arXiv:2305.04041v1 [math.RA] 6 May 2023

四维复 Hom-结合二代数的分类、 α^k-导子和质心

Ahmed Zahari*法国米卢斯大学,
IRIMAS-D´数学系，18, rue des Fr`eres Lumi`
ere F-68093 米卢斯，法国。

摘要。本文的基本目标是研究 Hom-结合二代数的结构和代数簇。我们详细阐述了 $n \leq 4$ 维 Hom- 结合二代数的分类。此外，利用 Hom- 结合二代数的分类结果，我们刻画了低维 Hom-结合二代数的 α-导子和质心。此外，我们还从结合二代数的角度探讨了导子和质心的若干特征，并计算了低维结合二代数的质心。

AMS 学科分类: .

关键词：Hom-结合二代数、分类、导子、三元系。

谨以此文纪念玛丽-埃莱娜·TUILIER 教授。她是物理学教授，担任阿尔萨斯高等大学博士生院负责人，在我攻读博士学位期间给予了我精神和经济上的帮助。

1 引言

Hom-二结合代数 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 由一个向量空间、两个乘法和一个线性自映射构成。它可视为结合代数的一种变形，其中结合条件经由线性映射 α 扭曲；当 $\alpha = \mathrm{id}$ 时，Hom-结合二代数恰好退化为结合二代数。本文的核心重点是探究 Hom-结合二代数的结构。设 $\mathcal{A}$ 是一个 n 维 $\mathbb{K}$-线性向量空间，且令 $\{e_1, e2, \cdots, e_n\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一组基，其中 $\mathbb{K}$ 始终表示一个特征为零的代数闭域。 $\mathcal{A}$ 上由乘积 μ 和 λ 构成的 Hom-二代数结构由 $2n^3$ 个结构常数 γ_{ij}^k 和 δ_{ij}^k 确定，其中 $e_i \dashv e_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^k e_k$，$e_i \vdash e_j = \sum_{k=1}^n \delta_{ij}^k e_k$；此外还由 α 确定，它由 n^2 个结构常数 a_{ij} 给出，其中 $\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$。要求代数结构满足 Hom-二结合且含幺，由此得到 $k^{2n^3+n^2}$ 的一个子簇 $\mathcal{H}d_n$。A 中的基变换产生自然的输运作用

*电子邮箱：zaharymaths@gmail.com

于 $\mathcal{H}\mathrm{d}_n$ 上的 $\mathrm{GL}_n(\mathrm{k})$ 结构作用。因此，n 维 Hom-二代数的同构类与 $\mathrm{GL}_n(\mathrm{k})$ 在 $\mathcal{H}\mathrm{d}_n$ 上作用的轨道一一对应。

本文探讨分类问题，并提出一种计算分类结果的算法。我们将该算法应用于低维情形，得到了 Rikhsiboev [10] 给出的二维和三维复结合二代数的分类结果，并修订了 Rakhimov 和 Fiidov [13]所列的四维幂零二结合代数清单。在此框架下，A. Zahari 和 I. Bakayoko 研究了 BiHom-结合双代数的分类 [2]。A. Zahari 和 A. Makhlouf [1] 研究了二维和三维 Hom-结合二代数的分类，而三维 BiHom-结合代数和 BiHom-双代数的分类 [16] 由 A. Zahari 完成。此外，我们还将考察 Hom-结合二代数这一类代数，并建立低维 $\mathrm{n} \leq 4$情形下这些代数在同构意义下的分类。

本文结构如下。第一节介绍 Hom-结合二代数的基础知识，并给出若干新性质。

第二节讨论 Hom-结合二代数的结构。

第三节描述 Hom-二结合代数的代数簇，并介绍二维、三维和四维 Hom-结合二代数在同构意义下的分类。

第四节确定导子的一些新性质，并着重研究导子的分类。

最后，第五节讨论质心的分类。在这种情况下，导子和质心的概念显然受到有限维代数中相应概念的启发。质心代数在分类问题以及代数的各种应用中都发挥着关键作用。本文给出了二维、三维和四维 Hom-结合二代数的分类结果。所有所考虑的代数和向量空间均定义在特征为零的域 $\mathbb{K}$ 上。

2 Hom-结合二元代数的结构

定义 2.1. Hom-结合二代数是一个 4 元组（$\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha$），由一个线性空间$\mathcal{A}$、线性映射 $\dashv, \vdash : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 和 $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 构成，并满足对所有 $\mathrm{x,y,z} \in \mathcal{A}$，以下条件成立：

$$
\begin{aligned}
(x \dashv y) \dashv \alpha(z) &= \alpha(x) \dashv (y \dashv z), && (2.1)\\
(x \dashv y) \dashv \alpha(z) &= \alpha(x) \dashv (y \vdash z), && (2.2)\\
(x \vdash y) \dashv \alpha(z) &= \alpha(x) \vdash (y \dashv z), && (2.3)\\
(x \dashv y) \vdash \alpha(z) &= \alpha(x) \vdash (y \vdash z), && (2.4)\\
(x \vdash y) \vdash \alpha(z) &= \alpha(x) \vdash (y \vdash z). && (2.5)
\end{aligned}
$$

我们称 $\mathcal{A}$ 的 α（按此顺序）为结构映射。

此外，如果 α 关于 $\dashv$ 和 $\vdash$ 是一个自同态，那么 $\mathcal{A}$ 被称为乘法保持的 Hom-二代数：

$$\alpha(x \dashv y) = \alpha(x) \dashv \alpha(y) \quad \text{and} \quad \alpha(x \vdash y) = \alpha(x) \vdash \alpha(y) \tag{2.6}$$

对于 $\mathcal{A}$ 中的 x、y、z。

由于我们只研究乘法 Hom-结合二代数，为简便起见，称它们为 Hom-二结合代数。我们用 $\mathcal{H}\mathrm{d}$ 表示所有 Hom-结合二代数的集合。

同态的核和像是自然定义的。代数结构理论中的一个基本问题是分类问题。分类意味着描述基变换线性变换下的轨道，并列出轨道的代表元。

定义 2.2. 设 $(\mathcal{A}_1, \dashv_1, \vdash_1, \alpha_1)$ 和 $(\mathcal{A}_2, \dashv_2, \vdash_2, \alpha_2)$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的 Hom-结合二代数。那么，Hom-结合二代数 $\mathcal{A}_1$ 到 $\mathcal{A}_2$ 的同态是一个 $\mathbb{K}$-线性映射 ϕ: $\mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$，满足 $\phi : \mathcal{A}_1 \longrightarrow {}_2$ 使得

$$\phi(x \dashv_1 y) = \phi(x) \dashv_2 \phi(y), \phi(x \vdash_1 y) = \phi(x) \vdash_2 \phi(y), \phi \circ \alpha_1(x) = \alpha_2 \circ \phi(x), \tag{2.7}$$

对所有 $x, y \in \mathcal{A}$ 均成立。双射同态称为同构。

定义 2.3. $\mathcal{A}$ 中的横杠单位元是一个元素 $e \in \mathcal{A}$，满足 $x \dashv e = e \vdash x = \alpha(x) = x.$

定义 2.4. Hom-dendrifom代数是一个四元组 $(\mathcal{A}, \prec, \succ, \alpha)$，由向量空间 $\mathcal{A}$以及其上的运算 $\prec, \succ$: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$和 α: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$构成，这些运算是满足以下条件的线性映射:

$$\begin{aligned} &(x \prec y) \prec \alpha(z) = \alpha(x) \prec (y \prec z + y \succ z), \\ &\alpha(x) \succ (y \succ z) = (x \prec y + x \succ y) \prec \alpha(z), \\ &(x \succ y) \prec \alpha(z) = \alpha(x) \succ (y \prec z), \end{aligned} \tag{2.8}$$

对于所有 x、y、$z \in \mathcal{A}$。

例 2.5. 事实上，通过定义向量$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$的乘积和映射，可以在具有基 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$的 n 维向量空间 V 上构造 Hom-dendrifom 代数结构。在 2 维情况下，我们有:

$$e_2 \prec e_1 = e_1, e_2 \prec e_2 = e_1, e_1 \succ e_2 = e_1, e_2 \succ e_1 = e_1, e_2 \succ e_2 = e_1, \alpha(e_2) = e_1.$$

在一个 3 维向量空间上，分别定义如下 Hom-dendrifom代数结构:

$$e_1 \prec e_1 = e_1, , e_3 \prec e_2 = e_3, e_3 \prec e_3 = e_3, e_2 \succ e_3 = e_3, e_3 \succ e_3 = e_3, \alpha(e_1) = e_1.$$

定义 2.6. Hom-Zinbiel代数是一个三元组 $(R, \circ, \alpha)$，由向量空间 A 构成，其上 天天中彩票一等奖 $*$: $A \otimes A \longrightarrow A$ 和 α: $A \longrightarrow A$ 是满足条件的线性映射

$$(x \circ y) \circ \alpha(z) = \alpha(x) \circ (y \circ z) + \alpha(x) \circ (z \circ y) \tag{2.9}$$

对于 x、y、$y \in \mathcal{A}$。

例 2.7. 设 $\{e_1, e_2\}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上二维乘法线性空间 $\mathcal{A}$ 的一组基。其上的下列乘法和线性映射 α 定义如下:

1. $e_1 \circ e_2 = e_1, e_2 \circ e_2 = e1, \quad \alpha(e_1) = e1, \quad \alpha(e_2) = e_2$. 2. $e_1 \circ e_1 = e_1, e_2 \circ e_2 = e1, \quad \alpha(e_1) = e1, \quad \alpha(e_2) = e_1 + e_2$. 3. $e_1 \circ e_1 = e_2, e_2 \circ e_1 = -e2, \quad \alpha(e_1) = e1, \quad \alpha(e_2) = e_1 + e_2.$

命题 2.8. 设 R 是一个 Hom-Zinbiel代数，且令 $x \prec y = x \circ y$，$x \succ y = y \circ x$，$x, y \in R$。那么 $(R, \prec, \succ, \alpha)$ 是一个 Hom-dendriform代数。反之，交换Hom-dendriform代数（即满足 $x \prec y = y \succ x$ 的 Hom-dendriform代数）是一个 Hom-dendriform代数。

证明. 事实上，(i) $(x \prec y) \prec \alpha(z) = (x \circ y) \circ \alpha(z)$。但是 $\alpha(x) \prec (y \prec z) + \alpha(x) \prec (y \succ y) = \alpha(x) \circ (y \circ z) + \alpha(x) \circ (z \circ y)$。因此，(i) 成立。
(ii) $(x \succ y) \prec \alpha(z) = (y \circ x) \circ \alpha(z)$ 以及 $\alpha(x) \succ (y \prec z) = (y \circ z) \circ \alpha(x)$。然而，根据Hom-Zinbiel代数的公理，这两个表达式是相同的。
(iii) $(x \prec y) \succ \alpha(z) + (x \succ y) \succ \alpha(z) = \alpha(z) \circ (x \circ y) + \alpha(z) \circ (y \circ x)$，其等于 $(z \circ y) \circ \alpha(z) = \alpha(x) \succ (y \succ z)$。事实上，(iii) 也成立。□

