛于零。由于 **(6.33)** 中 $\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)$ 的强收敛、 **(6.49)** 和 **(6.36)** 中的有界性，应用假设 **B(v)(a)** 的 **(3.26)** 可得

$$\int_0^1 \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left[D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)\otimes m\big)-D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big)\right](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))\right| dm(x)\right] d\theta \longrightarrow 0,$$

这进一步意味着存在 ϵ_j 的一个子序列，使得

$$\left[D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon}(T)\otimes m\big)-D_X^2F_T\big(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m\big)\right](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)) \longrightarrow 0,$$

当 $\epsilon_j\to 0$ 时，对几乎处处的 $\theta\in[0,1]$，$m\otimes\mathbb{P}$-几乎处处成立。因此，由假设 **B(ii)** 的 **(3.23)** 中 $D_X^2F_T$ 的有界性、**(6.49)** 以及控制收敛定理可知，**(6.51)** 沿某个子序列也收敛于 **0**。由此可得，**(6.48)** 沿 $\epsilon_j\to 0$ 的某个子序列收敛于 **0**。**(6.47)** 第三行中的第二项可以类似处理，从而得到其沿 ϵ_j 的某个子序列收敛于 **0**。因此，可得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\langle Q_{1\epsilon_j}(\Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)), \Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m} &- \left\langle Q_1^*(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)), D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&- \left\langle Q_{1\epsilon_j}\big(\Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big), \Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m} d\theta
\end{aligned}$$

当 $\epsilon_j\to 0$时趋于 **0**，至少沿一个子序列成立。通过类似地估计 $\langle\Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Z}_{tX}(t)^{\Psi}\rangle_{\mathcal{H}_m}\ \bar{}\ \langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)^{\Psi}\rangle_{\mathcal{H}_m}$中涉及 $Q_{2\epsilon_j}$、.....、$Q_{5\epsilon_j}$的其余项，我们可以推得，当 $\epsilon_j\to 0$时，至少沿一个子序列成立,

$$\left\langle \Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Z}_{tX}(t),\Psi\right\rangle_{\mathcal{H}_m} - \left\langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t),\Psi\right\rangle_{\mathcal{H}_m} - \mathscr{J}^{\dagger}_{\epsilon_j} \longrightarrow 0, \tag{6.52}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}^{\dagger}_{\epsilon_j} := \int_0^1 &\left\langle Q_{1\epsilon_j}\big(\Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big), \Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&+\int_t^T \left\langle Q_{2\epsilon_j}\big(\Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(s)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\big), \Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}u_{tX}(s)-Du^{\Psi}_{tX}(s)\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad+\left\langle Q_{3\epsilon_j}\big(\Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}u_{tX}(s)-Du^{\Psi}_{tX}(s)\big), \Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}u_{tX}(s)-Du^{\Psi}_{tX}(s)\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad+\left\langle Q_{4\epsilon_j}\big(\Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}u_{tX}(s)-Du^{\Psi}_{tX}(s)\big), \Delta^{\epsilon_j}_{\Psi}\mathbb{Y}_{tX}(s)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \Big\langle Q_{5\epsilon_j}\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} dsd\theta \\
&= \int_0^1 \Big\langle \big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)) + D_X^2 F_T(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)\otimes m)\big]\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \int_t^T \Big\langle l_{vx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s))\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle l_{vv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s), u_{\theta\epsilon_j}(s))\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s), u_{\theta\epsilon_j}(s))\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s)\big)\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle D_X^2 F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s)\otimes m)\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} dsd\theta \\
&= \int_0^1 \Big\langle \big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)) + D_X^2 F_T(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(T)\otimes m)\big]\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \int_t^T \Big\langle l_{vx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s))\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle l_{vv}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s))\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s))\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle l_{xx}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s))\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle D_X^2 F(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s)\otimes m)\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} dsd\theta + \mathscr{R}_{\epsilon_j},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{R}_{\epsilon_j} = \\
&\int_0^1\int_t^T \Big\langle \big[l_{vv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s), u_{\theta\epsilon_j}(s)) - l_{vv}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s))\big]\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle \big[l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s), u_{\theta\epsilon_j}(s)) - l_{xv}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s))\big]\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\big), \Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} dsd\theta.
\end{aligned}
$$

步骤2B。 $\mathscr{J}_{\epsilon_j}^\dagger$ 的估计与结论：

结合 (6.52) 和 (6.40) 中的收敛性，我们有 $\mathscr{J}_{\epsilon_j}^\dagger \longrightarrow 0$ as $\epsilon_j \to 0$ （在一个子序列上成立）。假设 **A(v)** 的 (3.9)、**A(vi)** 的 (3.10) 和 **B(v)(b)** 的 (3.27) 中， h_{xx}、 $D_X^2F_T$、 D_X^2F的凸性条件以及 l的二阶导数意味着

$$
\begin{aligned}
\mathscr{J}_{\epsilon_j}^\dagger \geq \int_t^T \lambda\big\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 - (c_l' + c')\big\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds \\
- (c_h' + c_T')\big\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(T) - D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(T)\big\|_{\mathcal{H}_m}^2 + \mathscr{R}_{\epsilon_j}.
\end{aligned} \tag{6.53}
$$

我们首先估计这一项 $\mathscr{R}_{\epsilon_j}$,

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{R}_{\epsilon_j}| \leq \\
&\int_0^1\int_t^T \Big\|\big[l_{vv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s), u_{\theta\epsilon_j}(s)) - l_{vv}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s), u_{tX}(s))\big]\big(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\big)\Big\|_{\mathcal{H}_m}\Big\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s) - Du_{tX}^\Psi(s)\Big\|_{\mathcal{H}_m}
\end{aligned}
$$

$$+\left\|\left[l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s),u_{\theta\epsilon_j}(s))-l_{xv}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s),u_{tX}(s))\right]\left(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s)-Du_{tX}^\Psi(s)\right)\right\|_{\mathcal{H}_m}\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)-D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}dsd\theta$$
$$\leq 2c_l\int_t^T\left\|\left(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s)-Du_{tX}^\Psi(s)\right)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2+\left\|\left(\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s)-Du_{tX}^\Psi(s)\right)\right\|_{\mathcal{H}_m}\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)-D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}ds,$$

这里用到了假设 **A(ii)** 的 **(3.6)**。由 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s)$ 和 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)$ 的弱收敛以及 **(3.54)**，可知 $\mathscr{R}_{\epsilon_j}$ 可积。此外，根据 $\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s)$ 的定义和 **(3.54)**，可得

$$\int_0^1\int_t^T\left\|\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s)-\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2dsd\theta=\epsilon^2\int_0^1(1-\theta)^2\int_t^T\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2dsd\theta\longrightarrow 0\quad\text{as } j\to\infty.$$

Borel-Cant elli 引理表明，ϵ_j 存在一个子序列，仍记为 ϵ_j，使得

$$\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s)-\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s)\longrightarrow 0,\quad m\otimes\mathbb{P}\text{-a.s., a.e. }\theta\in[0,1],\text{ a.e. }s\in[t,T],\text{ as }\epsilon_j\to 0.\tag{6.54}$$

l 的二阶导数的连续性也意味着

$$l_{vv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s),u_{\theta\epsilon_j}(s))-l_{vv}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s),u_{tX}(s))\longrightarrow 0,\quad m\otimes\mathbb{P}\text{-a.s., a.e. }\theta\in[0,1],\text{ a.e. }s\in[t,T],\text{ as }\epsilon_j\to 0$$

and

$$l_{xv}(\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon_j\Psi}(s),u_{\theta\epsilon_j}(s))-l_{xv}(\mathbb{Y}_{\theta\epsilon_j}(s),u_{tX}(s))\longrightarrow 0,\quad m\otimes\mathbb{P}\text{-a.s., a.e. }\theta\in[0,1],\text{ a.e. }s\in[t,T],\text{ as }\epsilon_j\to 0.$$

因此，Lebesgue 控制收敛表明，当 $j\to\infty$ 时，$\mathscr{R}_{\epsilon_j}\longrightarrow 0$。应用柯西-施瓦茨不等式后，$\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)-D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)$ 的方程表明

$$\begin{aligned}&\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)-D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2\leq(s-t)\int_t^s\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(\tau)-Du_{tX}^\Psi(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau\quad\text{and}\\&\int_t^T\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(\tau)-D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau\leq\frac{T^2}{2}\int_t^T\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(\tau)-Du_{tX}^\Psi(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2d\tau.\end{aligned}\tag{6.55}$$

将 **(6.55)** 代入 **(6.53)**，结合 **(3.30)** 中的假设以及 $\mathscr{R}_{\epsilon_j}\to 0$ 这一事实，可知当 $\epsilon_j\to 0$ 时（取一个子序列），

$$\int_t^T\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s)-Du_{tX}^\Psi(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2ds\longrightarrow 0.\tag{6.56}$$

我们还将 **(6.56)** 代入 **(6.55)**，得到当 $\epsilon_j\to 0$ 时（取一个子序列），

$$\left\|\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)-D\mathbb{Y}_{tX}^\Psi(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}^2\longrightarrow 0\quad\text{uniformly for all }s\in[t,T].\tag{6.57}$$

I这与（6.44）矛盾，因此应当可以得出 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)$ 的强收敛 .

通过将 **(6.22)** 中 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(s)$ 的方程从 **(3.58)** 中 $D\mathbb{Z}_{tX}^\Psi(s)$ 的方程中相减，再结合伊藤引理以及 **(6.56)** 和 **(6.57)** 中的收敛性，可得 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(s)$ 和 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{r}_{tX}(s)$ 的强收敛。最后，根据 **(3.36)** 中的一阶条件以及刚刚得到的 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Y}_{tX}(s)$、$\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{Z}_{tX}(s)$ 和 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}\mathbb{r}_{tX}(s)$ 的强收敛，可推出 $\Delta_\Psi^{\epsilon_j}u_{tX}(s)$ 的强收敛。

■

6.2.4 引理3.14的证明

第1部分。关于 Ψ 的线性：

给定 X、 Ψ_1、 $\Psi_2 \in L^2\ \mathcal{W}_t^{\amalg}(\mathcal{H}_m) \subset \mathcal{H}_m$，将 (3.58) 中的方程与 $\Psi = \Psi_1$ 和 $\Psi = \Psi_2$ 相加，可得

$$
\begin{cases}
D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1}(s) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_2}(s) = \Psi_1 + \Psi_2 + \displaystyle\int_t^s \Big[D_y u(\mathbb{Y}_{tX}, \mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]\Big[D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1}(\tau) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_2}(\tau)\Big]d\tau \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_t^s \Big[D_z u(\mathbb{Y}_{tX}, \mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]\Big[D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_1}(\tau) + D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_2}(\tau)\Big]d\tau; \\
D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_1}(s) + D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_2}(s) = h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\big[D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1}(T) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_2}(T)\big] + D_X^2 F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\big(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1}(T) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_2}(T)\big) \\
\qquad + \displaystyle\int_s^T \Big\{ l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u(\tau))\big[D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1}(\tau) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_2}(\tau)\big] \\
\qquad\qquad + l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u(\tau))\Big[D_y u(\mathbb{Y}_{tX}, \mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]\big[D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1}(\tau) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_2}(\tau)\big] \\
\qquad\qquad + l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u(\tau))\Big[D_z u(\mathbb{Y}_{tX}, \mathbb{Z}_{tX})(\tau)\Big]\big[D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_1}(\tau) + D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_2}(\tau)\big] \\
\qquad\qquad + D_X^2 F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\big(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1}(\tau) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_2}(\tau)\big)\Big\}d\tau \\
\qquad - \displaystyle\int_s^T \sum_{j=1}^n D\mathbb{r}_{tX,j}^{\Psi_1}(\tau) + D\mathbb{r}_{tX,j}^{\Psi_2}(\tau) dw_j(\tau).
\end{cases}
\tag{6.58}
$$

