《欧洲物理学杂志 C》稿件编号
（由编辑填写）

利用范德梅尔扫描对 Q-高斯束流进行亮度标定

Mohamed A. Abed[a], [1], [2], **Anton A. Babaev**[1], **Leonid G. Sukhikh**[1]

[1]托木斯克理工大学，俄罗斯托木斯克[2]艾因夏姆斯大学，埃及开罗

arXiv:2305.04023v1 [physics.acc-ph] 6 May 2023

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要 亮度是表征带电粒子对撞机性能的关键量。精确测定亮度是对撞机物理中的一项重要任务。这项任务的一部分是对专用于亮度测量的探测器进行恰当标定。目前广泛使用的实验标定方法是范德梅尔扫描，即在特定优化的束流条件下进行的束流分离扫描。本文致力于利用对撞束流中粒子的 q-高斯分布对该扫描进行建模。由于其自身特性，Q-高斯分布被认为比常规的基于高斯分布的模型更接近真实的密度分布。本文将 q-高斯模型用于范德梅尔扫描建模，并展示了该模型在亮度标定任务中的优势。

1 引言

过去几十年里，对撞机取得了巨大进步；它们为探索和发现新物理作出了重要贡献 [1]。对撞机的性能由其亮度 $\mathscr{L}$ 以及对撞束流的质心能量 E^{CoM} 决定，其中亮度表征相互作用点（IP）处粒子碰撞的强度，而质心能量则体现了对撞机产生更重粒子或探测更小尺度的能力 [2]。实验中会调节这两个参数，以发现罕见的新事件。发现新事件的概率可以通过两种方式提高：1– 增大事件截面，即提高某一类事件发生的概率；这可以通过提高对撞束流的能量来实现，但需要对设施进行大规模升级；2– 提高亮度，通过优化碰撞条件来实现，这种方式更容易做到。

亮度通常使用专用探测器——亮度计进行测量。为实现精确测量，必须对这些探测器进行适当校准。强子对撞机采用多种亮度校准方法， [2]中对此进行了总结。基于束流分离扫描的一种纯实验技术，即所谓的范德梅尔（vdM）扫描，已成功应用于 ISR [3, 4], 、相对论重离子对撞机[5–7], 和大型强子对撞机 [8–10]。在 vdM 扫描中，两束束流相互扫过，并测量待测亮度计的响应与束流轨道之间距离（束流间距）的关系。随后使用高斯拟合模型或双高斯拟合模型对响应率进行拟合。

通常，用于从范德梅尔扫描数据中提取可观测量的模型假设对撞束流中的粒子呈高斯分布，这限制了标定的精度。对于高能对撞机，实际的粒子密度会偏离严格的高斯分布。在 [11, 12], 中发现，对撞束团具有非高斯尾部。尾部的非高斯性可归因于它们因束内效应（如束内散射、同步辐射和量子激发）以及两个对撞束流之间的相互作用（如束束效应、电子云和亮度烧蚀）而经历的不同影响。这些综合效应改变了对撞束团中尾部与核心的粒子数比例。因此，应研究非高斯尾部对绝对亮度的影响，以实现精确的亮度标定。为将非高斯尾部考虑在内，通常会引入一些人为修正（如添加第二个高斯 [10] ，或使用多项式 [9]使扫描曲线发生形变）。在 [12, 13],中观察到，q-高斯分布 [14] 为大型强子对撞机和高亮度大型强子对撞机升级提供了更符合实际的束团分布模型；因此，它为研究其非高斯尾部对主要亮度参数的影响提供了更自然的基础。

[a]电子邮箱：abedmohamed@tpu.ru（通讯作者）

度参数的影响。在 [15], 研究中，使用束团分布的 q-高斯模型研究了非高斯尾部对绝对亮度和发射度演化的影响，以探究束内散射与同步辐射综合作用对束团形状的改变。

本研究旨在假设束团具有 q-高斯分布，估算非高斯尾部对亮度标定的影响，并探索获得更精确的范德梅尔扫描模型的方法。本文结构如下：第2节介绍亮度概念，并讨论范德梅尔扫描的主要参数。第3节详细介绍 q-高斯分布。随后，推导 q-高斯束团的重叠积分和卷积束流尺寸的解析公式，并估算它们与高斯束团对应结果之间的偏差。接着，考察对撞束团在横向平面内的倾斜角，并估算其对重叠积分的影响。第4节讨论采用 q-高斯束团进行的范德梅尔扫描。首先，对“玩具”范德梅尔扫描进行建模，根据第3节提出的理论计算束流重叠；然后，将三种不同的拟合模型（高斯分布、双高斯和 q-高斯）应用于该“玩具”数据集，并在扫描曲线形状具有非高斯尾部的条件下确定最佳拟合模型。随后，检验真实的实验响应率数据（来自大型强子对撞机紧凑缪子线圈实验的范德梅尔扫描计划 [10]），以确认 q-高斯拟合模型是否确实优于当前基于高斯分布的模型。

2 亮度概念与范德梅尔扫描

2.1 亮度与重叠积分

亮度仅取决于对撞束流的性质。单次束团交叉的亮度定义为 [16]:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\Delta}_r,t) = N_1 N_2 K \int \rho_1^{lab}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\Delta}_r,t)\rho_2^{lab}(\mathbf{r},t)\,d^3\mathbf{r}\,dt, \qquad (1)$$

其中，$N_{1,2}$ 为对撞束团中的粒子数，它们分别以速度 $\mathbf{v}_1$ 和$\mathbf{v}_2$ 运动；K 为莫勒运动学相对论因子$K = \sqrt{(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)^2}/[(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)c]$，$\rho_{1,2}^{lab}(\mathbf{r},t)$为实验室参考系中对撞束团的归一化粒子分布密度，$\boldsymbol{\Delta}_r$ 为两束团中心之间的间距。莫勒运动学相对论因子与方程(1)中积分的乘积，表示相互作用点处发光区域有效面积的倒数，$\Omega = 1/A_{eff}$，即所谓的重叠积分[18]。其不变形式可由 [16, 19]得到：

$$\Omega(\boldsymbol{\Delta}_{r_\perp}) = \frac{1}{\gamma_\perp}\int \rho_1^{lab,\perp}(\mathbf{r}_\perp-\boldsymbol{\Delta}_{r_\perp})\rho_2^{lab,\perp}(\mathbf{r}_\perp)\,d\mathbf{r}_\perp, \qquad (2)$$

其中，$\rho^{lab,\perp}_{1,2}(\mathbf{r}_\perp)$为实验室参考系中对撞束团的横向空间粒子分布，$\boldsymbol{\Delta}_{r_\perp}$ 为横向束流间距，$\gamma_\perp$ 为由横向推动产生的洛伦兹相对论因子。

2.2 范德梅尔扫描

原则上，亮度通过探测器测量，这些探测器对碰撞产物的通量作出响应。它们可以基于不同的效应和原理进行设计 [10]。本文不关注用于亮度测量的具体过程，所测量的量称为“响应率”，记作R。

范德梅尔（vdM）扫描由 S. van der Meer 提出 [4]。其原理是在横向平面内使两束束流彼此分离，同时监测它们相互作用的响应率R，使其成为两条轨道横向间距的函数 Δ。如果对撞束团具有可因子分解的密度，$\rho^{lab}(\mathbf{r}_\perp) = \rho_x(x)\rho_y(y)$，或者换句话说，如果它们的重叠积分可以因子分解，$\Omega(\boldsymbol{\Delta}_{r\perp}) = \Omega_x(\Delta_x)\ \Omega_y(\Delta_y)$，这意味着响应率$R$ 在水平方向“x”和竖直方向“y”的间距之间不存在相关性。因此，分别沿两个方向进行两次一维vdM扫描，并得到卷积束团尺寸（即所得扫描曲线的 RMS 宽度）：

$$\Sigma_x = \frac{\int R(\Delta_x,0)\,d\Delta_x}{C_x R(0,0)}; \quad \Sigma_y = \frac{\int R(0,\Delta_y)\,d\Delta_y}{C_y R(0,0)}, \qquad (3)$$

其中$C_{x,y}$ 为常数，取决于粒子密度，或者更准确地说，取决于水平和垂直方向上的扫描曲线形状，而最大重叠积分和亮度分别由以下公式给出。

$$\Omega(0,0) = \frac{1}{C_x C_y \Sigma_x \Sigma_y}; \quad \mathscr{L}(0,0) = f N_1 N_2 \Omega(0,0), \qquad (4)$$

因此，校准常数（即所谓的可见截面 σ^{vis}）将由给定亮度算法记录的亮度计可测响应率 R 与绝对亮度 $\mathscr{L}$ 联系起来，其确定方式如下：

$$\sigma^{vis} = \frac{R(0,0)}{f N_1 N_2 \Omega(0,0)}. \qquad (5)$$

其中，可见截面 σ^{vis} 是测量速率与相应束流重叠之比。如果粒子密度不可因子化，或者更具体地说，其重叠积分存在 $x-y$ 耦合，且范德梅尔扫描不够精确。

实际上，范德梅尔扫描是在特殊条件下进行的，此时会优化束流参数，以高精度确定校准常数。范德梅尔扫描形式适用于任意粒子密度和交叉角 [16]。

3 理论

3.1 q-高斯概率分布函数

q-高斯分布在广义统计理论、激光、等离子体和天文学中有着广泛应用，参见[20–24]，；它还被用于研究大型强子对撞机的发射度演化和束流轮廓建模 [13, 15]。q-高斯分布以其出色的表征能力而闻名，可表示各种分布，从“$q \to -\infty$”时的矩形分布和“$q \to 0$”时的抛物线分布等有界有限分布，到学生 t 分布等重尾无限分布，其中 q 控制尾部的占比。图 1a展示了 q-高斯分布，其定义如下：

$$QG(u;q,\beta^{qG}) = \frac{\sqrt{\beta^{qG}}}{C^{qG}} e_q(-\beta^{qG}u^2), \tag{6}$$

其中，β^{qG} 是一个实数正数，e_q 是 q-指数函数，C^{qG} 是归一化常数，它们的定义如下：

$$e_q(-\beta^{qG}u^2) = \begin{cases} \exp(-\beta^{qG}u^2) & \text{if } q = 1 \\ [1-(1-q)\beta^{qG}x^2]_+^{\frac{1}{1-q}} & \text{if } q \neq 1 \end{cases}, \tag{7}$$

and

$$C^{qG} = \begin{cases} \frac{2}{(3-q)\sqrt{1-q}} Beta(\frac{1}{1-q}, \frac{1}{2}) & \text{if } q < 1 \\ \sqrt{\pi} & \text{if } q = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{q-1}} Beta(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \text{if } 1 < q < 3 \end{cases}. \tag{8}$$

当$q < 1$时，核心膨胀，分布变为有限且具有轻尾的分布，其中$u \in \left[-\frac{1}{\sqrt{(1-q)\beta^{qG}}}, \frac{1}{\sqrt{(1-q)\beta^{qG}}}\right]$。当$q > 1$时，尾部密度增加，分布变为重尾分布。当$q = 1$时，恢复为标准高斯分布。q-高斯分布的标准差取决于q 和 β^{qG}，其表达式为

$$\sigma^{qG} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(5-3q)\beta^{qG}}} & \text{if } q < \frac{5}{3} \\ \infty & \text{if } \frac{5}{3} \leq q < 2 \\ Undefined & \text{if } 2 \leq q < 3 \end{cases}. \tag{9}$$

