arXiv:2305.04048v1 [physics.flu-dyn] 6 May 2023

基于数据驱动的实验阴影图剪切分层湍流分类

Adrien Lefauve* 和 Miles M. P. Couchman剑桥大学应用数学与理论物理系，剑桥数学科学中心，*Wilberforce Road*，*Cambridge CB3 0WA*，英国

（日期：2023年5月4日）

我们提出了一种降维与无监督聚类方法，用于实验室实验中密度分层湍流的自动分类和降阶建模。我们将该方法应用于在“分层倾斜管道”（SID）实验中采集的113部长时阴影图影片；在该实验中，湍流由剪切浮力驱动的逆流所产生的不稳定性引发，其雷诺数为 $Re \approx 300-5000$，倾斜角为 $\theta = 1^\circ - 6^\circ$，普朗特数为 $Pr \approx 700$。该方法能够自动检测代表离散密度界面的边缘，提取代表其形态的低维统计量向量，将这些统计量投影到由主坐标构成的二维相空间中，并应用 OPTICS 聚类算法。研究检测到五个簇，并根据其典型界面形态以及对代表性帧的考察进行物理解读，揭示出不同类型的湍流与混合：层流化、编织、翻转、颗粒状和无结构型，以及若干中间类型。在（Re θ）空间中，处于各簇的时间比例逐渐变化。在 $Re\,\theta$ 的中间取值下，间歇性湍流在相空间中的各簇之间周期性转换，并揭示出至少两条通向分层湍流的不同路径。这些认识表明，该方法有望从大型实验数据集中揭示复杂湍流系统的内在物理机制。

I. 引言

背景与研究动机 – 从动力系统的视角看流体流动，随着流动中的非线性强度（以雷诺数衡量）增加，会出现许多在空间和时间上具有相干性的结构。例如，平面库埃特流中的湍流斑、管道流中的湍流团和湍流塞、通道流中的条带、钝体尾流中的涡街、浮力羽流中的环状涡旋、边界层中的发卡涡和马蹄涡，以及混合层中的波状起伏和交错结构 [1]。由多个无量纲参数表征的流动可能呈现更丰富的动力学行为，在其多维参数空间的不同区域中出现各种不同的流动“状态”或“状态区”。一个突出的例子是泰勒–库埃特流中观察到的“出人意料的复杂转变图”：在由内、外旋转圆筒的雷诺数构成的二维参数空间中，可以观察到大量时空动力学现象 [2]。此类状态区的识别及其在参数空间中的范围划定，通常由受过训练的人通过检查所观察到的相干结构的各种特性来人工完成

* lefauve@damtp.cam.ac.uk

。在本文和配套通信 [3]中，我们展示，借助自动化的数据驱动算法，可以改进复杂流动中状态区的分类，并深化由此获得的物理认知。我们通过揭示一项实验中的丰富湍流状态及其转变来证明这一点。该实验名为“分层倾斜管道”，我们认为它代表了湍流研究的一种新范式，其重要性可与研究充分的圆柱管道 [4] 或泰勒–库埃特 [5] 实验相媲美。

为了理解我们这种数据驱动方法的潜在优势，有必要概述一下通常如何分析这类典型流动。通常会考虑两个主要问题。首先，随着无量纲参数变化，我们如何预测相干结构的出现和演化？这可以从第一性原理出发（例如，考察控制方程的分岔以及稳定性理论），也可以借助更近似的唯象模型。其次，这些相干结构与我们关注的流动现象（例如壁面阻力或混合）有何关联？因此，这两个步骤可以表示为：

$$\text{输入参数 步骤}\xrightarrow{1}\text{状态、相干结构 步骤}\xrightarrow{2}\text{有用的输出变量。(1)（方程）（解）}$$

之所以关注状态和相干结构这一中间环节，是因为它们通常在决定输出方面起主导作用。我们的配套通信更详细地讨论了用于湍流建模的相干结构方法，该方法以“简单不变解”或“精确相干态”为“骨架”。揭示相干结构的作用，有助于我们从力学过程和因果关系的角度建立物理直觉，从而弥合控制方程与其解之间的鸿沟。因此，开发新的数据驱动技术以发现不同状态并量化其性质，似乎是加深我们对湍流理解的关键。

重点 – 本文着重识别分层剪切流中的不同湍流状态，即由两个密度略有差异的反向流动的流体层之间的平均剪切所驱动的湍流（满足布辛涅斯克近似）。控制动量场和密度场演变的方程中的耦合项意味着，相干速度结构（例如剪切和涡旋）会与相干密度结构（即梯度增强的尖锐密度界面）相互作用。这种相互作用极为复杂，目前缺乏基于第一性原理的预测。例如，涡旋可能会使密度界面变宽，也可能视具体情况使其主动变得更陡 [6]。这会对能量耗散、跨越稳定密度界面的浮力通量、不可逆的跨等密度面混合及其效率产生主导阶影响，但这些影响尚未得到充分理解；而这些量对于海洋与气候建模至关重要 [7]。换言之，我们需要推进表达式 (1) 中的第 1 步和第 2 步。

问题的选择– 为了加深我们对受控实验室条件下剪切分层湍流状态的理解（聚焦于步骤 1），我们在 “ 分层倾斜管道 ” （ SID ）中收集了数据。关于分层剪切流不稳定性的实验研究历史悠久，至少可追溯至 Reynolds 在 1883 [8, §12] （他曾指出“这证明是一个非常漂亮的实验”）、Taylor 在 1927 [9], 以及 Thorpe 在 1971 [10]发表的开创性论文。SID 的新颖之处在于，它通过一条长长的倾斜矩形管道，连接两个盛有不同密度流体的大型储液槽，从而维持高耗散的双层交换流。这使我们能够探索参数

空间，并记录湍流动力学的长时间序列；这些内容此前无法通过实验获得，而数值模拟的成本仍高得令人难以承受。在由雷诺数和管道倾斜角构成的二维空间中，SID 中已识别出四种状态：稳定层流、有限振幅界面（“霍姆博”）波、间歇性湍流和完全湍流。这些状态最初在 1961 [11], 中得到描述，之后又在 2014 [12]中被独立发现。此后，对三维体积速度场和密度场的测量 [13] 推动了步骤 1 和 2 的研究进展。研究者利用能量收支和耗散论证 [14–16] 以及解析理论 [17], ，从第一性原理出发部分解释了流态图；同时还描述了三维涡旋的形态及其与密度界面的相互作用，并将其与线性不稳定性联系起来 [18, 19]。

然而，迄今为止 SID 研究的一项局限，在于状态的定义和流动的分类都带有主观性。这至少造成了三个问题，削弱了步骤 1 和 2 的效果。首先，这种分类依赖于选择定性的视觉标准来分类流动，而不同个体采用的标准通常并不一致；尤其是在过渡区域，流动会呈现多种状态的特征。其次，将流动划分为离散状态，隐含地意味着状态之间存在突变，而受过训练的观察者能够识别出，SID 在不同状态之间是平滑转变的（例如，间歇状态下湍流时段及其强度逐渐增加）。第三，用单一状态标签概括非定常流动的整个时间演变过程过于简化，也忽略了其时空复杂性。

方法与文章结构 – 本文通过对包含 113 部纹影影片的大型实验数据集逐帧应用客观、自动且具有物理可解释性的分类方法，解决人工分类的主观性所带来的问题。近期研究表明，密度界面及其在湍流中的分布和结构，对最终形成的混合起着关键作用 [6, 20, 21]。因此，我们将采用一种稳健的处理流程，从原始实验测量数据出发，根据观测到的密度界面的性质对湍流进行分类。

我们在第 II 节回顾实验数据集及其先前的人工分类。在第 III 节，我们介绍一种新的数据驱动方法，用于在低维相空间中自动发现不同的湍流簇。研究结果见第 IV 节。我们首先根据已识别簇的特征性密度界面形态和相干结构，对其作出物理解释，并着重比较这些簇与人工识别的状态。随后，我们研究输入参数空间中簇占比的转变，以及不同类型的间歇行为。最后，我们在第 V 节总结全文，并提出未来的研究方向。

II. 实验数据集与人工分类

A. 斜置分层管道（SID）实验装置

原理与几何结构 – SID 实验装置如图1a所示，由一条长矩形管道连接两个大型密闭储液槽组成，储液槽中装有不同密度的盐（氯化钠）溶液 $\rho_0 \pm \Delta\rho/2$。管道长$l = 2000$ 毫米，高$h = 50$ 毫米（流向纵横比 l/h =40），宽$w = 100$ 毫米（展向纵横比 $w/h = 2$），每个储液槽的容积为$V = 400$

升。打开隔离管道与储液槽的闸门后，管道内便形成双层交换流。储液槽内的静水压力差由约化重力$g' = \Delta\rho/\rho_0$ 引起，进而在中性界面两侧形成符号相反的（斜压）压力梯度，驱动流动，其层平均速度为 $\pm u/4 = \sqrt{g'h}/2$，其中u 为峰峰值速度的最大尺度。还可以将整个装置倾斜一个较小的倾斜角 $\theta > 0$，以进一步增强流动。这样，底层密度较大的流体会沿坡向下加速流动，上层浮力较大的流体则会沿坡向上加速流动，其加速程度超过单由压力梯度驱动时的情况。我们将流向轴x 沿管道方向设置，并使z 轴相对于真实垂直方向（即重力方向的反方向）倾斜 $-\theta$ 角。本文使用的实验装置与此前两代装置不同（第一代用于 [12]，第二代用于 [13–19, 22]）：(i) 管道位于储液槽外部而非内部，因此能够更清晰地观察流动；(ii) 储液槽更大，并以刚性盖板密封（没有自由液面）；(iii) 整个管道—储液槽哑铃形组件可整体倾斜；(iv) 管道通过喇叭形端部与储液槽平滑连接（额外增加 10 % 的长度）。

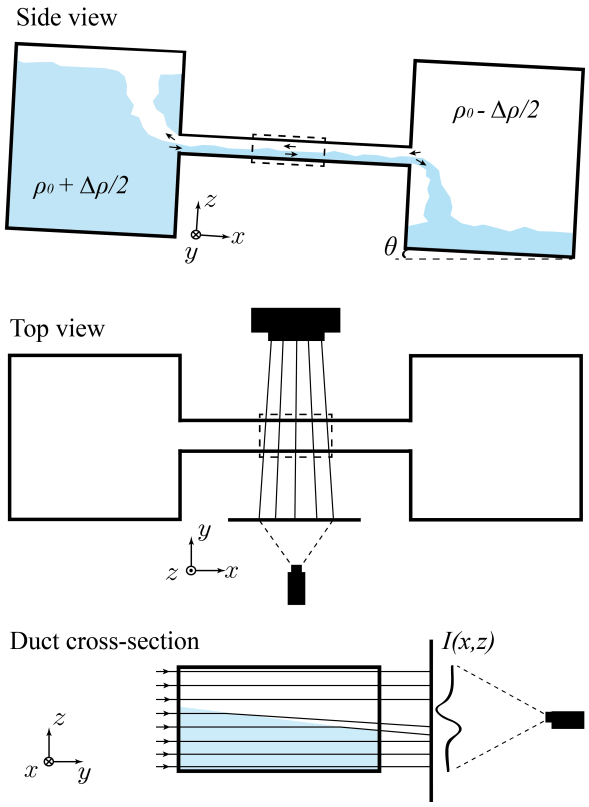
量纲分析 – 长度以$h/2$无量纲化，速度以$u/2 = \sqrt{g'h}$ 无量纲化，时间以h/u无量纲化，并将坐标系原点设在管道中心。因此，管道的体积为（x，y，z）$\in [-40, 40] \times [-2, 2] \times [-1, 1]$。三个无量纲动力学参数分别为：（i）倾斜角 θ（在不同实验中变化）；—(ii）雷诺数$Re = uh/(4\nu) = \sqrt{g'h}h/(2\nu)$（通过 $\Delta\rho/\rho_0$变化，范围为$Re = 300 - 5000$）；以及（iii）普朗特数$Pr = \nu/\kappa = 700$（固定）。在我们的实验中，水的运动黏度取为$\nu = 1.05 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$，盐的分子扩散率取为 $\kappa = 1.5 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$。

倾斜角与流动状态 – 以往的 SID 实验、模拟以及两层浅水波理论表明，受“水力控制” [12, 23]影响，管道中的平均交换流流率受限于无量纲分层平均速度 0.5。这意味着，倾斜 θ 导致的额外功率输入无法由更快层流的黏性耗散来平衡，而必须由耗散性更强的流动结构和界面混合来平衡。随着 θ 增加（为流动提供能量），以及雷诺数 增加（降低黏性耗散的作用），流动状态会变得愈发湍流，如图1b所示。我们将在第 II C 节更详细地讨论这些状态。

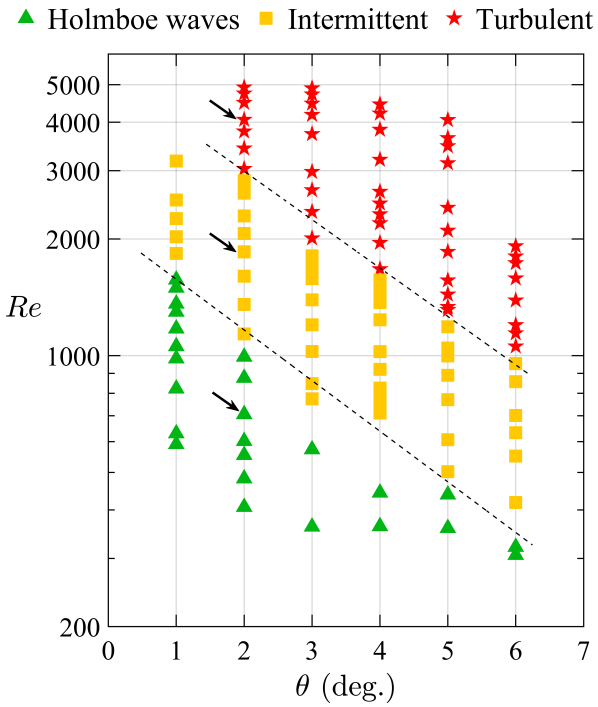
长时间序列 – SID中的非平衡剪切分层湍流会持续存在，直到每个储液槽都被流出流体填充至中部高度，这大约需要$V/(h^2 w)$ =1600个平流时间单位（A.T.U.），即由实验装置几何形状决定的固定无量纲时间。SID特别有价值之处在于，它能够在高雷诺数 $= O(10^3)$和普朗特数 $= O(10^3)$下采集此类长时间序列；这一参数空间与盐度或浊度驱动的环境及地球物理流动相关，但目前尚无法通过直接计算进行研究。