通过比较在 $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ 下的 (3.58) 与 (6.58) 中的方程，引理 3.12 中所述的解的唯一性表明

$$
(D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1+\Psi_2}(s), D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_1+\Psi_2}(s), Du_{tX}^{\Psi_1+\Psi_2}(s)) = (D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_1}(s) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi_2}(s), D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_1}(s) + D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi_2}(s), Du_{tX}^{\Psi_1}(s) + Du_{tX}^{\Psi_2}(s))
$$

对于任意 $s \in [t,T]$ 和 $D\mathbb{r}_{tX}^{\Psi_1+\Psi_2}{}_{,\ j}(s) = D\mathbb{r}_{tX,\ j}^{\Psi_1}(s) + D\mathbb{r}_{tX,\ j}^{\Psi_2}(s)$，对几乎处处的 $s \in [t,T]$ 成立。齐次性由盖托导数的定义直接给出，例如，

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{\epsilon\to 0}\left\| \frac{\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon c\Psi}(s) - \mathbb{Y}_{tX}(s)}{\epsilon} - D\mathbb{Y}_{tX}^{c\Psi}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m} = c\lim_{\epsilon'\to 0}\left\| \frac{\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon'\Psi}(s) - \mathbb{Y}_{tX}(s)}{\epsilon'} - \frac{1}{c}D\mathbb{Y}_{tX}^{c\Psi}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m} \\
&= c\lim_{\epsilon'\to 0}\left\| \frac{\mathbb{Y}_{t,X+\epsilon'\Psi}(s) - \mathbb{Y}_{tX}(s)}{\epsilon'} - D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(s) + D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(s) - \frac{1}{c}D\mathbb{Y}_{tX}^{c\Psi}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m},
\end{aligned}
$$

对于任意非零常数 $c \in \mathbb{R}$。因此 $D\mathbb{Y}_{tX}^{c\Psi}(s) = cD\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(s)$。

第2部分。关于 X的部分连续性：

对于 X, $\Psi \in L^2\ \mathcal{W}_t^{\amalg}(\mathcal{H}_m) \subset \mathcal{H}_m$，我们考虑一个序列 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2\ \mathcal{W}_t^{\amalg}(\mathcal{H}_m)$，使得 $X_k \longrightarrow X$ in $\mathcal{H}_m$。对内积 $\big\langle D\mathbb{Z}_{tX_k}^{\Psi}(s) - D\mathbb{Z}_{tX}^{\Psi}(s)\, D\mathbb{Y}_{tX_k}^{\Psi}(s) - D\mathbb{Y}_{tX}^{\Psi}(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m}$应用伊藤引理，并结合

由式 (3.36) 中的一阶条件可得

$$
\begin{aligned}
&\big\langle h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX_k}(T))D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T), D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \big\langle D^2_X F_T(\mathbb{Y}_{tX_k}(T)\otimes m)\big(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T)\big) - D^2_X F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\big(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big), D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&= -2\int_t^T \Big\langle l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau), u_{tX_k}(\tau)\big) D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big) D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau), Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad - \int_t^T \Big\langle l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau), u_{tX_k}(\tau)\big) Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big) Du^{\Psi}_{tX}(\tau), Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad - \int_t^T \Big\langle l_{xx}(\mathbb{Y}_{t,X_k}(\tau), u_{t,X_k}(\tau))D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - l_{xx}(\mathbb{Y}_{t,X}(\tau), u_{t,X}(\tau))D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau), D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad - \int_t^T \Big\langle D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau)\otimes m)(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau)) - D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)), D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} d\tau.
\end{aligned}
\tag{6.59}
$$

(6.59) 中的第一行可利用杨氏不等式和假设 **A(vi)** 的 (3.10) 进行估计，从而得到

$$
\begin{aligned}
&\big\langle h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX_k}(T))D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T), D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&= \big\langle h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX_k}(T))\big[D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big] + \big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX_k}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\big] D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T), \\
&\qquad\qquad D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\geq -c'_h\big\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} - \kappa_8\big\|\big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX_k}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\big] D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad - \frac{1}{4\kappa_8}\big\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\|^2_{\mathcal{H}_m},
\end{aligned}
$$

其中某个 $\kappa_8 > 0$ 将在后文确定。(6.59) 中的其他所有项均可按上述类似方式分解和估计，再结合假设 **A(v)** 的 (3.9) 和 **B(v)(b)** 的 (3.27)，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T \lambda\big\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} - (c'_l + c')\big\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau - (c'_h + c'_T)\big\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} \\
&\leq \frac{1}{4\kappa_8}\big\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} + \kappa_8\big\|\big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX_k}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\big] D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \frac{1}{4\kappa_9}\big\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} + \kappa_9\big\|\big[D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX_k}(T)\otimes m) - D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\big](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))\big\|^2_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \int_t^T \frac{1}{2\kappa_{10}}\big\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} + 2\kappa_{10}\big\|\big[l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau), u_{tX_k}(\tau)\big) - l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\big] D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad + \int_t^T \frac{1}{4\kappa_{11}}\big\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} + \kappa_{11}\big\|\big[l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau), u_{tX_k}(\tau)\big) - l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\big] Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad + \int_t^T \frac{1}{4\kappa_{12}}\big\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} + \kappa_{12}\big\|\big[l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau), u_{tX_k}(\tau)\big) - l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\big] D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad + \int_t^T \frac{1}{4\kappa_{13}}\big\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} + \kappa_{13}\big\|\big[D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau)\otimes m) - D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\big] D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau,
\end{aligned}
\tag{6.60}
$$

对于某些待确定的正常数 $\kappa_9, \ldots, \kappa_{13}$。应用柯西-施瓦茨不等式，

$D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)$ 的方程意味着

$$\left\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} \leq s\int_t^s \left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau, \tag{6.61}$$

and

$$\int_t^T \left\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \leq \frac{T^2}{2}\int_t^T \left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau. \tag{6.62}$$

将 (6.61) 和 (6.62) 代入 (6.60)，得到

$$\begin{aligned}
&\int_t^T \left[\lambda - \frac{1}{2\kappa_{10}} - \frac{1}{4\kappa_{11}} - \left(\frac{1}{4\kappa_8} + \frac{1}{4\kappa_9}\right)T - \left(\frac{1}{4\kappa_{12}} + \frac{1}{4\kappa_{13}}\right)\frac{T^2}{2}\right]\left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad - (c_l' + c')_+\frac{T^2}{2}\left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} - (c_h' + c_T')_+ T\left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\leq \kappa_8\left\|\left[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX_k}(T)) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\right]D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} + \kappa_9\left\|\left[D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX_k}(T)\otimes m) - D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\right](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))\right\|^2_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \int_t^T 2\kappa_{10}\left\|\left[l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau), u_{tX_k}(\tau)\big) - l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\right]D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad + \int_t^T \kappa_{11}\left\|\left[l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau), u_{tX_k}(\tau)\big) - l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\right]Du^{\Psi}_{tX}(T)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad + \int_t^T \kappa_{12}\left\|\left[l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau), u_{tX_k}(\tau)\big) - l_{xx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau), u_{tX}(\tau)\big)\right]D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \\
&\quad + \int_t^T \kappa_{13}\left\|\left[D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau)\otimes m) - D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\right](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau))\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

接下来我们证明，过程序列 $\big(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(s)\, D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX_k}(s)\, Du^{\Psi}_{tX_k}(s)\, D\mathbb{r}^{\Psi}_{tX_k}(s)\big)$ 在范数意义下强收敛到 $\big(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\, D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\, Du^{\Psi}_{tX}(s)\, D\mathbb{r}^{\Psi}_{tX}(s)\big)$，当 $k\to\infty$ 时。否则，存在一个子序列，为简便起见不重新标记，使得例如，

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{s\in[t,T]}\left\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m} > 0. \tag{6.64}$$

令 $\epsilon = 1$，并在 (3.54) 中的界取 $\Psi = X_k - X$，我们得到

$$\left\|\mathbb{Y}_{tX_k}(T) - \mathbb{Y}_{tX}(T)\right\|_{\mathcal{H}_m} \leq C_4'\|X_k - X\|_{\mathcal{H}_m} \quad \text{and,} \tag{6.65}$$

$$\int_t^T \left\|\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau) - \mathbb{Y}_{tX}(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m} d\tau,\ \int_t^T \left\|u_{tX_k}(\tau) - u_{tX}(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m} d\tau \leq C_4' T\|X_k - X\|_{\mathcal{H}_m}, \tag{6.66}$$

其中，(3.54) 中提到的 C_4' 与序列 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 X 无关。(6.65) 和 (6.66) 中的强收敛意味着存在一个子序列，使得 $\mathbb{Y}_{tX_k}(T)$ 收敛到 $\mathbb{Y}_{tX}(T)$，$m\otimes\mathbb{P}$-几乎处处；对于几乎处处的 $\tau\in[t,T]$，$\mathbb{Y}_{tX_k}(\tau)$ 收敛到 $\mathbb{Y}_{tX}(\tau)$，$m\otimes\mathbb{P}$-几乎处处；对于几乎处处的 $\tau\in[t,T]$，$u_{tX_k}(\tau)$ 收敛到 $u_{tX}(\tau)$，$m\otimes\mathbb{P}$-几乎处处。类似于引理 3.12 证明中的步骤2A，利用 $D^2_X F$、$D^2_X F_T$、h_{xx} 的连续性和有界性，以及 l 在假设 **B(iii)** 的 (3.24)、**B(iv)** 的 (3.25)、**A(iv)** 的 (3.8)、**B(ii)** 的 (3.23)、**A(ii)** 的 (3.6)、**A(iii)** 的 (3.7) 中的二阶导数，对 (6.63) 应用控制收敛定理，可推出子序列的

(6.63) 右端收敛到零，并且

$$\int_t^T \left[\lambda - \frac{1}{2\kappa_{10}} - \frac{1}{4\kappa_{11}} - \left(\frac{1}{4\kappa_8} + \frac{1}{4\kappa_9}\right) T - \left(\frac{1}{4\kappa_{12}} + \frac{1}{4\kappa_{13}}\right) \frac{T^2}{2}\right] \left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}$$
$$- (c_l' + c')_+ \frac{T^2}{2} \left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} - (c_h' + c_T')_+ T \left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau$$
$$\longrightarrow 0, \qquad \text{as } k \to \infty \text{ up to a subsequence.}$$

选取足够小的 κ_i，条件 (3.30) 可得

$$\int_t^T \left\|Du^{\Psi}_{tX_k}(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m} d\tau \longrightarrow 0, \qquad \text{as } k \to \infty \text{ up to a subsequence.} \tag{6.67}$$