标准差 σ^{qG} 代表束团的均方根尺寸；因此，在 q-高斯束团模型中，尾部权重 q 的范围受限于 $q < \frac{5}{3}$。

3.2 q-高斯束团的重叠积分

假设有两个束团 1 和 2，其在实验室参考系中的横向粒子密度为 $\rho_{1,\ 2}(x,y)$，两个束团发生正面碰撞（即不存在交叉角 $\phi = 0$），并且两个束团的粒子密度在水平方向和垂直方向上可因式分解。如果两个束团沿相反方向分离，间距为 $\Delta_u 2$，则一维重叠积分 $\Omega_u\ (u = x, y)$ 可写为：

$$\Omega_u(\Delta_u) = \int \rho_1\left(u - \frac{\Delta_u}{2}\right)\rho_2\left(u + \frac{\Delta_u}{2}\right) du. \tag{10}$$

如果两个束团具有 q-高斯粒子密度，且它们在各自方向上的尺寸和尾部密度相同（即 $\sigma_{1u} = \sigma_{2u} = \sigma_u$ 和 $q_{1u} = q_{2u} = q$），方程（10）变为

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;q) = \frac{\beta^{qG}}{C^{qG2}} \int e_q\left(-\beta^{qG}\left(u - \frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right) \times e_q\left(-\beta^{qG}\left(u + \frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right) du, \tag{11}$$

其中，β^{qG} 由方程（9）确定。对于$q = 1$，q-高斯分布等价于正态高斯分布，而 $\Omega_{qGu}(\Delta_u,1)$由下式给出。

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;1) = \frac{\sqrt{\beta^{qG}}}{\sqrt{2}C^{qG}} \exp\left(-\beta^{qG}\frac{\Delta_u^2}{2}\right). \tag{12}$$

对于 $q \neq 1$，使用 e_q 根据方程（7）的定义可写为：

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;q \neq 1) = \frac{\beta^{qG}}{C^{qG2}} \int \left[1-(1-q)\beta^{qG}\left(u - \frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right]_+^{\frac{1}{1-q}} \times \left[1-(1-q)\beta^{qG}\left(u + \frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right]_+^{\frac{1}{1-q}} du. \tag{13}$$

对于具有 $q < 1$ 的有限轻尾束团，方程 (13) 变为：

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;q < 1) = \frac{\beta^{qG}}{C^{qG2}} \int_{u_1}^{u_2} \left[1-(1-q)\beta^{qG}\left(u - \frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right]_+^{\frac{1}{1-q}} \times \left[1-(1-q)\beta^{qG}\left(u + \frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right]_+^{\frac{1}{1-q}} du. \tag{14}$$

由于束团具有有限尾部，重叠积分在两个束团密度能够重叠的区域内是有限的，因此积分限u_1 和u_2 给定

by

$$\{u_1,u_2\} = \begin{cases} \left\{-\frac{1}{\sqrt{(1-q)\beta^{qG}}}-\frac{\Delta_u}{2},\frac{1}{\sqrt{(1-q)\beta^{qG}}}+\frac{\Delta_u}{2}\right\}, \\ \qquad \text{if } -\frac{2}{\sqrt{(1-q)\beta^{qG}}}<\Delta_u<0 \\ \left\{-\frac{1}{\sqrt{(1-q)\beta^{qG}}}+\frac{\Delta_u}{2},\frac{1}{\sqrt{(1-q)\beta^{qG}}}-\frac{\Delta_u}{2}\right\}, \\ \qquad \text{if } 0\le\Delta_u<\frac{2}{\sqrt{(1-q)\beta^{qG}}} \end{cases}.$$

通过求解方程（14），可得到具有相等束团尺寸和尾部密度 Ω的轻尾 q-高斯束团的重叠积分的一般形式$_{qGu}(\Delta_u;q<1)$，如下：

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;q<1) = \frac{\sqrt{\beta^{qG}}}{\sqrt{1-q}\,C^{qG^2}}\left(1-\sqrt{(1-q)\beta^{qG}\frac{\Delta_u^2}{4}}\right) \times\left(1-(1-q)\beta^{qG}\frac{\Delta_u^2}{4}\right)^{\frac{2}{1-q}} Beta\left(\frac{1}{2},\frac{2-q}{1-q}\right) \times {}_2F_1\left(\frac{-1}{1-q},\frac{1}{2};\frac{5-3q}{2-2q};\left(\frac{1-\sqrt{(1-q)\beta^{qG}\Delta_u^2/4}}{1+\sqrt{(1-q)\beta^{qG}\Delta_u^2/4}}\right)^2\right), \tag{15}$$

其中 ${}_2F_1$ 是高斯超几何函数 [25]。方程（15）的详细推导参见附录 A。

对于$q>1$ 的无限重尾束团，方程（13）变为：

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;q>1) = \frac{\beta^{qG}}{C^{qG^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-(1-q)\beta^{qG}\left(u-\frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{1-q}} \times\left(1-(1-q)\beta^{qG}\left(u+\frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{1-q}} du, \tag{16}$$

通过求解方程（16），可以得到尺寸相等且尾部密度为 Ω $_{qGu}(\Delta_u;q>1)$ 的重尾 q-高斯束团的重叠积分的一般形式：

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;q>1) = \frac{\sqrt{\beta^{qG}}}{\sqrt{q-1}\,C^{qG^2}}Beta\left(\frac{1}{2},\frac{5-q}{2q-2}\right) \times {}_2F_1\left(\frac{1}{q-1},\frac{5-q}{2q-2};\frac{q+1}{2q-2};(1-q)\beta^{qG}\frac{\Delta_u^2}{4}\right). \tag{17}$$

方程（17）的详细推导参见附录 A。

可通过按照 [19]所示修改横向束团尺寸，将交叉角效应纳入方程（12）、（15）和（17）中。

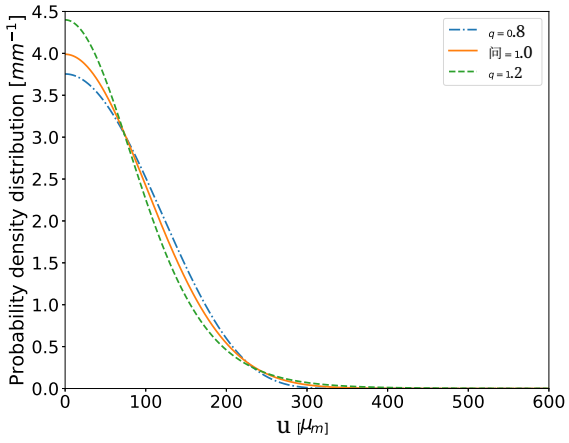
在极限q 趋近于 1 时，q-高斯束团趋近于高斯分布；因此，q-高斯束团的重叠积分也应呈现相同的趋势。因此，方程 (15) 和 (17) 的极限按方程 (18) 计算，结果表明这一趋势得到了满足。详情请参见附录 B 。

$$\lim_{q\to1}\left(\Omega_u^{qG}(\Delta_u;q<1)\right) = \lim_{q\to1}\left(\Omega_u^{qG}(\Delta_u;q>1)\right) = \Omega_u^{qG}(\Delta_u;q=1). \tag{18}$$

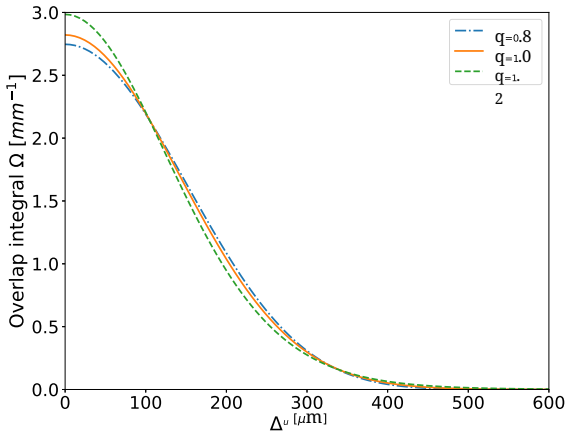
3.3 均方根束流尺寸相等的常规高斯光束与 Q-高斯束流之间的差异

由于对撞束团中的实际粒子密度具有非高斯尾部，因此应研究非高斯尾部对重叠积分的影响。为此，使用范德梅尔扫描分离扫描的解析公式 Ω^{qG}，即公式（15）和（17）中的解析公式，并采用在 CMS 实验（欧洲核子研究中心）进行的范德梅尔扫描所得的束团参数，对 q-高斯束团的分离扫描进行建模。范德梅尔扫描的特殊条件为 $\sigma_u=100\,\mu$m，且无交叉角 [10]。在该研究中，考虑了三束均具有相同均方根束流尺寸 $\sigma_u^{qG}=100\,\mu$ m、但尾部密度 q 分别为 $=0.8$、1.0 和 1.2 的束流，用以分别表示具有轻尾、高斯尾部和重尾的束团。束团剖面如图 1a 所示，其相应的重叠积分 Ω^{qG} 随间距 Δ_u 在 0 至 6 σ_u^{qG} 范围内的变化如图 1b 所示。在零间距（$\Delta_u=0$）处，重尾束团具有最高的重叠积分。在图 1b 中还观察到，q-高斯束团的重叠积分 Ω^{qG} 与高斯分布的重叠积分 Ω^{G} 之间存在显著偏差；这些偏差取决于间距。为估计这种依赖关系，构建了偏差图，如图 2 所示：对间距 Δ_u 在 0 至 4 σ_u^{qG} 范围内的束流分离扫描进行建模，并针对 0.8 至 1.2 范围内的不同尾部密度 q，估计具有相同束团尺寸的 q-高斯束团与高斯分布之间的重叠积分偏差。该尾部密度范围对应的尾部粒子数与高斯分布相比最多相差 20%。

偏差图显示，偏差对间距 Δ_u 的依赖关系分为 3 个区域：区域 1——从零间距到点“a”，重尾束流的重叠积分较高（轻尾束流的重叠积分较低），并随着间距增大而减小（增大），直到在点“a”处等于高斯分布束流的重叠积分；区域 2——从点“a”到点“b”，重尾束流的重叠积分较低（轻尾束流的重叠积分较高），并随着间距增大而减小（增大），直至达到最小值（最大值），随后随着间距进一步增大而增大（减小），直到在点“b”处等于高斯分布束流的重叠积分；区域 3——从点“b”开始，重尾束流的重叠积分较高（轻尾束流的重叠积分较低），并随着间距增大而增大（减小）。这些偏差的极限



(a)



(b)

图 1 $\sigma_u^{qG} =$ 100 μ $= 0.8$ 1.0 1.2 1 维数为 m、尾部密度为 q 的 q-高斯束团分布，以及（a）在间距 Δ_u 从 0 到6 σ_u^{qG} 的分离扫描期间的重叠积分(1b

表 1在 vdM 分离扫描中，对于维数相同 $\sigma_u^{qG} = 100\ \mu$ 的束团（维数为m，尾部密度q 在 0.8 至 1.2 之间），间距 Δ_u 在 0 至 4 σ_u^{qG} 的范围内，不同依赖区域中，q-高斯束团 Ω_u^{qG} 的一维重叠积分相对于高斯分布 Ω_u^G 的偏差极限