命题 2.9。设 $(R, \cdot, \alpha)$ 为 Hom-Zinbiel代数。则，对称化乘积 $x \cdot y = x \circ y + y \circ x$ 是 Hom-结合的（即在该对称化乘积下，R 成为一个 Hom-结合且交换的代数。

证明。事实上，

$$\begin{aligned}(x \cdot y)\alpha(z) &= (x \circ y + y \circ x)\alpha(z)\\ &= (x \circ y + y \circ x) \circ \alpha(z) + \alpha(z) \circ (x \circ y + y \circ x) \circ \alpha(z)\\ &= (x \circ y) \circ \alpha(z) + (y \circ x) \circ \alpha(z) + \alpha(z) \circ (x \circ y) + (y \circ x) \circ \alpha(z)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha(x)(y \cdot z) &= \alpha(x)(y \circ z + z \circ y)\\ &= \alpha(x) \circ (y \circ z + z \circ y) + (y \circ z + z \circ y)\alpha(x)\\ &= \alpha(x) \circ (y \circ z) + \alpha(x) \circ (z \circ y) + (y \circ z) \circ \alpha(x) + (z \circ y) \circ (x).\end{aligned}$$

现在，如果考虑 Hom-Zinbiel 恒等式及其推论 $(y \circ x) \circ \alpha(z) = (y \circ z)\alpha(z)$，则得到所需的如下等式 $(x \cdot y)\alpha(z) = (x \cdot y)\alpha(z)$。 □

定义 2.10。Hom-双翅代数是一个四元组 $(Z, \prec, *, \alpha)$，由一个向量空间 $\mathcal{A}$以及运算 $\prec, *$: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$和 α: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$组成，其中这些运算是满足以下条件的线性映射

$$(x * y) \succ \alpha(z) = \alpha(x) \succ (y \succ z), \quad (x * y) * \alpha(z) = \alpha(x) * (y * z) \tag{2.10}$$

对于所有 x, $y, z \in \mathcal{A}$。类似地，右 Hom-双翅代数由以下关系定义

$$(x \prec y) \prec \alpha(z) = \alpha(x) \prec (y * z), \quad (x * y) * \alpha(z) = \alpha(x) * (y * z), \tag{2.11}$$

对所有的 x、y、$z \in \mathcal{A}$。

例 2.11. 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 $\mathbb{K}$ 上一个 3 维乘法保持的线性空间 A 的基。以下乘法和线性映射 α 在 $\mathcal{A}$ 上定义了一个 Hom-双翅代数的结构:

1. $e_1 * e_2 = e_3, e_3 * e_2 = e_3, e_3 * e_3 = e_3, e_1 \prec e_2 = e_3, e_2 \prec e_3 = e_3, \alpha(e_1) = e_1.$

2. $e_1 * e_1 = e_1, e_1 * e_2 = e_3, e_3 * e_2 = e_3, e_3 * e_3 = e_3, e_1 \prec e_2 = e_3, e_2 \prec e_3 = e_3, \alpha(e_1) = e_1.$

命题 2.12. 设 $(\mathcal{A}, *, \succ)$ 是一个双翅代数，且 α: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是一个双翅代数端同态。因此，$\mathcal{A}_\alpha = (\mathcal{A}, *_\alpha, \succ_\alpha, \alpha)$，其中 $*_\alpha = \alpha \circ *$ 且 $\succ_\alpha = \alpha \circ \succ$，是一个 Hom-双翅代数。

证明。注意到

$$\begin{aligned}(x *_\alpha y) \succ_\alpha \alpha(z) &= \alpha^2((x * y) \succ z)\\ \alpha(x) \succ_\alpha (y \succ_\alpha z) &= \alpha^2(x \succ (y \succ z))\\ (x *_\alpha y) *_\alpha \alpha(z) &= \alpha^2((x * y) * z)\\ \alpha(x) *_\alpha (y *_\alpha z) &= \alpha^2(x * (y * z)).\end{aligned}$$

同样，

$$
\begin{aligned}
(x \prec_\alpha y) \prec_\alpha \alpha(z) &= \alpha^2((x \prec y) \prec z) \\
\alpha(x) \prec_\alpha (y *_\alpha z) &= \alpha^2(x \prec (y * z)) \\
(x *_\alpha y) *_\alpha \alpha(z) &= \alpha^2((x * y) * z) \\
\alpha(x) *_\alpha (y *_\alpha z) &= \alpha^2(x * (y * z)).
\end{aligned}
$$

因此，恒 等式 (2.10) 和 (2.11) 显然可由 $(\mathcal{A}, *, \succ)$ 满足的恒等式推出。 □

定义 2.13. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 是一个 Hom-结合二代数。若存在一个结合二代数 (A, $\dashv', \vdash'$)，使得 $\dashv' = \alpha \circ \dashv$ and $\vdash' = \alpha \circ \vdash$，则称 $(\mathcal{A}, \dashv', \vdash')$ 是 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 的解扭。

命题 2.14. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 是一个 n 维 Hom-结合双代数，且 $\Phi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个可逆线性映射。那么，存在一个同构，其对应的 n 维 Hom-结合双代数为 $(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \Phi\alpha\Phi^{-1})$，其中 $\dashv' = \Phi \circ \dashv \circ (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})$ 且 $\vdash' = \Phi \circ \vdash \circ (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})$。

证明。我们证明，对于任意可逆线性映射 $\Phi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，$(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \Phi\alpha\Phi^{-1})$ 都是 Hom-结合二代数。

$$
\begin{aligned}
(x \dashv' y) \dashv' \Phi\alpha\Phi^{-1}(z) &= (\Phi \circ (\Phi^{-1}(x) \dashv \Phi^{-1}(y))) \dashv' \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}(z) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1}(x) \dashv \Phi^{-1}(y)) \dashv \alpha \circ \Phi^{-1}(z) \\
&= \Phi \circ \Phi^{-1}((x) \dashv (y)) \dashv \alpha(z) \\
&= \Phi \circ \Phi^{-1}(\alpha(x) \dashv (y)) \vdash z) \\
&= \Phi \circ (\alpha\Phi^{-1}(x) \dashv \Phi^{-1}(y)) \vdash \Phi^{-1}(z)) \\
&= \Phi \circ ((\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(\Phi \otimes \Phi)\alpha\Phi^{-1}(x) \dashv \Phi^{-1}(y)) \vdash \Phi^{-1}(z)) \\
&= \Phi \circ (\Phi \circ \alpha\Phi^{-1}(x)) \dashv \Phi \circ (\Phi^{-1}(y) \vdash \Phi^{-1}(z)) \\
&= \Phi \circ \alpha\Phi^{-1}(x) \dashv' (y \vdash' z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x \vdash' y) \dashv' \Phi\alpha\Phi^{-1}(z) &= \Phi \circ (\Phi^{-1}(x) \vdash \Phi^{-1}(y)) \dashv' \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}(z) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1}(x) \vdash \Phi^{-1}(y)) \dashv \alpha \circ \Phi^{-1}(z) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1}((x \vdash y) \dashv \alpha(z))) \\
&= \Phi \circ \Phi^{-1}((\alpha(x) \vdash (y \vdash z))) \\
&= \Phi \circ (\alpha\Phi^{-1}(x) \vdash (\Phi^{-1}(y) \dashv \Phi^{-1}(z))) \\
&= \Phi \circ ((\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(\Phi \otimes \Phi)\alpha\Phi^{-1}(x) \vdash (\Phi^{-1}(y) \dashv \Phi^{-1}(z))) \\
&= \Phi \circ ((\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}) \circ \Phi\alpha\Phi^{-1}(x)) \vdash \Phi \circ (\Phi^{-1}(y) \dashv \Phi^{-1}(z))) \\
&= \Phi \circ \alpha\Phi^{-1}(x) \vdash' (y \dashv' z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x \vdash' y) \vdash' \Phi\alpha\Phi^{-1}(z) &= \Phi \circ (\Phi^{-1}(x) \vdash \Phi^{-1}(y)) \vdash' \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}(z) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1}(x) \vdash \Phi^{-1}(y)) \vdash \alpha \circ \Phi^{-1}(z) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1}((x \vdash y) \vdash \alpha(z))) \\
&= \Phi \circ \Phi^{-1}((x \dashv y) \vdash z))) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1}(x) \dashv (\Phi^{-1}y)) \vdash \Phi^{-1}(z))) \\
&= \Phi \circ ((\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(\Phi \otimes \Phi) \circ (\Phi^{-1}(x) \dashv \Phi^{-1}(y)) \vdash \Phi^{-1}(z))) \\
&= \Phi \circ ((\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}) \circ \Phi(\Phi^{-1}(x) \dashv \Phi^{-1}(y)) \vdash \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}(z))) \\
&= (x \dashv' y) \vdash \Phi \circ \alpha\Phi^{-1}(z).
\end{aligned}
$$

从这一角度来看，$(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \Phi\alpha\Phi^{-1})$ 是一个 Hom-结合二代数。它也是乘法保持的。

确实，对于 α

$$\begin{aligned}
\Phi\alpha\Phi^{-1} \circ (x \dashv' y) &= \Phi\alpha\Phi^{-1}\Phi \circ x \dashv (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(y) \\
&= \Phi\alpha \circ x \dashv (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(y) \\
&= \Phi\alpha \circ \Phi^{-1}(x) \dashv \Phi^{-1}(y) \\
&= \Phi \circ (\alpha\Phi^{-1}(x) \dashv \alpha\Phi^{-1}(y)) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(\Phi \otimes \Phi)(\alpha\Phi^{-1}(x) \dashv \alpha\Phi^{-1}(y)) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(\Phi\alpha\Phi^{-1}(x) \dashv \alpha\Phi\Phi^{-1}(y)) \\
&= \Phi\alpha\Phi^{-1}(x) \dashv' \Phi\alpha\Phi^{-1}(y).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\Phi\alpha\Phi^{-1} \circ (x \vdash' y) &= \Phi\alpha\Phi^{-1}\Phi \circ x \vdash (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(y) \\
&= \Phi\alpha \circ x \vdash (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(y) \\
&= \Phi\alpha \circ \Phi^{-1}(x) \vdash \Phi^{-1}(y) \\
&= \Phi \circ (\alpha\Phi^{-1}(x) \vdash \alpha\Phi^{-1}(y)) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(\Phi \otimes \Phi)(\alpha\Phi^{-1}(x) \vdash \alpha\Phi^{-1}(y)) \\
&= \Phi \circ (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1})(\Phi\alpha\Phi^{-1}(x) \vdash \alpha\Phi\Phi^{-1}(y)) \\
&= \Phi\alpha\Phi^{-1}(x) \vdash' \Phi\alpha\Phi^{-1}(y).
\end{aligned}$$