更广泛的意义 – 从动力系统的角度来看，SID 也很有价值，因为密度分层的稳定作用会产生比其他典型非分层流动（例如 [24]）更丰富的相干结构、间歇性和转变，且发生在更高的雷诺数 下。发现构成分层湍流骨架的新型高雷诺数 基元，对于多物理场湍流（例如旋转、多相或磁流体动力学湍流）的广泛建模具有重要意义。

(a) SID 实验装置



(b) 数据集及按状态进行的人工分类



(c) 阴影图像样本帧

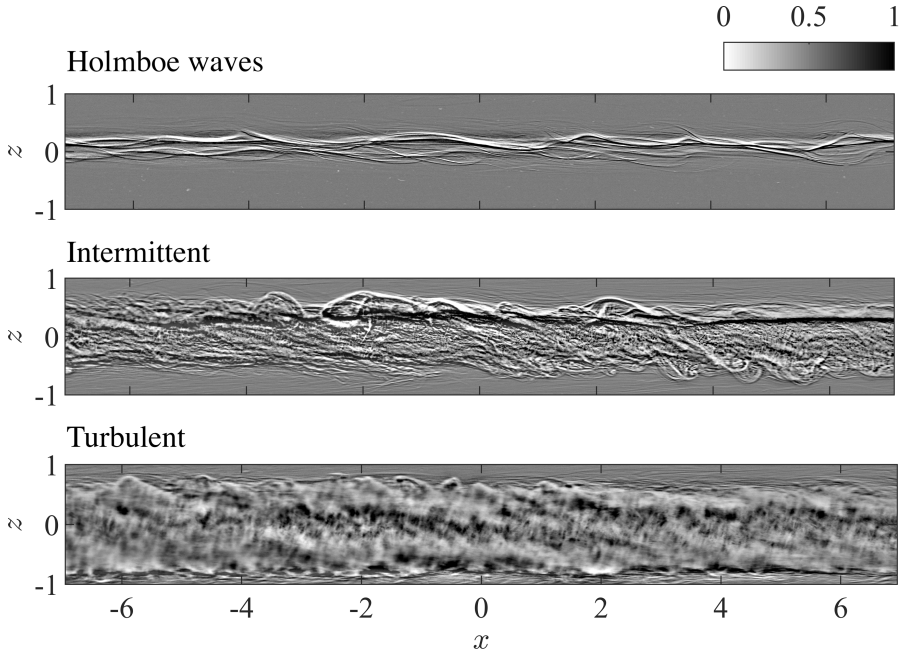


图1：实验数据。（a）用于显示密度场的实验装置示意图和阴影法测量。（b）输入参数空间中的 113 次实验（Re θ），并标注了人工分类的状态。虚线大致标示了状态转变。三个箭头指示了（c）中所示阴影图像样本帧 $\tilde{I}(x,z)$ 的位置。原始图像为 $\approx 3400 \times 450$ 像素。

B. 密度场的阴影图

原理 – 密度场通过纹影技术进行可视化：光线穿过管道，并测量其折射情况（图1a）。幻灯投影仪产生的近似平行光线沿展向y方向穿过管道，并投射到半透明屏幕上。局部扰动密度场 $\rho(x,y,z,t) - \rho_0$以及折射率场$N(x,y,z,t)$的曲率（垂直于光线方向）若发生变化，就会使光线聚焦或发散，从而改变到达屏幕的光强。在变化较弱的情况下，视频摄像机形成并记录的图像强度为（例如参见 [25, § 2.1]）

$$I(x,z,t) = \beta\, I_0(x,z) \int_{-2}^{2} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big) \rho(x,y,z,t)\, dy. \tag{2}$$

此处 β取决于 $(\rho_0/N_0)\partial N/\partial\rho$以及实验几何形状，而$I_0$是照明的（近似）均匀背景强度。因此，阴影图信号$I$ 特别适合检测密度界面；这些结构是本文用于区分不同湍流状态的关注对象。陡峭的密度梯度 $\partial\rho/\partial z$会使强度I在其两侧分别出现一个低（暗）峰和一个高（亮）峰。

采集——我们在六个不同的倾斜角 θ 下分别进行了113次实验，这些角度在 1° 和 6°之间等间距分布。每个实验批次均在固定的 θ 下进行：首先向左侧储液槽注入盐水，向右侧储液槽注入淡水，从而形成较大的 $\Delta\rho/\rho_0$ ，因此雷诺数 Re $\approx$2000 – 5000也较大。打开管道以启动交换流，并从管道两端产生的重力流到达管道中心的时刻开始计时（t $= 0$），此时 x $= 0$。随后使用摄像机录制纹影影片。摄像机倾斜角与实验装置的倾斜角相同 θ，以便直接在 (x, z) 坐标系中拍摄；拍摄范围覆盖管道内部的全高（50 mm），宽度为 $\approx 325 - 425$ mm（视实验批次而定），中心位于 x $= 0$。根据流速，将帧率设为5至100 fps，以达到典型的0.1无量纲 A.T.U. 帧间隔；通常记录400–600 A.T.U.（请注意，每次实验中的时间均以 h/u $=$h/(2$\sqrt{}$g′h) 无量纲化）。随后关闭管道两端并混合两个储液槽中的流体，以此结束实验，从而降低 $\Delta\rho/\rho_0$和雷诺数。接着开始并记录下一次雷诺数较低的实验，如此继续，直至达到最低雷诺数 $\approx 300 - 600$。这样便覆盖了图1b所示的 (Re θ) 参数空间，其中 $\theta = 1°$下进行了15次实验； $\theta = 2°$下进行了22次； $\theta = 3°$下进行了19次； $\theta = 4°$下进行了21次； $\theta = 5°$下进行了20次； $\theta = 6°$下进行了16次。对所有影片中的光强进行归一化，得到 ˜I(x, z,t)，舍弃初始瞬态（t < 100），并降低时间分辨率，具体说明见附录A 1。图1c展示了三个示例帧。最终数据集包含113部影片，共计50155帧，平均每次实验444帧，典型帧间隔为1 A.T.U.

C. 人工分类为流动状态

此前，人们曾使用定性流动可视化（包括纹影影片）将 SID 测量分为四种流动状态：层流（L）、霍姆博波（H）、间歇态（I）和

湍流（T），我们在图1b中也对当前数据集采用了这种分类。这种人工分类方法最早由 Macagno & Rouse [11]（下文简称 MR61）提出，随后 Meyer & Linden [12]（下文简称 ML14）在不知道 MR61 的情况下重新发现了该方法，并给出了几乎完全相同的描述。下面我们引用并比较他们对这四种定性上不同的流动状态的描述：

(L)“均匀的层流运动，具有笔直的流线”（MR61）以及“分隔两个流层的密度界面未受到扰动”（ML14）；(H)“具有规则波的层流运动”（MR61）以及“流动由波主导，并在界面上呈现霍姆博模态，同时伴有典型的尖 cusp 状波破碎”（ML14）；(I)“初生湍流，波开始破碎，并逐渐呈现不规则性和随机性”（MR61）以及“间歇态，表现出丰富的时空行为，其界面区域包含类 Kelvin–Helmholtz 结构的特征，以及另外两种低耗散状态的特征：薄界面和类霍姆博结构”（ML14）；(T)“明显的湍流以及跨界面的活跃混合”（MR61）以及“湍流高耗散界面区域，通常包含沿平均剪切方向发生剪切变形并连接两个流层的类 Kelvin–Helmholtz 结构”（ML14）。

图1c展示了《H》、间歇态和湍流状态下的纹影图帧示例。请注意，本文的数据集不包含《L》状态下的流动（该状态出现在低于图1b所考察范围的雷诺数 θ 下），因为其平坦、清晰的界面和稳定性对我们的分析而言并无研究价值。《间歇态》与湍流状态的主要区别在于，后者不会重新层流化。

局限性– 如引言所述，将整部影片归为单一状态会带来三个问题：(i) 任意性和不一致性；(ii) 隐含地假定存在突变；(iii) 忽视时空复杂性。例如，各种准层流波结构与更湍流结构之间的时间变化，是引人入胜的间歇状态的关键特征；这种状态有时会呈现准周期性的层流—湍流循环，并包含多种流动结构，因此似乎需要采用概率描述。三维速度和密度实验数据还揭示了不同“类型”的湍流，即使湍动能耗散相当（与雷诺数 θ[14, 16], 成正比）：低-θ 流动的涡量平方更为极端，但翻转事件少于高-θ 流动 [22]。仅凭肉眼难以从大量纹影影片中获得这些宝贵见解。因此，我们需要一种基于物理可解释的相干结构的自动分类方法，接下来将对其进行形式化并加以应用。

III. 降维与分类

A. 方法概述

本节介绍自动化流程：该流程接收在由雷诺数 Re和倾斜角

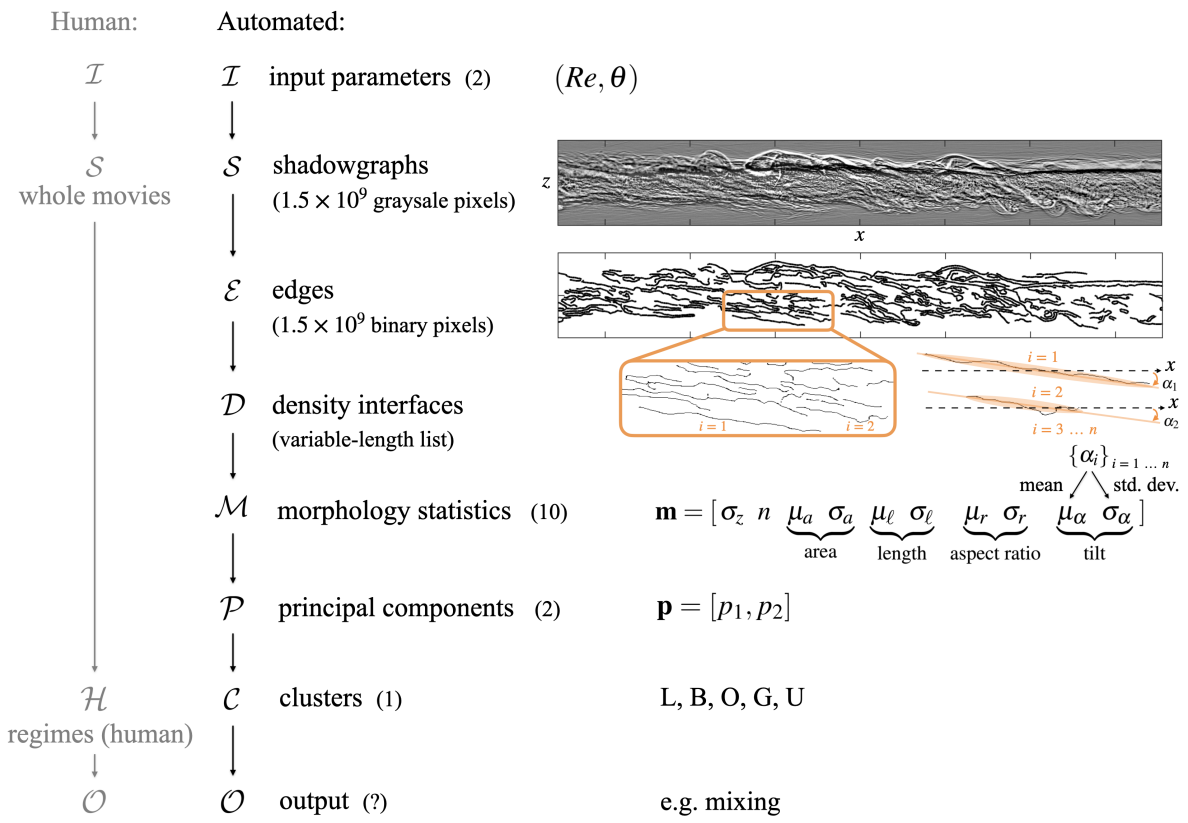


图 2：用于为每个阴影图帧分配簇标签的降维流程。新自动分类方法（从左数第二列，以黑色表示）中的空间及其连续映射，与传统人工方法（左侧，以灰色表示）进行了比较。方括号中的数字表示各空间的维度，突显了维数的大幅降低。

θ所构成的二维参数空间内采集的整套阴影图像数据集，并确定这些数据在另一个低维空间中的自然分组，将其划分为不同的簇，而簇的数量及其属性起初均未知。图 2 概述了我们的方法，后续各节将详细介绍每个步骤。

总之，首先将每幅阴影图像转换为一组二值边缘，用以描绘密度梯度突变的位置（见 § III B）。随后计算每个界面的多种几何属性，并利用其统计量构建一个低维特征向量（§ III C）。接着对全部形态向量进行主成分分析，结果表明，形态统计数据中的主要趋势可由一个二维子空间捕捉（§ III D）。然后对表示所有阴影图帧的二维向量进行自动分类（§ III E），识别出五个具有不同属性的簇。我们在 § IV 中通过分析逆映射（$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{S}$，$\mathcal{I}$）、将这些簇与人工识别的状态进行比较（$\mathcal{C} \to \mathcal{H}$），并研究簇内或簇间的时间轨迹，来解读这些簇。

我们注意到，传统的人工分类方法（图 2 左栏以灰色示意）将一组帧（即一部影片）直接映射到状态的一维空间 $\mathcal{H}$，其中包含三种可能的状态：霍姆博波（H）、间歇性湍流（I）和持续湍流（T）。

相比之下，我们的自动分类方法提供了一系列客观、可重复且易于理解的映射。这种可解释性使我们的方法区别于其他依赖相对不透明算法的数据驱动方法，例如深度神经网络（如自编码器）。