尾部粒子密度	区域-1	区域-2	区域 3
轻尾q < 1	-2.64%	5.75%	-20%
重尾q > 1	5.79%	-10.46%	24%

总结见表 1。对于不同的尾部密度 q 值，点“a”和点“b”的位置各不相同，分别位于 1.037 至 1.065 σ_u^{qG} 和 3.269 至 3.416 σ_u^{qG} 的范围内。碰撞束团的尾部密度会影响重叠积分，因此在亮度建模中有必要精确考虑非高斯束形。

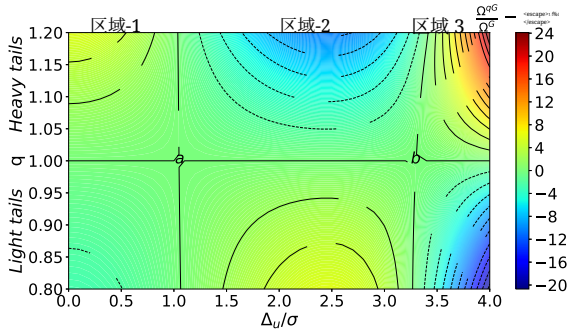


图 2 q-高斯束团的一维重叠积分相对于高斯分布 Ω_u^{qG}束团的一维重叠积分的偏差图Ω_u^G，适用于尺寸相同的束团 $\sigma_u^{qG} = 100\ \mu m$，其尾部密度 q 在 0.8 至 1.2 范围内，且范德梅尔分离扫描的间距为 Δ_u，范围为 0 至4 σ_u^{qG}

3.4 q-高斯束团的卷积束流尺寸

由于响应率 R 与重叠积分成正比 Ω，两个 q-高斯束团的一维卷积束流尺寸 Σ_u^{qG}可由方程（3）求得：

$$\Sigma_u^{qG}(q) = \frac{\int \Omega_u^{qG}(\Delta_u;q)\, d\Delta_u}{C_u\ \Omega_u^{qG}(0;q)}, \tag{19}$$

其中，常数 C_u取为 $\sqrt{(5-3q)}\ C^{qG}$，适用于 q-高斯束团。由于对于任意归一化粒子密度 $\int \Omega_u(\Delta_u)d\Delta_u = 1$ [16]，因此对于 $\sigma_{1u} = \sigma_{2u} = \sigma_u$ 和 $q_{1u} = q_{1u} = q$，卷积束流尺寸 $\Sigma_u^{qG}(q)$ 可表示为：

$$\Sigma_u^{qG}(q) = \begin{cases} \dfrac{Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3-q}{2q-2}\right)}{Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{5-q}{2q-2}\right)}\ \sigma_u^{qG} & \text{if } 1 < q < 3 \\ \sqrt{2}\ \sigma_u^{qG} & \text{if } q = 1 \\ \dfrac{Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{2-q}{1-q}\right)}{Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3-q}{1-q}\right)}\ \sigma_u^{qG} & \text{if } q < 1 \end{cases}. \tag{20}$$

同样，不同束团尺寸的 q-高斯束团的卷积束流尺寸 $\sigma_{1u} \neq \sigma_{2u}$ 见附录 C。

与重叠积分类似，当q 趋近于 1 时，q-高斯束团的卷积束流尺寸趋近于高斯分布的卷积束流尺寸。

$$\lim_{q\to 1}\left(\Sigma_u^{qG}(q<1)\right) = \lim_{q\to 1}\left(\Sigma_u^{qG}(q>1)\right) = \sqrt{2}\ \sigma_u^{qG}. \tag{21}$$

由于要进行精确的亮度标定，必须根据 vdM 扫描曲线精确定义卷积束流尺寸，因此有必要研究非高斯尾部粒子群对卷积束流尺寸的影响。本文使用方程（20），针对满足 vdM 扫描特殊条件 $\sigma_u^{qG} = 100\ \mu m$ 且无交叉角的束团，对 q-高斯束团的一维卷积束流尺寸 Σ_u^{qG}随尾部密度 q 的变化关系进行建模。

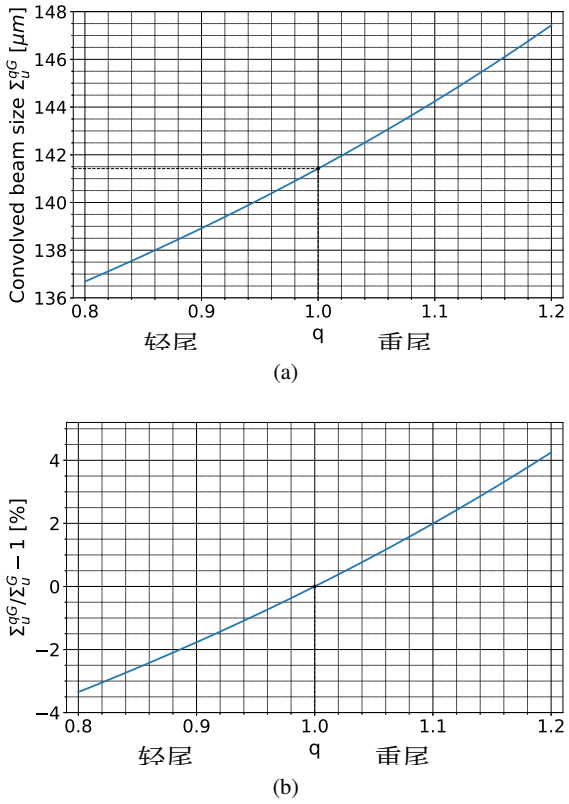


图 3q-高斯束团的卷积束流尺寸 Σ_u^{qG}对于尺寸相同的束团 $\sigma_u^{qG} = 100\ \mu m$ 和尾部密度 q 在 0.8 至 1.2 正面碰撞（3a），以及其与高斯分布束团的偏差（3b）

见 [10]。研究了尾部密度q 在 0.8 至 1.2 范围内的情况。图3a 显示，对于特定束团尺寸，卷积束流尺寸会随尾部密度增加而增大。图3b 显示了 q-高斯束团 Σ_{qGu}的卷积束流尺寸相对于高斯分布 Σ_u^G的偏差。结果发现，尾部粒子数与高斯分布相差 20% 时，重尾束团的偏差最高可达 4.25%，而轻尾束团的偏差最低可达 −3.35%。

3.5 倾斜角的影响

两个束团发生碰撞时，其重叠积分取决于它们在实验室参考系中的横向粒子分布，如方程（2）所示。一般而言，它们各自在横向平面中的水平轴和垂直轴通常并不重合，因此两个束团的横向平面之间会形成一个小夹角，即所谓的倾斜角。倾斜角通常很小，但会使实验室参考系中的横向密度出现x –y耦合，如图 4所示。因此，本文研究了倾斜角对具有高斯尾部和非高斯尾部的束团重叠积分的影响，并考察了其对范德梅尔扫描的影响。

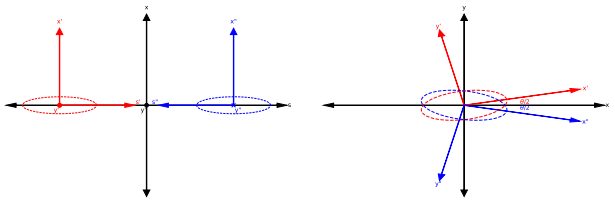


图 4 束团 1（红色）的加速器（4a）和横向（4b）平面参考系 $X'Y'Z'$；束团 2（蓝色）的参考系$X''Y''Z''$ 以及实验室参考系 XYZ，其中束团 1 和束团 2 的横向平面沿相反方向旋转，倾斜角为 θ

3.5.1 高斯尾部

假设两个横向密度分别为 ρ_1、2 的束团以零交叉角发生碰撞，且它们各自的水平和垂直方向尺寸相等，即（$\sigma_{1x} = \sigma_{2x} = \sigma_x$ 和 $\sigma_{1y} = \sigma_{2y} = \sigma_y$）。定义三个参考系：束团 1 参考系 X′Y′Z′；束团 2 参考系 X″Y″Z″；以及实验室参考系 XY Z。若倾斜角为 θ，使 X′Y ′和 X″Y″ 之间存在夹角，并且 X′Y′ 和 X″Y″ 分别绕 XY 轴向相反方向旋转角度 $\frac{\theta}{2}$，如图 4 所示，则在实验室参考系中，束团坐标定义如下：

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right);\\
y' &= -x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + y\cos\left(\frac{\theta}{2}\right);\\
x'' &= x\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right);\\
y'' &= -x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - y\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

如果水平和垂直间距分别为 Δ_x 和 Δ_y，则重叠积分 Ω_θ^G为

$$
\begin{aligned}
\Omega_\theta^G &= \frac{1}{4\pi^2\sigma_x^2\sigma_y^2}\iint \rho_1(x-\Delta_x, y-\Delta_y, \theta)\rho_2(x,y,\theta)\,dxdy\\
&= \Omega_{\theta,x}(\Delta_x,\theta)\,\Omega_{\theta,y}(\Delta_y,\theta),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

其中 $\Omega_{G\theta,x}$ 和 $\Omega^{G}_{\theta,y}$ 分别表示水平方向和垂直方向的重叠积分，其定义为：

$$\begin{aligned}\Omega_{\theta,x}(\Delta_x,\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)+(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\cos(\theta)}} \\ &\times \exp\left(\frac{-\Delta_x^2}{2\left((\sigma_x^2+\sigma_y^2)+(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\cos(\theta)\right)}\right); \\ \Omega_{\theta,y}(\Delta_y,\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\cos(\theta)}} \\ &\times \exp\left(\frac{-\Delta_y^2}{2\left((\sigma_x^2+\sigma_y^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\cos(\theta)\right)}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

倾斜角导致实验室参考系中的横向密度不可因子化XYZ，但其产生的重叠积分可按束流间距因子化 Δ_x 和 Δ_y，并具有如方程（23）和（24）所示的高斯形式。因此，水平和垂直卷积束流尺寸 $\Sigma_{G\theta,x}$ 和 $\Sigma^{G}_{\theta,y}$ 彼此不耦合，可通过两次独立的一维范德梅尔扫描确定，具体如下

$$\begin{aligned}\Sigma^{G}_{\theta,x}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\int \Omega^{G}_{\theta,x}(\Delta_x,\theta)\,d\Delta_x}{\Omega^{G}_{\theta,x}(0,\theta)} \\ &= \sqrt{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)+(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\cos(\theta)}\,; \\ \Sigma^{G}_{\theta,y}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\int \Omega^{G}_{\theta,y}(\Delta_y,\theta)\,d\Delta_y}{\Omega^{G}_{\theta,y}(0,\theta)} \\ &= \sqrt{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\cos(\theta)}\,.\end{aligned} \tag{25}$$

原则上，倾斜角 θ 会导致重叠积分减小，这可视为横向粒子密度中$x-y$耦合造成的几何减小因子。图5 显示了倾斜角为 θ时的最大重叠积分 Ω^{G}_{θ}，相对于零倾斜角时的最大重叠积分Ω^{G}_{0}进行归一化；所示为不同水平与垂直束团尺寸比的高斯束团，倾斜角 θ 的范围为 0 到 90^{o}。对于圆形束团，$\sigma_x\sigma_y = 1$，倾斜角不会产生任何影响。随着xσ_y 比值增大，减小效应也会增强。