结合 (6.61)，我们有 $\sup_{s\in[t,T]} \left\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}$ 在 $k \to \infty$趋于某个子列时收敛到零。这与 (6.64) 矛盾，因此应可推出 $D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(s)$ 的强收敛，以及 $D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)$ 关于 X 在范数意义下的连续性。

通过将 $D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX_k}(s)$ 和 $D\mathbb{r}^{\Psi}_{tX_k}(s)$ 的方程相减，然后运用伊藤引理，并结合 (6.67) 中的收敛、$D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX_k}(s)$ 的收敛、$D^2_X F$、 $D^2_X F_T$、 h_{xx} 的连续性与有界性，以及假设 **B(iii)** 的 (3.24)、**B(iv)** 的 (3.25)、**A(iv)** 的 (3.8)、**B(ii)** 的 (3.23)、**A(ii)** 的 (3.6)、**A(iii)** 的 (3.7) 中 l 的二阶导数，可得 $D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX_k}(s)$ 和 $D\mathbb{r}^{\Psi}_{tX_k}(s)$ 强收敛。最后，对 (3.36) 中的一阶条件求导，结合假设**A(iv)** 的 (3.8) 中 l 的二阶导数的连续性，以及刚刚得到的 $D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)$、$D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX_k}(s)$ 的强收敛，可推出 $Du^{\Psi}_{tX_k}(s)$ 的强收敛。

第三部分：盖托导数的存在性：
总之，由于 $(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\, D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\, Du^{\Psi}_{tX}(s)\, D\mathbb{r}^{\Psi}_{tX,j}(s))$ 关于 Ψ 是线性的，并且在给定 Ψ 时关于 X 连续，因此，根据 [27] 中的命题 3.2.15，并结合希尔伯特空间 $\mathcal{H}_m$ 的可分性，我们得到弗雷歇导数的存在性。

■

6.3 第 4 节各陈述的证明

6.3.1 命题 4.2 的证明

本证明沿用 [11] 中定理 2.1 的相同论证；另见 [6] 中的定理 5.3。设初始随机变量为 $X^1, X^2 \in L^2\mathcal{W}^{\amalg}_t(\mathcal{H}_m)$，其中 $\nu = 1,2$，并考虑正倒向随机微分方程 (3.34)-(3.36) 的相应解。为简便起见，对于 $\nu = 1,2$，我们记 $\mathbb{Y}^{\nu}(s) = \mathbb{Y}_{tX^{\nu}}(s)$、 $\mathbb{Z}^{\nu}(s) = \mathbb{Z}_{tX^{\nu}}(s)$、 $u^{\nu}(s) = u_{tX^{\nu}}(s)$ 以及 $\mathbb{r}^{\nu}(s) = \mathbb{r}_{tX^{\nu}}(s)$。因此，我们考虑相应的系统

$$\begin{cases} \mathbb{Y}^{\nu}(s) = X^{\nu} + \displaystyle\int_t^s u^{\nu}(\tau)d\tau + \eta(w(s) - w(t)); & (6.68) \\ \mathbb{Z}^{\nu}(s) = h_x(\mathbb{Y}^{\nu}(T)) + D_X F_T(\mathbb{Y}^{\nu}(T) \otimes m) + \displaystyle\int_s^T \left[l_x(\mathbb{Y}^{\nu}(\tau), u^{\nu}(\tau)) + D_X F(\mathbb{Y}^{\nu}(\tau) \otimes m)\right] d\tau - \int_s^T \sum_{j=1}^n \mathbb{r}^{\nu}_j(\tau) dw_j(\tau), & (6.69) \end{cases}$$

在.....条件下

$$l_v(\mathbb{Y}^{\nu}(s), u^{\nu}(s)) + \mathbb{Z}^{\nu}(s) = 0. \tag{6.70}$$

第 1 部分。 $V(X\otimes m,\ t)$ 关于 X 的可微性：
根据注3.8，对于两个问题（6.68）-（6.70），当 $\nu=1,2$ 时，我们可以使用共同的控制空间 $L^2_{\mathcal{W}_{tX^1X^2}}(t,T;\mathcal{H}_m)$。考虑使用控制 $u^2(s)$ 的动力学（3.34）-（3.35），其初始条件为 X^1，相应的轨迹为 $\mathbb{Y}^2(s)+X^1-X^2$，于是根据定义

$$
\begin{aligned}
&V(X^1\otimes m,t)-V(X^2\otimes m,t)\\
&\le\int_t^T\left\{\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}l\big(\mathbb{Y}^2(s)+X^1-X^2,u^2(s)\big)-l\big(\mathbb{Y}^2(s),u^2(s)\big)dm(x)\right]+F((\mathbb{Y}^2(s)+X^1-X^2)\otimes m)-F(\mathbb{Y}^2(s)\otimes m))\right\}ds\\
&\quad+\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}h(\mathbb{Y}^2(T)+X^1-X^2)-h(\mathbb{Y}^2(T))dm(x)\right]+F_T((\mathbb{Y}^2(T)+X^1-X^2)\otimes m)-F(\mathbb{Y}^2(T)\otimes m)\\
&=\int_0^1\int_t^T\Big\langle l_x(\mathbb{Y}^2(s)+\theta(X^1-X^2),u^2(s))+D_XF((\mathbb{Y}^2(s)+\theta(X^1-X^2))\otimes m),X^1-X^2\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}dsd\theta\\
&\quad+\int_0^1\Big\langle h_x(\mathbb{Y}^2(T)+\theta(X^1-X^2))+D_XF_T((\mathbb{Y}^2(T)+\theta(X^1-X^2))\otimes m),X^1-X^2\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\theta.
\end{aligned}
\tag{6.71}
$$

根据假设 **A(ii)** 的 (3.6)、**A(iii)** 的 (3.7) 以及 **B(ii)** 的 (3.23)，我们进一步得到

$$
\begin{aligned}
&V(X^1\otimes m,t)-V(X^2\otimes m,t)\\
&\le\left\langle\int_t^T l_x(\mathbb{Y}^2(s),u^2(s))+D_XF(\mathbb{Y}^2(s)\otimes m)ds+h_x(\mathbb{Y}^2(T))+D_XF_T(\mathbb{Y}^2(T)\otimes m),X^1-X^2\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&\quad+\big[c_h+c_T+(c_l+c)T\big]\|X^1-X^2\|^2_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned}
\tag{6.72}
$$

将 (6.69) 代入 (6.72)，可得

$$
V(X^1\otimes m,t)-V(X^2\otimes m,t)\le\big\langle\mathbb{Z}^2(t),X^1-X^2\big\rangle_{\mathcal{H}_m}+\big[c_h+c_T+(c_l+c)T\big]\|X^1-X^2\|^2_{\mathcal{H}_m}.
\tag{6.73}
$$

交换 X^1 和 X^2 的角色，我们得到反向不等式

$$
V(X^1\otimes m,t)-V(X^2\otimes m,t)\ge\big\langle\mathbb{Z}^2(t),X^1-X^2\big\rangle_{\mathcal{H}_m}-\big[c_h+c_T+(c_l+c)T\big]\big\|X^1-X^2\big\|^2_{\mathcal{H}_m}+\big\langle\mathbb{Z}^1(t)-\mathbb{Z}^2(t),X^1-X^2\big\rangle_{\mathcal{H}_m}.
\tag{6.74}
$$

接下来，利用一阶条件（6.70）以及 $\mathbb{Y}^1(s)-\mathbb{Y}^2(s)$ 是有限变差的事实，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\big\langle\mathbb{Z}^1(s)-\mathbb{Z}^2(s),\mathbb{Y}^1(s)-\mathbb{Y}^2(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&=-\big\langle l_v(\mathbb{Y}^1(s),u^1(s))-l_v(\mathbb{Y}^2(s),u^2(s)),u^1(s)-u^2(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&\quad-\big\langle l_x(\mathbb{Y}^1(s),u^1(s))-l_x(\mathbb{Y}^2(s),u^2(s))+D_XF(\mathbb{Y}^1(s)\otimes m)-D_XF(\mathbb{Y}^2(s)\otimes m),\mathbb{Y}^1(s)-\mathbb{Y}^2(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned}
\tag{6.75}
$$

从 t 到 T积分，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbb{Z}^1(t) - \mathbb{Z}^2(t), X^1 - X^2 \rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&= \langle h_x(\mathbb{Y}^1(T)) - h_x(\mathbb{Y}^2(T)) + D_X F_T(\mathbb{Y}^1(T) \otimes m) - D_X F_T(\mathbb{Y}^2(T) \otimes m), \mathbb{Y}^1(T) - \mathbb{Y}^2(T) \rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \int_t^T \langle l_v(\mathbb{Y}^1(s), u^1(s)) - l_v(\mathbb{Y}^2(s), u^2(s)), u^1(s) - u^2(s) \rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\
&\quad + \int_t^T \langle l_x(\mathbb{Y}^1(s), u^1(s)) - l_x(\mathbb{Y}^2(s), u^2(s)) + D_X F(\mathbb{Y}^1(s) \otimes m) - D_X F(\mathbb{Y}^2(s) \otimes m), \mathbb{Y}^1(s) - \mathbb{Y}^2(s) \rangle_{\mathcal{H}_m} ds \\
&\geq -(c_h' + c_T') \|\mathbb{Y}^1(T) - \mathbb{Y}^2(T)\|_{\mathcal{H}_m}^2 + (\lambda - 2c_l\kappa_{14}) \int_t^T \|u^1(s) - u^2(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds - \left(c_l' + \frac{c_l}{2\kappa_{14}} + c'\right) \int_t^T \|\mathbb{Y}^1(s) - \mathbb{Y}^2(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds,
\end{aligned} \tag{6.76}
$$

对于某个正常数 κ_{14}。根据 $\mathbb{Y}^1(s) - \mathbb{Y}^2(s) = X^1 - X^2 + \int_t^s u^1(\tau) - u^2(\tau) d\tau$ 的事实，我们得到

$$
\sup_{s \in [t,T]} \|\mathbb{Y}^1(s) - \mathbb{Y}^2(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 \leq (1 + \kappa_{15}) T \int_t^T \|u^1(s) - u^2(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds + \left(1 + \frac{1}{\kappa_{15}}\right) \|X^1 - X^2\|_{\mathcal{H}_m}^2 \quad \text{and} \tag{6.77}
$$

$$
\int_t^T \|\mathbb{Y}^1(s) - \mathbb{Y}^2(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds \leq (1 + \kappa_{15}) \frac{T^2}{2} \int_t^T \|u^1(s) - u^2(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds + T \left(1 + \frac{1}{\kappa_{15}}\right) \|X^1 - X^2\|_{\mathcal{H}_m}^2, \tag{6.78}
$$