B. 边缘检测（$\mathcal{S} \to \mathcal{E}$）

坎尼边缘检测 – 使用 Matlab 的 edge 函数实现的坎尼边缘检测算法 [26], ，应用于每一帧阴影图帧（包含 ≈ 1.5 百万个像素），以将密度场的灰度纹影图像转换为二值图像，从而标示出密度梯度较大的位置。坎尼算法首先使用高斯滤波器对灰度图像（归一化后数值范围为 0 到 1）进行轻微平滑处理（此处采用各向同性标准差为 5 个像素的滤波器），然后以数值方式计算滤波后图像的梯度。为识别边缘，需要考虑两个阈值。若像素梯度高于上阈值（此处设为 0.5），则将该像素判定为边缘。若像素梯度低于下阈值（此处设为 0.05），则予以舍弃。若像素梯度介于两个阈值之间，则只有当它与一个高于上阈值的像素（即边缘）相连时，才将其判定为边缘。这种双阈值处理能够更好地检测真实的弱边缘（避免漏检），并增强对噪声的鲁棒性（避免误检）。所有帧均采用相同的阈值，且检测到的轮廓仅轻微依赖于所用阈值。

结果 – 图3展示了图1c中纹影图 $\tilde{I}(x,z) \in \mathcal{S}$ 对应的二值边缘图像 $e(x,z) \in \mathcal{E}$ 示例。边缘通常只有一个像素宽，为便于观察，此处以粗得多的黑色轮廓显示。霍姆博（H）流（上图）呈现出相对清晰但起伏不定的密度界面，其上有尖 cusp 波，且通常有多条边缘（或丝状结构）层叠在一起。间歇态（I）流（中图）中较厚的中间密度层产生了更多边缘，其中一些沿 x 方向较短，且相对于 x 轴倾斜得更明显。湍流（T）流中的中间层更厚，湍流程度也极高，因此其中检测到的边缘很少（在较低的 $|z|$ 处）；这是因为湍流的三维特性使生成的阴影图像变得模糊。不过，在画面上缘和下缘也检测到了一些边缘（$|z| \approx 1$）。中间层内的边缘往往较短，且偏离水平方向倾斜，揭示了不稳定性和翻转运动；而其两侧的边缘较长且更平缓，表明稳定界面相对平静。这与梯度理查森数剖面 $Ri_g(z)$ [14, 图 4] 一致（该剖面量化了使系统失稳的剪切与稳定分层之间的竞争）；湍流层内的 $Ri_g \approx 0.15$ 较低，而两侧界面处的 $Ri_g > 1$ 较高。

C. 离散密度界面与形态统计量（$\mathcal{E} \to \mathcal{D} \to \mathcal{M}$）

连通分量–生成清晰密度界面的二值图像后，我们希望量化每条连通边缘的形态学性质。为此，首先需 ap-

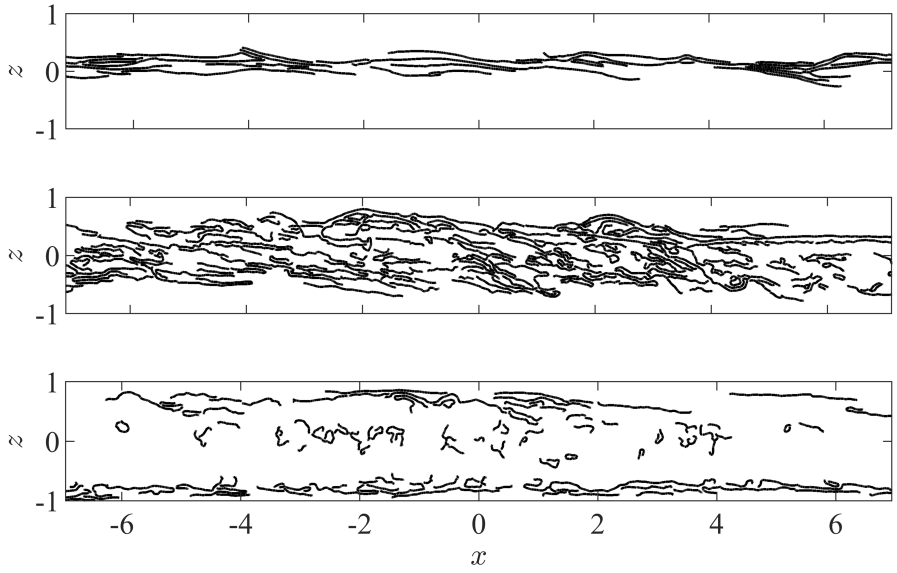


图 3：样本二值边缘帧（$\mathcal{E}$ 空间），勾勒出从图 1c 的阴影图（$\mathcal{S}$ 空间）中映射出的锐利密度界面（黑色）的位置，分别对应人工分类的三种状态：霍姆博（H，顶部）、间歇态（I，中部）和湍流（T，底部）。为便于观察，此处显示的边缘比检测到的边缘粗得多。

通过对二值图像应用连通分量算法，使用 Matlab 的 bwconncomp 函数。此处将连通分量定义为一组像素，其中任意两个像素可通过四条边或四个角中的任意一处相连（通常称为二维八邻域像素连通性）。换言之，如果两个相邻像素在水平方向、垂直方向或对角线方向上相连，则视为属于同一密度界面。对于给定帧，该算法会返回n 个离散的密度界面，并以属于各界面的像素列表作为特征。

边缘属性 – 随后，我们使用 Matlab 的 regionprops 函数及以下四个参数，计算给定帧中每个密度界面的形态：‘面积’，返回界面实际包含的像素数；‘长轴长度’和‘短轴长度’，分别返回与界面具有相同归一化二阶中心矩的椭圆长轴和短轴的长度（以像素为单位）；以及‘方向角’，返回该椭圆长轴与x轴之间的夹角（正角表示逆时针旋转）。随后将面积和长度从像素转换为无量纲单位（如图 3 的坐标轴），以便使用有意义的物理量对所有帧进行一致比较。这样，对于每一帧，我们得到一组n 个无量纲密度界面面积 $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$、长度 $\{\ell_i\}$（取自长轴）、纵横比 $\{r_i\}$（长轴与短轴之比）以及倾斜角 $\{\alpha_i\}$（0 表示与 $\hat{}x$ 对齐，而 $\pm 90^\circ$ 则分别与 $\pm\hat{}z$ 对齐）。这些列表可视为属于空间 $\mathcal{D}$，用于描述每帧中边缘的形态学性质；通过绘制a ℓ、r α的直方图，可以方便地将其可视化（我们将在 § IV B 中展示）。

形态向量 – 最后，为了将一帧内多个边缘的特性提炼为一个向量，我们计算了这些分布的均值（μ）和标准差（σ）

$\{a_i\}$，$\{\ell_i\}$，$\{r_i\}$，$\{\alpha_i\}$，用于表征其直方图的质心和转动惯量。在这个八维向量的基础上，我们又加入了两个分量：界面的数量n，以及边缘相对于垂直坐标 $\sigma_z = \sqrt{\langle \langle e \rangle_x (z - \langle e \rangle_x,\ z)^2 \rangle_z}$的转动惯量，其中较大的值表示密度界面围绕平均位置的分布范围更大。由此，我们为每一帧得到如下包含 10 个维度的形态统计量向量：

$$\mathbf{m} = [\sigma_z\, n \underbrace{\mu_a\ \sigma_a}_{\text{area}} \underbrace{\mu_\ell\ \sigma_\ell}_{\text{长度}} \underbrace{\mu_r\ \sigma_r}_{\text{纵横比}} \underbrace{\mu_\alpha\ \sigma_\alpha}_{\text{tilt}}] \in \mathcal{M}. \tag{3}$$

随后，将由所有帧生成的 50155 个行向量排列成一个高而窄的矩阵，记为 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{50155\times 10}$。

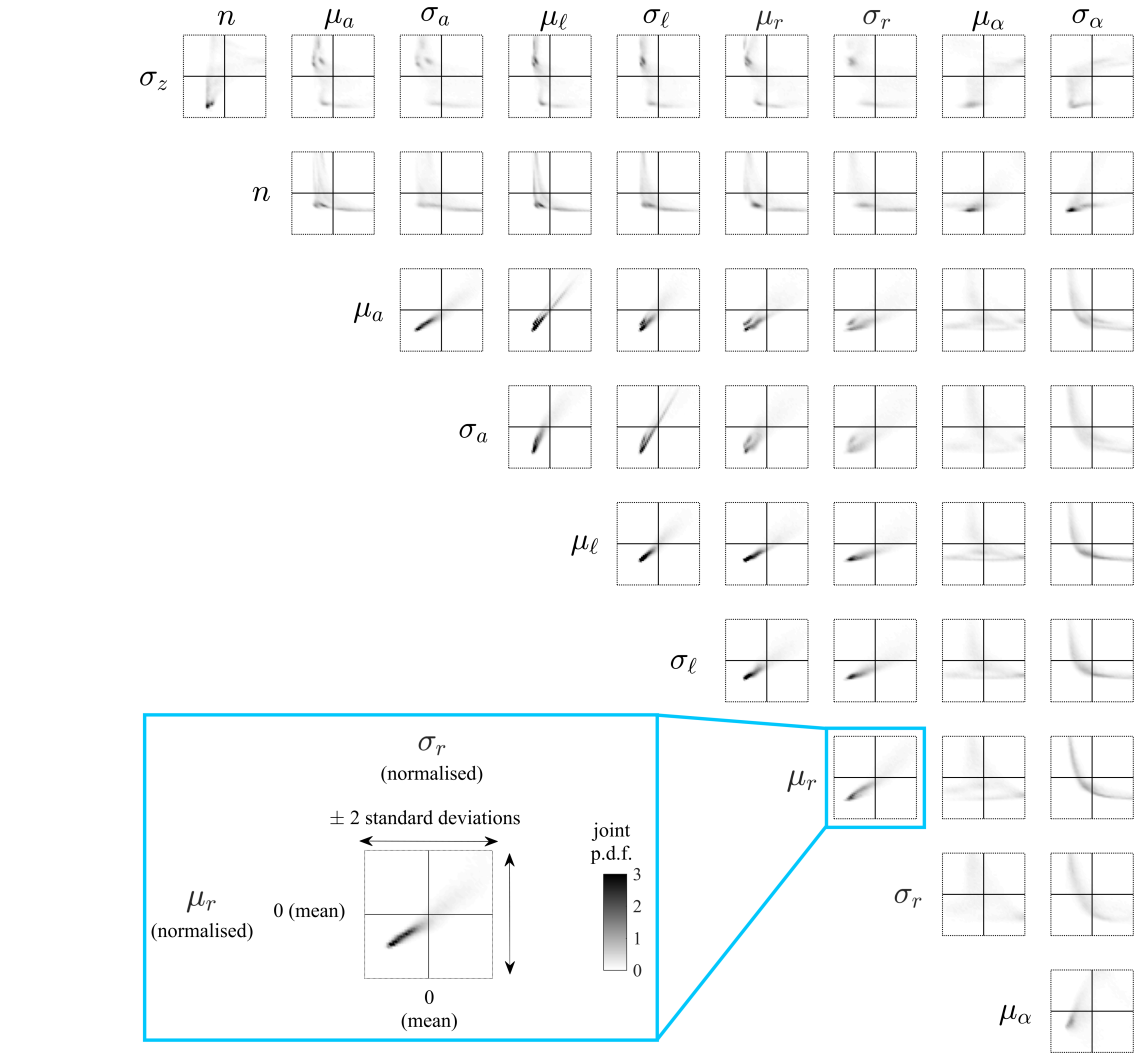
D. 主成分分析 ($\mathcal{M} \to \mathcal{P}$)

研究动机– 聚类之前，值得通过主成分分析（主成分分析）[27]，利用 $\mathcal{M}$ （参见定义 3）中形态特征之间潜在的相关性。我们的目标是进一步降低数据的维数，以便于解读聚类结果，并缓解“维数灾难”对聚类算法效果的影响，即聚类空间的体积会随着维数增加而急剧增大。

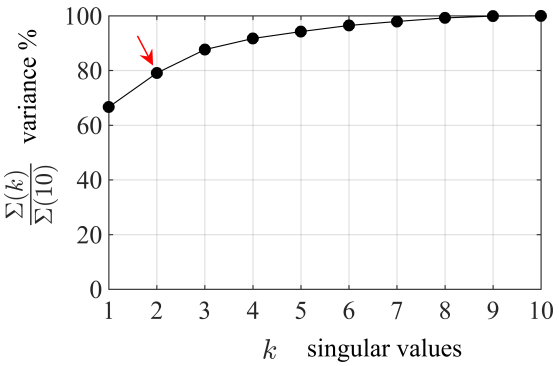
相关性与秩二近似 – 首先，我们对$\mathbf{M}$ 的每一列进行归一化，使其˜均值为零、标准差为一，从而得到$\mathbf{M}$。图4a显示了所有$10\times 9/2 = 45$变量对之间的相关性，揭示了协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}^T\,\tilde{\mathbf{M}}$的结构。我们发现了许多正相关和负相关，这说明有必要将这些数据表示在由线性不相关变量构成的基底中，这些变量称为主成分。我们对 $\tilde{\mathbf{M}}$进行奇异值分解（SVD）（详情参见附录A 2），并在图4b中绘出前k个奇异值所捕获的累积方差$\Sigma(k) = \sum_{l=1}^{k} \sigma_l^2$。我们发现，前$k = 2$个主成分捕获了总方差的79%，考虑到可视化二维相空间的便利性，我们选择在$k = 2$处截断SVD，从而得到新的秩二数据矩阵$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{50155\times 2}$，其中包含二维向量$\mathbf{p} \in \mathcal{P}$。

主成分空间– 图 4c 绘出了两个新的正交基向量$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ 在先前基底中的坐标，它们张成了 $\mathcal{P}$ （指向方差最大的方向），并张成$\mathcal{M}$。它们明确展示了构成每个主成分的形态统计量的线性组合，从而定义了 $\mathcal{M} \to \mathcal{P}$映射。简而言之，主向量$\mathbf{v}_1$对面积$a$、长度 ℓ和纵横比s 赋予几乎相同的权重，且取正值（≈ 0.4，橙色）；对其余统计量赋予负值（≈ -0.3，浅蓝色），但平均倾角 μ_α的权重较弱。另一方面，主向量$\mathbf{v}_2$, 对平均倾角以及界面数量n （红色）赋予的权重则大得多。

