arXiv:2305.04051v1 [physics.flu-dyn] 6 May 2023

分层湍流的 实验数据无监督分类揭示的转变路径

Adrien Lefauve* 和 Miles M. P. Couchman剑桥大学应用数学与理论物理系，数学科学中心，威尔伯福斯路，剑桥 *CB3 0WA*，英国

（日期：2023年5月4日）

利用相干结构的“骨架”对流体湍流进行建模，传统上主要聚焦于少数几种典型实验，例如管流和泰勒-库埃特流。本文考察了另一种典型实验——分层倾斜管道。这是一种持续剪切流，其密度分层使人们能够在显著高于无分层流的雷诺数下，探索大量新的相干态和间歇态。我们结合降维与对纹影可视化进行无监督聚类，采用一种新颖的数据驱动方法，自动识别该实验背后的湍流骨架。我们证明，在参数空间中存在多种类型的高能湍流，以及在这些类型之间循环转换的间歇性湍流，从而揭示出不同的转变路径。我们的方法和结果为建立多物理场湍流的新型降阶模型铺平了道路。

引言。— 流体动力学面临的最大挑战之一，是为刻画湍流的高维、强非线性动力系统，找出一种简单的低维描述。一种颇有前景的方法是相干结构建模，其历史可追溯至 [1, 2]，并假设具有实际重要性的湍流动力学是低维的：相空间轨迹会在相对较少的一组纳维–斯托克斯方程的精确（尽管通常不稳定）解附近停留相当长的时间，这些解称为简单不变解或精确相干态 [3, 4]。这种描述可以通过对这些解进行加权平均来预测湍流统计量 [5],，也有望再现完全非线性动力学的某些时空相干性特征[6, 7]。

要寻找这样一个连贯的湍流骨架，需要深入理解流动从层流向湍流转捩的机制。对流体动力学稳定性的研究可追溯至 Osborne Reynolds [8],，他在 1883 年的开创性论文中提出了一项典范实验，此后它成为主导范式：圆管流。一项关键发现是，向湍流转捩受一组无量纲参数支配，这组参数现称为雷诺数 雷诺数 $=uh/\nu$，其中 u 和 h 分别表示流动的特征速度和长度尺度，而 ν 表示流体的运动黏度。近期综述 [9–12]着重介绍了过去 150 年来对湍流形成路径及管流骨架认识方面取得的显著进展。研究历程中的一个关键步骤由 G. I. Taylor [13], 迈出，他于 1923 年提出了第二项典范实验：两个同心旋转圆筒之间的流动，即如今所称的泰勒-库埃特流。过去 100 年间，管流与泰勒-库埃特流之间的对比揭示了随着雷诺数增加，湍流形成的两条截然不同的路径。管流在线性意义上是稳定的，而非线性效应会将有限振幅扰动放大（亚临界转捩），使其发展为寿命不断延长的湍流斑块和湍流条带，这与可激发介质和双稳态介质中的情况类似 [11]。相比之下，泰勒-库埃特流（以内圆筒旋转为主导时）在线性意义上不稳定，非线性效应会使指数增长的不稳定性趋于饱和（超临界转捩），这意味着经过一系列接连发生的不稳定性后，系统会达到湍流混沌状态 [14, 15]。

本文考察第三种、且相对鲜为人知的实验室实验中的湍流转捩路径：倾斜分层管道（SID，见图1上方）。这种密度分层流动具有丰富的转捩和间歇态动力学。我们将论证，这为推进湍流建模开辟了一种富有成效的新范式。此前，对各种典型流动特征的研究进展，在很大程度上依赖于对具有时空湍流间歇态的转捩流动的研究。密度分层会带来稳定效应，因此也引入了第二个无量纲参数，使这种间歇态具有更普遍的特征，并能在更高的雷诺数 [16, 17], 下加以探索，从而为湍流骨架提供更有趣的构成单元 [18–20]。

在倾斜管道的剪切流中加入双层分层结构这一概念性飞跃，Reynolds早在1883年的论文 [8, §12], 中就已实现，这使他得以指出，湍流转捩从根本上不同于管流。第二次概念性飞跃——也是晚得多的一次——促成了SID实验 [21, 22]：将一条长矩形管道连接到两个装有不同密度盐水的大型储液槽 $\rho_0 \pm \Delta\rho/2$（图1）。SID流有两个可变控制参数：以管道半高Re 为基准的$h =H/2$，以及层平均浮力速度尺度$u = \sqrt{gH\Delta\rho/\rho_0}$；另一个参数是倾斜角 θ，它提供额外能量 [23]，使耗散态得以维持较长时间，并可用于研究其时空间歇性。 [22–24]描述并绘制了这一“间歇区间”，它位于参数空间的中间区域（Re θ）：一端是低$Re\,\theta$ 下具有有限振幅的Holmboe波区间（其中流动大多为层流，界面混合较弱），另一端则是高$Re\,\theta$ 下的充分湍流区间（其中混合强烈，且流动不会重新层流化）。