对于某个 $\kappa_{15} > 0$，因此可得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbb{Z}^1(t) - \mathbb{Z}^2(t), X^1 - X^2 \rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\geq \left[\lambda - 2c_l\kappa_{14} - \left(c_l' + \frac{c_l}{2\kappa_{14}} + c'\right)_+ (1 + \kappa_{15}) \frac{T^2}{2} - (c_h' + c_T')_+ (1 + \kappa_{15}) T\right] \int_t^T \|u^1(s) - u^2(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds \\
&\quad - \left[\left(c_l' + \frac{c_l}{2\kappa_{14}} + c'\right)_+ T \left(1 + \frac{1}{\kappa_{15}}\right) + (c_h' + c_T')_+ \left(1 + \frac{1}{\kappa_{15}}\right)\right] \|X^1 - X^2\|_{\mathcal{H}_m}^2.
\end{aligned} \tag{6.79}
$$

利用假设 (3.30)，并选择合适的 κ_{14} 和 κ_{15}，使得 (6.79) 右端第一项的系数为正。结合 (6.74) 和 (6.73) 中的不等式以及 (6.79)，可推出

$$
\left|V(X^1 \otimes m, t) - V(X^2 \otimes m, t) - \langle \mathbb{Z}^2(t), X^1 - X^2 \rangle_{\mathcal{H}_m}\right| \leq A_4 \|X^1 - X^2\|_{\mathcal{H}_m}^2, \tag{6.80}
$$

其中 A_4 为正数 a　且显然与 X^1 和 X^2无关。这立即证明了结果 (4.2)。

第2部分。 $D_X V(X \otimes m, t)$ **关于** X **的 Lipschitz 连续性：**

注意到，由 (6.79) 我们还证明了以下估计

$$
\int_t^T \|u^1(s) - u^2(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2 ds \leq A_5 \langle \mathbb{Z}^1(t) - \mathbb{Z}^2(t), X^1 - X^2 \rangle_{\mathcal{H}_m} + A_6 \|X^1 - X^2\|_{\mathcal{H}_m}^2, \tag{6.81}
$$

其中常数 A_5和 A_6仅依赖于 λ、 c_l、 c'、 c'_h、 c'_T、 c'_l和 T。接下来，杨氏不等式还给出

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbb{Z}^1(t)-\mathbb{Z}^2(t), X^1-X^2\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&=\left\langle \int_t^T l_x(\mathbb{Y}^1(s),u^1(s))-l_x(\mathbb{Y}^2(s),u^2(s))+D_XF(\mathbb{Y}^1(s)\otimes m)-D_XF(\mathbb{Y}^2(s)\otimes m)ds, X^1-X^2\right\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&\quad+\left\langle h_x(\mathbb{Y}^1(T))-h_x(\mathbb{Y}^2(T))+D_XF_T(\mathbb{Y}^1(T)\otimes m)-D_XF(\mathbb{Y}^2(T)\otimes m), X^1-X^2\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \qquad (6.82)\\
&\le \kappa_{16}c_l^2\int_t^T \left\|u^1(s)-u^2(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\kappa_{16}}+\frac{1}{\kappa_{17}}+\frac{1}{\kappa_{18}}+\frac{1}{\kappa_{19}}+\frac{1}{\kappa_{20}}\right)\left\|X^1-X^2\right\|^2_{\mathcal{H}_m}\\
&\quad+(\kappa_{17}c_l^2+\kappa_{18}c^2)\int_t^T\left\|\mathbb{Y}^1(s)-\mathbb{Y}^2(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds+(\kappa_{19}c_h^2+\kappa_{20}c_T^2)\left\|\mathbb{Y}^1(T)-\mathbb{Y}^2(T)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned}$$

将 (6.77)、(6.78) 和 (6.82) 中的不等式代入 (6.81)，可得

$$\begin{aligned}
&\left(1-\kappa_{16}c_l^2A_5-(\kappa_{17}c_l^2+\kappa_{18}c^2)A_5(1+\kappa'_{15})\frac{T^2}{2}-(\kappa_{19}c_h^2+\kappa_{20}c_T^2)A_5(1+\kappa'_{15})T\right)\int_t^T\left\|u^1(s)-u^2(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds\\
&\quad\le\left[A_6+\frac{A_5}{4}\sum_{i=16}^{20}\frac{1}{\kappa_i}+A_5(\kappa_{17}c_l^2+\kappa_{18}c^2)\left(1+\frac{1}{\kappa'_{15}}\right)T+A_5(\kappa_{19}c_h^2+\kappa_{20}c_T^2)\left(1+\frac{1}{\kappa'_{15}}\right)\right]\left\|X^1-X^2\right\|^2_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned}$$

取足够小的 κ_i，可得

$$\int_t^T\left\|u^1(s)-u^2(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds\le A_7\left\|X^1-X^2\right\|^2_{\mathcal{H}_m}, \qquad (6.83)$$

其中， $A_7>0$ 仅依赖于 λ、 c、 c_l、 c_h、 c_T、 c'、 c'_h、 c'_T、 c'_l 和 T。将 (6.83) 代回 (6.77) 和 (6.78)，可得

$$\sup_{s\in[t,T]}\left\|\mathbb{Y}^1(s)-\mathbb{Y}^2(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}\le A_9\left\|X^1-X^2\right\|^2_{\mathcal{H}_m}\ \text{and}\ \int_t^T\left\|\mathbb{Y}^1(s)-\mathbb{Y}^2(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds\le A_{10}\left\|X^1-X^2\right\|^2_{\mathcal{H}_m}. \qquad (6.84)$$

因此，由 (4.2) 可得

$$\left\|D_XV(X^1\otimes m,t)-D_XV(X^2\otimes m,t)\right\|_{\mathcal{H}_m}=\left\|\mathbb{Z}^1(t)-\mathbb{Z}^2(t)\right\|_{\mathcal{H}_m},$$

结合 (3.50)、(6.84)、(6.69) 的后向方程、假设 **A(ii)** 的 (3.6)、**A(iii)** 的 (3.7) 以及 **B(ii)** 的 (3.23)，即可得到结论。 ■

6.3.2 命题 4.3 的证明

我们从（4.5）开始。为简化记号，令 $t_1=t+\epsilon$ 和 $t_2=t$ 为 $t\in[0,T$，并令 $\epsilon\in[0,T-t]$。根据最优性原理和（5.1），可得

$$\begin{aligned}
V(X\otimes m,t)-V(X\otimes m,t+\epsilon)=&\int_t^{t+\epsilon}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}l(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s))dm(x)\right]+F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)\,ds\\
&+V(\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)\otimes m,t+\epsilon)-V(X\otimes m,t+\epsilon).
\end{aligned} \qquad (6.85)$$

利用假设 **A(ii)** 中的（3.5）、（3.21）和（3.41），可以估计（6.85）右端的第一项，从而得到

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\epsilon}\left|\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} l(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s)dm(x)\right]\right|+\left|F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)\right|\,ds &\le \epsilon(c_l+c)\sup_{s\in[t,T]}\big(1+\|\mathbb{Y}_{tX}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2+\|u_{tX}(s)\|_{\mathcal{H}_m}^2\big)\\ &\le \epsilon A_{11}\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2\big),\end{aligned}\tag{6.86}$$

对于某个 $A_{11}>0$，其取决于 n、λ、η、c、c_l、c_h、c_T、c'、c'_h、c'_T、c'_l 和 T。**(4.3)** 中 D_XV 的 Lipschitz 连续性以及 **(2.14)** 中的关系意味着

$$\begin{aligned}&\big|V(\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)\otimes m,t+\epsilon)-V(X\otimes m,t+\epsilon)-\big\langle D_XV(X\otimes m,t+\epsilon),\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)-X\big\rangle_{\mathcal{H}_m}\big|\\ &=\left|\int_0^1\big\langle D_XV\big((X+\theta(\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)-X))\otimes m,t+\epsilon\big)-D_XV(X\otimes m,t+\epsilon),\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)-X\big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\theta\right|\\ &\le C_6\|\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)-X\|_{\mathcal{H}_m}^2.\end{aligned}\tag{6.87}$$

由于 $D_XV(X\otimes m,t+\epsilon)$ 是 $\sigma(X)$-可测的，且 $X\in L^2\mathcal{W}_t^{\perp}(\mathcal{H}_m)$，我们可以通过取期望消去随机积分，从而得到

$$\big\langle D_XV(X\otimes m,t+\epsilon),\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)-X\big\rangle_{\mathcal{H}_m}=\left\langle D_XV(X\otimes m,t+\epsilon),\int_t^{t+\epsilon}u_{tX}(s)ds\right\rangle_{\mathcal{H}_m}.$$

由 **(4.2)** 和 **(3.41)**，我们进一步得到

$$\left|\big\langle D_XV(X\otimes m,t+\epsilon),\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)-X\big\rangle_{\mathcal{H}_m}\right|\le\epsilon A_{12}\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2\big).\tag{6.88}$$

将 **(6.86)**、**(6.87)**、**(6.88)** 代入 **(6.85)**，得到

$$\big|V(X\otimes m,t)-V(X\otimes m,t+\epsilon)\big|\le\epsilon A_{11}\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2\big)+C_6\|\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)-X\|_{\mathcal{H}_m}^2+\epsilon A_{12}\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}^2\big),$$

利用 **(3.47)** 处理右侧的中间项，即可得到结果 **(4.5)**。

现在我们通过应用 **(4.4)** 来证明 **(4.6)**，这等价于证明不等式 $\|\mathbb{Z}_{t+\epsilon,X}(t+\epsilon)-\mathbb{Z}_{tX}(t)\|_{\mathcal{H}_m}\le C_8\big(\epsilon^{\frac{1}{2}}+\epsilon\|X\|_{\mathcal{H}_m}\big)$。由 **(3.35)** 中的倒向随机微分方程，我们可以写出

$$\mathbb{Z}_{t+\epsilon,X}(t+\epsilon)-\mathbb{Z}_{tX}(t)=\mathbb{Z}_{t+\epsilon,X}(t+\epsilon)-\mathbb{E}\big(\mathbb{Z}_{tX}(t+\epsilon)\big|X\big)-\int_t^{t+\epsilon}\mathbb{E}\Big[l_x\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau)\big)+D_XF\big(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m\big)\Big|X\Big]d\tau.$$

应用（3.41）、假设 **A(i)** 的（3.5）以及 **B(i)** 的（3.22），可得

$$\|\mathbb{Z}_{t+\epsilon,X}(t+\epsilon)-\mathbb{Z}_{tX}(t)\|_{\mathcal{H}_m}\le\|\mathbb{Z}_{t+\epsilon,X}(t+\epsilon)-\mathbb{Z}_{tX}(t+\epsilon)\|_{\mathcal{H}_m}+A_{13}\epsilon\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}\big).$$

注意到 $\mathbb{Z}_{tX}(t+\epsilon)=\mathbb{Z}_{t+\epsilon,\ \mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)}(t+\epsilon)$，利用命题 4.2，我们进一步改写为

$$\|\mathbb{Z}_{t+\epsilon,X}(t+\epsilon)-\mathbb{Z}_{tX}(t)\|_{\mathcal{H}_m}\le C_6\|\mathbb{Y}_{tX}(t+\epsilon)-X\|_{\mathcal{H}_m}+A_{13}\epsilon\big(1+\|X\|_{\mathcal{H}_m}\big)$$