(a) 形态统计量之间的相关性



(b) 方差与$k = 2$ 截断



(c) $\mathcal{M} \to \mathcal{P}$ 映射

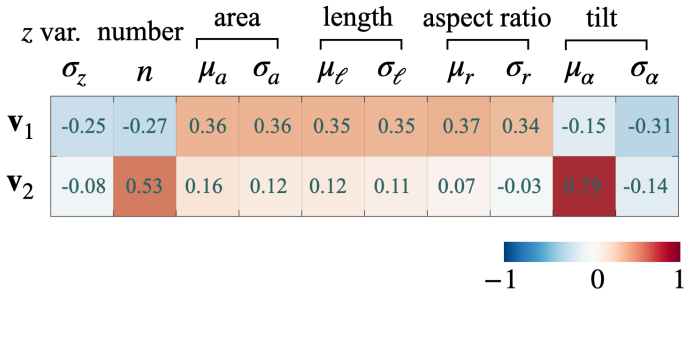


图 4：(a) 描述密度界面形态的 10 个统计量的联合概率密度函数（见式 3）。示例插图（蓝色）显示了 μ_r（密度界面的平均长宽比）与 σ_r（其纵横比的变异性）之间的相关性。(b) 主成分（或奇异值）所捕获的累积方差；红色箭头标示$k = 2$ 捕获了总方差的 79%。(c) 前两个主单位向量$\mathbf{v}$ 在形态统计量原始基下的坐标。

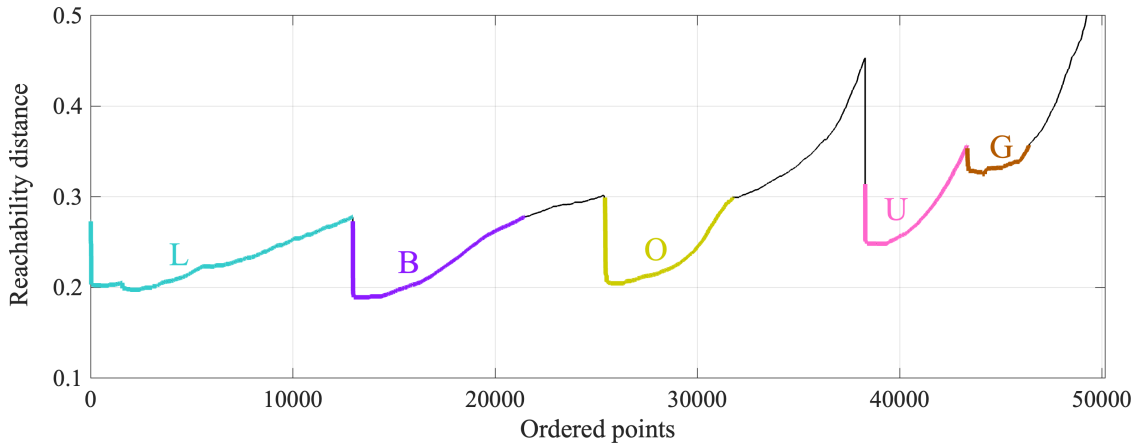


图5：OPTICS算法检测到的五个不同簇（以颜色区分，标记为L-G），对应于可达距离（定义见附录A3）的局部极小值。未聚类的数据以黑色表示。对于最后 ≈ 1000 个未聚类点，距离单调递增，超过y轴的0.5上限。

E. 聚类（$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$）

算法——将密度场每一帧中的数据简化为二维空间$\mathcal{y}$中的一个点后，我们现在对所有帧构成的数据集进行聚类分析。我们选择使用基于密度的聚类算法OPTICS [28]（“排序点以识别聚类结构”），该算法近期已用于从海洋微结构数据集中发现湍流混合的不同区域 [29]。与其他算法相比，OPTICS有三个主要优点：它能自动确定最佳簇数，能够识别形状和密度任意的簇，并且对噪声和离群点具有鲁棒性 [30]。OPTICS使用一种称为“可达距离”的度量d_{reach}来计算**P** 各行之间的成对距离（详情见附录A 3）。d_{reach} 值较小，表示$\mathcal{y}$中帧的局部密度较高 $\mathcal{P}$。

结果 – 输出的可达性图如图 5 所示。该图从左向右依次生成：从**P**中的任意一行开始，OPTICS 每一步都会根据可达距离移动到下一个最近点，并绘制该步的d_{reach}。因此，OPTICS 会朝着局部密度较高的区域移动，这表现为d_{reach}持续减小。访问完该高密度区域中的每个点后，它会自动移至其间较稀疏区域中的下一个最近点，这表现为d_{reach}增大，然后进入新的局部高密度区域（如果存在），依此类推。

图 5 中的五个谷揭示了五个簇，极小值越低，表示簇越密集。借助这张可达性图，我们手动划分并标记了五个簇 L、B、O、G、U，同时排除了簇间的一些局部极大值，因为我们认为它们未形成簇。总体而言，所有点中有 72 % 属于簇（L 中占 26 %，B 中占 17 %，O 中占 13 %，G 中占 6 %，U 中占 10 %），另有 28 % 未形成簇。下一节将对这些簇作出物理解释。

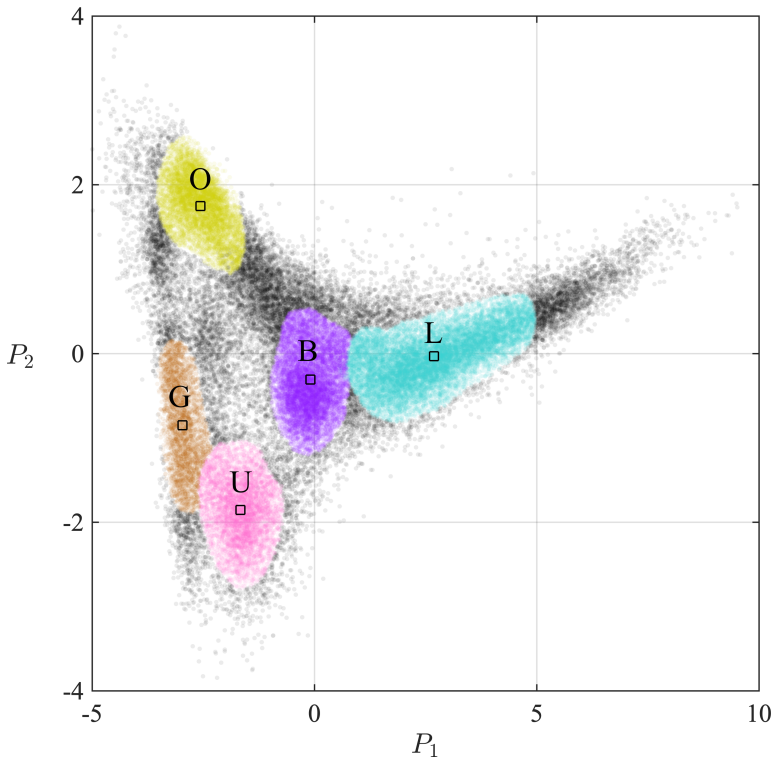


图 6：在密度界面形态统计量的两个主导主成分构成的空间中绘制的簇（如图 5 所识别并着色）。两个主成分坐标与 10 个形态统计量之间的关系如图 4c 所示。

IV. 结果与物理解释

识别出五个簇后，我们首先分析它们在聚类空间中的分布，以解读其特性；随后回溯至原始阴影图。基于这些认识，我们进一步描绘 SID 参数空间中的主导动力学特征。

A. 按主成分（$\mathcal{C} \to \mathcal{P}$）来衡量

图 6 显示了五个簇 L、B、O、U、G 在前两个主成分所张成的子空间中的位置。每个半透明圆圈代表密度场的 50155 个阴影图帧之一，并根据图 5 中的可达性图为其分配的簇着色。颜色越深表示点的局部密度越高。黑色圆圈表示 28 % 的未聚类帧，这些帧未能形成局部密度足够高的区域，因此不被视为属于任何簇。

数据大致呈三角形（非凸形）分布。由于数据最初采用 z 分数进行了标准化处理（见 § III D），原点对应于数据的均值，而 P_1 和 P_2 分别表示沿相应主成分分析向量方向偏离均值的标准差数量。绝大多数点属于矩形 $[-5,10]\times[-4,4]$，且全部五个簇

属于较小的矩形 $[-4,5]\times[-3,3]$。五个黑色方形符号表示每个簇的质心，接下来我们将通过投影回形态空间来解读它们 $\mathcal{M}$。

B. 从密度界面形态角度（$\mathcal{C}\to\mathcal{M}$）

图 7a 展示了图 6 中所绘簇质心对应的原始十项归一化形态统计量。对于每个簇，白色表示该属性等于 50155 个点整体分布的平均值，而蓝色和红色分别表示该属性低于和高于平均值。图 7b 展示了底层物理（未归一化）形态统计量$\mathbf{m}\in\mathcal{M}$ 的分布直方图（见公式 3）。白色条形表示整体分布，其他颜色表示各簇的贡献。综合分析图 7a-b，我们归纳出以下各簇的典型描述。这些描述将通过图 8 中各簇的代表性纹影图像加以说明（详见 § IV C）。

L：密度界面通常集中在单个集合中（即边缘呈单峰分布，且 σ_z 较低），数量稀少（$n\approx10-30$ 较低），但面积相对较大（ μ_a 较高）、较长（ $\mu_\ell\approx1.5-3$ 较高）、较细长（ $\mu_r\approx30-45$ 较高）且较平坦（倾斜度 $\mu_\alpha\approx0-6^\circ$ 较低）。其面积、长度和纵横比在空间上（任一瞬时帧中）表现出显著变异性（ $\sigma_a,\sigma_\ell,\sigma_r$ 较高），但倾斜度的变异性不明显（ σ_α 较低）。这些特性表明，流动快照相对稳定，呈层流状，图 8 中的典型图像将对此加以说明。

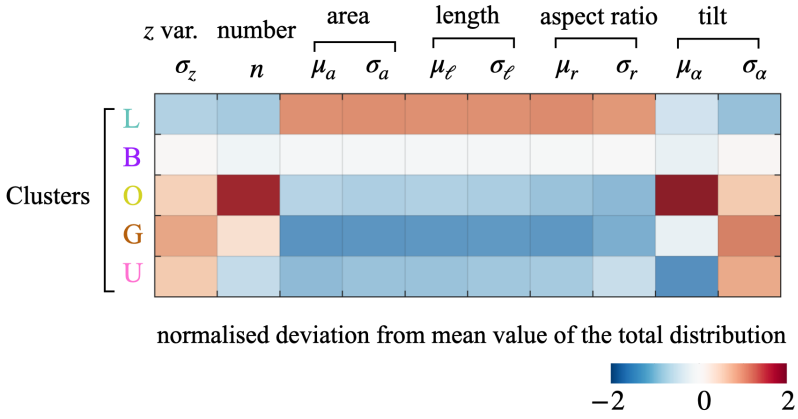
B：在所有簇中，密度界面的平均特征最为明显：平均垂直扩展范围 σ_z、数量（$n\approx30-150$）、长度、纵横比和倾斜度，无论是均值还是空间变异性（例如，均值 $\mu_\alpha\approx2-10^\circ$ 和标准差 $\sigma_\alpha\approx5-15^\circ$）皆如此。这些特征表明其对应的快照稳定性较低，处于中间状态。

O：密度界面在$z(\sigma_z\approx0.4-0.6)$方向上分布相当分散，数量远远最多（$n\approx300-600$），倾斜程度也最大（$\mu_\alpha\approx9-16^\circ,\ \sigma_\alpha\approx10-25^\circ$），但长度较短（$\mu_\ell\approx0.5-1$），厚度较大（$\mu_r\approx5-15$）。这些特征表明，这些快照具有很强的不稳定性，其中存在大量彼此独立的密度界面。

G：密度界面在$z(\sigma_z\approx0.5-0.8)$方向上分布得非常分散，倾角变异性很强（$\sigma_\alpha\approx30-40^\circ$），但它们的尺寸最小、长度最短（{v5），厚度最大（$\mu_r\approx5-10$）。其数量（$n\approx100-300$）和平均倾角（$\mu_\alpha\approx0-10^\circ$）均处于平均水平。这些特征表明，与簇 O 相比，湍流混合发生在更厚的层中，但可检测到的界面更少且更稳定，这可能是由于密度梯度较弱。

U：密度界面与簇 G 中的密度界面相似，但数量少得多（$n\approx40-120$），且更加平坦，其平均倾角具有独特性——经常为负值（$\mu_\alpha\approx-5^\circ$ 至 5°），并且变化很大（$\sigma_\alpha\approx7-30^\circ$）。这些特征表明，不同的密度界面数量较少，它们可能主要由混合层两侧最强（因此也最稳定）的密度梯度，以及混合层内部少量较弱且更具三维特征的小尺度梯度组成。一旦按照式（2）沿整个展向进行积分，这些梯度就会显著模糊混合层，从而导致检测到的边缘数量较少。