因此， $\Lambda : (\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha) \to (\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \Phi\alpha\Phi^{-1})$ 是一个 Hom-结合二代数态射，因为$\Phi \circ \dashv = \Phi \circ \dashv \circ (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}) \circ (\Phi \otimes \Phi) = \dashv' \circ (\Phi \otimes \Phi)$ 且 $(\Phi\alpha\Phi^{-1}) \circ \Phi = \Phi \circ \alpha$。 □

命题 2.15. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 Hom-结合二代数。
设 $(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \Phi\alpha\Phi^{-1})$ 是命题 2.14 中所述的与其同构的 Hom-结合二代数。如果 ψ 是 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 的自同构，则 $\Phi\psi\Phi^{-1}$ 是 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \Phi\alpha\Phi^{-1})$ 的自同构。

证明。注意到 $\gamma = \Phi\alpha\Phi^{-1}$。我们有

$$\Phi\psi\Phi^{-1}\gamma = \Phi\psi\Phi^{-1}\Phi\alpha\Phi^{-1} = \Phi\psi\alpha\Phi^{-1} = \Phi\alpha\psi\Phi^{-1} = \Phi\alpha\Phi^{-1}\Phi\psi\Phi^{-1} = \gamma\Phi\psi\Phi^{-1}.$$

对于任意的 $x, y \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
\Phi\psi\Phi^{-1} \circ (\Phi(x) \dashv' \Phi(y)) &= \Phi\psi\Phi^{-1} \circ \Phi \circ (x \dashv y) \\
&= \Phi \circ \psi \circ (x \dashv y) \\
&= \Phi \circ (\psi(x) \dashv \psi(y)) \\
&= \Phi \circ \psi(x) \dashv' \Phi \circ \psi(y)) \\
&= \Phi\psi\Phi^{-1}\Phi(x) \dashv' \Phi\psi\Phi^{-1}\Phi(y)
\end{aligned}$$

由此可得,

$$\begin{aligned}
\Phi\psi\Phi^{-1} \circ (\Phi(x) \vdash' \Phi(y)) &= \Phi\psi\Phi^{-1} \circ \Phi \circ (x \vdash y) \\
&= \Phi \circ \psi \circ (x \vdash y) \\
&= \Phi \circ (\psi(x) \vdash \psi(y)) \\
&= \Phi \circ \psi(x) \vdash' \Phi \circ \psi(y)) \\
&= \Phi\psi\Phi^{-1}\Phi(x) \vdash' \Phi\psi\Phi^{-1}\Phi(y)
\end{aligned}$$

根据定义， $\Phi\psi\Phi^{-1}$ 是（$\mathcal{A}$、$\dashv'$、$\vdash'$、$\Phi\alpha\Phi^{-1}$）的自同构。 □

3 低维分类

令 $\mathcal{H}$d$_n$(K) 表示域 $\mathcal{A}$ 上 n 维 Hom-结合二代数的簇。若$\mathcal{A}$ 是一个 n 维代数，则任意两个元素 x 和 y 的乘积都可表示为基元素 {e$_1$,e$_2$,e3,$\cdots$,e$_n$} 的乘积。回顾一下，$\mathcal{A}$ 上的 Hom-二结合结构可由两个双线性映射定义： $\dashv$: $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ 表示左乘积，$\dashv$: $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ 表示左乘积 $\vdash$，以及 α: $\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ 表示一个线性映射；它们均满足上述恒等式。此时，Hom-结合二代数 $\mathcal{D}$ 可视为四元组 $\mathcal{D}=(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\alpha)$，其中 $\dashv$、$\vdash$和 α 是 $\mathcal{A}$上的 Hom-结合二代数律。

我们用 γ_{ij}^{k}、 $\delta^{q}{}_{st}$和 a$_{ij}$表示 Hom-结合二代数相对于 $\mathcal{A}$ 的基 e$_1$, e$_2$, ...e$_n$的结构常数，其中 i、j、k、s、t、q = 1、2、3、.....、n。
因此， $\mathcal{H}$d 可视为 $2n^3+n^2$ 维仿射空间中的一个闭子集，由关于结构常数 γ_{ij}^{k}、 $\delta^{q}{}_{st}$ 和 a$_{ji}$ 的以下多项式方程组确定：

设 {e$_1$,e$_2$,e3,$\cdots$,e$_n$} 是 n 维 Hom-结合二代数 $\mathcal{A}$ 的一组基。基向量的乘积记为

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\gamma_{ij}^{p}a_{qk}\gamma_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\gamma_{jk}^{q}\gamma_{pq}^{r}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\gamma_{ij}^{p}a_{qk}\gamma_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\delta_{jk}^{q}\gamma_{pq}^{r} =, \tag{3.2}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\delta_{ij}^{p}a_{qk}\gamma_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\gamma_{jk}^{q}\delta_{pq}^{r}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\gamma_{ij}^{p}a_{qk}\delta_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\gamma_{jk}^{q}\delta_{pq}^{r}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\delta_{ij}^{p}a_{qk}\delta_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\delta_{jk}^{q}\delta_{pq}^{r}. \tag{3.5}$$

我们寻求所有二维 Hom-结合二代数，考虑由其若尔当标准形给出的两类态射。这意味着它们由以下矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \quad\text{and}\quad \begin{pmatrix} a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}.$$

通过与上一节类似的计算，我们得到如下分类。

定理 3.1. 每个 2 维复 Hom-结合二代数都同构于以下两两不同构的 Hom-结合二代数之一 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\alpha)$，其中 $\dashv,\vdash$ 分别为左乘积和右乘积， α 为结构映射。

$$\mathcal{H}d_2^1: \begin{array}{llll} e_1\dashv e_1=e_1, & e_2\dashv e_1=e_2, & e_1\vdash e_1=e_1, & e_2\vdash e_1=e_1, \quad \alpha(e_1)=e_1,\\ e_1\dashv e_2=e_1, & e_2\dashv e_2=e_2, & e_1\vdash e_2=e_2, & e_2\vdash e_2=e_2, \quad \alpha(e_2)=e_2.\end{array}$$

$$\mathcal{H}d_2^2: \quad e_1\dashv e_2=e_2, e_2\dashv e_1=e_1, e_1\vdash e_1=e_1, e_2\vdash e_1=e_1, \quad \alpha(e_2)=e_1.$$

$$\mathcal{H}d_2^3: \begin{array}{ll} e_2\dashv e_2=-\frac{e_1}{2}-e_2, & \\ e_2\vdash e_1=e_1, & e_2\vdash e_2=-e_1-e_2, \end{array} \quad \alpha(e_1)=-e_1, \quad \alpha(e_2)=e_1+e_2.$$

$\mathcal{H}d_2^4$: $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_1 \vdash e_2 = e_1$, $\alpha(e_1) = e_1$,
$e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_2$, $e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_2$. $\alpha(e_2) = e_1 + e_2$.

$\mathcal{H}d_2^5$: $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_1 = e_1$, $\alpha(e_2) = e_1$.
$e_2 \dashv e_1 = e_1$,

$\mathcal{H}d_2^6$: $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_1 = e_1$, $\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$.
$e_2 \dashv e_2 = e_2$, $e_2 \vdash e_2 = e_1$,

$\mathcal{H}d_2^7$: $e_1 \dashv e_1 = e_1 + e_2, e_1 \vdash e_1 = e_1$, $e_1 \vdash e_2 = e_1$, $\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$.

$\mathcal{H}d_2^8$: $e_1 \dashv e_2 = e_1, e_2 \dashv e_1 = e_1, e_2 \dashv e_2 = e_1, e_2 \vdash e_2 = e_1$, $\alpha(e_2) = e_1$.

$\mathcal{H}d_2^9$: $e_1 \dashv e_2 = ae_1$, $e_2 \vdash e_1 = fe_1$, $\alpha(e_1) = e_1$,
$e_2 \dashv e_2 = be_1 + ce_2$, $e_2 \vdash e_2 = ge_1 + ke_2$, $\alpha(e_2) = e_1 + e_2$.

证明。设 $\mathcal{A}$ 为一个二维向量空间。为了确定 $\mathcal{A}$ 上的 Hom-结合二代数结构，我们考虑关于 Hom-二结合运算的 $\mathcal{A}$。

令 $\mathcal{H}_2' = (\mathcal{A}, \vdash, \alpha)$ 为该代数

$$e_1 \vdash e_1 = e_1, \quad e_1 \vdash e_2 = e_2, e_2 \vdash e_1 = e_1, e_2 \vdash e_2 = e_2, \quad \alpha(e_1) = e_1, \quad \alpha(e_2) = e_2.$$

$\mathcal{A}$ 中的第二种乘法运算 $\dashv$ 表示如下：

$$e_1 \dashv e_1 = a_1e_1 + a_2, e_1 \dashv e_2 = a_3e_1 + a_4e_2, e_2 \dashv e_1 = a_5e_1 + a_6e_2, e_2 \vdash e_2 = a_7e_1 + a_8e_2.$$

现在，验证 Hom-结合双代数公理，可得系数 a_i 的若干常数，其中 $i = 1, 2, \ldots, 8$。

应用 $(e_1 \dashv e_1) \vdash \alpha(e_1) = \alpha(e_1) \vdash (e_1 \vdash e_1)$，可得 $(a_1e_1 + a_2e_2) \vdash e_1 = e_1 \vdash e_1$。于是，$a_1e_1 = e_1$。因此 $a_1 = 1$。

验证 $(e_1 \vdash e_1) \dashv \alpha(e_1) = \alpha(e_1) \vdash (e_1 \dashv e_1)$，可得 $(e_1 + a_2e_2) \vdash e_1 = e_1 \vdash e_1$。我们有 $e_1 + a_2e_2 = e_1$。因此得到 $a_2 = 0$。

考虑 $(e_1 \dashv e_2) \vdash \alpha(e_1) = \alpha(e_1) \vdash (e_2 \vdash e_1)$。这意味着 $(a_3e_1 + a_4e_2) \dashv e_1 = e_1 \dashv e_1$。因此，$a_3 = 1$ 和 $a_4 = 0$。

接下来考虑关系 $(e_2 \vdash e_1) \vdash \alpha(e_2) = \alpha(e_2) \vdash (e_1 \dashv e_2)$。因此，$a_3 = 0$ 和 $a_4 = 1$。

考虑 $(e_2 \dashv e_1) \vdash \alpha(e_2) = \alpha(e_2) \vdash (e_1 \vdash e_2)$。这意味着 $(a_5e_1 + a_6e_2) \vdash e_2) = e_2 \vdash e_2,$。因此，$a_5 = 0$ 和 $a_6 = 1$。

最后，我们应用 $(e_2 \dashv e_2) \vdash \alpha(e_2) = \alpha(e_2) \vdash (e_2 \vdash e_2)$。我们得到 $(a_7e_1 + a_8e_2) \vdash e_2 = e_2 \vdash e_2$，并得到 $a_7 = 0$ 和 $a_8 = 1$。
对所有其他情形的验证得出了上述约束条件。

如果 $a_3 = 1$ 和 $a_4 = 0$，那么右乘积和左乘积重合，我们得到 Hom-结合拟代数。

如果 $a_3 = 0$ 和 $a_4 = 1$，我们得到 Hom-结合二代数 $\mathcal{H}d_2^1$。定理 3.1 列出的其他 Hom-结合二代数，可以通过对上述观察稍作修改而得到。□

为了寻找所有三维 Hom-结合二代数，我们考虑由若尔当标准形给出的两类态射。这意味着它们可由以下矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Usi进行与上一节类似的计算，我们得到如下分类 n.