因此，由于 (3.47)，立即得到结果 (4.6)。 ■

6.3.3 命题 4.6 的证明

该命题的证明是对 [7] 中定理 5.2 和引理 3.12 的证明的修改。利用 (4.7)，我们需要证明当 $k \to \infty$ 时，

$$D\mathbb{Z}^{\Psi_k}_{t_k X_k}(t_k) \longrightarrow D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t) \quad \text{in } \mathcal{H}_m. \tag{6.89}$$

固定 $s \in (t, T]$，我们可以假设，当 k 足够大时，$t_k < s$。由 (3.54) 和引理 3.14，系统 (3.58) 的线性性可推出

$$\left\| D\mathbb{Z}^{\Psi_k}_{t_k X_k}(t_k) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{t_k X_k}(t_k) \right\|_{\mathcal{H}_m} \le C_4' \|\Psi_k - \Psi\|_{\mathcal{H}_m}, \tag{6.90}$$

其中 C_4' 与 k 无关。注意到 $D\mathbb{Z}^{\Psi_k}_{t_k X_k}(t_k) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t) = [D\mathbb{Z}^{\Psi_k}_{t_k X_k}(t_k) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{t_k X_k}(t_k)] + [D\mathbb{Z}^{\Psi}_{t_k X_k}(t_k) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)]$，为了证明结论 (6.89)，只需证明第二项收敛到 0，也就是说，在 $\mathcal{H}_m$ 意义下，

$$D\mathbb{Z}^{\Psi}_{t_k X_k}(t_k) \longrightarrow D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t) \quad \text{in } \mathcal{H}_m. \tag{6.91}$$

由 (3.54)、(3.47) 和流性质 (5.2)，我们得到，对于 $s \in [t_k, T]$，

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{Y}_{t_k X_k}(s) - \mathbb{Y}_{tX}(s) \right\|_{\mathcal{H}_m} &\le \left\| \mathbb{Y}_{t_k X_k}(s) - \mathbb{Y}_{t_k X}(s) \right\|_{\mathcal{H}_m} + \left\| \mathbb{Y}_{t_k X}(s) - \mathbb{Y}_{t_k \mathbb{Y}_{tX}(t_k)}(s) \right\|_{\mathcal{H}_m} \\ &\le A_{14} \left[\|X_k - X\|_{\mathcal{H}_m} + (t_k - t)^{1/2} \right] \end{aligned} \tag{6.92}$$

对于 $\left\| \mathbb{Z}_{t_k X_k}(s) - \mathbb{Z}_{tX}(s) \right\|_{\mathcal{H}_m}$ 和 $\left\| u_{t_k X_k}(s) - u_{tX}(s) \right\|_{\mathcal{H}_m}$，通过采用与 (6.92) 中相同的论证方式，可得到类似的估计，其中 A_{14} 与 k 独立。为了便于与 X_k 和 Ψ_k 进行比较，对于 $s \in (t, T]$，我们引入 σ-代数，

$$\widetilde{\mathcal{W}}^s_{tX\Psi} := \bigvee_{\{j \in \mathbb{N} | t_j < s\}} \left(\mathcal{W}^s_{t_j X_j \Psi_j} \bigvee \mathcal{W}^{t_j}_t \right).$$

$\sim$ $\sim$注意到 X 是 $\mathbf{W}^s_{tX\Psi}$-可测的，因此由于 $\mathbf{W}^s_{tX\Psi} \subset \mathbf{W}^s_{tX\Psi}$，$X$ 也是 $\mathbf{W}^s_{tX\Psi}$-可测的。为简便起见，我们将相应的过程 $D\mathbb{Y}^{\Psi}_{t_k X_k}(s)$、$D\mathbb{Z}^{\Psi}_{t_k X_k}(s)$、$Du^{\Psi}_{t_k X_k}(s)$、$D\mathbb{r}^{\Psi}_{t_k X_k}(s)$ 分别记为 $D\mathbb{Y}_k(s)$、$D\mathbb{Z}_k(s)$、$Du_k(s)$、$D\mathbb{r}_k(s)$。固定一个 $\tau^* \in (t, T]$，无论其多么接近 t，我们都可以找到足够大的 $N^* \in \mathbb{N}$，使得对任意 $k > N^*$ 都有 $t_k < \tau^*$。过程 $D\mathbb{Y}_k(s)$、$Du_k(s)$ 和 $D\mathbb{Z}_k(s)$ 在 $L^{\infty}_{\widetilde{\mathcal{W}}_{tX\Psi}}(t_k, T; \mathbf{H}_m)$ 中保持有界，而 $D\mathbb{r}_{k,j}(s)$ 在 $L^2_{\sim}$ 中保持有界

$\mathcal{W}_{tX\Psi}(t_k, T;\ \mathcal{H}_m)$，由 (3.54) 得出（无论选取何种滤过，这些界都成立）。

步骤 1. 弱收敛：

为证明（6.91）中的收敛性，反设 k 存在一个子序列，即 k_l，使得 $D\mathbb{Z}_{k_l}$ 在 $\mathbf{H}_m$ 中不收敛到 $D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}$，当 $l \to \infty$ 时；若该子序列 k_l 存在一个子序列，即 k'_j，使得 $D\mathbb{Z}_{k'_j}$ 在 $\mathbf{H}_m$ 中收敛到 $D\mathbb{Z}_{tX}$，当 $j \to \infty$ 时，则与假设矛盾。因此，不失一般性，根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，我们可以选取这些过程的子序列（不重新标记），使它们分别在 $L^2_{\widetilde{\mathcal{W}}_{tX\Psi}}(\tau^*, T; \mathbf{H}_m)$ 中弱收敛到 $\mathscr{D}\mathbb{Y}_{\infty}(s)$、$\mathscr{D}u_{\infty}(s)$、$\mathscr{D}\mathbb{Z}_{\infty}(s)$、$\mathscr{D}\mathbf{r}_{\infty,j}(s)$，接下来只需证明它们在 $\mathbf{H}_m$ 中强收敛，并证明 $\mathscr{D}\mathbb{Y}_{\infty}(s) = D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)$、$\mathscr{D}\mathbb{Z}_{\infty}(s) = D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)$、$\mathscr{D}u_{\infty}(s) = Du^{\Psi}_{tX}(s)$、$\mathscr{D}\mathbb{r}_{\infty,j}(s) = D\mathbb{r}^{\Psi}_{tX,j}(s)$。

然后，利用 $u(Y,\ Z)$ 的连续性以及（6.92）中 $\mathbb{Y}_{t_kX_k}$、 $\mathbb{Z}_{t_kX_k}$ 的强收敛，我们得到

$$\mathscr{D}\mathbb{Y}_\infty(s) \ = \Psi + \int_t^s D_y u(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),\mathbb{Z}_{tX}(\tau))\mathscr{D}\mathbb{Y}_\infty(\tau) + D_z u(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),\mathbb{Z}_{tX}(\tau))\mathscr{D}\mathbb{Z}_\infty(\tau)d\tau;$$

确实，例如，

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau^*}^s D_y u(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),\mathbb{Z}_{t_kX_k}(\tau))D\mathbb{Y}_k(\tau)d\tau\\
&= \int_{\tau^*}^s \Big[D_y u(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),\mathbb{Z}_{t_kX_k}(\tau)) - D_y u(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),\mathbb{Z}_{tX}(\tau))\Big]D\mathbb{Y}_k(\tau) + D_y u(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),\mathbb{Z}_{tX}(\tau))D\mathbb{Y}_k(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

其中第一项在 $L^2_{\widetilde{\mathcal{W}}_{tX\Psi}}(\tau^*,\ T;\ \mathcal{H}_m)$ 中强收敛于零，第二项则在$\int_{\tau^*}^s D_y u(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\ \mathbb{Z}_{tX}(\tau))\mathscr{D}\mathbb{Y}_\infty(\tau)d\tau$ 中弱收敛。接下来，我们旨在证明，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}\mathbb{Z}_\infty(s)\\
&= \mathbb{E}\Bigg[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))\mathscr{D}\mathbb{Y}_\infty(T) + D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)(\mathscr{D}\mathbb{Y}_\infty(T))\\
&\qquad + \int_s^T l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))\mathscr{D}u_\infty(\tau) + \big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau)) + D_X^2F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\big]\big(\mathscr{D}\mathbb{Y}_\infty(\tau)\big)d\tau\Big|\widetilde{\mathcal{W}}^s_{tX\Psi}\Bigg].
\end{aligned}\tag{6.93}$$

$\widetilde{\ }$利用塔式性质，对于任意适应于$\mathcal{W}^s_{tX\Psi}$的有界随机向量 φ ，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[D\mathbb{Z}_k(s)\varphi\Big]\\
&= \mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)) + D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(T))\Big|\widetilde{\mathcal{W}}^s_{tX\Psi}\Bigg]\varphi\Bigg\}\\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\int_s^T l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau) + \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)) + D_X^2F(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(\tau))d\tau\Big|\widetilde{\mathcal{W}}^s_{tX\Psi}\Bigg]\varphi\Bigg\}\\
&= \mathbb{E}\Bigg\{\Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)) + D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(T))\varphi\Bigg\}\\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg\{\int_s^T l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau)\varphi + \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)) + D_X^2F(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(\tau))\varphi d\tau\Bigg\}\\
&= \mathbb{E}\Bigg\{\Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)) + D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\otimes m) - h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T)) - D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(T))\varphi\Bigg\} \qquad (6.94)\\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg\{\Big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T)) + D_X^2F_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(T))\varphi\Bigg\} \qquad (6.95)\\
&\quad + \mathbb{E}\left\{\int_s^T \Big[l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)) - l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))\Big]Du_k(\tau)\varphi d\tau\right\} + \mathbb{E}\left\{\int_s^T \Big[l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))\Big]Du_k(\tau)\varphi d\tau\right\} \qquad (6.96)\\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg\{\int_s^T\Big\{\big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)) - l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))\big] + \big[D_X^2F(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m) - D_X^2F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\big]\Big\}(D\mathbb{Y}_k(\tau))\varphi d\tau\Bigg\} \qquad (6.97)\\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg\{\int_s^T \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau)) + D_X^2F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(\tau))\varphi d\tau\Bigg\}, \qquad (6.98)
\end{aligned}$$

关于上述条件 σ代数的改变，参见 [7] 中的注3.7和命题 5.2 的证明。(3.54)中 $D\mathbb{Y}_k$ 的$\mathcal{H}_m$-有界性，假设 **A(iv)**的(3.8)、**B(iii)**的(3.24)和**B(iv)**的(3.25)中 l、 h、 F 和 F_T 的二阶导数的连续性，以及(6.92)中 $\mathbb{Y}_{t_kX_k}$ 和 $\mathbb{Z}_{t_kX_k}$的强收敛，推出以下各项分别收敛到零：(1)：(6.94)行；(2)：(6.96)中的第一项；(3)：(6.97)行。更多细节见引理 3.12 证明的步骤 1。(6.95)中的项、(6.96)中的第二项以及(6.98)作为线性泛函弱收敛；因此，$D\mathbb{Z}_k(s)$在$L^2_{\widetilde{\mathcal{W}}_{tX\Psi}}(\tau^*,\ T;\mathcal{H}_m)$中弱收敛到(6.93)右端。于是得到(6.93)。由于线性FBSDE系统(3.58)的唯一性，必有 $\mathscr{D}\mathbb{Y}_\infty(s) = D\mathbb{Y}^\Psi_{tX}(s)$、 $\mathscr{D}\mathbb{Z}_\infty(s) = D\mathbb{Z}^\Psi_{tX}(s)$以及 $\mathscr{D}u_\infty = Du^\Psi_{tX}(s)$。接下来我们证明强收敛。