(a) 各簇的典型界面形态



(b) 形态统计量的分布

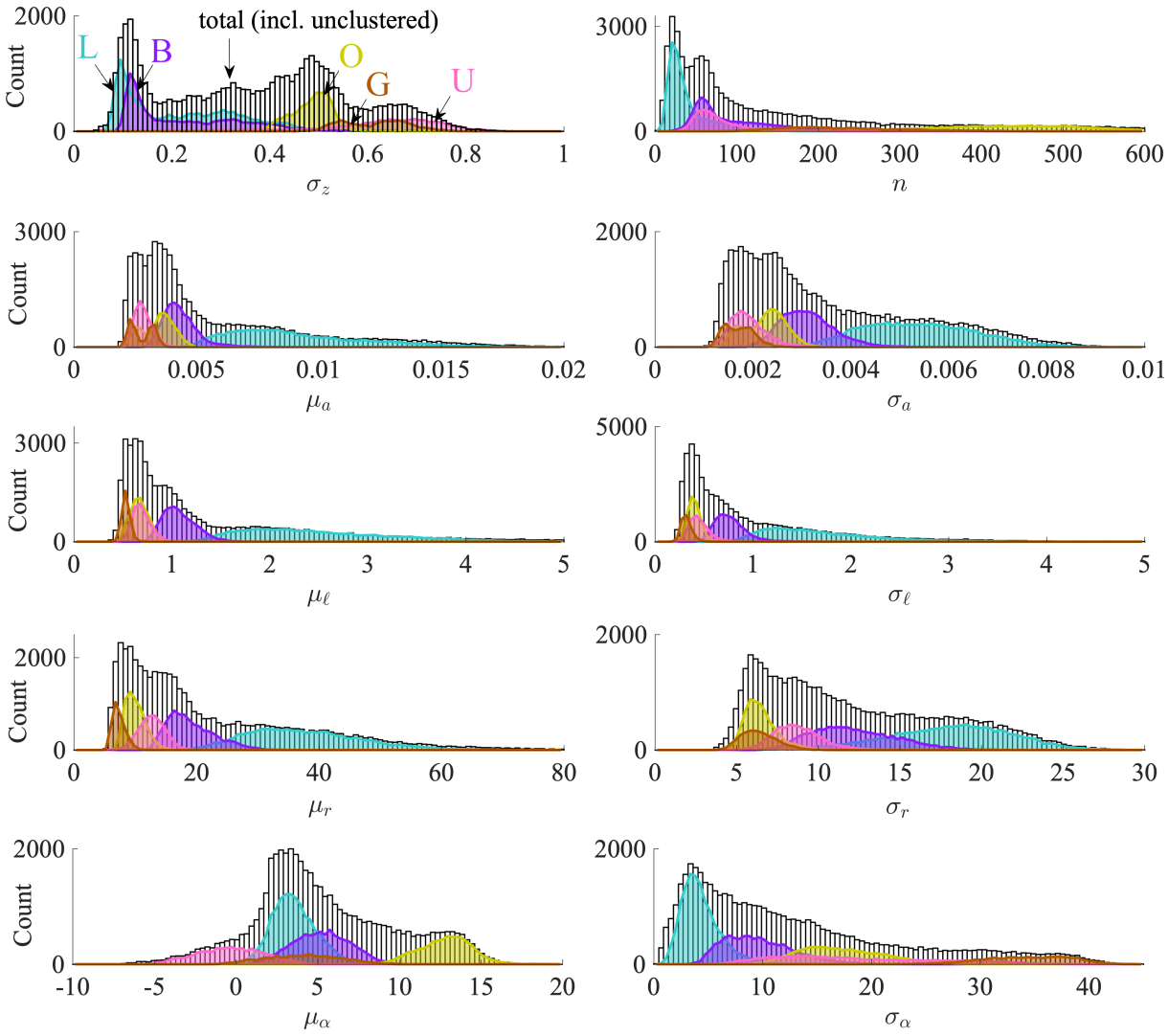


图 7：(a) 簇质心（黑色方块，图 6）的密度形态属性（向量**m**，见式 3），以相对于总体分布的归一化偏差表示。(b) 物理无量纲空间中各分布的直方图及各簇的贡献 $\mathcal{M}$。

以密度界面的形态学性质解读每个簇时所能达到的细节程度，明显比人眼选定的不同流动状态的先前定性描述更具信息量。这些定量特征似乎表明，从簇 L 到簇 U，湍流程度逐渐增加；这一点或许在σ_z 的直方图中表现得最为清楚，该直方图显示了从 L 到 U 沿 z 方向分布的密度界面逐渐扩展。下一节将利用原始阴影图和边缘图像对这些发现加以确认和说明。

C. 从边缘和阴影图角度来看（$\mathcal{C} \to \mathcal{E} \to \mathcal{S}$）

图8展示了阴影图 $\in \mathcal{S}$ 和边缘图像 $\in \mathcal{E}$的示例，其中包括分别最接近五个簇质心的帧（在图6中标记为 L 到 U），以及另外五个未聚类帧；后五个帧经过选择，用于覆盖较为稀疏、位于其间的未聚类区域（LB、BO、OG、BG、LU）。

帧 L 展示了上一节对簇 L 所作的形态学描述。然而，凭直觉判断，它并不符合最层流的状态。其参数（$\theta = 3^\circ$ 和 Re =1809）反而将其置于间歇状态的上限附近（见图1b）。因此，该帧捕捉到了一个再层流化阶段，因为阴影图中仍呈现出过去湍流阶段遗留的小尺度结构，而在边缘图像中，这一结构则（仅部分地）通过多个平坦且稳定的密度界面叠加而得到反映。该帧代表了我们所谓的层流化湍流。作为参考，具有单一平坦、尖锐（像素厚度）的密度界面且该界面位于 $z = 0$ 中心的稳定层流，其密度剖面将给出 $\mathbf{m} \approx [0,\ 1,\ 0.0056,\ 0,\ 16,\ 0,\ 3500,\ 0,\ 0,\ 0] \Rightarrow \mathbf{p} \approx [1287,\ 248]$，也就是说，它将远离（$P_1$,$P_2$）图中三角形的右上顶点。

帧 LB 和 LU 直观上可归为湍流程度最低的帧——尽管它们邻近湍流程度更高的簇 B 和 U—— 并展示了广为人知的 Holmboe 波状态。Holmboe 不稳定性由宽剪切层两侧的两个涡量波与剪切层中心较尖锐密度界面上的内重力波相互作用引起 [31]。这种线性不稳定性会以有限振幅非线性饱和，形成一对形状独特、呈尖 cusp 状的反向传播模态，并且无论运行时间多长都能持续存在。在这些振幅下，三维混合仅微弱发生，因此这些帧代表了我们所称的*Holmboe* 波湍流的“低端”。

帧 B 展示了我们所称的编织湍流，其特征是中央有一对上下叠置、平坦的“编织带”，并因纹影图强度（黑白色调）的强烈反差而显现出显著的密度曲率。这两个强界面构成了基本上三层的密度剖面。较弱的反差（灰色色调）显示出若干较弱的界面，但这些界面并未延伸至管道壁。

O 帧展示了翻转湍流，其特征是大量短小、不稳定的界面遍布管道的大部分高度。大多数“细丝状结构”在阴影图中对应较弱的密度曲率和对比度，这使其有别于编织湍流。BO 帧展示了两个主要的编织状界面（如 B 帧所示）短暂卷起并混合的过程，从而形成更多倾斜的细丝状结构（如 O 帧所示）。

帧 G 和 U 分别展示了我们可以称之为颗粒状湍流 和无结构湍流的现象。两者均具有强烈的三维密度曲率，且贯穿整个管道高度。回顾可达性图（图 5）和（P_1,P_2）图（图 6），我们可以发现，簇 G 和 U 彼此相邻，实际上甚至可以近似视为一个更大的单一簇，这一点也得到了这些帧的证实。

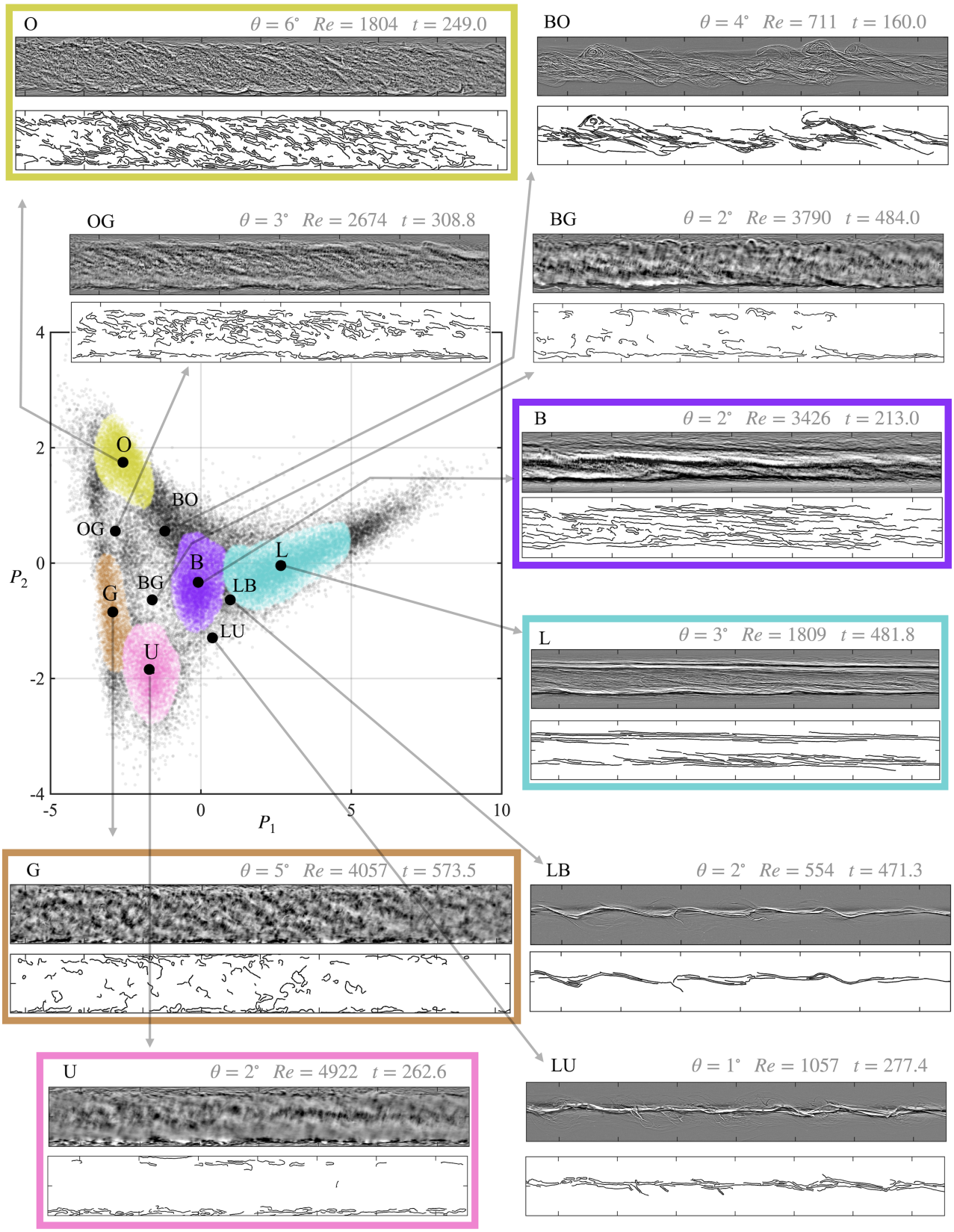


图 8：每个簇质心对应的纹影图和边缘图像（彩色），以及簇间帧的其他示例。每帧右上角标注了输入参数（雷诺数 θ）和时间 t。各帧均按相同高度缩放，因此长度各不相同。

然而，帧 G 的对比度略强，因此检测到的边缘数量更多，尤其是在中部深度处；其中一些边缘近乎呈圆形，使整体呈现出颗粒状外观。帧 U 中的界面湍流结构要少得多，这可能是由于其三维性更强且具有动态活跃的特征尺度。U 中的边缘往往比 G 中的更平坦，并且几乎全部位于顶部和底部壁面附近；在这些位置，厚厚的混合流体中间层与相对层流且未混合的流体边界层相接。肉眼似乎能在 U 中辨认出两条由较浅灰色调构成的湍流带，它们夹着一片略深的区域，但这种大尺度图案过于微弱，无法被边缘算法检测到。

帧 OG 展示了翻转流与完全颗粒状湍流之间的一个中间阶段，兼具两种类型的特征。需要指出的是，输入参数集合（普朗特数 θ）并不能让我们先验地将 OG 中的湍流分类为介于 O 和 G 之间的状态。同样，帧 BG 展示了湍流带（B）如何逐渐变得更厚、更模糊，成为形成颗粒状湍流（G）之前的中间阶段。位于簇 B 和 U 中间位置的帧 BU 可能会呈现出类似的外观。

通过数据驱动的方式发现这些不同类型的湍流，是本文的首个重要发现。未来可以考虑借鉴 [32]的方法（其使用了密度梯度场），对每一帧中的各种“动力学差异区域”进行分类。无监督神经网络也已被用于检测过渡边界层中的层流/湍流边界[33]（使用速度场）；另有研究将计算域划分为多个区域，并采用聚类方法识别“包含条纹、湍流斑块 [...] 以及发展充分湍流的区域” [34]。

D. 从人工分类的状态来看（$\mathcal{C} \to \mathcal{H}$）

图 9 展示了二维主成分空间 $\mathcal{P}$ 中人工分类的状态 H、I、T $\in \mathcal{H}$（见 § II C）与使用我们的数据驱动技术得到的簇 L-U $\in \mathcal{C}$ 之间的重叠情况。所有属于标记为“霍姆博”的影片的帧均以绿色显示（左图）；同样，标记为“间歇态”的影片（中图，以黄色显示）和标记为“湍流”的影片（右图，以红色显示）也分别以相应颜色显示。每个面板中的插图显示了属于各个簇的帧所占比例。

霍姆博（H）状态仅涵盖簇 L 和 B，只有少数未聚类帧位于三角形的右上顶点附近、朝向稳定层流的区域，或位于 L 和 B 的下边界之外（见图 8 中的帧 LB 和 LE）。这意味着，具有鲜明霍姆博类型特征的波和湍流所呈现的密度界面范围，类似于轻微受扰动的层流、层流化湍流（位于 L 中）或编织湍流（位于 B 中）。

间歇态（I）区域大致均等地涵盖簇 L 和簇 B，但稍微偏向两者的上边界（与 H 区域相反）；此外，在较小程度上也涵盖簇 O。该区域还包含比例大得多的未聚类帧，这些帧位于右上顶点附近以及 B 与 O 之间。这意味着，被归类为间歇态湍流的流动呈现出我们预期的大多数特征，并且这些特征平滑连续地变化：稳定层流，以及翻转、编织状和层流化湍流。