3.5.2 非高斯尾部

由于如前所述，具有非高斯尾部的束团可用 q-高斯分布表示，假设两个 q-高斯束团 $\rho_{1,2}$ 的束团尺寸和水平、垂直方向的尾部密度相同，即 ($\sigma_{qG1x} = \sigma_{2x}^{qG} = \sigma_x^{qG}$; $\sigma_{1y}^{qG} = \sigma_{2y}^{qG} = \sigma_y^{qG}$; $q_{1x} = q_{2x} = q_x$; 和 $q_{1y} = q_{2y} = q_y$) 在零交叉角下发生碰撞，并采用与

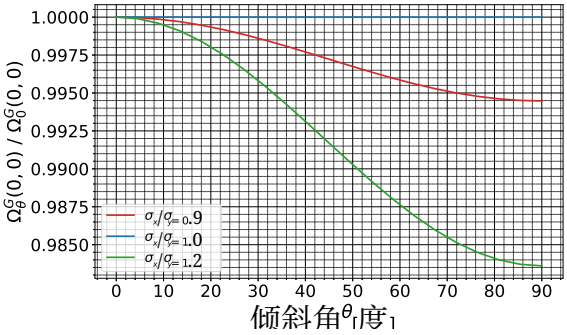


图 5 高斯束团在倾斜角下的最大重叠积分与零倾斜角下最大重叠积分之比 $\Omega_{G\Omega}{}^{\theta}{}_{G0}$ 在倾斜角 θ处（范围为 0 到 90^{o}），对于不同的水平与垂直束团尺寸比 $\sigma_x\sigma_y = 0.9$、1 和 1.2，$\sigma_y = 100\,\mu m$ 处于零间距

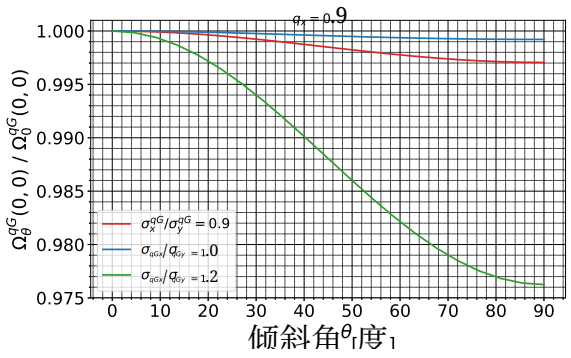
方程（22）中类似的参考系和坐标，实验室参考系中的粒子密度定义为：

$$\begin{aligned}\rho_1(x,y,\theta) &= QG\left(x\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right);q_x,\beta_x^{qG}\right) \\ &\times QG\left(-x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+y\cos\left(\frac{\theta}{2}\right);q_y,\beta_y^{qG}\right); \\ \rho_2(x,y,\theta) &= QG\left(x\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right);q_x,\beta_x^{qG}\right) \\ &\times QG\left(-x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-y\cos\left(\frac{\theta}{2}\right);q_y,\beta_y^{qG}\right),\end{aligned} \tag{26}$$

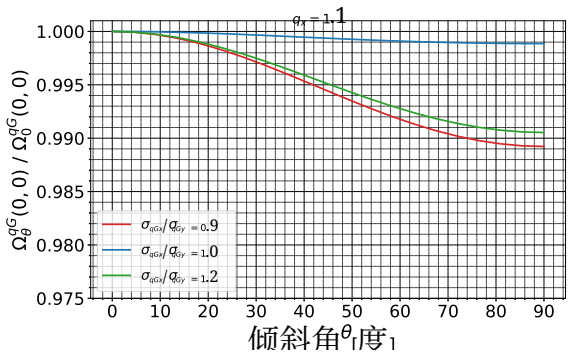
且重叠积分 Ω_{θ}^{qG} 由下式给出

$$\begin{aligned}\Omega_{\theta}^{qG}(\Delta_x,\Delta_y,\theta) &= \frac{\beta_x^{qG}\beta_y^{qG}}{C_x^{qG^2}C_y^{qG^2}} \\ &\times \iint e_{q_x}\left(\beta_x^{qG}\left(x\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right) \\ &\times e_{q_x}\left(\beta_x^{qG}\left((x-\Delta_x)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\Delta_y)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right) \\ &\times e_{q_y}\left(\beta_y^{qG}\left((x-\Delta_x)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\Delta_y)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right) \\ &\times e_{q_y}\left(\beta_y^{qG}\left(x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-y\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right)dxdy.\end{aligned} \tag{27}$$

方程（27）的解析解难以求得；因此，采用数值积分技术估算倾斜角对 q-高斯束团重叠积分的影响。与高斯分布类似，倾斜角的存在会使重叠积分减小。图q_x 展示了不同水平尾部密度 σ_{qGx} σ_{qGy} 和束团尺寸比6对应的减小幅度，其中假设垂直尾部密度为高斯分布，$q_y = 1$。图6 显示，对于



(a)



(b)

图 6 倾斜角为 θ 时 q-高斯束团的最大重叠积分与倾斜角为零时的重叠积分之比 $\Omega^{\theta}_{qG}/\Omega^{0}_{qG}$，水平尾部密度 $q_x = 0.9$ (6a) 和 $q_x = 1.1$ (6b)，倾斜角 θ 的范围为 0 到 90^o，不同的水平与垂直束团尺寸比 $\sigma_{qGx}/\sigma_{qGy} = 0.9$、1 和 1.2，其中垂直束团尺寸 $\sigma^{qG}_y = 100\ \mu m$

束团尺寸比 $\sigma_x/\sigma_y = 1$，轻尾和重尾束团都会出现减小效应，且重尾束团的减小幅度更大。对于水平密度为重尾的束团 $q_x > 1$，若 $\sigma_x\sigma_y > 1$，其减小效应小于高斯分布；而若 $\sigma_x\sigma_y < 1$，减小效应则大于高斯分布。对于水平密度为轻尾的束团 $q_x < 1$，若 $\sigma_x\sigma_y > 1$，其减小效应大于高斯分布；而若 $\sigma_x\sigma_y < 1$，减小效应则小于高斯分布。值得注意的是，对于 q-高斯束团，倾斜角会导致重叠积分无法表示为束流间距 Δ_x 和 Δ_y 的可分离函数 Ω^{qG}_{θ}，从而在范德梅尔扫描中产生不可因子化偏差。对此效应的详细研究超出了本文的讨论范围，将另行发表。

4 应用

上一节估算了非高斯尾部对重叠积分和卷积束流尺寸的影响，其中使用 q-高斯束团作为实际束团更真实的近似。本节研究非高斯尾部对范德梅尔（vdM）扫描所得各量的影响。具体而言，使用 q-高斯束团对“玩具”vdM 扫描进行建模，并分别采用高斯、双高斯和 q-高斯拟合模型拟合所得扫描数据，以估算基于高斯分布的模型应用于具有非高斯尾部的束团时的精度。之后，使用 2015 年 CMS vdM 扫描计划中进行的束流重叠宽度测量对该流程进行测试。

4.1 玩具范德梅尔扫描

“玩具”范德梅尔扫描通过计算两个束团尺寸相等、尾部密度为 q 的 q-高斯束团的重叠积分来完成，其中重叠积分根据 Ω^{qG}_u 的解析公式（15）和（17）计算，间距 Δ_u 从 0 变化到 6 σ^{qG}_u，由此获得 $\left(\Delta_u, \Omega\text{qGu}\,(\Delta_u; \text{q})\right)$ 的 60 个点，并根据解析公式（25）计算这些束团的卷积束流尺寸 Σ^{qG}_u。对于范德梅尔扫描，应用中采用的标准拟合模型是高斯函数 f^G，即方程（28）。但由于简单高斯函数无法充分拟合扫描数据，尤其是尾部，因此，具有两种不同宽度的双高斯拟合 f^{DG}（即方程（29））在相对论重离子对撞机 [11] 和大型强子对撞机 [14]，中被广泛使用：宽度较小的高斯函数 σ_1 拟合核心，宽度较大的高斯函数 σ_2 拟合尾部，而 ε 是宽度较小的高斯函数所占的比例。卷积束流尺寸 Σ DGu (u =x,y) 的定义见方程（30）。

$$f^G(\Delta_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Sigma^G_u}\exp\left(-\frac{\Delta^2_u}{2\Sigma^{G^2}_u}\right). \tag{28}$$

$$f^{DG}(\Delta_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\varepsilon}{\sigma_{1u}}\exp\left(-\frac{\Delta^2_u}{2\sigma^2_{1u}}\right) + \frac{1-\varepsilon}{\sigma_{2u}}exp\left(-\frac{\Delta^2_u}{2\sigma^2_{2u}}\right)\right]. \tag{29}$$

$$\Sigma^{DG}_u = \frac{\sigma_{1u}\sigma_{2u}}{\varepsilon_u\sigma_{2u} + (1-\varepsilon_u)\sigma_{1u}}. \tag{30}$$

基于 q-高斯束团假设及推导得到的重叠积分解析公式 Ω^{qG}_u，本文提出一种范德梅尔扫描拟合模型，用于考虑尾部粒子数量。该模型利用 q-高斯分布描述各种尾部的能力，涵盖从$q < 1$ 时的有限轻尾到$q > 1$时的重尾。所提出的模型f_{qGu} 由q和 Σ^{qG}_u定义如下：

$$f^{qG}_u(\Delta_u; q) = \frac{1}{C^{qG}_u\sqrt{5-3q}\Sigma^{qG}_u}e_q\left(-\frac{\Delta^2_u}{(5-3q)\Sigma^{qG^2}_u}\right), \tag{31}$$

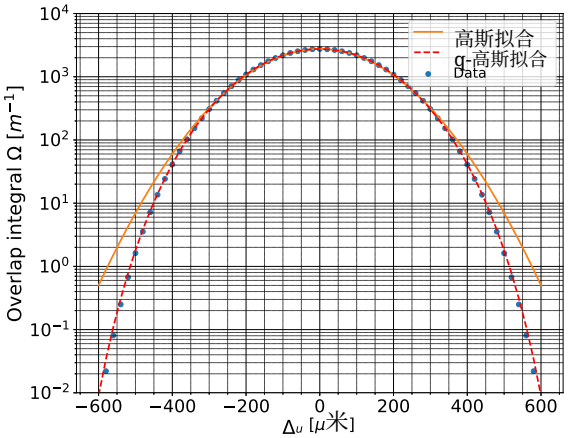
其中 eq 和C^{qG} 由方程（7）和（8）定义。

对轻尾束团（“q = 0.8”）和重尾束团（“q = 1.2”）进行模拟扫描，束团尺寸均为 $\sigma_u^{qG} = 100\ \mu m$。随后，使用非线性最小二乘最小化与曲线拟合 Python 软件包“lmfit”中的信赖域反射法进行最小二乘最小化，利用模型（28）、（29）和（31）拟合所得的模拟扫描数据。由于轻尾束团的重叠积分尾部填充不足，双高斯模型（29）仅用于重尾束团，因为其应用概念不适用于轻尾束团。