步骤2. 对 $\langle D\mathbb{Z}_k(t_k)^{\ \Psi}\rangle_{\mathcal{H}_m} - \langle D\mathbb{Z}^\Psi_{tX}(t)^{\ \Psi}\rangle_{\mathcal{H}^m}$**：** 对于任意有界测试函数 $\Psi \in L^2_{\mathcal{W}_t}(\mathcal{H}_m)$，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\langle D\mathbb{Z}_k(t_k),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m} = \lim_{s\to t^+}\lim_{k\to\infty}\langle D\mathbb{Z}_k(t_k)-D\mathbb{Z}_k(s),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m} + \lim_{s\to t^+}\lim_{k\to\infty}\langle D\mathbb{Z}_k(s),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m} \tag{6.99}$$

定义

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_k :&= \langle D\mathbb{Z}_k(t_k)-D\mathbb{Z}_k(s),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}\\ &= \int_{t_k}^s \Big\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau) + \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)) + D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(\tau)),\Psi\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} d\tau.\end{aligned}$$

我们利用假设**A(ii)**中的 (3.6) 和 **B(ii)**中的 (3.23) 来估计 $\mathscr{J}_k$，

$$|\mathscr{J}_k| \le \int_{t_k}^s \Big(c_l\|Du_k(\tau)\|_{\mathcal{H}_m} + (c_l+c)\|D\mathbb{Y}_k(\tau)\|_{\mathcal{H}_m}\Big)\|\Psi\|_{\mathcal{H}_m}d\tau.$$

由于 $D\mathbb{Y}_k(\tau)$、 $Du_k(\tau)$ 和 Ψ 的$\mathcal{H}_m$-有界性，我们得到，当 $t_k\to t^+$ 时 $\mathscr{J}_k\longrightarrow 0$，于是 $s\to t^+$。(6.99) 右侧的第一项为零。根据伊藤引理、(3.54)、假设**A(ii)**中的 (3.6) 和**B(ii)**中的 (3.23)，(3.58) 中的方程表明，对于 $s_1>s_2$,

$$\begin{aligned}&\|D\mathbb{Z}_k(s_1)-D\mathbb{Z}_k(s_2)\|^2_{\mathcal{H}_m}\\ &\le 2\int_{s_2}^{s_1}\Big\langle l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)\big)D\mathbb{Y}_k(\tau) + l_{xv}\big(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)\big)Du_k(\tau), D\mathbb{Z}_k(s_1)-D\mathbb{Z}_k(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\ &\quad + 2\int_{s_2}^{s_1}\Big\langle D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)(D\mathbb{Y}_k(\tau)), D\mathbb{Z}_k(s_1)-D\mathbb{Z}_k(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\ &\le 2(s_1-s_2)C_4'(4c_l^2+c^2)\|\Psi\|^2_{\mathcal{H}_m} + 2\int_{s_2}^{s_1}\|D\mathbb{Z}_k(s_1)-D\mathbb{Z}_k(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_m}d\tau.\end{aligned}$$

根据Grönwall不等式，我们有

$$\|D\mathbb{Z}_k(s_1)-D\mathbb{Z}_k(s_2)\|^2_{\mathcal{H}_m} \le 2(s_1-s_2)C_4'(4c_l^2+c^2)\|\Psi\|^2_{\mathcal{H}_m}\Big(1+2(s_1-s_2)e^{2(s_1-s_2)}\Big).$$

通过研究其在（3.58）中的方程，并结合（3.54）中 $D\mathbb{Z}_k(s)$ 的一致有界性，可知过程 $D\mathbb{Z}_k(s)$ 关于 $s\in[t_k,T]$（与 k 无关）是等度连续的。由 Arzelà–Ascoli 定理可推出，对于每个 $s\in[\tau^*,T]$，$\lim_{k\to\infty}\langle D\mathbb{Z}_k(s)^{\Psi}\rangle_{\mathcal{H}_m} = \langle D\mathbb{Z}^\Psi_{tX}(s)^{\ \Psi}\rangle_{\mathcal{H}_m}$。此外，通过研究弱极限 $D\mathbb{Z}^\Psi_{tX}(s)$ 在（6.93）中的方程，可知其关于 $s\in[t,T]$ 也是连续的，正如研究

其在（6.93）中的方程所示，因此有 $\lim_{s\to t^+}\lim_{k\to\infty}\langle D\mathbb{Z}_k(s)\,\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}=\langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)\,\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}$。因此，由（6.99）可得

$$\lim_{k\to\infty}\langle D\mathbb{Z}_k(t_k),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}=\langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}. \tag{6.100}$$

另一方面，注意到 $D\mathbb{Y}_k(s)$ 是一个有限变差过程，我们对$\langle D\mathbb{Y}_k(s)\ D\mathbb{Z}_k(s)\rangle_{\mathcal{H}_m}$ 应用传统伊藤引理，得到等式

$$\begin{aligned}
&\langle D\mathbb{Z}_k(t_k),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&=\Big\langle h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T))D\mathbb{Y}_k(T)+D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\otimes m)(D\mathbb{Y}_k(T)),D\mathbb{Y}_k(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&\quad+\int_{t_k}^T\Big\langle l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)\big)D\mathbb{Y}_k(\tau)+l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)\big)Du_k(\tau),Du_k(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\
&\quad+\int_{t_k}^T\Big\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau)+\Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))+D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}_k(\tau)),D\mathbb{Y}_k(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau.
\end{aligned}\tag{6.101}$$

通过定义算子 $Q_{1k}:=\ h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T))+D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\ \otimes m)$，$Q_{2k}:=\ 2l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\ u_{t_kX_k}(\tau))$,$Q_{3k}:=l_{vv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\ u_{t_kX_k}(\tau))$，$Q_{4k}:=l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\ u_{t_kX_k}(\tau))+D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\ \otimes m)$，我们也可以写成

$$\begin{aligned}
\langle\mathscr{D}\mathbb{Z}_\infty(t),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}&=\langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t),\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&=\Big\langle Q_{1\infty}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)),D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}+\int_t^T\Big\langle Q_{2\infty}(Du^{\Psi}_{tX}(\tau)),D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\
&\quad+\int_t^T\Big\langle Q_{3\infty}(Du^{\Psi}_{tX}(\tau)),Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau+\int_t^T\Big\langle Q_{4\infty}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)),D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau,
\end{aligned}\tag{6.102}$$

其中 $Q_{i\infty}$表示$\mathcal{H}_m$中 Q_{ik}的强极限，例如， $Q_{1\infty}=h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))+D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\ \otimes m)$，其中 $\mathbb{Y}_{tX}$ 是 $\mathbb{Y}_{t_kX_k}$的强极限。

参照 (6.101) 和 (6.102)，我们先检查以下项来考察 $\langle D\mathbb{Z}_k(t_k)\,\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}-\langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)\,\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}$

$$\begin{aligned}
&\Big\langle Q_{1k}(D\mathbb{Y}_k(T)),D\mathbb{Y}_k(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}-\Big\langle Q_{1\infty}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)),D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&=\Big\langle Q_{1k}\big(D\mathbb{Y}_k(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big),D\mathbb{Y}_k(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}+\Big\langle Q_{1k}(D\mathbb{Y}_k(T))-Q_{1\infty}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)),D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&\quad+\Big\langle Q_{1k}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)),D\mathbb{Y}_k(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned}\tag{6.103}$$

回顾 (3.54) 中 $D\mathbb{Y}_k$ 的 $\mathcal{H}_m$-有界性，以及假设**A(iv)**'s (3.8) 中 h_{xx} 和假设**B(iv)**'s (3.25) 中 $D^2_XF_T$ 的连续性，再结合 (6.92) 中 $\mathbb{Y}_{t_kX_k}$ 的强收敛，可知 $Q_{1k}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))$ 强收敛到 $Q_{1\infty}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))$，而 $Q_{1k}(D\mathbb{Y}_k(T))$ 作为线性泛函弱收敛到 $Q_{1\infty}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))$；更多细节见引理 3.12 证明中的步骤 2A。利用这两个收敛性质和 (6.103)，可得

$$\Big\langle Q_{1k}(D\mathbb{Y}_k(T)),D\mathbb{Y}_k(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}-\Big\langle Q_{1\infty}(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)),D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}-\Big\langle Q_{1k}\big(D\mathbb{Y}_k(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big),D\mathbb{Y}_k(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}$$

当 $k\to\infty$ 趋于 0 时。通过估计 $\langle D\mathbb{Z}_k(t_k)\,\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}-\langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)\,\Psi\rangle_{\mathcal{H}_m}$ 中涉及 Q_{2k} 的剩余项，

Q_{3k} 和 Q_{4k} 类似，我们可以推导出

$$\langle D\mathbb{Z}_k(t_k), \Psi\rangle_{\mathcal{H}_m} - \langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t), \Psi\rangle_{\mathcal{H}_m} - \mathscr{J}'_k - \mathscr{J}''_k \longrightarrow 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}'_k :=& \Big\langle \big[h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)) + D^2_X F_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\otimes m)\big](D\mathbb{Y}_k(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)), D\mathbb{Y}_k(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&+ \int_{t_k}^{T} \Big\langle l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(s), u_{t_kX_k}(s))(D\mathbb{Y}_k(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)), D\mathbb{Y}_k(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + 2\Big\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(s), u_{t_kX_k}(s))(Du_k(s) - Du^{\Psi}_{tX}(s)), D\mathbb{Y}_k(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(s), u_{t_kX_k}(s)\big)(Du_k(s) - Du^{\Psi}_{tX}(s)), Du_k(s) - Du^{\Psi}_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&\quad + \Big\langle D^2_X F(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(s)\otimes m)(D\mathbb{Y}_k(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)), D\mathbb{Y}_k(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}''_k :=& \int_t^{t_k} \Big\langle l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)\big) D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s) + l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)\big) Du^{\Psi}_{tX}(s), Du^{\Psi}_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} \\
&+ \Big\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)) Du^{\Psi}_{tX}(s) + \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)) + D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)), D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\Big\rangle_{\mathcal{H}_m} ds.
\end{aligned}$$

假设 **A(ii)** 中的 **(3.6)**、**B(ii)** 中的 **(3.23)** 以及 **(3.54)** 中的界给出

$$\begin{aligned}
|\mathscr{J}''_k| \le& \int_t^{t_k} \big\| l_{vx}\big(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)\big) D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s) + l_{vv}\big(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)\big) Du^{\Psi}_{tX}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m} \big\| Du^{\Psi}_{tX}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m} \\
&+ \Big\| l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)) Du^{\Psi}_{tX}(s) + \Big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(s), u_{tX}(s)) + D^2_X F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)\Big](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s))\Big\|_{\mathcal{H}_m} \big\| D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m} ds \\
\le& \int_t^{t_k} 2c_l \big\| D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m} \big\| Du^{\Psi}_{tX}(s)\big\|_{\mathcal{H}_m} + c_l \big\| Du^{\Psi}_{tX}(s)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} + (c_l + c)\big\| D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} ds \\
\longrightarrow& 0, \qquad \text{as } k \to \infty.
\end{aligned} \tag{6.104}$$