定理 3.2. 每个三维乘性 Hom-结合二代数都同构于以下两两不同构的 Hom-结合二代数之一（$\mathcal{A}$、$\dashv$、$\vdash$、α），其中 $\dashv$、$\vdash$ 分别为左乘积和右乘积，α 为结构映射。

$$\mathcal{H}d_3^1: \begin{array}{llll} e_2 \dashv e_2 = e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_1, & e_2 \vdash e_2 = e_1, & e_3 \vdash e_3 = e_1, \\ e_2 \dashv e_3 = e_1, & e_3 \dashv e_3 = e_2, & e_2 \vdash e_3 = e_1, & \alpha(e_2) = e_1. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_3^2: \begin{array}{llll} e_2 \dashv e_1 = e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_1, & e_2 \vdash e_2 = e_1, & e_3 \vdash e_3 = e_1, \\ e_2 \dashv e_3 = e_1, & e_3 \dashv e_3 = e_2, & e_2 \vdash e_3 = e_2, & \alpha(e_2) = e_1. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_3^3: \begin{array}{lll} e_2 \dashv e_2 = e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_1, & e_2 \vdash e_2 = e_1, \\ e_2 \dashv e_3 = e_1, & e_3 \dashv e_3 = e_1, & e_2 \vdash e_3 = e_1, \end{array} \quad \alpha(e_2) = e_1.$$

$$\mathcal{H}d_3^4: \begin{array}{llll} e_2 \dashv e_2 = e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_1, & e_2 \vdash e_2 = e_1, & e_3 \vdash e_3 = e_1, \\ e_2 \dashv e_3 = e_1, & e_3 \dashv e_3 = e_1, & e_2 \vdash e_3 = e_1, & \alpha(e_1) = e_1. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_3^5: \begin{array}{ll} e_1 \dashv e_1 = e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_2, \\ e_2 \dashv e_2 = e_2, & e_1 \vdash e_1 = e_1, \end{array} \quad e_2 \vdash e_2 = e_2, \quad \alpha(e_1) = e_1.$$

$$\mathcal{H}d_3^6: \begin{array}{llll} e_1 \dashv e_2 = e_1, & e_2 \dashv e_3 = e_1, & e_2 \vdash e_1 = e_1, & e_3 \vdash e_2 = e_3, \\ e_2 \dashv e_1 = e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_3, & e_2 \vdash e_2 = e_1, & e_3 \vdash e_3 = e_1, \\ e_2 \dashv e_2 = e_1, & e_1 \vdash e_2 = e_1, & e_2 \vdash e_3 = e_3, & \alpha(e_2) = e_1. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_3^7: \begin{array}{llll} e_2 \dashv e_2 = e_2, & e_3 \dashv e_3 = e_3, & e_2 \vdash e_3 = e_1, & e_3 \vdash e_3 = e_1, \\ e_2 \dashv e_3 = e_1, & e_2 \vdash e_2 = e_2, & e_3 \vdash e_2 = e_1, & \alpha(e_1) = e_1. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_3^8: \begin{array}{ll} e_2 \dashv e_2 = e_2, & e_2 \vdash e_2 = e_2, \\ e_2 \dashv e_3 = e_2, & e_2 \vdash e_3 = e_2, \end{array} \quad e_3 \vdash e_2 = e_1, \quad \alpha(e_1) = e_1.$$

$$\mathcal{H}d_3^9: \begin{array}{lll} e_2 \dashv e_2 = e_2, & e_2 \vdash e_2 = e_2, & e_3 \vdash e_2 = e_1, \\ e_2 \dashv e_3 = e_2, & e_2 \vdash e_3 = e_2, & e_3 \vdash e_3 = e_3, \end{array} \quad \alpha(e_1) = e_1.$$

$$\mathcal{H}d_3^{10}: \begin{array}{lll} e_1 \dashv e_2 = e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_3, & \\ e_2 \dashv e_1 = e_1, & e_1 \vdash e_2 = e_1, & e_2 \vdash e_3 = e_3, \\ e_2 \dashv e_3 = e_1, & e_2 \vdash e_2 = e_1, & e_3 \vdash e_2 = e_1, \end{array} \quad \alpha(e_2) = e_1.$$

$$\mathcal{H}d_3^{11}: \begin{array}{llll} e_1 \dashv e_2 = (-1)^{2/3} e_1, & e_2 \dashv e_3 = e_1 + d e_3, & e_1 \vdash e_2 = (-1)^{2/3} e_1, & e_3 \vdash e_2 = e_1 + e_3, \\ e_2 \dashv e_1 = a e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_1 + (-1)^{2/3} e_3, & e_2 \vdash e_1 = f e_1, & e_3 \vdash e_3 = \frac{i}{\sqrt{3}} e_1, \\ e_2 \dashv e_2 = b e_1 + c e_3, & e_3 \dashv e_3 = \frac{i}{\sqrt{3}} e_1, & e_2 \vdash e_2 = e_1 + g(-1)^{2/3} e_3, & \alpha(e_2) = e_1. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_3^{12}: \begin{array}{llll} e_1 \dashv e_2 = e_1, & e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3, & e_1 \vdash e_2 = e_1, & e_2 \vdash e_3 = e_1 + e_3, \\ e_2 \dashv e_1 = e_1, & e_3 \dashv e_2 = e_1 + e_3, & e_2 \vdash e_1 = e_1, & e_3 \vdash e_2 = e_1 + e_3, \\ e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3, & e_3 \dashv e_3 = e_3, & e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3, & \alpha(e_2) = e_1. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_3^{13}:\ \begin{array}{llll} e_1\dashv e_1=(-1)^{1/3}e_2, & e_3\dashv e_1=be_2, & e_1\vdash e_1=(-1)^{1/3}e_2, & \alpha(e_1)=e_1,\\ e_1\dashv e_3=ae_2, & e_3\dashv e_3=\frac{(-1)^{1/3}}{\sqrt{3}}ie_2, & e_1\vdash e_3=ce_1, & \alpha(e_2)=e_2,\\ & & e_3\vdash e_1=\frac{(-1)^{1/3}}{\sqrt{3}}ie_2, & \alpha(e_3)=e_3. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_3^{14}:\ \begin{array}{lll} e_1\dashv e_1=e_1+a(-1)^{2/3}e_3, & e_1\vdash e_1=e_1+d(-1)^{2/3}e_3, & e_3\vdash e_1=e_1+h(-1)^{2/3}e_3,\\ e_1\dashv e_3=be_3, & e_1\vdash e_3=e_1, & e_3\vdash e_3=e_1+\frac{i}{\sqrt{3}}e_3,\\ e_3\dashv e_1=\frac{i}{\sqrt{3}}e_1+c(-1+(-1)^{2/3})e_3, & e_2\vdash e_2=fe_1+ge_3, & \alpha(e_2)=e_2. \end{array}$$

证明. 证明与定理 3.1 类似 □

为寻找所有四维 Hom-结合二代数，我们考虑由其若尔当标准形给出的两类态射。这意味着它们可由以下矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&d\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a&1&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a&1&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}.$$

采用与上一节所示类似的计算，我们得到以下分类。

定理 3.3. 每个四维乘法保持的实 Hom-结合二代数都同构于以下两两不同构的 Hom-结合二代数之一（$\mathcal{A}$, $\dashv$, $\vdash$, α），其中 $\dashv$ 和 $\vdash$ 分别为左乘积和右乘积，α 为结构映射。

$$\mathcal{H}d_4^1:\ \begin{array}{lllll} e_1\dashv e_2=e_1, & e_2\dashv e_4=e_1, & e_4\dashv e_4=e_1, & e_2\vdash e_3=e_1, & e_4\vdash e_2=e_1,\\ e_1\dashv e_4=e_3, & e_3\dashv e_2=e_1, & e_1\vdash e_2=e_1, & e_2\vdash e_4=e_1, & e_4\vdash e_3=e_1,\\ e_2\dashv e_1=e_1, & e_3\dashv e_4=e_1, & e_1\vdash e_4=e_3, & e_3\vdash e_2=e_1, & e_4\vdash e_4=e_1,\\ e_2\dashv e_3=ae_3, & e_4\dashv e_1=e_3, & e_2\vdash e_2=e_3, & e_3\vdash e_4=e_1, & \alpha(e_2)=e_1. \end{array}$$

$$\mathcal{H}d_4^2:\ \begin{array}{lllll} e_1\dashv e_4=e_3, & e_2\dashv e_4=e_1, & e_4\dashv e_4=e_1, & e_2\vdash e_3=e_1, & e_4\vdash e_2=e_1,\\ e_2\dashv e_1=e_1, & e_3\dashv e_2=e_1, & e_1\vdash e_2=e_1, & e_2\vdash e_4=e_1, & e_4\vdash e_3=e_1,\\ e_2\dashv e_2=e_3, & e_3\dashv e_4=e_1, & e_1\vdash e_4=e_3, & e_3\vdash e_2=e_1, & e_4\vdash e_4=e_1,\\ e_2\dashv e_3=e_1, & e_4\dashv e_1=e_3, & e_2\vdash e_2=e_3, & e_3\vdash e_4=e_1, & \alpha(e_2)=e_1. \end{array}$$

$$e_1\dashv e_4=e_3, e_2\dashv e_4=e_1, e_4\dashv e_4=e_1, e_2\vdash e_3=e_1, e_4\vdash e_2=e_1,\mathcal{H}d_4^3: e_2\dashv e_1=e_1, e_2\dashv e_2=e_1+e_3, e_3\dashv e_2=e_1, e_3\dashv e_4=e_1, e_1\vdash e_2=e_1, e_1\vdash e_4=e_3, e_2\vdash e_4=e_3, e_3\vdash e_2=e_1, e_4\vdash e_3=e_1, e_4\vdash e_4=e_1, e_2\dashv e_3=e_1, e_4\dashv e_1=e_3, e_2\vdash e_2=e_3, e_3\vdash e_4=e1,\quad \alpha(e_2)=e_1.$$

$$e_2\dashv e_3=e_1+e_3, e_4\dashv e_3=e_1+e_3, e_2\vdash e_3=e_1+e_3, e_4\vdash e_3=e_1+e_3,\mathcal{H}d_4^4: e_3\dashv e_2=e_1+e_3, e_3\dashv e_4=e_1+e_3, e_4\dashv e_4=e_1+e_3, e_1\vdash e_2=e_1, e_2\vdash e_4=e_1+e_3, e_3\vdash e_2=e_1+e_3, e_4\vdash e_4=e_1+e3,\alpha\quad=\quad(e_2)\ e_1, e_4\dashv e_1=e_3, e_1\vdash e_4=e_3, e_3\vdash e_4=e_1+e3,\quad \alpha(e_4)=e_3.$$

$$\mathcal{H}d_4^5:\ \begin{array}{llll} e_2\dashv e_3=e_3, & e_4\dashv e_1=e_3, & e_2\vdash e_3=e_1+e_3, & e_4\vdash e_3=e_1+e_3,\\ e_2\dashv e_4=e_1+e_3, & e_4\dashv e_3=e_1+e_3, & e_2\vdash e_4=e_1+e_3, & e_4\vdash e_4=e_1+e_3,\\ e_3\dashv e_2=e_1+e_3, & e_4\dashv e_4=e_1+e_3, & e_3\vdash e_2=e_1+e_3, & \alpha(e_2)=e_1,\\ e_3\dashv e_4=e_1+e_3, & e_2\vdash e_1=e_1, & e_3\vdash e_4=e_1+e_3, & \alpha(e_4)=e_3. \end{array}$$