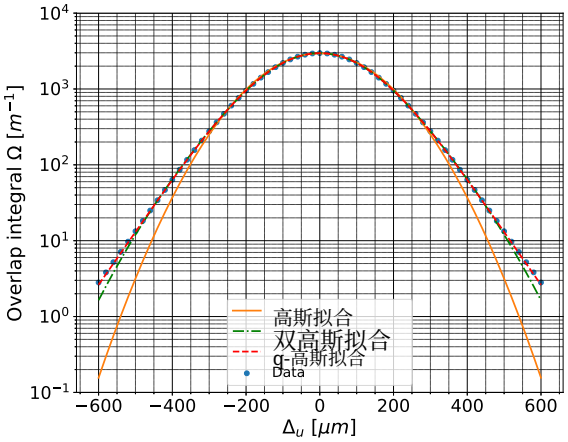
vdM 模拟扫描数据的拟合结果如图 7 所示。对于轻尾束流“q = 0.8”，图 7a 中，高斯模型无法拟合间距较小和较大时的数据，因为它高估了数据的核心和尾部；而 q-高斯模型对数据拟合良好。对于“q = 1.2”时的重尾束流，图 7b 中，高斯模型低估了数据的核心和尾部；而双高斯模型和 q-高斯模型都能很好地描述数据。与高斯拟合和双高斯拟合相比，q-高斯拟合对数据的描述最佳，尤其是对尾部的描述。拟合参数汇总于表 2。拟合优度统计量基于均方根误差（RMSE）和 R^2 统计量；预测值 Σ_u^{qG}与最大值Ω_u^{qG}（在零间距处）的偏差汇总于表 3。

根据前述结果，q-高斯拟合模型（f^{qG}），方程（31，对扫描数据的拟合效果最佳，并能以较高精度预测卷积束流尺寸和重叠积分，偏差分别小于 ±5% 和 ±0.025%。双高斯拟合模型（f^{DG}），方程（29，对数据的拟合效果良好，对重叠积分的预测偏差小于 0.04 %，但它仅适用于无限重尾束团，因为对于有界轻尾束团，它给出的结果与高斯分布相同，无法比单高斯提供更好的预测。与 q-高斯模型相比，基于高斯分布的模型偏差较大，这是因为基于高斯分布的模型没有考虑卷积束流尺寸与尾部密度之间的关系，即使对于f^{DG}也是如此；该模型仅对重尾束团有效。

为了研究非高斯尾部对.....的影响
不同拟合模型的预测准确性。为此，进行了尾部密度q 在 0.8 至 1.2 范围内的模拟范德梅尔扫描。图8 展示了先前拟合模型得到的预测卷积光束尺寸 $\Sigma^{fit\ model u}$ 和重叠积分 $\Omega_{fit\ model u}$ 与分别由方程（15）和（17）计算的相应解析值之间的偏差。对于轻尾束团，f^G 和f^{DG} 高估了卷积束流尺寸和重叠积分；而对于重尾束流，f_G、f_{DG}和f^{qG}则低估了这两者。当q趋近于 1 时，所有模型的预测值都接近解析值。



(a)



(b)

图 7 对两个束团尺寸相同的 q-高斯束团的重叠积分进行拟合 $\sigma_u^{qG} = 100\ \mu m$ 和尾部密度 q 在间距 Δ_u 从 0 到 6 σ_u^{qG}范围内，通过“玩具”范德梅尔扫描获得。考虑了两种情况：轻尾束团“q = 0.8”（7a）和重尾束团“q = 1.2”（7b），并采用以下拟合模型：高斯分布（28）；双高斯（29）；以及 q-高斯（31）

校准值。基于均方根误差和调整后的 R^2 在各种尾部密度下q 的拟合优度统计量见图 9。

根据图8 和9，q-高斯拟合模型，即方程（31），相比高斯模型和双高斯模型，能够以更高的精度预测卷积束流尺寸和重叠积分；根据拟合优度统计量，它对扫描数据的描述也更好。该模型适用于轻尾和重尾束团。与方程（15）和（17）中的解析解相比，q-高斯拟合模型是一种良好且简便的近似。

表 2 两个尺寸相同的 q-高斯束团“玩具”范德梅尔扫描数据的拟合参数估计值 $\sigma_u^{qG} = 100\ \mu m$ 及尾部密度 q。考虑了两种情况：轻尾束流“$q = 1.2$”和重尾束流“$q = 1.2$”，并采用了以下拟合模型：高斯分布（28）；双高斯（29）；以及 q-高斯（31）

轻尾 q-高斯 $= 0.8$			
拟合参数			标准差误差 $[10^{-4}]$
高斯分布	$\Sigma_u^G\,[\mu m]$	144.59	0.28037
双高斯	ε	—	—
	$\sigma_{1u}^G\,[\mu m]$	—	—
	$\sigma_{2u}^G\,[\mu$米$]$	—	—
q-高斯	q	0.9226	0.00021
	$\Sigma_u^{qG}\,[\mu$米$]$	141.48	0.00929

重尾 $q = 1.2$			
拟合参数			标准差误差 $[10^{-4}]$
高斯分布	$\Sigma_u^G\,[\mu m]$	137.4	0.44499
双高斯	ε	0.206	0.00730
	$\sigma_{1u}^G\,[\mu m]$	115.6	1.17431
	$\sigma_{2u}^G\,[\mu$米$]$	167.7	1.27512
q-高斯	q	1.1257	0.00017
	$\Sigma_u^{qG}\,[\mu$米$]$	141.24	0.01224

表3 基于均方根误差和 R^2, 以及 $\Sigma^{fit}{}_{\text{模型}u}$ 和 $\Omega_{\text{拟合模型}u}$ 的偏差，这些值由对“*toy*”范德梅尔扫描数据的拟合确定，其解析值为 $\Sigma_u^{Analytical}$，方程（20），最大值为 $\Omega_u^{Analytical}$（零间距处），方程（15）和（17），适用于两种情况：轻尾束团“$q = 0.8$”和重尾束团“$q = 1.2$”

拟合模型	RMSE	R^2	调整后 R^2	$\frac{\Sigma_{\text{拟合模型}u}}{\Sigma_u^{\text{分析的}}} - 1\,[\%]$	$\frac{\Omega_{\text{拟合模型}u}}{\Omega_u^{\text{解析的}}} - 1\,[\%]$
轻尾$q = 0.8$					
高斯分布	2.65232	0.9997128	0.9997128	5.784	0.461
q-高斯	0.33639	0.9999999	0.9999999	3.503	−0.022
重尾$q = 1.2$					
高斯分布	29.031	0.9991700	0.9991700	−8.625	−0.771
双高斯	1.42527	0.9999980	0.9999979	−9.295	−0.037
q-高斯	0.31541	0.9999999	0.9999999	−4.197	0.018

4.2 大型强子对撞机范德梅尔扫描中非高斯尾部的影响

束流重叠 Ω 并不是一个可测量的量。真正可测量的是前文提到的响应率R。响应R 与 Ω 成正比，因为R 表征的是碰撞产物的通量，而 Ω 表征的是碰撞的强度。因此，在范德梅尔扫描中测得的响应率R 构成的扫描曲线形状，与前文所考虑的相应 Ω 所对应的扫描曲线形状相似。在本小节中，我们将此前建立的模型应用于响应率R。

高斯分布、双高斯分布和 q-高斯拟合模型被应用于来自大型强子对撞机第二次运行期间 CMS 发布于 [10], 的实际范德梅尔扫描数据集，以评估所提出的 q-高斯拟合模型，并将其与[10],中使用的拟合模型进行比较，同时研究其在描述实际束流的范德梅尔扫描数据方面的统计显著性，以及以更高精度预测重叠积分的能力。此前的拟合模型被改写为以下一般形式：

$$f^G(\Delta_u) = A\exp\left(-\frac{(\Delta_u-\mu)^2}{2\Sigma_u^{G2}}\right) + Const; \tag{32}$$

$$f^{DG}(\Delta_u) = A\left[\varepsilon\exp\left(-\frac{(\Delta_u-\mu)^2}{2\sigma_{1u}^2}\right) + (1-\varepsilon)\exp\left(-\frac{(\Delta_u-\mu)^2}{2\sigma_{2u}^2}\right)\right] + Const; \tag{33}$$

$$f_u^{qG}(\Delta_u;q) = Ae_q\left(-\frac{(\Delta_u-\mu)^2}{(5-3q)\Sigma_u^{qG2}}\right) + Const, \tag{34}$$

其中$Const$ 用于计入背景，A表示归一化速率的振幅。归一化速率的拟合结果及其拟合残差如图10所示，其中水平X 扫描见图10a，垂直Y 扫描见图10b，所得拟合参数汇总于表4。

值得注意的是，对于水平扫描，q-高斯拟合预测扫描曲线的尾部略微填充不足，其 $q = 0.9968$ 与所得双高斯拟合参数一致；拟合参数对初始值表现出强烈依赖性，且存在无穷多组所得拟合参数（σ_1，σ_2，ε），在这些参数下，双高斯会趋近于单高斯。这证实，对于填充不足的扫描，双高斯等同于单高斯，无法进一步提高精度。对于垂直扫描，q-高斯拟合预测扫描曲线的尾部略微填充过度，其 $q = 1.0157$。拟合模型的统计分析，以及预测的 $\Sigma^{fit}{}_{modelu}$ 和 $\Omega_{fit\ modelu}$，汇总于表 4中，其中使用均方根误差、调整后的 R^2 和 χ^2/dof 进行拟合优度分析。

对于水平扫描，尽管 q-高斯拟合的均方根误差最低，但高斯拟合的 Adj.R^2 和 χ^2/dof 最接近 1，这可以由以下事实解释：

表4 对数据集拟合得到的估计拟合参数 [10] 由高斯分布（32）、双高斯（33）和 q-高斯（34）拟合模型拟合

数据集 [10],水平 X 扫描			
拟合参数			标准差误差
高斯分布	$\Sigma_u^G\,[\mu$米$]$	136.34	0.40950
	A	73.633	0.27912
	$\mu,\,[\mu$米$]$	−0.7451	0.44766
	$Const$	0.4157	0.03931
双高斯	ε	0.9436	254650
	$\sigma_{1u}^G\,[\mu m]$	136.34	443515
	$\sigma_{2u}^G\,[\mu m]$	136.34	741441
	A	73.633	0.35316
	$\mu,\,[\mu$米$]$	−0.7451	0.50505
	$Const$	0.4157	0.05288
q-高斯	q	0.9968	0.01151
	$\Sigma_u^{qG}\,[\mu$米$]$	136.22	0.61085
	A	73.584	0.33827
	$\mu,\,[\mu$米$]$	−0.7481	0.45796
	$Const$	0.42433	0.05076

数据集 [10] 垂直Y 扫描			
拟合参数			标准差误差
高斯分布	$\Sigma_u^G\,[\mu m]$	132.29	0.42974
	A	73.847	0.31728
	$\mu\,[\mu m]$	0.3868	0.48266
	$Const$	0.3865	0.03692
双高斯	ε	0.9131	0.64473
	$\sigma_{1u}^G\,[\mu m]$	129.52	10.8451
	$\sigma_{2u}^G\,[\mu m]$	159.97	119.629
	A	74.084	0.38132
	$\mu\,[\mu m]$	0.3725	0.48775
	$Const$	0.3418	0.08048
q-高斯	q	1.0157	0.01227
	$\Sigma_u^{qG}\,[\mu$米$]$	132.87	0.63497
	A	74.104	0.37265
	$\mu\,[\mu$米$]$	0.3739	0.47587
	$Const$	0.3521	0.04594