结合 $\langle D\mathbb{Z}_k(t_k)^{\Psi}\rangle_{\mathcal{H}_m} - \langle D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)^{\Psi}\rangle_{\mathcal{H}_m} \longrightarrow 0$ 在 **(6.100)** 中以及 $\mathscr{J}''_k \longrightarrow 0$ 在 **(6.104)** 中这一事实，我们有 $\mathscr{J}'_k \longrightarrow 0$ 当 $k \to \infty$ 时成立。假设 **A(v)** 的 **(3.9)**、**A(vi)** 的 **(3.10)** 和 **B(v)(b)** 的 **(3.27)** 意味着

$$\mathscr{J}'_k \ge \int_{t_k}^{T} \lambda \big\| Du_k(s) - Du^{\Psi}_{tX}(s)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} - (c'_l + c')\big\| D\mathbb{Y}_k(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\big\|^2_{\mathcal{H}_m} ds - (c'_h + c'_T)\big\| D\mathbb{Y}_k(T) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\big\|^2_{\mathcal{H}_m}. \tag{6.105}$$

步骤 3. 强收敛：

$D\mathbb{Y}_k$ 和 $D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}$ 的方程给出

$$D\mathbb{Y}_k(s) - D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s) = \int_{t_k}^{s} Du_k(\tau) - Du^{\Psi}_{tX}(\tau) d\tau - \int_t^{t_k} Du^{\Psi}_{tX}(\tau) d\tau,$$

因此，得到

$$\begin{aligned}\left\|D\mathbb{Y}_k(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}&\le 2T\int_{t_k}^{T}\left\|Du_k(s)-Du^{\Psi}_{tX}(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds+2(t_k-t)^2\sup_s\left\|Du^{\Psi}_{tX}(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}\quad\text{and}\\ \int_{t_k}^{T}\left\|D\mathbb{Y}_k(s)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds&\le T^2\int_{t_k}^{T}\left\|Du_k(s)-Du^{\Psi}_{tX}(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds+2T(t_k-t)^2\sup_s\left\|Du^{\Psi}_{tX}(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}.\end{aligned}\tag{6.106}$$

将 (6.106) 代入 (6.105)，结合假设 (3.30)，以及 $t_k\downarrow t$ 和 $\mathscr{J}'_k\to 0$ 给出收敛$\int_{t_k}^{T}\left\|Du_k(s)-Du^{\Psi}_{tX}(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}ds\longrightarrow 0$这一事实。因此，(6.106) 中的第二个不等式表明，$D\mathbb{Y}_k(s)$ 在 $L^2_{\widetilde{\mathcal{W}}_{tX\Psi}}(\tau^*,T;\mathcal{H}_m)$ 中强收敛到 $D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)$。由此，很容易得出

$$\begin{aligned}&D\mathbb{Z}_k(s)\\ &=\mathbb{E}\Bigg[h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T))D\mathbb{Y}_k(T)+D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\otimes m)(D\mathbb{Y}_k(T))\\ &\quad+\int_s^T l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau)+\left[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))+D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\right]\left(D\mathbb{Y}_k(\tau)\right)d\tau\Bigg|\widetilde{\mathcal{W}}^s_{tX\Psi}\Bigg]\\ &\longrightarrow D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\end{aligned}\tag{6.107}$$

在 $L^2_{\widetilde{\mathcal{W}}_{tX\Psi}}(\tau^*,T;\mathcal{H}_m)$ 中强收敛；利用假设 **A(iv)'s (3.8)**、**B(iii)'s (3.24)** 和 **B(iv)'s (3.25)** 中关于 l、h、F 和 F_T的二阶导数的连续性，(6.92) 中 $\mathbb{Y}_{t_kX_k}$和 $\mathbb{Z}_{t_kX_k}$的强收敛，以及 $D\mathbb{Y}_k$ 和 Du_k的强收敛，即可得到这一结论。此外，由伊藤引理可得

$$\begin{aligned}&\left\|D\mathbb{Z}_k(s)-D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}+\int_s^T\left\|D\mathbb{r}_{k,j}(\tau)-D\mathbb{r}^{\Psi}_{tX,j}(\tau)\right\|^2_{\mathcal{H}_m}d\tau\\ &\quad=\Big\|\left[h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T))+D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\otimes m)\right](D\mathbb{Y}_k(T))\\ &\qquad\qquad-\left[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))D\mathbb{Y}_k(T)+D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\right](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))\Big\|^2_{\mathcal{H}_m}\\ &\qquad+\int_s^T\left\langle l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau)-l_{xv}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))Du^{\Psi}_{tX}(\tau),D\mathbb{Z}_k(\tau)-D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\ &\qquad+\int_s^T\left\langle\left[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))+D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\right]\left(D\mathbb{Y}_k(\tau)\right),D\mathbb{Z}_k(\tau)-D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\ &\qquad-\int_s^T\left\langle\left[l_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))+D^2_XF(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)\right]\left(D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\right),D\mathbb{Z}_k(\tau)-D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_m}d\tau\\ &\quad\le 2\Big\|\left[h_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T))+D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(T)\otimes m)-h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))-D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\right](D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))\Big\|^2_{\mathcal{H}_m}\\ &\qquad+2\Big\|\left[h_{xx}(\mathbb{Y}_{tX}(T))D\mathbb{Y}_k(T)+D^2_XF_T(\mathbb{Y}_{tX}(T)\otimes m)\right](D\mathbb{Y}_k(T)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(T))\Big\|^2_{\mathcal{H}_m}\\ &\qquad+c_l\int_s^T\left(\left\|Du_k(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}+\left\|Du^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}\right)\left\|D\mathbb{Z}_k(\tau)-D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}d\tau\\ &\qquad+(c_l+c)\int_s^T\left(\left\|D\mathbb{Y}_k(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}+\left\|D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}\right)\left\|D\mathbb{Z}_k(\tau)-D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_m}d\tau.\end{aligned}\tag{6.108}$$

由于 $D\mathbb{Y}_k(\cdot)$、$D\mathbb{Z}_k(\cdot)$、$Du_k(\cdot)$ 分别在 $L^2_{\widetilde{\mathcal{W}}_{tX\Psi}}(\tau^*,T;\mathcal{H}_m)$ 中强收敛到 $D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(\cdot)$、$D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(\cdot)$、$Du^{\Psi}_{tX}(\cdot)$，那么对于几乎所有的 $s\in[\tau^*,T]$, $\left\|D\mathbb{Y}_k(s)-D\mathbb{Y}^{\Psi}_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}$, $\left\|Du_k(s)-Du^{\Psi}_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}$以及 $\left\|D\mathbb{Z}_k(s)-D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\right\|_{\mathcal{H}_m}$

沿某个子序列收敛到零，这是 Borel–Cantelli 引理的常规应用所致。由于 (3.54) 中 $D\mathbb{Y}_k$, Du_k 的 $\mathcal{H}_m$-有界性，假设**A(iv)** 的 (3.8) 和**B(iv)** 的 (3.25) 中 h, F_T 的二阶导数连续性，(6.92) 中 $\mathbb{Y}_{t_kX_k}$ 和 $\mathbb{Z}_{t_kX_k}$ 的强收敛，以及 (6.106) 中的收敛，对 (6.108) 应用控制收敛定理可知，对每个 $s\in[\tau^*,T]$, $\|D\mathbb{Z}_k(s) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\|_{\mathcal{H}_m}$ 收敛到零。因此，对于 $s\in[\tau^*,T]$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\|D\mathbb{Z}_k(t_k) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)\|_{\mathcal{H}_m}\\
&\le \lim_{k\to\infty}\|D\mathbb{Z}_k(t_k) - D\mathbb{Z}_k(s)\|_{\mathcal{H}_m} + \lim_{k\to\infty}\|D\mathbb{Z}_k(s) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s)\|_{\mathcal{H}_m} + \|D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)\|_{\mathcal{H}_m}\\
&= \lim_{k\to\infty}\|D\mathbb{Z}_k(t_k) - D\mathbb{Z}_k(s)\|_{\mathcal{H}_m} + \|D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(s) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)\|_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned}
$$

取 $s\to t^+$，我们得到

$$
\lim_{k\to\infty}\|D\mathbb{Z}_k(t_k) - D\mathbb{Z}^{\Psi}_{tX}(t)\|_{\mathcal{H}_m} \le \lim_{s\to t^+}\lim_{k\to\infty}\|D\mathbb{Z}_k(t_k) - D\mathbb{Z}_k(s)\|_{\mathcal{H}_m}. \tag{6.109}
$$

利用 Jensen 不等式和 Cauchy–Schwarz 不等式，我们考察以下项

$$
\begin{aligned}
&\|D\mathbb{Z}_k(t_k) - D\mathbb{Z}_k(s)\|^2_{\mathcal{H}_m}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\Bigg\{\Bigg|\mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{s} l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau)\\
&\qquad\qquad + \big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)) + D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\big]\big(D\mathbb{Y}_k(\tau)\big)\,d\tau\Big|\widetilde{\mathcal{W}}^s_{tX\Psi}\Big]\Bigg|^2\Bigg\}dm(x)\\
&\le (s-t_k)\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{s}\Big|l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau)\\
&\qquad\qquad + \big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)) + D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\big]\big(D\mathbb{Y}_k(\tau)\big)\Big|^2d\tau\Big|\widetilde{\mathcal{W}}^s_{tX\Psi}\Big]\Bigg\}dm(x)\\
&\le (s-t_k)\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{s}\Big|l_{xv}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau))Du_k(\tau)\\
&\qquad\qquad + \big[l_{xx}(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau),u_{t_kX_k}(\tau)) + D^2_XF(\mathbb{Y}_{t_kX_k}(\tau)\otimes m)\big]\big(D\mathbb{Y}_k(\tau)\big)\Big|^2d\tau\Big]dm(x)\\
&\le 3(s-t_k)\int_{t_k}^{s} c_l^2\|Du_k(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_m} + (c_l^2+c^2)\|D\mathbb{Y}_k(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_m}d\tau\\
&\le 3(s-t_k)\int_{t_k}^{s} c_l^2\sup_k\|Du_k(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_m} + (c_l^2+c^2)\sup_k\|D\mathbb{Y}_k(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_m}d\tau.
\end{aligned}
\tag{6.110}
$$

因此,

$$
\sup_k\|D\mathbb{Z}_k(t_k) - D\mathbb{Z}_k(s)\|^2_{\mathcal{H}_m} \le 3(s-t_k)\int_{t_k}^{s} c_l^2\sup_k\|Du_k(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_m} + (c_l^2+c^2)\sup_k\|D\mathbb{Y}_k(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_m}d\tau.
$$

由于 $\|Du_k(\tau)\|_{\mathcal{H}_m}$ 和 $\|D\mathbb{Y}_k(\tau)\|_{\mathcal{H}_m}$ 均一致有界，将 (6.110) 代入 (6.109) 即可得到 (6.89) 中的收敛性。