湍流（T）状态中，簇 O、G、U 所占比例大致相同，另有四分之一的帧未被归类。这意味着，被归类为完全湍流的流动比其他任何流动都具有更多的翻转现象，而且只有这种流动呈现出颗粒状和无结构湍流。此外，T 状态下的帧在 $\mathcal{P}$ 中分布最广，涵盖了所有

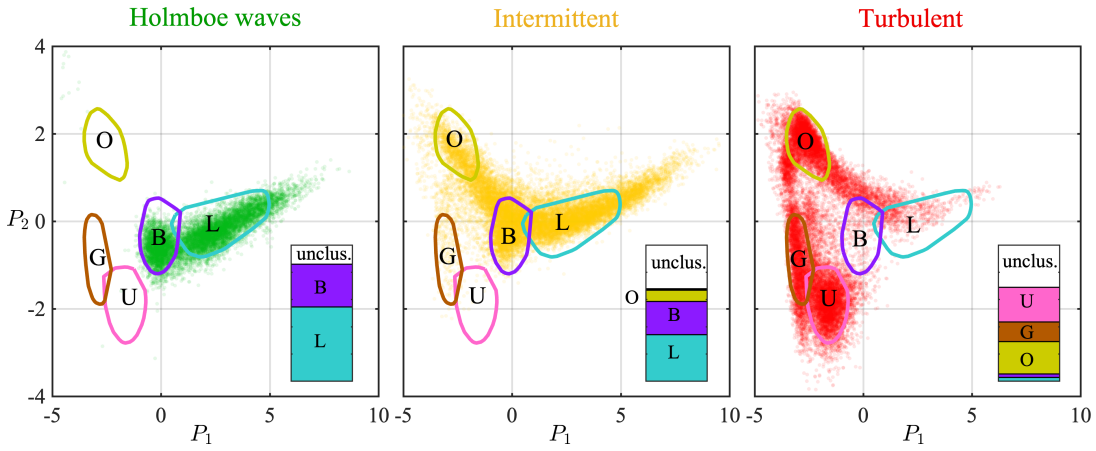


图9：比较主成分空间中各簇的位置（以其凸包周长近似）与人工分类的三种状态（半透明彩色圆圈）：霍姆博波（左）、间歇态（中）和湍流态（右）。插图表示每个簇中帧所占的比例。

簇在一定程度上的分布区域，以及大多数未归类区域。这表明，密度界面的变异性（随时间变化及跨越 $\mathcal{I}$ 的变异性）在 T 状态下比在 I 状态下更丰富。

E. 按输入参数（$\mathcal{C} \to \mathcal{I}$）

现在我们研究图 10 中各簇所占时间的分布。图中在每次实验的运行参数点（雷诺数 θ）处，以一条水平彩色条表示 113 次实验的结果。图的上方和最右列分别展示了对全部数据按雷诺数 和 θ 分箱后得到的相应概率密度函数。

在中等雷诺数 $\approx 1500-3000$下，从左向右移动（ θ增加），我们发现在 $\theta = 1°$处几乎全是编织湍流（B）；随着参数变化，编织湍流逐渐被更多的翻转湍流（O）取代，最终完全转为翻转湍流。在中等 $\theta \approx 2-5°$下，从下向上移动（雷诺数增加），我们发现层流化湍流（L）逐渐减少，随后编织湍流（B）先在雷诺数 ≈ 500 处增加，翻转湍流（O）再在雷诺数 ≈ 1000 处增加（同时还出现中间态和未分类类型）。接着，我们发现未分类湍流减少，而完全三维湍流增加：先是在雷诺数 ≈ 2500处出现在簇 G 中，最终在雷诺数 $\gtrsim 3500$处出现在簇 U 中。分箱后的概率密度函数表明，随着雷诺数和 θ 变化，跨越 $\mathcal{I}$ 的湍流类型变化，是通过各簇所占时间的逐渐转变实现的。

对高Re 分层湍流参数空间进行这种自动化、定量表征，构成了本文的第二项关键发现。未来的改进应注意，我们的结果精度有限，因为实验数据集未以精细分辨率均匀采样整个 $(Re\ \theta)$ 平面。此外，尽管我们的时间序列相对较长（平均为 444 A.T.U.），更长的时间序列将有助于更好地收敛至完整的潜在动力学图景。

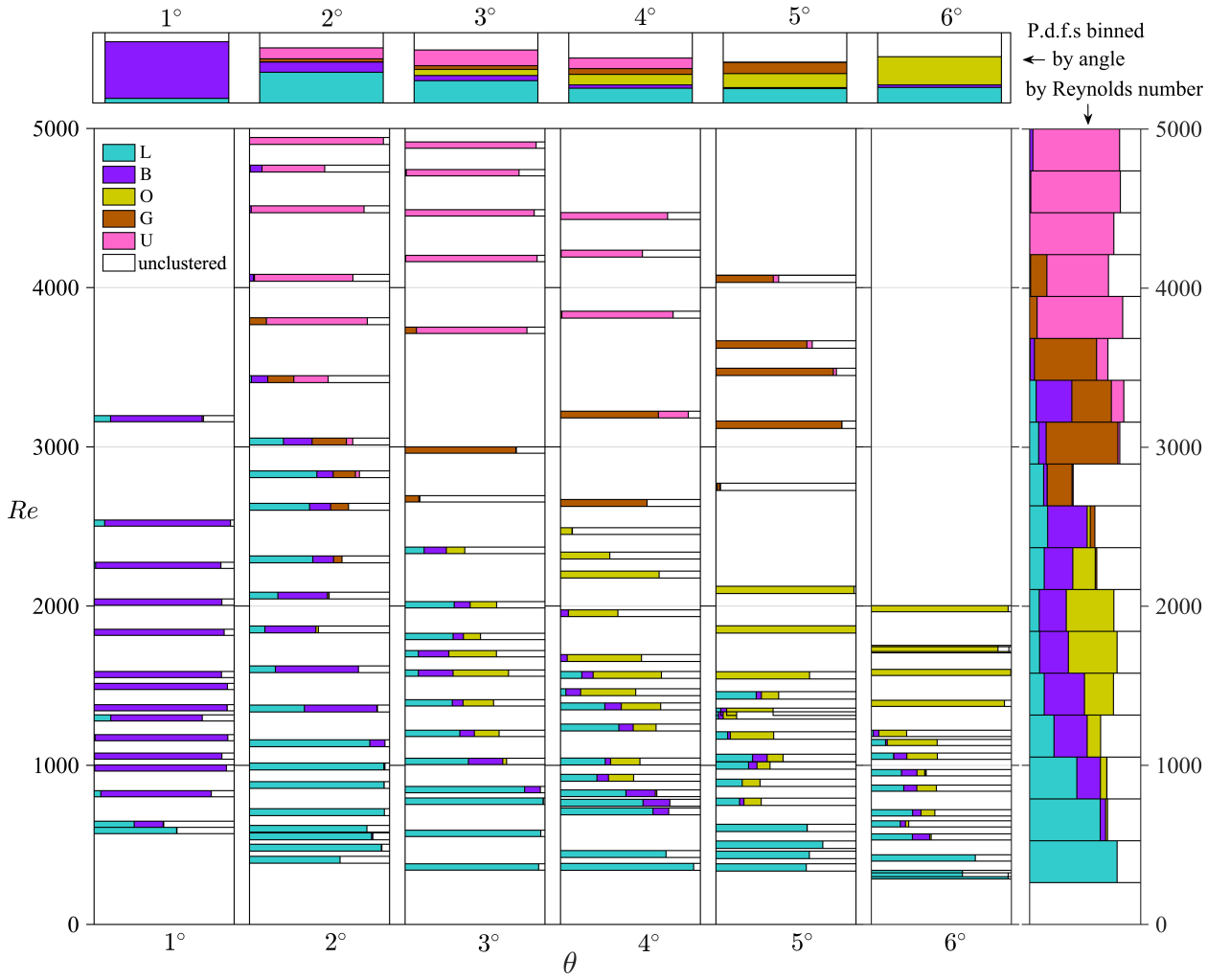


图 10：按参数空间（雷诺数 θ）排列的 113 次实验中，每个簇所占帧数（时间）的比例。相邻雷诺数取值对应的条形之间存在一些重叠。顶行和最右列显示整体概率密度函数。图 11 展示了 21 次代表性实验的完整时间序列。

F. 时间间歇性与转变

图 11 考察了从输入空间 $\mathcal{I}$ 中选取的 21 组实验的时间动力学（见图 10），其中Re 从底部到顶部递增， θ 从左到右递增。每个面板都以半透明黑色符号显示相空间 $\mathcal{P} = (P_1, P_2)$ 中逐帧变化的轨迹；每条竖条则显示相应的时间序列，标明每一帧所属的簇（为便于观察，未聚类帧根据其最近质心所属的簇着色）。每行显示一组三组$Re\,\theta$近似匹配的实验，其数值从顶行的 $\approx 1\times10^4$递减至底行的$\approx 2\times10^3$。以往的 SID 理论、实验 [14, 16]和直接数值模拟[35] 表明，乘积$Re\,\theta$ 与分层湍流的动态范围成正比，即浮力雷诺数$Re_b = (L_O/L_K)^{4/3}$，它衡量了 Ozmidov 之间的间隔

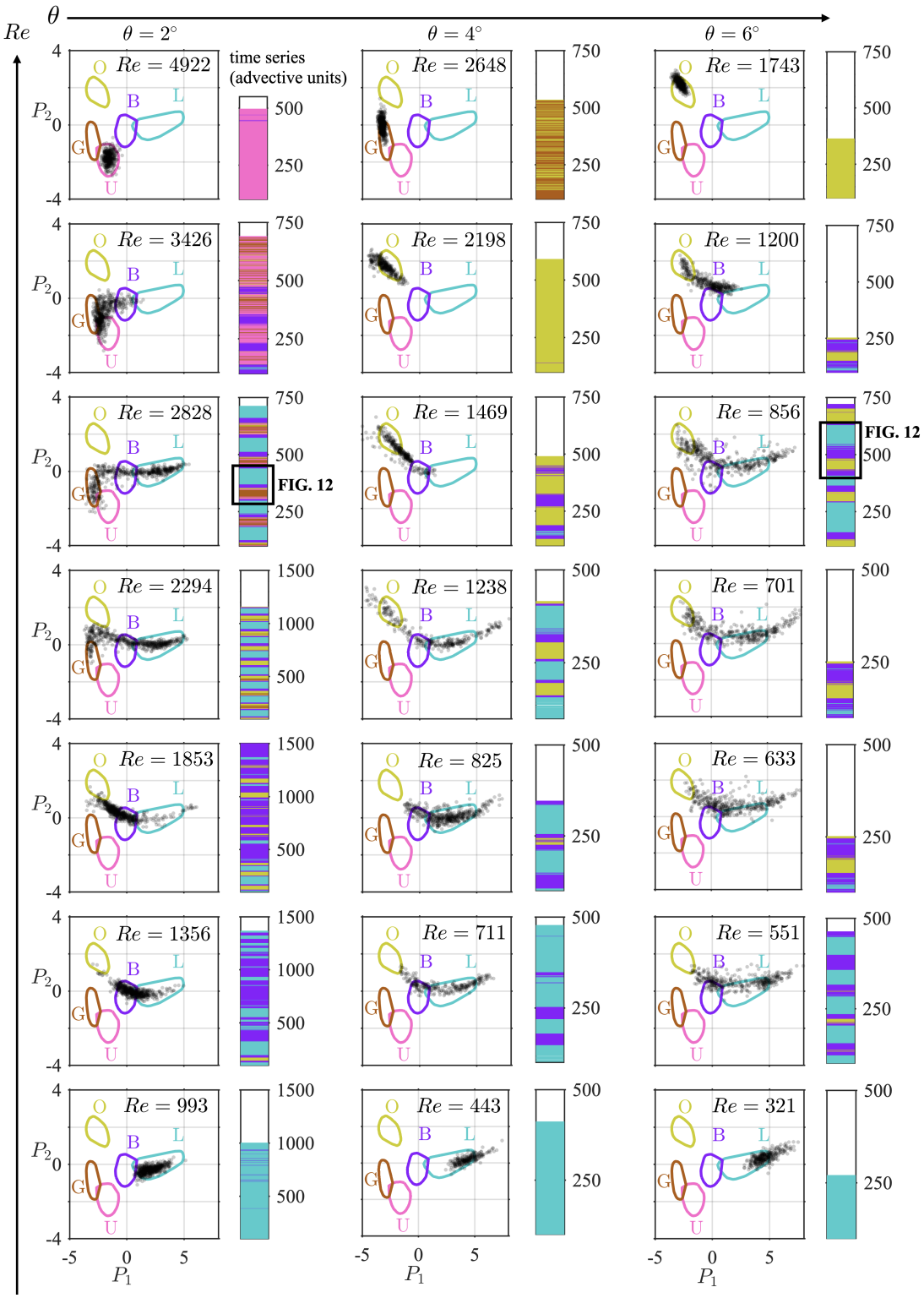


图 11：在三个倾斜角下，实验中随雷诺数 增加（从下到上）的时间动力学： $\theta = 2°$（左列）、$\theta = 4°$（中列）和 $\theta = 6°$（右列）。单帧以半透明黑色符号标记，簇边界（凸包）以彩色标示。右侧的竖条显示$t \geq 100$时各帧所属簇的时间序列。未聚类帧根据与最近簇的距离着色。请注意，不同实验的记录时间存在非人为造成的变化。

$L_O = (\varepsilon/N^3)^{1/2}$ 和 Kolmogorov $L_K = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ 湍流长度尺度，其中， ε 为平均湍动能耗散，N 为平均浮力频率 [16, 第 5 节1]。

沿图 11 顶行（最高$Re\,\theta$）追踪耗散最强的湍流，我们发现了不同类型的湍流，每种类型在相空间中都高度聚集。在较小角度 θ =2° 下，湍流完全呈无结构态，位于簇 U 内或其附近。在中等$\theta = 4°$下，它转变为颗粒态（主要位于 G 中），并短暂偏离至朝向 O 的较稀疏（未成簇）空间。在较高 $\theta = 6°$ 下，湍流完全呈翻转态（位于 O 内或其附近）。在稍低的$Re\,\theta$ （第二行）下，轨迹在相空间中的聚集程度降低，并出现间歇性。在 $\theta = 2°$ 和 Re = 3426下，湍流现在在 U、G 和 B 之间循环。在 $\theta = 4°$ 和Re = 2198下，湍流转移至 O，但没有明显的间歇性。在 $\theta = 6°$和Re = 1200下，湍流在 O、B 和 L 之间呈间歇态（尽管该数据集的时间序列较短）。