表5 统计分析和预测卷积光束尺寸 Σ^{fit} 模型u 及重叠积分 Ω 拟合模型u 由数据集拟合得到 [10] 高斯分布（32）、双高斯（33）和q-高斯（34）拟合模型

拟合模型	$RMSE$	调整后 R^2	χ^2/dof	Σ^{fit} 模型$[\mu m]$	Ω^{fit} 模型$[$米$^{-1}]$
数据集 [10], 水平X 扫描					
高斯分布	44.0315	0.999755	1.04963	136.349	2925.885
双高斯	44.0315	0.999729	1.16012	136.349	2925.885
q-高斯	43.9468	0.999743	1.09788	136.224	2925.091
数据集 [10], 垂直Y 扫描					
高斯分布	38.5665	0.999697	1.03108	132.2882	3015.706
双高斯	37.0326	0.999691	1.05077	132.1726	3018.343
q-高斯	37.0722	0.999706	1.00037	132.8663	3020.685

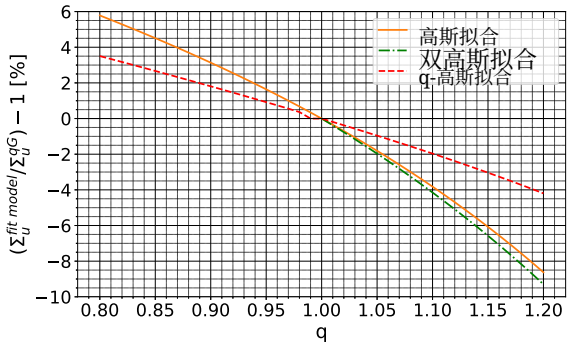
预测的 $q = 0.9968$ 非常接近 1，这证明 q-高斯是最佳拟合。高斯和 q-高斯预测的重叠积分偏差为 0.027%。对于垂直扫描，双高斯的均方根误差最低且 χ^2/dof 最高，这表明双高斯能够预测数据，但无法很好地解释方差；q-高斯的 Adj.R^2 和 χ^2/dof 最接近 1，且其均方根误差与双高斯非常接近，这表明 q-高斯可视为最佳拟合，因为它既能高精度地预测数据，也能很好地解释方差。双高斯和 q-高斯预测的重叠积分偏差为 0.077%。

总体而言，拟合结果表明，q-高斯拟合模型是束流重叠建模的一种有前景的基础。它能够描述非高斯尾部，从而实现更精确的亮度标定；这对于满足对撞机实验不断增长的需求、尤其是当前对撞机后续升级而言，尤为重要。

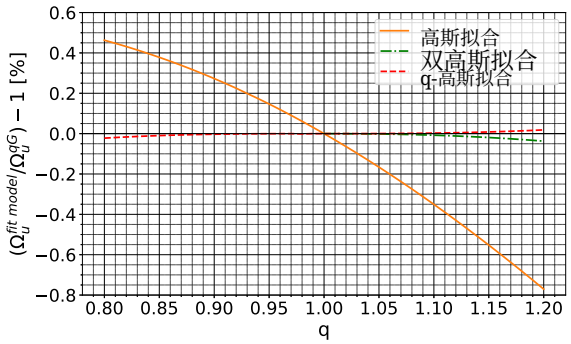
5 结论

在高能对撞机中，束团内的粒子会受到多种效应影响，使粒子分布略微偏离精确的高斯分布；因此，使用 q-高斯这类一般分布函数，能够更有效地描述束流轮廓。在 [13, 15],中，讨论了非高斯尾部对绝对亮度的影响。本文研究了非高斯尾部对范德梅尔（vdM）扫描亮度标定精度的影响，提出了一种范德梅尔扫描拟合模型，并考虑了碰撞束团在横向平面内的倾斜角，同时观察到了非因子化效应。

对 q-高斯束团的重叠积分进行了建模。推导出一个解析公式，展示重叠积分 Ω_u^{qG}对尾部密度 q 的依赖关系，见方程（15）和（17）。分离扫描过程中，q-高斯束团的重叠积分 Ω_u^{qG}相对于高斯束团 Ω_{Gu}的偏差如图 2所示。研究区域分为 3 个依赖区域，其中在区域-重尾 u> Ω_u^G > Ω^{qG} 轻尾u，在区域-Ω^{qG} 重尾 u< Ω_u^G < Ω^{qG} 轻尾u 以及区域 3

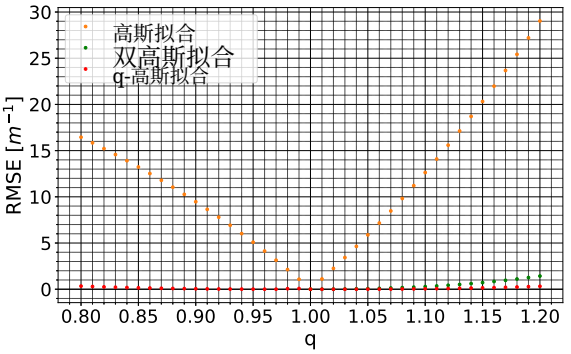


(a)

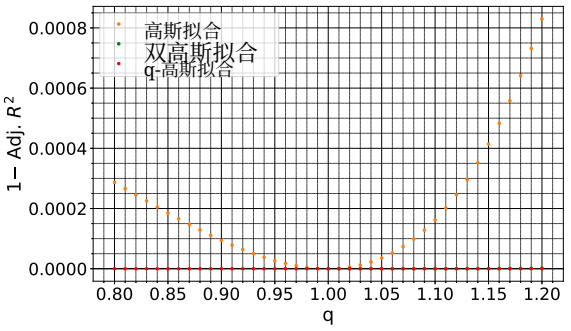


(b)

图8 不同拟合模型所得卷积束流尺寸 $\Sigma_{\text{拟合模型}u}$ (8a)和重叠积分 $\Omega^{fit}{}_{\text{模型}u}$ (8b)与各自解析值的偏差 $\Sigma_u^{Analytical}$和 $\Omega_u^{Analytical}$，分别由方程（18）以及方程（12）、（15）和（17）计算得出。对于由两个尺寸相同、尾部密度模拟为“模拟”的范德梅尔扫描中的q-高斯束团，尾部密度为q，范围为0。8至1。2



(a)



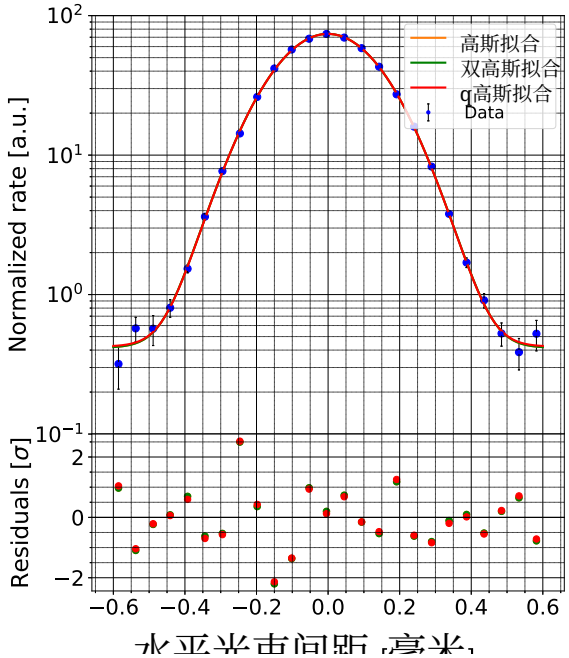
(b)

图9 基于均方根误差（9a）和调整后的R^2 (9b)对由两个尺寸相同、尾部密度为q、取值范围为0.8至1.2的q-高斯束团模拟范德梅尔扫描所用的不同拟合模型进行拟合优度分析

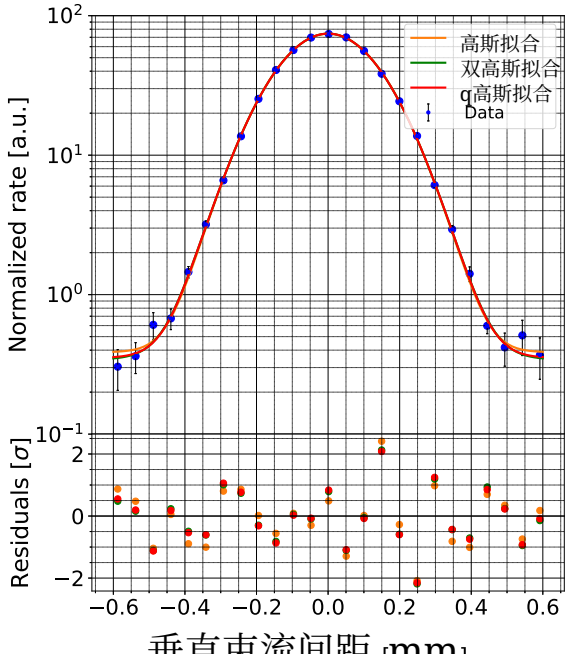
ΩqG 重尾 u > Ω_u^G > ΩqG 轻尾u 。尾部密度 q 在 0.8 至 1.2 范围内时，不同区域中 Ω_u^{qG}相对于 ΩGu 的偏差极限汇总于表 1。本文研究非高斯尾部对 vdM 扫描曲线宽度的影响，并推导出 q-高斯束团 Σ_u^{qG}的卷积束流尺寸解析公式，如公式（20）所示。q-高斯束团的 vdM 扫描曲线宽度 Σ_u^{qG}相对于高斯 ΣGu 的偏差如图 3b 所示。结果表明，当尾部密度 q 在 0.8 至 1.2 范围内时，非高斯尾部会导致相对于高斯分布最多 ± 4% 的偏差。当尾部密度 q 趋近于 1 时，重叠积分和卷积束流尺寸的两个新公式均趋近于高斯分布对应的公式，如方程（18）和（21）所示，这与 q 趋近于 1 时 q-高斯分布趋近于高斯分布的趋势一致。

本文研究了碰撞束团在横向平面内的倾斜角对其重叠积分的影响。一般而言，倾斜角会导致重叠积分因几何因素而减小，而减小幅度取决于水平和垂直尾部密度，以及水平和垂直束团尺寸之比。对于高斯束团，倾斜角会导致不可因子化密度，但在范德梅尔扫描中，作为束流间距函数的重叠积分（24）是可因子化的。因此，可通过分别沿水平方向和垂直方向进行两次一维范德梅尔扫描来确定重叠积分，且不会产生偏差，如方程（25）所示。对于 q-高斯束团，倾斜角会导致不可因子化密度（26）以及不可因子化重叠积分（27）。对由此产生的不可因子化偏差的详细研究不属于本文讨论范围，将另行发表

通过假设对撞束团具有 q-高斯性，估算非高斯尾部对范德梅尔扫描精度的影响，因为 q-高斯分布比实际束团轮廓更为逼真。本文基于 q-高斯分布方程提出了一种新的范德梅尔扫描拟合模型（31）。通过假设两个束团尺寸和尾部密度相同的 q-高斯束团发生正面碰撞，模拟了一次范德梅尔扫描。随后，使用高斯拟合模型和双高斯拟合模型对所得扫描数据进行拟合，以考察它们应用于非高斯束团时的精度，并将结果与所提出的 q-高斯拟合模型进行比较。拟合结果表明，与仅适用于具有过度填充尾部的间距扫描的双高斯拟合不同，所提出的模型既适用于尾部填充不足的扫描，也适用于尾部过度填充的扫描。该模型对扫描