$\mathcal{H}d_4^6$: $e_1 \dashv e_2 = e_3$, $e_3 \dashv e_4 = e_1$, $e_2 \vdash e_1 = e_1$, $e_3 \vdash e_4 = e_1 + e_3$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_4 \dashv e_2 = e_3$, $e_2 \vdash e_3 = e_1 + e_3$, $e_4 \vdash e_3 = e_1 + e_3$, $e_2 \dashv e_4 = e_1 + e_3$, $e_4 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_2) = e_1$, $e_3 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_4 \dashv e_4 = e_1 + e_3$, $e_3 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_4) = e_3$.

$\mathcal{H}d_4^7$: $e_2 \dashv e_3 = e_4$, $e_4 \dashv e_3 = e_4$, $e_3 \vdash e_4 = e_2 + e_4$, $e_3 \dashv e_2 = e_4$, $e_4 \dashv e_4 = e_2 + e_4$, $e_4 \vdash e_3 = e_2 + e_4$, $e_3 \dashv e_4 = e_4$, $e_3 \vdash e_2 = e_2$, $e_4 \vdash e_4 = e_2 + e_4$, $\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$.

$\mathcal{H}d_4^8$: $e_2 \dashv e_3 = e_4$, $e_3 \dashv e_4 = e_4$, $e_3 \vdash e_2 = e_2$, $e_4 \vdash e_4 = e_2 + e_4$, $e_3 \dashv e_2 = e_4$, $e_4 \dashv e_3 = e_4$, $e_3 \vdash e_4 = e_2 + e_4$, $\alpha(e_1) = e_1$, $e_3 \dashv e_3 = e_4$, $e_4 \dashv e_4 = e_4$, $e_4 \vdash e_3 = e_2 + e_4$, $\alpha(e_2) = e_2$.

$\mathcal{H}d_4^9$: $e_1 \dashv e_1 = e_1$, $e_3 \dashv e_4 = e_1$, $e_4 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_2$, $e_4 \vdash e_4 = e_2$, $e_2 \dashv e_4 = e_1$, $e_4 \dashv e_1 = e_1$, $e_4 \dashv e_4 = e_1$, $e_3 \vdash e_4 = e_1 + e_2$, $\alpha(e_2) = e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_2$, $e_4 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_4 = e_2$, $e_4 \vdash e_3 = e_1 + e_2$, $\alpha(e_3) = e_3$.

$\mathcal{H}d_4^{10}$: $e_2 \dashv e_2 = e_2 + e_4, e_2 \dashv e_4 = e_2 + e_4, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_4 \dashv e_4 = e_4, e_2 \vdash e_2 = e_2 + e_4, e_2 \dashv e_4 = e_2 + e_4, e_3 \vdash e_3 = e_2 + e_4, e_4 \vdash e_2 = e_4, e_4 \vdash e_4 = e_2 + e4, \alpha(e_1) = e1, \alpha = (e_3)\, e_3$.

$\mathcal{H}d_4^{11}$: $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_4 \dashv e_4 = e_3$, $e_2 \vdash e_3 = e_1$, $e_4 \vdash e_4 = e_1$, $e_2 \dashv e_1 = e_1$, $e_3 \dashv e_2 = e_1$, $e_1 \vdash e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_3) = e_3$, $e_2 \dashv e_2 = e_1$, $e_4 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_2 = e_1$, $e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_4) = e_4$.

$\mathcal{H}d_4^{12}$: $e_2 \dashv e_2 = e_2 + e_4$, $e_4 \dashv e_2 = e_2$, $e_2 \dashv e_4 = e_2 + e_4$, $e_4 \vdash e_4 = e_2 + e_4$, $e_2 \dashv e_4 = e_2 + e_4$, $e_4 \dashv e_4 = e_4$, $e_3 \vdash e_3 = e_2 + e_4$, $\alpha(e_1) = e_1$, $e_3 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_2 = e_2 + e_4$, $e_4 \vdash e_2 = e_4$, $\alpha(e_3) = e_3$.

$\mathcal{H}d_4^{13}$: $e_2 \dashv e_2 = e_2$, $e_4 \dashv e_4 = e_1$, $e_3 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \dashv e_3 = e_2 + e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_3 \vdash e_3 = e_1 + e_3$, $e_3 \dashv e_3 = e_2$, $e_2 \vdash e_3 = e_2$, $e_4 \vdash e_4 = e_1 + e_2$, $\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_4) = e_4$.

$\mathcal{H}d_4^{14}$: $e_2 \dashv e_2 = e_2$, $e_4 \dashv e_4 = e_1$, $e_3 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \dashv e_3 = e_2 + e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_3 \vdash e_3 = e_1 + e_3$, $e_3 \dashv e_3 = e_2 + e_3$, $e_2 \vdash e_3 = e_1 + e_2$, $e_4 \vdash e_4 = e_1 + e_2$, $\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_4) = e_4$.

$\mathcal{H}d_4^{15}$: $e_2 \dashv e_4 = e_1$, $e_4 \dashv e_1 = e_1$, $e_4 \dashv e_4 = e_1$, $e_3 \vdash e_4 = e_1 + e_2$, $e_4 \vdash e_3 = e_1 + e_2$, $e_3 \dashv e_3 = e_2$, $e_4 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_4 = e_2$, $e_4 \vdash e_1 = e_1 + e_2$, $\alpha(e_2) = e_2$, $e_3 \dashv e_4 = e_1$, $e_4 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_1 + e_2$, $e_4 \vdash e_2 = e_1 + e_2$, $\alpha(e_3) = e_3$.

$\mathcal{H}d_4^{16}$: $e_2 \dashv e_4 = e_1, e_4 \dashv e_1 = e_1, e_4 \dashv e_4 = e_1, e_3 \vdash e_4 = e_1 + e_2, e_4 \vdash e_4 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_2, e_4 \dashv e_2 = e_1, e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_2, e_4 \vdash e_1 = e_1 + e2, \alpha(e_2) = e_2, e_3 \dashv e_4 = e_1, e_4 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_3 = e_2, e_4 \vdash e_2 = e_1 + e2, \alpha(e_3) = e_3$.

$e_1 \dashv e_4 = e_1, e_3 \dashv e_4 = e_1, e_4 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_3 = e_1 + e_2, e_4 \vdash e_4 = e_2$,$\mathcal{H}d_4^{17}$: $e_2 \dashv e_4 = e_1, e_4 \dashv e_1 = e_1, e_4 \dashv e_4 = e_1, e_4 \vdash e_2 = e2$, $\alpha(e_2) = e_2$,$e_3 \dashv e_3 = e_2, e_4 \dashv e_2 = e_1, e_2 \vdash e_4 = e_1 + e_2, e_4 \vdash e_3 = e_1 + e2$, $\alpha(e_3) = e_3$.

$e_1 \dashv e_2 = e_3 + e_4, e_2 \dashv e_3 = e_3 + e_4, e_3 \dashv e_3 = e_3 + e_4, e_1 \vdash e_1 = e_3 + e_4, e_3 \vdash e_2 = e_3 + e_4$,$\mathcal{H}d_4^{18}$: $e_2 \dashv e_1 = e_3 + e_4, e_2 \dashv e_4 = e_3 + e_4, e_3 \dashv e_4 = e_3 + e_4, e_2 \vdash e_2 = e_3 + e_4, e_4 \vdash e_4 = e_3 + e_4$,$e_2 \dashv e_2 = e_3 + e_4, e_3 \dashv e_2 = e_3 + e_4$, $e_4 \dashv e_2 = e_3 + e_4, e_2 \vdash e_3 = e_3 + e4$, $\alpha(e_2) = e_1$.

$e_1 \dashv e_2 = ae_3 + be_4, e_2 \dashv fe_3 = e_3 + e_4, e_3 \dashv e_3 = e_3 + e_4, e_1 \vdash e_1 = me_3 + ne_4, e_3 \vdash e_2 = e_3$,$\mathcal{H}d_4^{19}$: $e_2 \dashv e_1 = e_3 + ce_4, e_2 \dashv e_4 = he_3 + e_4, e_3 \dashv e_4 = e_3 + e_4, e_2 \vdash e_2 = oe_3 + pe_4, e_4 \vdash e_4 = e_4$,$e_2 \dashv e_2 = e_3 + de_4, e_3 \dashv e_2 = le_3 + e_4$, $e_4 \dashv e_2 = e_3 + e_4, e_2 \vdash e_3 = ce_3 + de4$, $\alpha(e_2) = e_1$。

$e_2 \dashv e_1 = e_3 + ae_4, e_2 \dashv e_4 = e_3 + e_4, e_3 \dashv e_4 = e_3 + e_4, e_2 \vdash e_2 = he_3 + e_4, e_4 \vdash e_3 = e_3$,$\mathcal{H}d_4^{20}$: $e_2 \dashv e_2 = e_3 + be_4, e_3 \dashv e_2 = f e_3 + ge_4, e_4 \dashv e_2 = e_3 + e_4, e_2 \vdash e_3 = ke_3 + e_4, e_4 \vdash e_4 = e_4$,$e_2 \dashv e_3 = ce_3 + de_4, e_3 \dashv e_3 = e_3 + e_4$, $e_1 \vdash e_1 = e_3 + e_4, e_3 \vdash e_2 = le3$, $\alpha(e_2) = e_1$.