在Re 略低的值下（第三行），轨迹分布得更为分散，且各个角度普遍都出现了间歇性。在 $\theta = 2°$ 和Re = 2828时，灰色数据云现在覆盖了 G、B 和 L，并在 G 与 B 之间出现明显的“向上弯折”（避开了 O 簇）。时间序列以周期$T \approx 120 - 140$ 个平流单位在它们之间准周期性循环（更多细节见配套通信 [3], ，其中包括各簇中的停留时间）。重要的是，从 L 到 G 的转变总是经过 B，就像从 G 到 L 湍流的转变一样；此外，这两种转变在这个二维相空间投影中的轨迹完全相同。在 $\theta = 4°$ 和 $\theta = 6°$时，灰色数据云呈现出截然不同的形状，分布在 O、B 和 L 簇之间，并出现明显的“向下弯折”。时间序列同样呈准周期性，周期为$T \approx 120 - 220$。在 $\theta = 6°$ 和Re = 856时，再层流化更为彻底，向 O 的转变和从 O 出发的转变都经过 B，且轨迹完全相同，正如在 $\theta = 2°$时一样。再次降低Re （第四至第七行），我们发现这两种间歇性在很宽的Re范围内持续存在，但最湍流的阶段（ $\theta = 2°$ 时位于 G 中，$\theta = 4°, 6°$时位于 O 中）逐渐缩短，并被 B 中更长的阶段所取代（第四至第六行），最终则被 L 中的阶段取代（第七行）；在这里，L 实际上对应于霍姆博波。

中间雷诺数下的两种截然不同的准周期动力学（G-B-L 与 O-B-L）揭示了 SID 中通向湍流的两条本质不同的路径，构成了本文的第三项关键发现。SID 的间歇性似乎围绕着（雷诺数 θ）不同区域内至少两个本质不同的“慢流形”组织起来。未来仍需研究这些慢流形及其对应的“正交”快流形，以理解（雷诺数 θ）不同区域内导致层流-湍流转捩的具体流动结构。

图12朝这一方向迈出了第一步：通过放大图11中两组典型时间序列（第三行第一列和第三列的黑框），并展示跨越一个周期的六幅代表性纹影图帧，对比这两个不同的转捩阶段。在周期开始之前（图12中编号为“1”的帧），不稳定性增长的迹象较弱，因此密度界面仍被归类为层流化湍流（L）。在周期开始时（帧2），不稳定性振幅增大，此时被归类为编织湍流（B）。然而，我们发现左、右两组帧之间存在显著差异，代表着通向湍流的不同路径。左图显示，湍流首先由上方密度界面上的局部小尺度结构引发，而右图则显示，湍流起始于范围更广的

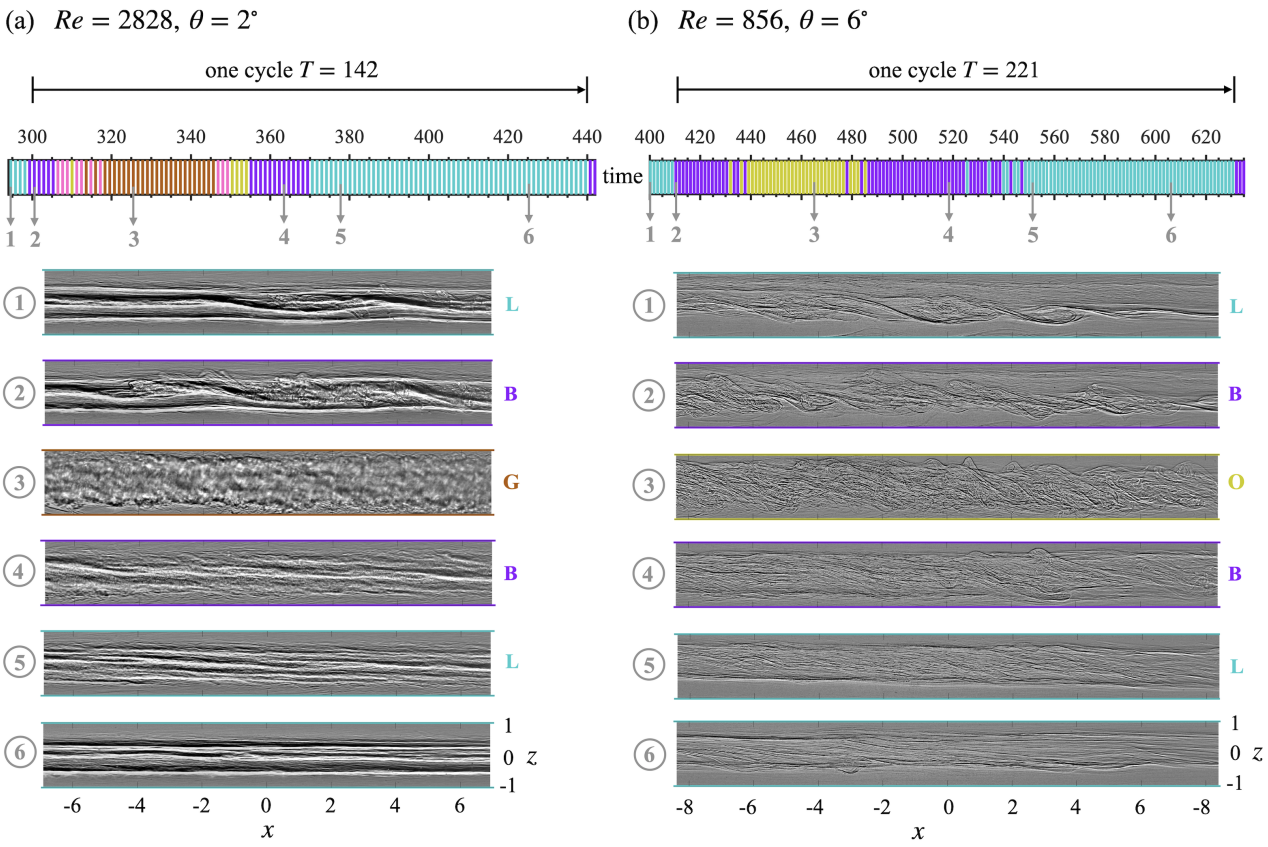


图12：图11（最左列和最右列，第三行）中识别出的两个不同间歇循环所呈现的详细过渡状态。我们对比单个周期中的 G-B-L 动力学（最左列）与 O-B-L 动力学（右侧）。每列顶部的色条给出了时间序列（按最近的簇着色），帧1-6则展示了六个代表性时刻的纹影图。

卷起。这两种转变增加了我们对分层湍流的理解以及对经典开尔文–亥姆霍兹破碎涡卷范式的认识的复杂性；该范式包含“炽热”的增长阶段、“恰到好处”的高能阶段，以及“寒冷”的化石化衰减阶段 [36, 37]。活跃湍流阶段之后（帧3），两项实验的稳定阶段存在显著差异：从B中的第一阶段（帧4）到L中的最后阶段（帧5和6）。湍流和混合逐渐消退，留下三层分层结构，其中包含一个部分混合中间层，其结构复杂且随时间演变。这些特定时间序列（顶部条形）还凸显了一般特征：在再层流化阶段，B $\rightarrow$ B $\rightarrow$ L中的偏移持续时间始终长于不稳定过渡阶段L $\rightarrow$ B $\rightarrow$ G/O中的偏移持续时间。

上述发现表明，看似不同的转变会经过同一个簇（B 或 L，见图12），这提示我们，考察更高维的相空间（维数高于本文所考察的二维空间 $\mathcal{P} = (P_1, P_2)$），或许能更深入地理解其背后的高维间歇动力学。未来若考察更高维的主成分空间 $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P3, \ldots)$，或许就能解析快流形中的突发与弛豫

动力学 [38, § 6.7.2] ，这些动力学可能与前两个主向量正交。适用于此分析的方法包括基于簇的马尔可夫链模型 [34, 39], 网络模型 [40],, 以及采用 Ulam 方法 [41]近似的 Perron-Frobenius（转移）算子。后者有望识别密度界面结构，“这些结构脱离慢流形的概率较高，可用作即将发生剧烈事件的前兆（或预测指标）” [38]。

V. 结论

我们开发了一种数据降维与自动图像分类方法，并将其应用于从分层倾斜管道（SID）实验的 113 部纹影影片中抽取的 50155 个独立帧。该实验在高雷诺数和普朗特数下维持剪切分层湍流。这些影片跨越数百个平流时间单位，呈现密度场曲率的展向积分视图（该曲率由空间变化的盐度造成），使我们能够根据流动中密度界面形态的聚类识别出各种湍流状态。第 IV 节的三个关键结果可概括如下。

湍流的瞬时分类 – 对图 8 中所识别簇的物理解释揭示了五种不同类型的分层湍流与混合：层流化（L）、编织状（B）、翻转（O）、颗粒状（G）和无结构（U），以及若干中间类型。自动分类方法的优势在于客观、定量、能够捕捉流动的细微特征，并可轻松应用于大量瞬时帧。其结果不同于以往将影片人工分类为 Holmboe 波、间歇态湍流和湍流流态的做法，同时也对其有所补充。我们的聚类结果显示，随着流态内部参数（雷诺数 θ）变化，属于同一流态的流动通常具有不同的湍流类型时间“组合”。我们的数据驱动方法也很容易推广和调整，以对其他具有启发性的实验中的分层湍流进行分类，例如分层泰勒–库埃特流 [42–48]。

参数空间的动力学图– 图 10 中各簇所占的时间比例，随着输入空间的变化而逐渐改变（雷诺数 θ）。简而言之，随着 雷诺数增加，层流化湍流逐渐让位于更多的编织湍流，随后是翻转湍流，最终则是颗粒状湍流和无结构湍流。随着 θ 增加，编织的、近水平的湍流逐渐让位于翻转湍流。这一发现证实了 [22,§ 6.4] 中的假设（该研究使用了 16 次实验中同步获得的三维速度和密度测量数据集）：高-雷诺数/低-θ 湍流具有更多极端涡量平方事件，而低-雷诺数/高-θ 湍流具有更多密度翻转。鉴于乘积 雷诺数θ 控制着湍动能的耗散速率，并且高-雷诺数流具有更宽的谱惯性子区间，因此可以推知，高-雷诺数 流在小尺度上的耗散相对更多（极端涡量平方增加），而高-θ 流在大尺度上的耗散相对更多（翻转增加）。这些翻转统计量的差异可能会影响能量学和混合效率 [36, 49]。

通往湍流的不同时间路径— 图 11 的相空间轨迹揭示了随着能量耗散和动态范围降低，不同的动力学行为 雷诺数θ。耗散性最强的湍流在数百个平流时间单位内始终局限于簇 U、G 或 O 中（分别对应低、中、高 θ）。

相比之下，在耗散性较弱的湍流中，随着轨迹在簇 G-B-L（低 θ 时）与 O-B-L（高 θ 时）之间循环，时间间歇性逐渐显现，通常具有显著的准周期性。图 12 展示了循环期间特定时刻的纹影快照，说明了通往和脱离分层湍流的两种不同转变路径，即层流化湍流在相空间中“弯向”颗粒状湍流或翻转湍流，随后又返回。我们假设存在一个由 L 和 O/G 构成的低维慢流形，以及一个更快、维度更高且目前投影到 B 上的流形。这为今后更准确地识别导致不稳定性、湍流和再层流化准周期循环的结构铺平了道路。

展望：降阶建模 ——回到引言中式（1）所介绍的方法，我们得出结论：本文推进了对相干结构及其与输入参数之间联系的表征（步骤1）。本文识别出的不同密度界面形态、在各个簇内及簇间停留的时间，以及间歇性流动历史如何影响混合等有用的输出变量（步骤2），仍是该领域面临的一项根本性挑战 [6,50]。这一挑战——降阶建模——仍有待借助完整的速度和密度数据集加以解决；此类数据集如今已可通过SID实验 [14] 和直接数值模拟 [35]获得。进一步的数据驱动技术也可以学习簇动力学与混合度量之间的映射，从而对未见过的数据集作出预测。例如， [51]使用深度卷积神经网络，学习湍流低维表征（浮力频率和湍动能耗散的垂向剖面）与混合效率之间的关系，其表现优于标准参数化方法。

数据——所有数据均将公开。

致谢

我们感谢 Xianyang Jiang、Gaopan Kong 以及 G. K. Batchelor实验室的技术人员在实验过程中提供的帮助。我们也感谢 Paul Linden 和 Stuart Dalziel 的支持，并感谢 Colm-cille Caulfield 对本研究意义所作的深刻探讨。实验设施由 ERC资助项目“分层湍流与混合过程”（STAMP，编号 742480）提供经费。A.L. 感谢 Leverhulme早期职业研究奖学金和 NERC独立研究奖学金（NE/W008971/1）提供的资助。

附录A：方法（补充第 III 节）

1. 纹影数据的后处理

以下四个步骤确保所有 113 部原始影片（共占用 ≈ 2 TB 存储空间）都能高效用于自动分类。首先，将每部影片在 $z = \pm 1$ 处沿垂直方向精确裁剪，仅保留内部壁间流动，因此典型帧分辨率为 3400$\times$ 450 像素（≈ 1.5 百万像素，8 位深度，即每帧 1.5 MB）。其次，时间平均信号