(a)



(b)

图10 拟合（32）、（33）和（34）应用于数据集 [10]，其中归一化速率表示为水平X（10a）和垂直Y（10b）方向上的束流间距的函数。所得拟合参数汇总于表4

数据的描述效果良好；就均方根误差（RMSE）和调整后的 R^2 而言，当尾部密度 q处于 0.8 至 1.2 的范围内时，该模型对重叠积分的预测精度很高，偏差不超过 ±0.025%，如图 8b所示；而双高斯拟合模型仅适用于尾部过度填充的扫描，偏差最高可达 0.037%。这些结果适用于束团尺寸和尾部密度相同的任意 q-高斯束团。对范德梅尔扫描数据集 [10] 进行了研究，并应用所提出的 q-高斯模型（34），将其与单高斯模型和双高斯模型进行了比较。研究发现，水平 X 扫描的尾部填充不足，双高斯拟合模型趋近于单高斯模型，无法提高精度；而 q-高斯拟合模型的拟合效果最佳，且能以更高精度描述尾部。

总之，随着对撞机持续升级以及对亮度精度的要求日益提高，需要更准确地描述束团形状，因此尾部对重叠积分的影响也变得愈发关键；所以必须准确考虑这种形状。本研究结果表明，基于 q-高斯的模型为范德梅尔扫描数据分析提供了良好的基础，能够描述具有尾部过度填充或填充不足的束团的非高斯尾部。

致谢本工作获得俄罗斯联邦科学和高等教育部科学计划项目（项目编号FSWW-2023-0003）的部分支持。

附录 A：尺寸和尾部密度相同的 q-高斯束团重叠积分的推导

附录 A.1：轻尾 q-高斯束团

让我们用 $\Omega_{qGu}(\Delta_u;\ q<1)$ 表示重叠积分r，其中$r=\frac{1}{1-q}$、$r\in\mathbb{R}$和$r\geq 0$，方程（14）变为

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q<1}=\frac{\beta^{qG}}{C^{qG2}}\int_{u_1}^{u_2}\left[1-\frac{\beta^{qG}}{r}\left(u-\frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right]_+^r \times\left[1-\frac{\beta^{qG}}{r}\left(u+\frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right]_+^r du, \tag{A.1}$$

对于 $\Delta_u\geq 0$，积分极限为 $\left\{\sqrt{r\,\beta_{qG}}-\frac{\Delta_u}{2},\ \sqrt{r\,\beta_{qG}}+\frac{\Delta_u}{2}\right\}$ 并将积分变量从u 变为 t，其中 $u=\sqrt{r\,\beta_{qG}}\,t$ 且 $du=\sqrt{r\,\beta_{qG}}\,dt$ 方程 (A.1) 可

可写为：

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q<1,\Delta_u\geq 0}=\frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG^2}}\int_{-1+\frac{\Delta_t}{2}}^{1-\frac{\Delta_t}{2}}\left(\left(1-\frac{\Delta_t}{2}\right)^2-t^2\right)^r\times\left(\left(1+\frac{\Delta_t}{2}\right)^2-t^2\right)^r dt, \tag{A.2}$$

其中 $\Delta_t=\sqrt{\beta^{qG}/r}\Delta_u$。经过进一步的数学运算，可得

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q<1,\Delta_u\geq 0}=2\frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG^2}}\left(1-\frac{\Delta_t^2}{4}\right)^{2r}\times\int_0^{1-\frac{\Delta_t}{2}}\left(1-\frac{t^2}{\left(1-\frac{\Delta_t}{2}\right)^2}\right)^r\left(1-\frac{t^2}{\left(1+\frac{\Delta_t}{2}\right)^2}\right)^r dt,$$

再次将积分变量从t 换为 t'，其中$t=(1-\frac{\Delta_t}{2})\sqrt{t'}$，且 $dt=\left(1-\frac{\Delta_t}{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{t'}}dt$，可得

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q<1,\Delta_u\geq 0}=\frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG^2}}\left(1-\frac{\Delta_t^2}{4}\right)^{2r}\times\int_0^1\frac{\left(1-t'^2\right)^2}{\sqrt{t'}}\left(1-\frac{\left(1-\frac{\Delta_t}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{\Delta_t}{2}\right)^2}t^2\right)^r dt'.$$

根据高斯超几何函数的积分形式 ${}_2F_1$ [25]:

$${}_2F_1(a,b;c;z)=Beta(b,c-b)\int_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt,$$

方程（A.2）的闭式解为

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q<1,\Delta_u\geq 0}=\frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG^2}}\left(1-\frac{\Delta_t}{2}\right)\left(1-\frac{\Delta_t^2}{4}\right)^{2r}\times Beta\left(\frac{1}{2},r+1\right)\ {}_2F_1\left(-r,\frac{1}{2};r+\frac{3}{2};\frac{\left(1-\frac{\Delta_t}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{\Delta_t}{2}\right)^2}\right). \tag{A.3}$$

将方程（A.3）改写为关于 q 和 Δ_u的形式，可得方程（15）。类似地，对于 $\Delta_u<0$，按照前述步骤可得方程（15）。

附录 A.2：重尾 q-高斯束团

让我们将重叠积分 $\Omega_{qGu}(\Delta_u;q>1)$改写为关于 r的形式，其中 $r=\frac{1}{1-q}$ $r\in\mathbb{R}$和 $r>3/2$，方程（A.1）变为

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q>1}=\frac{\beta^{qG}}{C^{qG^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+\frac{\beta^{qG}}{r}\left(u-\frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right)^{-r}\times\left(1+\frac{\beta^{qG}}{r}\left(u+\frac{\Delta_u}{2}\right)^2\right)^{-r}du, \tag{A.4}$$

由于两个方向相反的束流团位移 $\Delta_u/2$ 等效于一个束流团位移 Δ_u，因此可得

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q>1}=\frac{\beta^{qG}}{C^{qG^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^{qG}}{r}(u-\Delta_u)^2\right)^{-r}\times\left(1+\frac{\beta^{qG}}{r}u^2\right)^{-r}du,$$

将积分变量从 u 换为 t，令 $u=\sqrt{r\beta_{qG}}\,t$，且 $du=\sqrt{r\beta_{qG}}\,dt$，可得

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q>1}=\frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+(t-\Delta_t)^2\right)^{-r}\left(1+t^2\right)^{-r}dt,$$

其中 $\Delta_t=\sqrt{\beta_{qG}r}\Delta_u$。利用泰勒级数展开，将 $\left(1+(t-\Delta_t)^2\right)^{-r}$ 在 $\Delta_t=0$ 处展开，可得

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q>1}=\frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+t^2\right)^{-r}\times\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d^i}{d\Delta_t^i}\left(1+(t-\Delta_t)^2\right)^{-r}\Big|_{\Delta_t\to 0}\frac{\Delta_t^i}{i!}\right]dt,$$

并且由于 $\frac{d^i}{d\Delta_t^i}\left(1+(t-\Delta_t)^2\right)^{-r}\Big|_{\Delta_t\to 0}=\frac{d^i}{dt^i}\left(1+t^2\right)^{-r}$，再应用富比尼定理，得到

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q>1}=\frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG^2}}\times\sum_{t=0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{-r}\frac{d^i}{dt^i}\left(1+t^2\right)^{-r}dt\right]\frac{\Delta_t^i}{i!},$$

因为 $(1+t^2)^{-r}\frac{d^i}{dt^i}\left(1+t^2\right)^{-r}$对于偶阶导数是偶函数，对于奇阶导数是奇函数；再结合对称积分区间这一事实，奇数i时积分为零，因此我们得到

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q>1}=\frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG^2}}\times\sum_{i=0,\,i\in Evens}^{\infty}\left[(-1)^{\frac{i}{2}}\frac{i!}{(i/2)!}(r)_{\frac{i}{2}}^2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2r-\frac{1+i}{2})}{\Gamma(2r+i)}\right]\frac{\Delta_t^i}{i!},$$

其中 $()_i$ 是上升阶乘的 Pochhammer 符号，将求和变量从i改为k，令$i=2k$，并经过进一步的数学运算，我们得到

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q>1} = \frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2r-\frac{1}{2})}{\Gamma(2r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r)_k\left(2r-\frac{1}{2}\right)_k}{k!\left(r+\frac{1}{2}\right)_k}\left(-\frac{\Delta_t^2}{4}\right)^k,$$

根据高斯超几何函数${}_2F_1$ [25]的定义：

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{c_(k)}\frac{z^k}{k!},$$

方程（A.4）的闭式为

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q>1} = \frac{\sqrt{r\beta^{qG}}}{C^{qG2}}Beta\left(\frac{1}{2},2r-\frac{1}{2}\right) \times{}_2F_1\left(r,2r-\frac{1}{2},r+\frac{1}{2};-\beta^{qG}\frac{\Delta_u^2}{4r}\right), \quad (A.5)$$

将方程（A.5）改写为关于q和Δ_u的形式，即可得到方程（17）。

附录 B：当尾部密度q趋于1时，q-高斯束团的重叠积分趋于高斯分布的重叠积分

附录 B.1：轻尾 q-高斯束团

从方程（A.3）出发，将方程（8）和（9）中以$r=\frac{1}{1-q}$表示的C^{qG}和β^{qG}代入，得到

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q<1} = \frac{1}{Beta\left(\frac{1}{2},r+1\right)\sqrt{2r+3}\,\sigma_u^{qG}} \times\left(1-\sqrt{\frac{\Delta_u^2}{(2r+3)\sigma_u^{qG2}}}\right)\left(1-\frac{\Delta_u^2}{(2r+3)\sigma_u^{qG2}}\right)^{2r} \times{}_2F_1\left(-r,\frac{1}{2};r+\frac{2}{3};\frac{\left(1-\sqrt{\frac{\Delta_u^2}{(2r+3)\sigma_u^{qG2}}}\right)^2}{\left(1+\sqrt{\frac{\Delta_u^2}{(2r+3)\sigma_u^{qG2}}}\right)^2}\right).$$

由于$\lim_{q\to1}\left(\Omega_{qGu}(\Delta_u;q<1)\right)$等价于$\lim_{r\to\infty}\left(\Omega_{qGu}(\Delta_u;r)_{q<1}\right)$，并通过应用斯特林近似——imation for 伽马函数，利用 ${}_2F_1$ 定义，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}&\left(\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q<1}\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi e}\,\sigma_u^{qG}}\lim_{r\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{r+1}\left(2+\frac{3}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right.\\ &\times\left(1-\sqrt{\frac{\Delta_u^2}{(2r+3)\sigma_u^{qG2}}}\right)\left(1-\frac{\Delta_u^2}{(2r+3)\sigma_u^{qG2}}\right)^{2r}\\ &\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k(-r)_k}{\left(r+\frac{3}{2}\right)_k k!}\left(\frac{\left(1-\sqrt{\frac{\Delta_u^2}{(2r+3)\sigma_u^{qG2}}}\right)}{\left(1+\sqrt{\frac{\Delta_u^2}{(2r+3)\sigma_u^{qG}}}\right)^2}\right)^{2k}\right],\end{aligned}$$