证明。证明与定理 3.1 类似 □

4 复 Hom-结合二代数的导子

本节主要致力于描述二维、三维和四维复 Hom-结合二代数的导子。

4.1 复 Hom-结合代数的导子

设（$\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha$）为一个乘法保持的 Hom-结合二代数。对于任意非负整数 k，我们用 α^k 表示 α 与自身进行 k 次复合，即 $\alpha^k = \alpha \circ \cdots \circ \alpha$（k 次）。特别地，$\alpha^0 =$ 为恒等映射，且 $\alpha^1 = \alpha$。

定义 4.1. 对于任意非负整数 k，如果线性映射 $D: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 满足以下条件，则称其为 Hom-结合二代数 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 的 α^k- 导子。

$$D \circ \alpha = \alpha \circ D \tag{4.1}$$

$$D \circ (f \dashv g) = (D(f) \dashv \alpha^k(g)) + (\alpha^k(f) \dashv D(g)). \tag{4.2}$$

$$D \circ (f \vdash g) = (D(f) \vdash \alpha^k(g)) + (\alpha^k(f) \vdash D(g)). \tag{4.3}$$

映射 D(f) 是一个 α^{k+1}-导子，我们将其称为内 α^{k+1}-导子。事实上，我们有 D_k(f)(α(g)) $= \alpha^{k+1}$(g) $\dashv$ f $= \alpha(\alpha^k$(g) $\dashv$ f) $= \alpha \circ D_k$(f)(g), $D_k^{(f)(}\alpha(g)) = \alpha^{k+1}(g) \vdash f = \alpha(\alpha^k(g) \vdash f) = \alpha \circ D_k^{\ (f)(}g)$,

w这意味着定义 4.1 中的恒等式 (4.1) 得到满足。另一方面，我们有

$$\begin{aligned} D_k(f)(g \dashv h) &= \alpha^k((g \dashv h) \dashv f) = (\alpha^k(g) \dashv \alpha^k(h)) \dashv \alpha(f)) \\ &= \alpha^{k+1}(g) \dashv \alpha^k(h)) \dashv f + (\alpha^k(g) \dashv f) \dashv \alpha^{k+1}(h) \\ &= (\alpha^{k+1}(g) \dashv D_k(f)(h)) + D_k(f)(g) \dashv \alpha^{k+1}(h). \end{aligned}$$

因此，D_k(f) 是一个 α^{k+1}-导子。 α^k-导子的集合记为 $\mathrm{Inner}_{\alpha^k}$(A)，它们可以表示为

$$\mathbf{Inner}_{\alpha^k}(A) = \left\{\alpha^{k-1}(\bullet) \dashv f | f \in A, \alpha(f) = f\right\}. \tag{4.4}$$

$$\mathbf{Inner}_{\alpha^k}(A) = \left\{\alpha^{k-1}(\bullet) \vdash f | f \in A, \alpha(f) = f\right\}. \tag{4.5}$$

对于任意 D $\in \mathrm{Der}_{\alpha^k}(A)$ 和 D′ $\in \mathrm{Der}_{\alpha^s}(A)$，我们按通常方式定义它们的交换子 [D, D′]： [D, D′] =D ∘ D′ − D′ ∘ D。

命题 4.2. 对任意 D $\in \mathrm{Der}_{\alpha^k}(A)$ 和 D′ $\in \mathrm{Der}_{\alpha^s}(A)$，有 [D, D′] $\in \mathrm{Der}_{\alpha^{k+s}}(A)$。

证明. 对任意 f,g $\in \mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}
&[D, D'](f \dashv g) = D \circ D'(f \dashv g) - D' \circ D(f \dashv g)\\
&= D(D'(f) \dashv \alpha^s(g)) + \alpha^s(f) \dashv D'(g))) - D'(\mu(D(f), \alpha^k(g)) + \mu(\alpha^k(f), D(g)))\\
&= D \circ D'(f) \dashv \alpha^{k+s}(g)) + \alpha^k \circ D'(f) \dashv D \circ \alpha^s(g) + D \circ \alpha^s(f) \dashv \alpha^k \circ D'(g)\\
&+\alpha^{k+s}(f) \dashv D \circ D'(g)) - D' \circ D(f) \dashv \alpha^{k+s}(g)) - \alpha^s \circ D(f) \dashv D' \circ \alpha^k(g)\\
&-D' \circ \alpha^k(f) \dashv \alpha^s \circ D(g) - \alpha^{k+s}(f) \dashv D' \circ D(g).
\end{aligned}$$

由于 D 和 D′ 满足 D $\circ \alpha = \alpha \circ$ D, D′ $\circ \alpha = \alpha \circ$ D′，我们得到
$\alpha^k \circ$ D′ = D′ $\circ \alpha^k$, D $\circ \alpha^s = \alpha^s \circ$ D。因此，我们得到

$$[D, D'](f \dashv g) = \alpha^{k+s}(f) \dashv [D, D'](g)) + [D, D'](f) \dashv \alpha^{k+s}(g)).$$

此外，显然可以推出

$$[D, D'] \circ \alpha = D \circ D' \circ \alpha - D' \circ D \circ \alpha = \alpha \circ D \circ D' - \alpha \circ D' \circ D = \alpha \circ [D, D'],$$

由此可得 [D, D′] $\in \mathrm{Der}_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{A})$。 □

定义 4.3. Hom-结合三元系是在域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间 A，配备满足以下条件的三线性乘法

$$\begin{aligned}
(((x \dashv y) \dashv \alpha(z)) \dashv \alpha(u)) \dashv \alpha(w) &= ((\alpha(x) \dashv (y \dashv z)) \dashv \alpha(u)) \dashv \alpha(w))\\
&= \alpha(x) \dashv (\alpha(y) \dashv (z \dashv u) \dashv \alpha(w))),\\
(((x \vdash y) \vdash \alpha(z)) \vdash \alpha(u)) \vdash \alpha(w) &= ((\alpha(x) \vdash (y \vdash z)) \vdash \alpha(u)) \vdash \alpha(w))\\
&= \alpha(x) \vdash (\alpha(y) \vdash (z \vdash u) \vdash \alpha(w))),
\end{aligned}$$

对任意 x、y、z、u、w $\in \mathcal{A}$。

定义 4.4. Hom-结合二代数 (A, $\dashv, \vdash, \alpha$) 的结合三元导子是满足以下条件的线性变换 D : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
&D \circ \alpha = \alpha \circ D\\
D \circ ((x \dashv y) \dashv z)) &= (D(x) \dashv \alpha^k(y)) \dashv \alpha^k(z)\\
&+(\alpha^k(x) \dashv D(y)) \dashv \alpha^k(z) + (\alpha^k(x) \dashv \alpha^k(y)) \dashv D(z)\\
D \circ ((x \vdash y) \vdash z)) &= (D(x) \vdash \alpha^k(y)) \vdash \alpha^k(z)\\
&+(\alpha^k(x) \vdash D(y)) \vdash \alpha^k(z) + (\alpha^k(x) \vdash \alpha^k(y)) \vdash D(z)
\end{aligned}$$

对 x、y、z $\in \mathcal{A}$。

定义 4.5. Hom-结合 ($\mathcal{A}, \dashv, \vdash \alpha$) 的 Jordan 结合三元导子是满足以下条件的线性变换 D′ : $\mathcal{A} \longrightarrow$ A

$$D' \circ \alpha = \alpha \circ D'$$

and

$$\begin{aligned}
D' \circ ((x \dashv y) \dashv x)) &= (D'(x) \dashv \alpha^k(y)) \dashv \alpha^k(x)\\
&+(\alpha^k(x) \dashv D'(y)) \dashv \alpha^k(x) + (\alpha^k(x) \dashv \alpha^k(y)) \dashv D'(x)\\
D' \circ ((x \vdash y) \vdash x)) &= (D'(x) \vdash \alpha^k(y)) \vdash \alpha^k(x)\\
&+(\alpha^k(x) \vdash D'(y)) \vdash \alpha^k(x) + (\alpha^k(x) \vdash \alpha^k(y)) \vdash D'(x)
\end{aligned}$$

对于 x、y $\in \mathcal{A}$。

命题 4.6. D 是（$\mathcal{A}$、$\dashv$、$\vdash$、α）的结合三元导子，当且仅当 D 是（$\mathcal{A}$、$\dashv$、$\vdash\alpha$）的 Jordan 三重导子，且 A(x, y, z) +A(y, z, x) +A(z, x, y) = 0其中 A(x, y, z) =（$\alpha\circ$D）∘（x $\dashv$y） $\dashv$z）。

证明。如果 D 是 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\alpha)$ 的 Jordan 三重导子，则 1 立即成立。2 成立是因为

$$
\begin{aligned}
&A(x,y,z)+A(y,z,x)+A(z,x,y)=\\
&=\alpha((D(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\alpha^k(z))+(\alpha^k(x)\dashv D(y))\dashv\alpha^k(z)+(\alpha^k(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv D(z))\\
&+\alpha((D(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv\alpha^k(x)+(\alpha^k(y))\dashv D(z))\dashv\alpha^k(x)+(\alpha^k(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv D(x))\\
&+\alpha((D(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv\alpha^k(y))+(\alpha^k(z)\dashv D(x))\dashv\alpha^k(y)+(\alpha^k(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv D(y))\\
&=\alpha((D(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\alpha^k(z))+(\alpha^k(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv D(x)+(\alpha^k(z)\dashv D(x))\dashv\alpha^k(y)\\
&+\alpha((\alpha^k(x)\dashv D(y))\dashv\alpha^k(z))+(D(y)\dashv\alpha^k(y))\dashv\alpha^k(x)+(\alpha^k(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv D(y)\\
&+\alpha((\alpha^k(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv D(z))+(\alpha^k(y)\dashv D(z))\dashv\alpha^k(x)+(D(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv\alpha^k(y)\\
&=0.
\end{aligned}
$$

因此，D 是 Hom-结合 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\alpha$ 的广义结合三重导子). □

命题 4.7。D 是 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\alpha)$ 关于结合导子 δ 的结合三元导子，当且仅当 D 是 $(A,\dashv,\vdash,\alpha)$ 关于 Jordan 三重导子 δ 的 Jordan 三重导子，使得

$$(\alpha^k(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv(D-\delta)(z))+(\alpha^k(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv(D-\delta)(x))+(\alpha^k(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv(D-\delta)(y))=0,$$

其中 B(x,y,z) $=\alpha((\delta(x)\dashv\alpha^k(y)\dashv\alpha^k(z))+(\alpha^k(x)\dashv\delta(y))\dashv\alpha^k(z))+((\alpha^k(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\delta(z))$.