* lefauve@damtp.cam.ac.uk

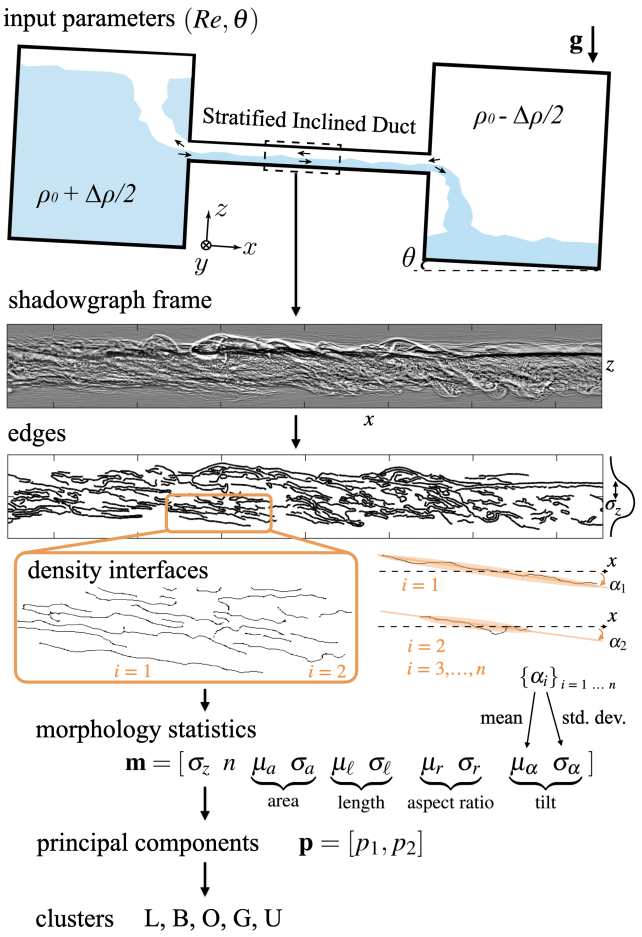

图 1：实验装置（管道长 2000 mm、宽 100 mm、高 $H = 50$ mm）、阴影成像数据及自动化降维流程：边缘检测、10 维形态向量、主坐标中的二维向量，以及无监督聚类。

）。测量时间分辨三维速度与密度场 [25] 的新颖实验，为初步构建“SID骨架”创造了条件，并表明：(i) 向湍流的转捩是超临界的，由“受限的”Holmboe不稳定性 [26], 所介导；(ii) 充分湍流区间中的一些三维相干结构（例如发夹涡）可以追溯到这种线性不稳定性 [27]。

在这封信及其配套论文 [28], 中，我们提出了一种新颖的数据驱动框架，显著推动了对贯穿（雷诺数 θ）空间的 SID湍流基本组成单元的发现与理解。这类分析传统上依赖受训人员凭肉眼在完整的实验视频中识别定性的流动特征 [22, 24], ，这限制了对大型数据集进行分类的准确性、可重复性和可行性，因而迄今成效有限。现在，我们通过一种方法克服了这些局限，该方法结合降维与无监督聚类，对瞬时流场快照进行客观分类。通过从物理角度解读检测到的簇，我们识别出多种不同类型的湍流，并通过研究簇在（雷诺数 θ）中的分布，以及它们在间歇区间内的时间循环，揭示了通往这些湍流状态的独特路径。

数据集与降维。— 我们的数据集由 50,155 帧独立的阴影成像帧组成（示例见图 1），来自 113 段视频。每段视频展示了 SID 中持续、受剪切的盐分层湍流在数百个平流时间单位内的演变过程；流动的雷诺数固定为（Re θ）。这些视频共同涵盖了 Holmboe 波、间歇态和完全湍流等人工分类的流态 [24]，横跨参数空间$Re = 300 - 5000$, $\theta = 1 - 6°$的广阔区域。阴影成像中的灰度强度近似正比于流体折射率沿y 展向（光线路径）积分后关于x –z的曲率，因此也近似正比于密度场沿该方向积分后的曲率。由此，该数据集尤其适用于研究流动中密度界面的结构与时间演变；已知这些结构在能量和动力学方面都具有重要意义 [29–31]。