应用极限后，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}&\left(\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q<1}\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi e}\,\sigma_u^{qG}}\sqrt{\frac{e}{2}}\exp\left(-\frac{\Delta_u^2}{4\sigma_u^{qG2}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)_k\frac{(-1)^k}{k!}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma_u^{qG}}\exp\left(-\frac{\Delta_u^2}{4\sigma_u^{qG2}}\right)\end{aligned} \quad (B.6)$$

附录 B.2：重尾 q-高斯束团

从方程 (A.5) 出发，将方程 (8) 和 (9) 中以 $r=\frac{1}{q-1}$ 表示的 C^{qG} 和 β^{qG} 代入，可得

$$\Omega_u^{qG}(\Delta_t;r)_{q>1} = \frac{Beta\left(\frac{1}{2},2r-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2r-3}\,\sigma_u^{qG}Beta\left(\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}\right)} \times{}_2F_1\left(r,2r-\frac{1}{2};r+\frac{1}{2};-\frac{\Delta_u^2}{4(2r-3)\sigma_u^{qG}}^2\right).$$

由于极限$\lim_{q\to1}\left(\Omega_{qGu}(\Delta_u;q>1)\right)$等价于极限$\lim_{r\to\infty}\left(\Omega_{qGu}(\Delta_u;r)_{q>1}\right)$，并对伽马函数应用斯特林近似，结合 ${}_2F_1$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}&\left(\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q>1}\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}\,\sigma_u^{qG}}\lim_{r\to\infty}\left[\left(2-\frac{3}{r}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(1-\frac{3}{2r}\right)^{3-2r}\right.\\ &\times\left(1-\frac{1}{r}\right)^{2r-1}\left(1-\frac{3}{4r}\right)^{2r-1}\left(1-\frac{1}{2r}\right)^{2r-\frac{1}{2}}\\ &\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r)_k\left(2r-\frac{1}{2}\right)_k}{r^k\left(r+\frac{1}{2}\right)_k k!}\left(-\frac{\Delta_u^2}{4\left(2-\frac{3}{r}\right)\sigma_u^{qG2}}\right)^k\right],\end{aligned}$$

取极限后，我们得到

$$\lim_{r\to\infty}\left(\Omega_u^{qG}(\Delta_u;r)_{q>1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}\,\sigma_u^{qG}}\frac{e^3 e}{\sqrt{2}e^2 e^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{\Delta_u^2}{4\sigma_u^{qG2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma_u^{qG}}\exp\left(-\frac{\Delta_u^2}{4\sigma_u^{qG2}}\right). \tag{B.7}$$

通过比较方程（B.6）和（B.7）中计算得到的极限与方程（12）中的高斯束团重叠积分，可得到方程（18）。

附录 C：具有不同束团尺寸的 q-高斯束团的卷积束流尺寸

根据方程（19），密度分别为 $q_1 = q_2 = q$ 且具有任意束团尺寸 $\sigma_1 u^{qG}$ 和 $\sigma_2 u^{qG}$ 的两个轻尾 q 高斯束流在零间距时的最大重叠积分为

$$\Omega_u^{qG}(0;q) = \frac{\sqrt{\beta_1^{qG}\beta_2^{qG}}}{C^{qG2}}\int e_q(-\beta_1^{qG}u^2)\,e_q(-\beta_2^{qG}u^2)\,du, \tag{C.8}$$

其中 β_1^{qG} 和 β_{qG2} 可由方程（9）确定。方程（C.8）在轻尾和重尾情况下的解可表示为

$$\Omega_u^{qG}(0;q<1) = \frac{1}{\sqrt{1-q}\sqrt{5-3q}\,\sigma_{max}^{qG}C^{qG2}} \times Beta\left(\frac{1}{2},\frac{2-q}{1-q}\right)\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{q-1};\frac{5-3q}{2-2q};\left(\frac{\sigma_{min}^{qG}}{\sigma_{min}^{qG}}\right)^2\right), \tag{C.9}$$

and

$$\Omega_u^{qG}(0;q>1) = \frac{1}{\sqrt{1-q}\sqrt{5-3q}\,\sigma_{2u}^{qG}C^{qG2}} \times Beta\left(\frac{1}{2},\frac{5-q}{2q-1}\right)\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{q-1};\frac{2}{q-1};1-\left(\frac{\sigma_{1u}^{qG}}{\sigma_{2u}^{qG}}\right)^2\right), \tag{C.10}$$

分别为，其中 $\sigma_{qG\,\text{最小值}}$ =最小值 $\left(\sigma_1^{qG}{}_u \quad \sigma_2^{qG}{}_u\right)$ 和 $\sigma_{qG\text{最大值}}$ =最大值 $\left(\sigma_1^{qG}{}_u \quad \sigma_2^{qG}{}_u\right)$。然后，将方程（C.9）和（C.10）代入方程（19），即可得到卷积束流尺寸：

$$\Sigma_u^{qG}(0;q<1) = \frac{\sigma_{max}^{qG}}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{q-1};\frac{5-3q}{2-2q};\left(\frac{\sigma_{min}^{qG}}{\sigma_{min}^{qG}}\right)^2\right)}, \tag{C.11}$$

and

$$\Sigma_u^{qG}(0;q>1) = \frac{\beta\left(\frac{1}{2},\frac{3-q}{2q-1}\right)}{\beta\left(\frac{1}{2},\frac{5-q}{2q-1}\right)} \times \frac{\sigma_{2u}^{qG}}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{q-1};\frac{2}{q-1};1-\left(\frac{\sigma_{1u}^{qG}}{\sigma_{2u}^{qG}}\right)^2\right)}. \tag{C.12}$$

参考文献

1. V. Shiltsev 和 F. Zimmermann，《现代物理评论》**93**，015006（2021）。doi:10.1103/RevModPhys.93.015006 2. P. Grafström 和 W. Kozanecki，《粒子与核物理进展》**81**，97（2015）。doi:10.1016/j.ppnp.2014.11.002 3. S. van der Meer，ISR 有效束流高度的校准。技术报告 CERN-ISR-PO-68-31，欧洲核子研究中心，日内瓦（1968）。https://cds.cern.ch/record/296752 4. P. J. Bryant 和 K. M. Potter，用于 ISR 亮度测量的束流位移校准。技术报告 CERN-ISR-ES-BOM- 82-15；ISR-ES-BOM-82-15，欧洲核子研究中心，日内瓦（1982）。https://cds.cern.ch/record/141458 5. A. Drees、Z. Xu、B. Fox 和 H. Huang，相对论重离子对撞机 2001—2002 年质子-质子运行期间游标扫描结果，载于*2003* 年粒子加速器会议论文集，俄勒冈州，第 1688 页（2003）。http://cds.cern.ch/record/748919 6. Drees、S. White，相对论重离子对撞机首次 250 GeV 质子运行的游标扫描结果，载于国际粒子加速器会议论文集，京都，第 MOPEC013 页（2010）。https://cds.cern.ch/record/1307872 7. A. Drees，相对论重离子对撞机第 13 次运行期间的游标扫描分析（质子-质子，255 GeV/束流）。技术报告 BNL-102438-2013-IR，C-A/AP/488（相对论重离子对撞机），布鲁克海文国家实验室（2013）。https://www.bnl.gov/isd/documents/83218.pdf 8. S. White、R. Alemany-Fernandez、H. Burkhardt、M. Lamont，大型强子对撞机首次光度扫描。技术报告 CERN-ATS-2010-096，载于国际粒子加速器会议论文集，京都，第 MOPEC014 页（欧洲核子研究中心，日内瓦，2010）。https://cds.cern.ch/record/1271694 9. ATLAS 合作组，《欧洲物理学杂志 C》**76**，653（2016）。doi:10.1140/epjc/s10052-016-4466-1 10. CMS 合作组，《欧洲物理学杂志 C》**81**，800（2021）。doi:10.1140/epjc/s10052-021-09538-2 11. M. Fitterer、G. Stancari、A. Valishev、R. Bruce、S. Papadopoulou、G. Papotti、D. Pellegrini、S. Redaelli、G. Trad、D. Valuch、G. Valentino、J. Wagner 和 C. Xu，共振激励对束流发射度和晕层粒子数演化的影响。技术报告

CERN-ACC-NOTE-2017-0037，欧洲核子研究中心，日内瓦（2017）。https://cds.cern.ch/record/2264616 12. H. Timko、P. Baudrenghien、J. E. Müller 和 E. Shaposhnikova，《2016年射频系统的运行与束流动力学方面》，载于第七届埃维昂*LHC*束流运行研讨会论文集，埃维昂莱班，第193页（2016）。https://cds.cern.ch/record/2293532 13. S. Papadopoulou、F. Antoniou、T. Argyropoulos、M. Fitterer、M. Hostettler 和 Y. Papaphilippou，《大型强子对撞机束团剖面的建模与测量》。技术报告 FERMILAB-CONF-17-155-AD；CERN-ACC-2017-329，载于国际粒子加速器会议论文集，哥本哈根，第2167页（欧洲核子研究中心，日内瓦，2017）。 doi:10.1088/1742-6596/874/1/012008 14. E. M. F. Curado 和 C. Tsallis，J. Phys. A. Math. Gen.**25**，1019（1992）。 doi:10.1088/0305-4470/25/4/038 15. S. Papadopoulou、F. Antoniou、T. Argyropoulos、M. Hostettler、Y. Papaphilippou 和 G. Trad，Phys. Rev. Accel. Beams**23**，101004（2020）。 doi:10.1103/PhysRevAccelBeams.23.101004 16. V. Balagura，Nucl. Instrum. Meth. **A654**，634（2011）。 doi:10.1016/j.nima.2011.06.007 17. C. Møller，Danish Sci. Soc. Math. Messag. **23**，1（1945）。 http://publ.royalacademy.dk/books/79/497?&lang=da 18. A.W. Chao、K.H. Mess、M. Tigner 和 F. Zimmermann 编，《加速器物理与工程手册》，第 2 版（世界科学出版社，新加坡，2013）。doi:10.1142/8543 19. V. Balagura，《欧洲物理学杂志 C》**81**，26 (2021)。 doi:10.1140/epjc/s10052-021-08837-y 20. C. Vignat 和 A. Plastino，Phys. A Stat. Mech. Its Appl.**388**，601 (2009)。 doi:10.1016/j.physa.2008.11.001 21. H. J. Hilhorst 和 G. Schehr，J. Stat. Mech. **2007**，06003 (2007)。 doi:10.1088/1742-5468/2007/06/P06003 22. Y. Sang 和 H. N. Lin，Mon. Not. R. Astron. Soc. **510**，1801 (2022)。 doi:10.1093/mnras/stab3600 23. H. A. Salih、K. I. Hassoon 和 R. A. Khamis，Phys. Plasmas**29**，23103 (2022)。doi:10.1063/5.0079661 24. N. Gupta、R. Johari、S. Kumar、S. B. Bhardwaj 和 S. Choudhry，J. Opt. **51**，749 (2022)。doi:10.1007/s12596- 021-00804-w 25. M. Abramowitz、I. A. Stegun 和 R. H. Romer，《数学函数手册：公式、图表和数学表格》（美国国家标准局，美国，1972）。doi:10.1119/1.15378