证明。如果 D 是 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\alpha)$ 的 Jordan 三重导子，因此 1 立即成立。2 成立，因为

$$
\begin{aligned}
&B(x,y,z)+B(y,z,x)+B(z,x,y)=\\
&=\alpha((\delta(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\alpha^k(z))+(\alpha^k(x)\dashv\delta(y))\dashv\alpha^k(z))+(\alpha^k(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\delta(z)))\\
&+\alpha((\delta(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv\alpha^k(x))+(\alpha^k(y)\dashv\delta(z))\dashv\alpha^k(x))+(\alpha^k(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv\delta(x)))\\
&+\alpha((\delta(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv\alpha^k(y))+(\alpha^k(z)\dashv\delta(x))\dashv\alpha^k(y))+(\alpha^k(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv\delta(y)))\\
&=\alpha((\delta(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\alpha^k(z))+(\alpha^k(x)\dashv\delta(y))\dashv\alpha^k(z))+(\alpha^k(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\delta(z)))\\
&+\alpha((\delta(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv\alpha^k(x))+(\alpha^k(y)\dashv\delta(z))\dashv\alpha^k(x))+(\alpha^k(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv\delta(x)))\\
&+\alpha((\delta(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv\alpha^k(y))+(\alpha^k(z)\dashv\delta(x))\dashv\alpha^k(y))+(\alpha^k(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv\delta(y)))\\
&=\alpha((\delta(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\alpha^k(z))+(\alpha^k(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv\delta(x))+(\alpha^k(z)\dashv\delta(x))\dashv\alpha^k(y)))\\
&+\alpha((\alpha^k(x)\dashv\delta(y))\dashv\alpha^k(z))+(\delta(y)\dashv\alpha^k(z))\dashv\alpha^k(x))+(\alpha^k(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv\delta(y)))\\
&+\alpha((\alpha^k(x)\dashv\alpha^k(y))\dashv\delta(z))+(\alpha^k(y)\dashv\delta(z))\dashv\alpha^k(x))+(\delta(z)\dashv\alpha^k(x))\dashv\alpha^k(y)))\\
&=0.
\end{aligned}
$$

注意，根据命题 4.6， δ 是一个结合导子。因此，根据命题 4.6，D 是相对于结合导子 δ 的 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\alpha)$ 的广义结合三重导子。□

定义 4.8. BiHom-结合三代数 $\mathcal{A}$ 的 α-导子是满足以下条件的线性变换 d : $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$

$$\alpha\circ d=d\circ\alpha\quad, \tag{4.6}$$

$$d(x\dashv y)\;=\;d(x)\dashv\alpha(y)+\alpha(x)\dashv d(y) \tag{4.7}$$

$$d(x\vdash y)\;=\;d(x)\vdash\alpha(y)+\alpha(x)\vdash d(y), \tag{4.8}$$

对所有 x、y $\in\mathcal{A}$。

4.2 复 Hom-结合二代数的导子

本节深入阐述域 $\mathbb{K}$ 上二维和三维 Hom-结合二代数的 α-导子。设 $\{e_1, e_2, e3, \cdots, e_n\}$ 是 n 维 Hom-结合二代数 $\mathcal{A}$ 的一组基。基的乘积记作

$$d(e_p) = \sum_{q=1}^{n} d_{qp} e_q.$$

我们有

$$\sum_{p=1}^{n} d_{pk} a_{qp} = \sum_{p=1}^{n} a_{pk} d_{qp} \quad , \tag{4.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^{p} d_{rp} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} d_{ki} a_{pj} \gamma_{kp}^{q} \quad + \quad \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_{ki} d_{pj} \gamma_{kp}^{q}, \tag{4.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ij}^{p} d_{rp} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} d_{ki} a_{pj} \delta_{kp}^{q} \quad + \quad \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_{ki} d_{pj} \delta_{kp}^{q}. \tag{4.11}$$

定理 4.9. 二维 Hom-结合双代数的导子具有以下形式

IC	Der(d)	Dim(d)	IC	Der(d)	Dim(d)
$\mathcal{TH}_2^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_2^5$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{TH}_2^6$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_2^8$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1

定理 4.10。三维 Hom-结合二代数的导子具有以下形式

IC	Der(d)	Dim(d)	IC	Der(d)	Dim(d)
$\mathcal{TH}_3^1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_3^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_3^3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_3^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$	4
$\mathcal{TH}_3^5$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_3^8$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_3^{10}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_3^{11}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_3^{12}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_3^{13}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & 0 \end{pmatrix}$	1

证明。根据定理 4.10，我们仅对一种情形给出证明，以说明所采用的方法；其他情形可用类似的方法处理，无论是否需要作出修改。我们来考虑

$\mathcal{TH}_3^3$。应用方程组 (4.9)、(4.10) 和 (4.11)，我们得到 $d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{22} = d_{32} = 0$。因此，$\mathcal{TH}_3^3$ 的导子如下所示：$d(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$、$d(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$、$d(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，以及 $d(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 $Der(Cent(\mathcal{A}))$ 的基，并且 $DimDer(Cent(\mathcal{A})) = 4$。其余二维结合二代数部分的导子可以按照上述类似方式处理。□

定理 4.11. 四维 Hom-结合二代数的导子具有以下形式

IC	Der(d)	Dim(d)	IC	Der(d)	Dim(d)
$\mathcal{TH}_4^1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_4^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_4^3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_4^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4
$\mathcal{TH}_4^5$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_4^6$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4
$\mathcal{TH}_4^7$	$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3	$\mathcal{TH}_4^8$	$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3
$\mathcal{TH}_4^9$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_4^{10}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{TH}_4^{11}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_4^{12}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{TH}_4^{13}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_4^{14}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{TH}_4^{15}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_4^{16}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{TH}_4^{17}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_4^{18}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & -d_{23} & -d_{24} \\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} \end{pmatrix}$	2

IC	Der(d)	Dim(d)	IC	Der(d)	Dim(d)
$\mathcal{TH}_4^{19}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_4^{20}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2

证明。基于定理 4.11，我们仅针对一种情形给出证明，以说明所采用的方法；其他情形可以类似地处理，无论是否需要进行修改。考虑$\mathcal{TH}_4^1$。应用方程组 (4.9)、(4.10) 和 (4.11)，可得 $\mathrm{d}_{11} = \mathrm{d}_{12} = \mathrm{d}_{13} = \mathrm{d}_{14} = \mathrm{d}_{22} = \mathrm{d}_{24} = \mathrm{d}_{31} = \mathrm{d}_{32} = \mathrm{d}_{33} = \mathrm{d}_{34} = \mathrm{d}_{42} = \mathrm{d}_{44} = 0$。因此，$\mathcal{TH}_4^1$的导子如下所示

$$d(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } d(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是 Der(Cent($\mathcal{A}$)) 和 DimDer(Cent($\mathcal{A}$)) 的基 $= 4$。其余二维结合二代数部分的导子也可以按照上文所示的方法类似地处理。□

推论 4.12。

- 二维结合三元代数的导子维数介于零和二之间。
- 三维结合三元代数的导子维数介于零和三之间。
- 四维结合三代数的导子维数介于一和四之间。

5 复 Hom-结合二代数的质心

5.1 Hom-结合二代数质心的性质

本节提出关于 Hom-结合二代数 $\mathcal{A}$ 的质心性质的以下结果。

定义 5.1. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 为一个 Hom-结合二代数。线性映射 $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$称为 $\mathcal{A}$ 上的 (α)-质心元素，若对所有 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \alpha \circ \psi &= \psi \circ \alpha, && (5.1) \\ \psi(x) \dashv \alpha(y) &= \psi(x) \dashv \psi(y) = \alpha(x) \dashv \psi(y), && (5.2) \\ \psi(x) \vdash \alpha(y) &= \psi(x) \vdash \psi(y) = \alpha(x) \vdash \psi(y). && (5.3) \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ 的所有 (α)-质心元素组成的集合记为 Cent$^{(\alpha)}$($\mathcal{A}$)。 $\mathcal{A}$ 的质心记为 Cent($\mathcal{A}$)。

定义 5.2. 设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{A}$的一个非空子集。子集

$$Z_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{H} | \alpha(x) \bullet \mathcal{H} = \mathcal{H} \bullet \alpha(x) = 0\}, \quad (5.4)$$

称为 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{A}$ 中的中心化子，其中 $\bullet$ 分别为 $\dashv$ 和 $\vdash$。

定义 5.3. 设 $\psi \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$。若 $\psi(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{A})$ 且 $\psi(\mathcal{A}^2) = 0$，则称 ψ 为中心导子。$\mathcal{A}$的所有中心导子构成的集合记为 $C(\mathcal{A})$。

命题 5.4. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 是一个 Hom-结合二代数。则，

i) $\Gamma(\mathcal{A})\mathrm{Der}(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Der}(\mathcal{A})$。

ii) $[\Gamma(\mathcal{A}), \mathrm{Dr}(\mathcal{A})] \subseteq \Gamma(\mathcal{A})$。

iii) $[\Gamma(\mathcal{A})、\Gamma(\mathcal{A})](\mathcal{A}) \subseteq \Gamma(\mathcal{A})$ 和 $[\Gamma(\mathcal{A})、\Gamma(\mathcal{A})](\mathcal{A}^2) = 0$。

证明. 利用导子和质心的定义，可以直接证明 i)–iii) 各部分。

□

命题 5.5. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash \alpha)$ 是一个 Hom-结合二代数，且 $\varphi \in \mathrm{Cent}(\mathcal{A})$，$\mathrm{d} \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$。则，$\varphi \circ \mathrm{d}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 α-导子。

证明。事实上，如果 $\mathrm{x,y} \in \mathcal{A}$，那么

$$\begin{aligned}(\varphi \circ d)(x \bullet y) &= \varphi(d(x) \bullet \alpha(y) + \alpha(x) \bullet d(y)) \\ &= \varphi(d(x) \bullet y) + \varphi(x \bullet d(y)) = (\varphi \circ d)(x) \bullet \alpha(y) + \alpha(x) \bullet (\varphi \circ d)(y),\end{aligned}$$

其中，$\bullet$ 分别是 $\dashv$和 $\vdash$。 □

命题 5.6. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 Hom-结合二代数。因此，$C(\mathcal{A})$ =Cent($\mathcal{A}$)∩Der({v11)。

证明。若 $\psi \in \mathrm{Cent}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Der}(\mathcal{A})$，则根据 Cent($\mathcal{A}$ 和 Der($\mathcal{A}$) 的定义，我们有
$\psi(\mathrm{x} \bullet \mathrm{y}) = \psi(\mathrm{x}) \bullet \alpha(\mathrm{y}) + \alpha(\mathrm{x}) \bullet \psi(\mathrm{y})$ 以及 $\psi(\mathrm{x} \bullet \mathrm{y}) = \psi(\mathrm{x}) \circ \alpha(\mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{x}) \circ \psi(\mathrm{y})$，对于 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{A}$。这产生了$\psi(\mathcal{A}\mathcal{A}) = 0$和 $\psi(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{A})$，即 $\mathrm{Cent}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathcal{A})$。逆向关系显然成立，因为 $C(\mathcal{A})$ 同时属于 Cent($\mathcal{A}$) 和 Der($\mathcal{A}$)，其中 $\bullet$ 分别是 $\dashv$ 和 $\vdash$。□

命题 5.7. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \alpha)$ 为一个 Hom-结合二代数。因此，对于任意 $\mathrm{d} \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 和 $\varphi \in \mathrm{Cent}(\mathcal{A})$，我们有

(i) 复合 $\mathrm{d} \circ \varphi$属于 Cent($\mathcal{A}$)，当且仅当 $\varphi \circ \mathrm{d}$ 是 $\mathcal{A}$ 的中心 α-导子。
(ii) 复合 $\mathrm{d} \circ \varphi$ 是 $\mathcal{A}$ 的 α-导子，当且仅当 $[\mathrm{d}, \varphi]$ 是 $\mathcal{A}$ 的中心 α-导子。