■

6.4 第 5 节中各陈述的证明

6.4.1 定理 5.1 的证明

第 1 部分。(a) 的证明：
根据动态规划原理或最优性原理，我们可以写出

$$0=\frac{1}{\epsilon}\int_s^{s+\epsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\big[l(\mathbb{Y}_{tX}(\tau),u_{tX}(\tau))\big]\,dm(x)+F(\mathbb{Y}_{tX}(\tau)\otimes m)d\tau+\frac{1}{\epsilon}\big[V(\mathbb{Y}_{tX}(s+\epsilon)\otimes m,s+\epsilon)-V(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m,s)\big].$$

由函数 $s\longmapsto\mathbb{Y}_{tX}(s)$ $u_{tX}(s)$ 的连续性可知

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}l\big(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s)\big)\,dm(x)\right]+F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)+\frac{d}{ds}V(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m,s)=0. \tag{6.111}$$

根据命题 4.1–4.6，由 V 在 (4.1)、(4.3)、(4.6)、(4.5)、(4.8) 和 (4.9) 中提到的正则性，(2.36) 至 (2.42) 中的假设均得到满足。因此，可以使用定理 2.2 将时间全导数替换为偏导数，即，对几乎处处的 $s\in(t,\ T)$,

$$\begin{aligned}0=\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n}l\big(\mathbb{Y}_{tX}(s),u_{tX}(s)\big)\,dm(x)\right]+F(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m)+\frac{\partial}{\partial s}V(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m,s)+\big\langle D_XV(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m,s),u_{tX}(s)\big\rangle_{\mathcal{H}_m}\\+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\Big\langle D_X^2V(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m,s)\big(\eta^j\mathcal{N}_s^j\big),\eta^j\mathcal{N}_s^j\Big\rangle_{\mathcal{H}_m}.\end{aligned} \tag{6.112}$$

回顾 (4.4) 以及 (3.32) 中哈密顿量的定义，(6.112) 第一行中的第一项和第四项合并后得到哈密顿量项，因此我们得到方程 (5.4)。
第2部分. (b) 的证明：
现在，若泛函 $V^*(X\otimes m,t)$ 满足方程 (5.4)，并具有命题 4.1-4.6 中的正则性性质，那么通过逆向回溯定理 2.2 中首次使用平均场伊藤引理的步骤，再结合哈密顿量的定义及方程 (5.4)，可知 $V^*(\mathbb{Y}_{tX}(s)\otimes m,s)$ 也满足 (6.111)。对 (6.111) 关于 s 从 t 积分至 T，得到

$$V^*(X\otimes m,t)=J_{tX}(u_{tX}). \tag{6.113}$$

由于右端是唯一确定的值函数，方程 (5.4) 的解必然唯一。注意，根据定义， X 必须与$\mathcal{W}_t$ 无关；事实上，我们总能构造高斯随机变量$\mathcal{N}_t^j$ （例如，定理 2.2 证明中的构造；另见 [7] 中的注 5.4），使得这一条件成立。证明至此完成。■

参考文献

[1] B. Acciaio、J. Backhoff-Veraguas 和 R. Carmona。《扩展平均场控制问题：随机最大值原理与输运视角》。*SIAM* 控制与优化杂志，57(6):3666– 3693，2019年。

[2] D. Andersson 和 B. Djehiche. 平均场型随机微分方程的最大值原理. 《应用数学与优化》, 63:341–356, 2011年.

[3] A. Bensoussan, J. Frehse 和 P. Yam. 平均场博弈与平均场型控制理论, 第101卷. 施普林格, 2013年.
[4] A. Bensoussan, J. Frehse 和 S. C. P. Yam. 平均场理论中的主方程. 《纯粹与应用数学杂志》, 103(6):1441–1474, 2015年.[5] A. Bensoussan, J. Frehse 和 S. C. P. Yam. 关于主方程的诠释. 《随机过程及其应用》, 127(7):2093–2137, 2017年.[6] A. Bensoussan, P. J. Graber 和 S. C. P. Yam. 随机变量空间上的随机控制. *arXiv* 预印本 *arXiv:1903.12602*, 2019年.[7] A. Bensoussan, P. J. Graber 和 S. C. P. Yam. 希尔伯特空间上的控制及其在平均场型控制理论中的应用. *arXiv* 预印本 *arXiv:2005.10770*, 2020年.[8] A. Bensoussan, K. C. J. Sung, S. C. P. Yam 和 S. P. Yung. 线性二次平均场博弈. 《优化理论与应用杂志》, 169:496–529, 2016年.[9] A. Bensoussan, H. M. Tai, T. K. Wong 和 S. C. P. Yam. 平均场博弈、其正倒向随机微分方程及相关方程. 预印本, 2023年.[10] A. Bensoussan, T. K. Wong, S. C. P. Yam 和 H. Yuan. 一阶平均场型控制问题及其方程理论. 预印本, 2023年.[11] A. Bensoussan 和 S. C. P. Yam. 随机变量空间上的控制问题与主方程.《*ESAIM*：控制、优化与变分法》, 25, 2019年.[12] A. Bensoussan, S. C. P. Yam 和 Z. Zhang. 平均场型正倒向随机微分方程的适定性. 《随机过程及其应用》, 125(9):3327–3354, 2015年.[13] R. Buckdahn, B. Djehiche 和 J. Li. 平均场型随机微分方程的一般随机最大值原理.《应用数学与优化》, 64(2):197–216, 2011年.[14] R. Buckdahn, B. Djehiche, J. Li 和 S. Peng. 平均场倒向随机微分方程：一种极限方法. 《概率年刊》, 37(4):1524 – 1565, 2009年.[15] R. Buckdahn, J. Li 和 J. Ma. 带部分观测的平均场随机控制问题. 《应用概率年刊》, 27(5):3201 – 3245, 2017年.[16] R. Buckdahn, J. Li 和 S. Peng. 平均场倒向随机微分方程及相关偏微分方程. 《随机过程及其应用》, 119(10):3133–3154, 2009年.[17] R. Buckdahn, J. Li, S. Peng 和 C. Rainer. 平均场随机微分方程及其相关偏微分方程. 《概率年刊》, 45(2):824–878, 2017年.
[18] P. Cardaliaguet, F. Delarue, J. M. Lasry 和 P. L. Lions. 平均场博弈中的主方程与收敛问题：*(ams-201)*. 普林斯顿大学出版社, 2019年.

[19] R. Carmona 和 F. Delarue。平均场正倒向随机微分方程。《概率电子通信》，18:1–15，2013年。[20] R. Carmona 和 F. Delarue。前向后向随机微分方程与受控 McKean–Vlasov动力学。《概率年刊》，43(5):2647–2700，2015年。[21] R. Carmona 和 F. Delarue。平均场博弈的概率理论及其应用 *I-II*。施普林格，2018年。[22] R. Carmona、F. Delarue 和 A. Lachapelle。McKean–Vlasov动力学控制与平均场博弈。《数学与金融经济学》，7(2):131–166，2013年。[23] A. Cosso、F. Gozzi、I. Kharroubi、H. Pham 和 M. Rosestolato。无限维空间中路径依赖的McKean–Vlasov随机微分方程的最优控制。*arXiv*预印本 *arXiv:2012.14772*，2020年。[24] A. Cosso、F. Gozzi、I. Kharroubi、H. Pham 和 M. Rosestolato。Wasserstein空间中的主贝尔曼方程：粘性解的唯一性。*arXiv*预印本 *arXiv:2107.10535*，2021年。[25] A. Cosso 和 H. Pham。广义McKean–Vlasov型的零和随机微分博弈。《纯粹与应用数学杂志》，129:180–212，2019年。[26] M. F. Djete、D. Possamaï 和 X. Tan。McKean–Vlasov最优控制：动态规划原理。《概率年刊》，50(2):791–833，2022年。[27] P. Drábek 和 J. Milota。非线性分析方法：微分方程的应用。施普林格科学与商业媒体，2007年。[28] G. Fabbri、F. Gozzi 和 A. Swiech。无限维空间中的随机最优控制。概率与随机建模。施普林格，2017年。[29] W. Gangbo 和 A. R. Mészáros。确定性位移凸势平均场博弈的主方程的整体适定性。《纯粹与应用数学通信》，75(12):2685–2801，2022年。[30] W. Gangbo、A. R. Mészáros、C. Mou 和 J. Zhang。具有不可分离哈密顿量和位移单调性的平均场博弈主方程。《概率年刊》，50(6):2178 – 2217，2022年。[31] W. Gangbo 和 A. Święch。平均场博弈理论中产生的一个方程的解的存在性。《微分方程杂志》，259(11):6573–6643，2015年。[32] D. A. Gomes、E. A. Pimentel 和 V. Voskanyan。平均场博弈系统的正则性理论。施普林格，2016年。[33] P. J. Graber 和 A. R. Mészáros。关于平均场博弈的单调性条件。*arXiv*预印本 *arXiv:2210.02281*，2022年。[34] Y. Hu 和 S. Peng。正倒向随机微分方程的解。《概率论及其相关领域》，103(2):273–283，1995年。

[35] M. Huang、R. P. Malhamé 和 P. E. Caines. 大规模群体随机动态博弈：闭环 McKean–Vlasov 系统与纳什确定性等价原理. 《信息与系统通讯》, 6(3):221–252, 2006.[36] M. Laurière 和 O. Pironneau. 平均场型控制的动态规划. 《数学报告》, 352(9):707–713, 2014.[37] J. Li. 平均场控制中的随机最大值原理. 《自动化》, 48(2):366–373, 2012.[38] P. L. Lions. 法兰西公学院研讨会， 2014年.[39] J. Ma、Z. Wu、D. Zhang 和 J. Zhang. 关于前向-后向随机微分方程的适定性——一种统一方法.《应用概率年刊》, 25(4):2168–2214, 2015年.[40] E. Pardoux 和 S. Peng. 后向随机微分方程与拟线性抛物型偏微分方程. 载于 随机偏微分方程及其应用, 第 200–217 页. 施普林格, 1992.[41] H. Pham. 带随机系数的条件 McKean–Vlasov 方程的线性二次最优控制及其应用. 《概率、不确定性与定量风险》, 1:1–26, 2016年.[42] H. Pham 和 X. Wei. 随机 McKean–Vlasov 动力学最优控制的动态规划.*SIAM* 控制与优化杂志, 55(2):1069–1101, 2017年.[43] H. Pham 和 X. Wei. 平均场随机控制问题的贝尔曼方程与粘性解.《*ESAIM*：控制、优化与变分法》, 24(1):437–461, 2018年.[44] A. Porretta. 福克–普朗克方程与平均场博弈的弱解. 《理性力学与分析档案》, 216(1):1–62, 2015年.[45] C. Villani. 最优传输：新旧理论, 第 338 卷. 施普林格, 2009年.[46] C. Wu 和 J. Zhang. 抛物型主方程以及带闭环控制的 McKean–Vlasov 随机微分方程的粘性解. 《应用概率年刊》, 30(2):936–986, 2020年.[47] J. Yong. 平均场随机微分方程的线性二次最优控制问题. *SIAM* 控制与优化杂志, 51(4):2809–2838, 2013年.