（背景图案）已被移除 $I'(x, z,t) = I(x, z,t) - \langle I\rangle_t(x, z)$，并通过计算 I'_5 的第5百分位数和 I'_{95} 的第95百分位数（基于 I' 的分布），将每帧重新缩放；通过 $\tilde{I} = I'/(I'_{95} - I'_5)$，将重新缩放后帧中的这两个值分别设为 0 和 1。所有满足 $\tilde{I} < 0$（~数据的 5 %）的像素均设为 0，所有满足 $I > 1$（数据的 5 %）的像素均设为 1。这确保了所有帧具有可比的亮度和动态范围，并可在之后使用相同的边缘检测参数提取密度界面。第三，我们舍弃了每部影片最初的 100 A.T.U.（仅保留 $t \geq 100$时的数据），以保守地去除与初始重力流相关的瞬态（估计重力流以其速度≈ 0.5在 $t \approx 80$ 时到达管道末端 $x = \pm 40$）。第四，我们将时间序列下采样 10 倍，以避免时间数据过度冗余。由此，所有影片的平均时间分辨率为 $0.10 \times 10 = 1.0$ A.T.U.（标准差为 0.4）。最终的数据集包含 50155 帧，占用 ≈ 75 GB 存储空间。

2. 主成分分析

首先对数据矩阵 M 进行归一化，将 10 个形态统计量的值转换为标准分数（或“z分数”），其中 0 对应于所有帧的平均值，而 $\pm\lambda$至 λ 个标准差分别对应于高于和低于平均值的范围，从而确保所有特征具有相同的权重。随后，对归一化数据矩阵进行奇异值分解（SVD），即 $\tilde{M} = U\mathbf{\Sigma}V^T$。其中，$\mathbf{\Sigma} = \{\sigma_m\}_{m=1,\ ...,10}$ 是按降序排列的正奇异值构成的对角矩阵，$U = \{u_m\}_{m=1,\ ...,10} \in \mathbb{R}^{50155\times 10}$ 和 $V = \{v_m\}_{m=1,\ ...,10} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ 分别是包含左、右奇异向量的实正交矩阵。图 4b 中的累积方差表明，$\Sigma(2)/\Sigma(10) = 0.79$，其中总方差 $\Sigma(10)$ 是协方差矩阵 $\tilde{M}^T\tilde{M}$ 的 10 个特征值之和。这证明了采用截断近似$\tilde{M} \approx \tilde{M}_t = U_t\mathbf{\Sigma}_t V_t^T$是合理的，其中我们只保留 U_t、V_t的前两列以及 2×2的第一个$\mathbf{\Sigma}_t$块。换言之，$\tilde{M}_t = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$，它将每个帧（行）$f = 1,\ \ldots,\ 50155$ 近似表示为 $\approx \sigma_1 u\,f\,1 v_1^T + \sigma_2 u\,f\,2 v_2^T$之和，其中使用了前两个右转置奇异向量 v_1^T、$v_2^T \in \mathbb{R}^{1\times 10}$。将其改写为 $p_1 v_1^T + p_2 v_2^T$，可以看出，我们实际上是将每个秩二近似帧从 10 维空间 $\mathcal{M}$ 投影到由两个单位法向量 v_1^T、v_2^T张成的二维空间 $\mathcal{P}$，并得到坐标向量 $p = [p_1, p_2] = [\sigma_1 u\,f\,1, \sigma_2 u\,f\,2]$。以矩阵形式表示，这一映射将 $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{50155\times 10}$ 变换为新的数据矩阵 $P = \tilde{M}_t V_t = U_t\mathbf{\Sigma}_t \in \mathbb{R}^{50155\times 2}$，其中包含 50155 个二维行向量 p。

3. OPTICS算法

OPTICS 根据一种称为可达距离的度量，计算所有点之间的成对距离：

$$d_{\text{reach}}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \max\left(d_{\text{euclidean}}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j),\ d_{\text{core}}(\mathbf{p}_i),\ d_{\text{core}}(\mathbf{p}_j)\right), \tag{A1}$$

在此，$d_{\text{euclidean}}$ 表示标准欧几里得距离，而d_{core} 表示核心距离，即每个点（在本例中为二维向量$\mathbf{p}$）周围超球面的半径，该超球面恰好包含最小点数个邻居点。可达距离的关键特性是，它会惩罚

位于较稀疏区域的点，为其赋予较大的d_{core}，从而增大它们与密集区域内点之间的感知距离。较小的d_{core}表明该点处于空间的稠密区域$\mathcal{P} = (P_1, P_2)$。因此，OPTICS 只需一个由用户指定的参数“minPts”，可将其理解为形成一个簇所需的最少点数。极端取值 50155（即点的总数）或 1，分别会产生单个簇或每个点各自形成一个簇。为找到合适的中间值，我们逐步减小 minPts，从而在可达性图中形成明显的谷（有意义的簇）（如图 5 所示）；当$600 \lesssim \text{minPts} \lesssim 1200$时，这些谷具有稳健性。将 minPts 减小到 600 以下，会导致簇的数量大幅增加，且这些簇显然主要由噪声构成。本文的结果使用$\text{minPts} = 800$计算得出。

[1] M. Van Dyke，《流体运动图集》（Parabolic Press，加利福尼亚州斯坦福，1982年）。[2] C. Andereck、S. Liu 和 H. Swinney，独立旋转圆柱圆形库埃特系统中的流动状态，《流体力学杂志》**164**，155（1986年）。[3] A. Lefauve 和 M. M. P. Couchman，通过对实验数据进行无监督分类揭示分层湍流的演变路径，已提交（2023年）。[4] D. Barkley，关于管道流向湍流转变路径的理论观点，《流体力学杂志》**803**，P1（2016年）。[5] D. Feldmann、D. Borrero-Echeverry、M. J. J. Burin、K. Avila 和 M. Avila，泰勒–库埃特流向湍流转变的路径，《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑》 **381**，10.1098/rsta.2022.0114 （ 2023 年）。[6] C. P. Caulfield，湍流分层流中的分层、不稳定性与混合，《流体力学年度评论》**53**，113（2021年）。[7] M. C. Gregg、E. A. D’Asaro、J. J. Riley 和 E. Kunze，海洋中的混合效率，《海洋科学年度评论》**10**，443（2018年）。[8] O. Reynolds，关于决定水流呈直线运动还是曲线运动的条件，以及平行通道中阻力定律的实验研究，《英国皇家学会哲学汇刊》**174**，935（1883年）。[9] G. I. Taylor，叠加流体流的稳定性实验，《剑桥哲学学会数学论文集》**23**，730（1927年）。[10] S. A. Thorpe，分层剪切流不稳定性的实验：互溶流体，《流体力学杂志》**46**，299（1971年）。[11] E. O. Macagno 和 H. Rouse，分层流中的界面混合，《美国土木工程师学会工程力学分部论文集》**87**，55（1961年）。[12] C. R. Meyer 和 P. F. Linden，分层剪切流：倾斜管道实验，《流体力学杂志》**753**，242（2014年）。[13] J. L. Partridge、A. Lefauve 和 S. B. Dalziel，一种用于速度场和密度场体积测量的多功能扫描方法，《测量科学与技术》**30**，055203（2019年）。[14] A. Lefauve、J. L. Partridge 和 P. F. Linden，持续分层剪切流的状态转变与能量学，《流体力学杂志》**875**，657（2019年）。[15] A. Lefauve 和 P. F. Linden，倾斜管道中的浮力驱动交换流，《流体力学杂志》 **893**，A2 （ 2020 年）。

[16] A. Lefauve 和 P. F. Linden，连续受迫剪切驱动分层湍流的实验特性。第 2 部分：能量学、各向异性与参数化，《流体力学杂志》**937**，A35（2022年）。[17] M. Duran-Matute、S. J. Kaptein 和 H. J. H. Clercx，分层剪切流中的状态转变：水平与倾斜管道之间的联系，《流体力学杂志》**956**，A4（2023年）。[18] A. Lefauve、J. L. Partridge、Q. Zhou、C. P. Caulfield、S. B. Dalziel 和 P. F. Linden，受限霍姆博波的结构与起源，《流体力学杂志》**848**，508（2018年）。[19] X. Jiang、A. Lefauve、S. B. Dalziel 和 P. F. Linden，湍流程度不断增强的分层剪切层中相干涡结构的演变，《流体力学杂志》**937**，A30（2022年）。[20] M. M. P. Couchman、S. M. de Bruyn Kops 和 C. P. Caulfield，受迫分层湍流中稳定密度界面处的混合，《流体力学杂志》**961**，A20（2023年）。[21] J. J. Riley、M. M. P. Couchman 和 S. M. de Bruyn Kops，普朗特数对衰减分层湍流的影响，《湍流杂志》，doi.org/10.1080/14685248.2023.2178654（2023年）。[22] A. Lefauve 和 P. F. Linden，连续受迫剪切驱动分层湍流的实验特性。第 1 部分：平均流、自组织与湍流占比，《流体力学杂志》**937**，A34（2022年）。[23] A. Atoufi、L. Zhu、A. Lefauve、J. R. Taylor、G. A. Lawrence、S. B. Dalziel、R. R. Kerswell 和 P. F. Linden，分层倾斜管道：双层水力学与不稳定性，arXiv:2301.13035（2023年）。[24] E. Deusebio、C. P. Caulfield 和 J. R. Taylor，分层平面库埃特流中的间歇性边界，《流体力学杂志》**781**，298（2015年）。[25] A. Lefauve，持续分层剪切流中的波与湍流，博士论文，剑桥大学。doi:10.17863/CAM.24648（2018年）。[26] J. Canny，一种边缘检测的计算方法，《IEEE 模式分析与机器智能汇刊》**PAMI-8**，679（1986年）。[27] S. L. Brunton 和 J. N. Kutz，《数据驱动科学与工程：机器学习、动力系统与控制》，第 1 版（剑桥大学出版社，2019年）。[28] M. Ankerst、M. M. Breunig、H.-P. Kriegel 和 J. Sander，排序点以识别聚类结构，《ACM SIGMOD记录》**28(2)**，49（1999年）。[29] M. M. P. Couchman、B. Wynne-Cattanach、M. H. Alford、C. P. Caulfield、R. R. Kerswell、J. A. MacKinnon 和 G. Voet，基于观测微结构数据的数据驱动海洋湍流混合识别，《地球物理研究快报》**48**，23（2021年）。[30] J. Han、M. Kamber 和 J. Pei，《数据挖掘：概念与技术》（爱思唯尔，2012年），第 10 章：聚类分析：基本概念与方法。[31] J. R. Carpenter、E. W. Tedford、E. Heifetz 和 G. A. Lawrence，分层剪切流中的不稳定性：基于相互作用波的物理解释综述，《应用力学评论》**64**，060801（2011年）。[32] G. D. Portwood、S. M. de Bruyn Kops、J. R. Taylor、H. Salehipour 和 C. P. Caulfield，对分层湍流中动力学差异区域的稳健识别，《流体力学杂志》**807**，R2（2016年）。[33] G. Narasimhan、C. Meneveau 和 T. A. Zaki，利用机器学习分类器区分层流区与湍流区的大涡模拟过渡通道流，《物理评论：流体》**6**，074608（2021年）。[34] F. Foroozan、V. Guerrero、A. Ianiro 和 S. Discetti，过渡边界层的无监督建模，《流体力学杂志》**929**，A3（2021年）。

[35] L. Zhu、A. Atoufi、A. Lefauve、J. R. Taylor、G. A. Lawrence、S. B. Dalziel、R. R. Kerswell 和 P. F. Linden，分层倾斜管道：直接数值模拟，arXiv:2301.09773（2023年）。[36] A. Mashayek、C. P. Caulfield 和 M. H. Alford，海洋剪切诱导湍流翻转中的恰到好处的混合，《流体力学杂志》**928**，A1。[37] K. M. Smith、C. P. Caulfield 和 J. R. Taylor，受迫分层剪切流中的湍流，《流体力学杂志》**910**，A42（2021年）。[38] P. J. Schmid，用于分析湍流流动的数据驱动和基于算子的工具，载于《湍流研究的先进方法》（爱思唯尔，2021年），第243–305页。[39] E. Kaiser、B. R. Noack、L. Cordier、A. Spohn、M. Segond、M. Abel、G. Daviller、J. Östh、S. Krajnovi´c 和 R. K. Niven，混合层的基于聚类的降阶建模，《流体力学杂志》**754**，365（2014年）。[40] H. Li、D. Fernex、R. Semaan、J. Tan、M. Morzy´nski 和 B. R. Noack，基于聚类的网络模型，《流体力学杂志》**906**，A21（2021年）。[41] O. Junge 和 P. Kolta，利用稀疏哈尔张量基对弗罗贝尼乌斯–佩龙算子进行离散化：稀疏乌拉姆方法，《SIAM 数值分析杂志》**47**，3464（2009年）。[42] F. Caton、B. Janiaud 和 E. J. Hopfinger，分层泰勒–库埃特流中的初级和次级霍普夫分岔，《物理评论快报》**82**，4647（1999年）。[43] R. L. F. Oglethorpe、C. P. Caulfield 和 A. W. Woods，分层湍流泰勒–库埃特流中的自发分层，《流体力学杂志》**721**，R3。[44] C. Leclercq、J. L. Partridge、P. Augier、S. B. Dalziel 和 R. R. Kerswell，利用分层减弱准开普勒泰勒–库埃特流中的端部效应，《流体力学杂志》**791**，608。[45] R. Ibanez、H. L. Swinney 和 B. Rodenborn，旋转同心圆柱中分层旋转不稳定性的观测，《物理评论：流体》**1**，053601。[46] J. Park、P. Billant、J.-J. Baik 和 J. M. Seo，分层泰勒-库埃特流中离心不稳定性与分层旋转不稳定性的竞争，《流体力学杂志》**840**，5。[47] D. Petrolo 和 S. Longo，稳态双层系统中的浮力传递：泰勒–库埃特装置中的实验，《流体力学杂志》**896**，A27。[48] G. Meletti、S. Abide、S. Viazzo、A. Krebs 和 U. Harlander，分层旋转流振幅调制的实验与长期高性能计算，《地球物理与天体物理流体动力学》**115**，297。[49] A. Mashayek、B. B. Cael、L. Cimoli、M. H. Alford 和 C. P. Caulfield，在气候模型中表征海洋小尺度湍流混合的物理–统计方案，《流动》**2**，E24（2022年）。[50] C. P. Caulfield，湍流分层混合中的未解问题：我们甚至知道自己有哪些未知吗?《物理评论：流体》**5**，110518（2020年）。[51] H. Salehipour 和 W. R. Peltier，利用分层湍流的两个“原子”对混合进行深度学习，《流体力学杂志》**861**，R4（2019年）。