证明. i) 对于任意 $\varphi \in \mathrm{Cent}(\mathcal{A})$、$\mathrm{d} \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 及 $\forall \mathrm{x,y} \in \mathcal{A}$，我们有

$$\begin{aligned}d \circ \varphi(x \bullet y) = d \circ \varphi(x) \bullet y \quad &= d \circ \varphi(x) \bullet y + \varphi(x) \bullet d(y) \\ &= d \circ \varphi(x) \bullet y + \varphi \circ d(x \bullet y) - \varphi \circ d(x) \bullet y.\end{aligned}$$

Thus, $(d \circ \varphi - \varphi \circ d)(x \bullet y) = (d \bullet \varphi - \varphi \circ d)(x) \bullet y.$

ii) 设 $\mathrm{d} \circ \varphi \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$。利用 $[\mathrm{d}, \varphi] \in \mathrm{Cent}(\mathcal{A})$，可得

$$[d, \varphi](x \bullet y) = ([d, \varphi](x)) \bullet \alpha(y) = \alpha(x) \bullet ([d, \varphi](y)) \tag{5.5}$$

另一方面，[d、φ]d、$\circ\varphi - \varphi \circ \mathrm{d}$ 和 $\mathrm{d} \circ \varphi$、$\varphi \circ \mathrm{d} \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$。因此，

$$[d, \varphi](x \bullet y) = (d(\varphi \circ (x)) \bullet \alpha(y) + \alpha(x) \bullet (d \circ \varphi(y)) - (\varphi \circ d(x)) \bullet \alpha(y) - \alpha(x) \bullet (\varphi \circ d(y)). \tag{5.6}$$

参照 (5.5) 和 (5.6)，我们得到 $\alpha(x)\bullet([d,\varphi])(y)=([d,\varphi])(x)\bullet\alpha(y)=0$。
在此分析阶段，令 $[d,\ \varphi]$ 为 $\mathcal{A}$ 的中心 α-导子。则，

$$\begin{aligned} d\circ\varphi(x\bullet y) &= [d\circ\varphi](x\bullet y)+(\varphi\circ d)(x\bullet y)\\ &= \varphi(\circ d(x)\bullet\alpha(y))+\varphi(\alpha(x)\bullet d(y))\\ &= (\varphi\circ d)(x)\bullet\alpha(y)+\alpha(x)\bullet(\varphi\circ d)(y), \end{aligned}$$

其中，$\bullet$ 分别表示乘积 $\dashv$ 和 $\vdash$。 □

5.2 复 Hom-结合二代数的质心

本节详细阐述域 $\mathbb{K}$ 上二维和三维 Hom-结合二代数的 α-质心。设 $\{e_1,e_2,e3,\cdots,e_n\}$ 是 n 维 Hom-结合双代数 $\mathcal{A}$ 的一组基。基的乘积

$$\psi(e_p)=\sum_{q=1}^{n}c_{qp}e_q.$$

$$\sum_{p=1}^{n}c_{pi}a_{qp} = \sum_{p=1}^{n}a_{pi}c_{qp}, \tag{5.7}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}c_{ki}a_{pj}\gamma_{kp}^{q} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}c_{ki}c_{pj}\gamma_{kp}^{q}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}a_{ki}c_{pj}\gamma_{kp}^{q}, \tag{5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}c_{ki}a_{pj}\delta_{kp}^{q} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}c_{ki}c_{pj}\delta_{kp}^{q}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}a_{ki}c_{pj}\delta_{kp}^{q}. \tag{5.9}$$

定理 5。 8. 二维 Hom-结合双代数的质心具有以下形式

IC	Cent($\mathcal{A}$)	Dim(Cent($\mathcal{A}$))	IC	Cent($\mathcal{A}$)	Dim(Cent($\mathcal{A}$))
$\mathcal{TH}_2^1$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0\\ 0 & c_{22}\end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_2^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c_{21} & 0\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{TH}_2^3$	$\begin{pmatrix} -c_{11} & 0\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$	3	$\mathcal{TH}_2^4$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$	3
$\mathcal{TH}_2^5$	$\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c_{21} & 0\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_2^6$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0\\ 0 & c_{22}\end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_2^7$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0\\ 0 & c_{22}\end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_2^8$	$\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c_{21} & 0\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{TH}_2^9$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$	3			

证明。根据定理 5.8，我们仅针对一种情况给出证明，以说明所采用的方法；其他情况可以通过类似方式处理，无论是否需要修改。考虑$\mathcal{TH}_2^1$。应用方程组 (5.7)、(5.8) 和 (5.9)，得到 $c_{12}=c_{21}=0$。因此，$\mathcal{TH}_2^1$的质心如下所示
$c(e_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$！ 和 $c(e_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$！ 是 Der(Cent($\mathcal{A}$)) 和 DimDer(Cent($\mathcal{A}$)) $=2$ 的基。二维结合二代数其余部分的质心可按上述类似方式处理。□

定理 5.9. 三维 Hom-结合二代数的质心具有以下形式

IC	质心($\mathcal{A}$)	质心($\mathcal{A}$)的维数	IC	质心($\mathcal{A}$)	质心($\mathcal{A}$)的维数
$\mathcal{TH}_3^1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_3^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_3^3$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{11} & c_{11} \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3	$\mathcal{TH}_3^4$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{TH}_3^5$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_3^6$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_3^7$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_3^8$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$	3
$\mathcal{TH}_3^9$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{TH}_3^{10}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$	4
$\mathcal{TH}_3^{11}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_3^{12}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_3^{13}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$	3	$\mathcal{TH}_3^{14}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1

证明. 根据定理 5.9，我们仅对一种情况给出证明，以说明所采用的方法；其他情况也可类似地处理，无论是否需要修改。考虑$\mathcal{TH}_3^3$。应用方程组 (5.7)、(5.8) 和 (5.9)，得到 $c_{12} = c_{13} = c_{32} = c_{33} = 0$和 $c_{22} = c_{23} = c_{11}$。因此，$\mathcal{TH}_3^3$的质心如下所示

$c(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $c(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 以及 $c(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 Der(c) 和

DimDer(c) = 3的基。其余三维结合二代数部分的质心可以按照上述类似方法处理。□

定理 5.10。四维 Hom-结合二代数的质心具有以下形式。

IC	Cent($\mathcal{A}$)	*Dim*	IC	Cent($\mathcal{A}$)	*Dim*
$\mathcal{TH}_4^1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_4^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} & 0 \\ c_{41} & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix}$	6
$\mathcal{TH}_4^3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$	6	$\mathcal{TH}_4^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix}$	2

IC	Cent($\mathcal{A}$)	*Dim*	IC	Cent($\mathcal{A}$)	*Dim*
$\mathcal{TH}_4^5$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_4^6$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4
$\mathcal{TH}_4^7$	$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_4^8$	$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_4^9$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_4^{10}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_4^{11}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_4^{12}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_4^{13}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}$	3	$\mathcal{TH}_4^{14}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{TH}_4^{15}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{TH}_4^{16}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4
$\mathcal{TH}_4^{17}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\mathcal{TH}_4^{18}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-4c_{21}^2}}{2} & 0 & 0 & c_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2

证明。从定理 5.10出发，我们仅针对一种情形给出证明，以说明所采用的方法；其他情形可以类似地处理，也可以根据需要进行修改。考虑$\mathcal{TH}_4^1$。应用方程组（5.7）、（5.8）和（5.9），我们得到 $c_{11} = c_{12} = c_{13} = c_{14} = 0 = c_{22} = c_{24} = c_{31} = c_{32} = c_{33} = c_{34} = c_{42} = c_{44} = 0$。因此，$\mathcal{TH}_4^1$的质心如下所示

$$c(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } c(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是 Der(Cent($\mathcal{A}$)) 和 DimDer(Cent($\mathcal{A}$)) $= 4$ 的基。其余二维结合二代数部分的导子可以按照上文所示的类似方法处理。□

推论 5.11。

- 二维结合三元代数的质心维数介于一维和三维之间。

- 三维结合三元代数的质心维数介于一到五之间。

- 四维结合三代数的质心维数介于零到六之间。

参考文献

[1] A. Makhlouf 和 Ahmed Zahari，《Hom-结合代数的结构与分类》，Acta et commentationes universitis Tartuensis de mathematica，第 24 卷第 1 期（2020年），79 – 102。[2] A. Zahari 和 I. Bakayoko，《论 BiHom-结合双代数》，Open J. Math. Sci. 第 7 卷（2023年），96 – 117。[3] A. Makhlouf，《结合代数与形式计算》，Theoret. Comput. Sci. 187（1997年），第 1–2 期，123–145。[4] J. L. Loday、A. Frabetti、F. Chapoton 和 F. Gouchot，《双代数及相关运算子》，Lecture Notes sur Math.，柏林：Springer，2001年。[5] D. Larsson 和 S. Silvestrov，《拟 Hom-Lie 代数、中心扩张及类 2-余循环恒等式》，J. Algebra 288（2005年），321–344。[6] A. Makhlouf 和 S. Silvestrov，《Hom-代数结构》，J. Gen. Lie Theory Appl. 第 2 卷（2008年），第 2 期，51–64。[7] W. Basri 和 Rokhsiboev，《低维二结合代数》，第三届数学研究与教育会议论文集（ICREM3），UPM，马来西亚（2007年），164–170。[8] Y. Fregier、A. Gohr 和 S. Silvestrov，《Hom-结合型含幺代数及满射或单射扭曲映射》，J. Gen. Lie Theory Appl. 第 3 卷第 4 期（2009年），285–295。[9] A. Armour、H. Chen 和 Y. Zhang，《四维超代数的分类》，Comm. in Algebra 37（2009年），3697–3728。[10] M. Ikrom、Rokhsiboev、S. Isamiddin、Rakhimov 和 W. Basri，《三维复二结合代数的分类》，Malaysian Journal of Mathematical Sciences 4（2）（2010年），241–254。[11] I. M. Rikhsiboev、I. S. Rakhimov 和 W. Basri，《二结合代数及其导子》，J. phys : Conf. Ser 553（2014年）012006。[12] X. Li，《乘法型 Hom-Lie 代数的结构》，Advances in Mathematics (China)，43（6）（2014年）817–823。[13] W. Basri、I. S. Rakhimov 和 I. M. Rokhsiboev，《四维幂零二结合代数》，J. Generalised Lie Theory Appl. 28。doi : 10.4172/1736 – 4337.1000218。[14] X. Chen 和 W. Han，《乘法型单 Hom-Lie 代数的分类》，J. Lie Theory 21（4）（2015年）[15] S. Isamiddin 和 Rakhimov，《论结合双代数的中心扩张》，J. Physics : conf. Ser. 697（2016年）。[16] Ahmed Zahari，《三维 BiHom-结合代数与 BiHom-双代数的分类》，arXiv : 1907.0080 v1 [math.RA] 28 2019年6月。