我们的自动化降维流程（如图 1 所示）首先使用 Canny算法 [32]检测阴影图像中的边缘。其次，将各个密度界面提取为相互连通的“边缘”像素集合，并计算其属性：每帧的数量 n、各自面积的列表 $\{ai\}_{i=1,\ldots,n}$、长度 $\{\ell_i\}$、长宽比 $\{r_i\}$ 以及根据椭圆拟合（以橙色示意）得到的倾斜角 $\{\alpha_i\}$ 。第三，构建 10 维形态向量

$$\mathbf{m}_f = [\sigma_z\ n\ \mu_a\ \sigma_a\ \mu_\ell\ \sigma_\ell\ \mu_r\ \sigma_r\ \mu_\alpha\ \sigma_\alpha] \qquad (1)$$

以界面数量 n、边缘像素密度的垂直标准差 σ_z，以及四个界面属性列表的均值（μ）和标准差（σ）来表征每一帧 f 。第四，进行主成分分析（PCA） [33] ，利用数据矩阵 $\mathbf{M} = [\mathbf{m}_f]_{f=1,\ldots,}$50155 中的相关性，并将主成分分析基截断至二阶，以解释 80 % 的方差。由此得到一个秩为二的数据矩阵$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_f]_{f=1,\ldots,}$50155，其中每个 1.5-MPixel 阴影图帧都被压缩为主成分分析空间中的二维向量 $\mathbf{p}^f$（P_1,P_2）。

分类与物理解释。– 随后将基于密度的聚类算法“OPTICS” [34, 35] 应用于$\mathbf{P}$ ，以自动确定主成分分析空间中密集区域的自然分组。图 2a 显示检测到五个簇（数量由算法自动确定），涵盖了近 80% 的所有数据点，未归入簇的数据点则位于较稀疏的区域。图 2b-c 展示了属于各簇的帧中雷诺数和 θ 的分布。随着雷诺数增加，各簇 L、B、O、G 和 U 依次占据优势；随着 θ增加，簇的优势顺序也随之改变。这已经表明，该分类捕捉到了

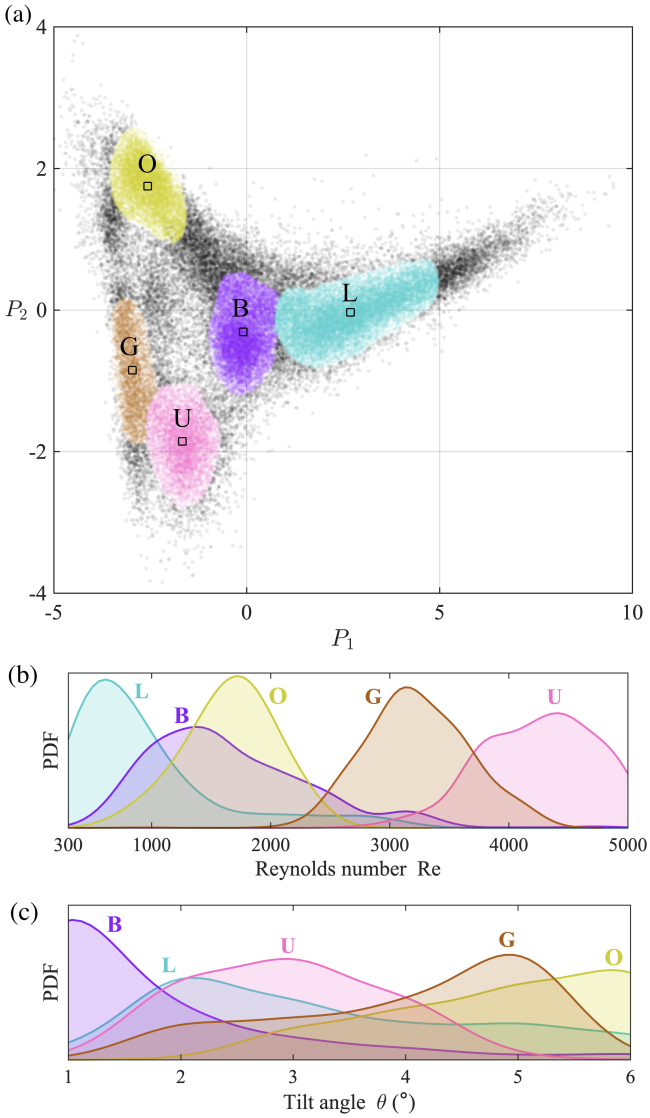

图 2：聚类数据：全部 50155 个实验帧在主成分空间中的分布（a）。属于各簇的点以彩色标出，较稀疏、未归入簇的点以黑色标出。簇在雷诺数 （b）和 θ（c）下的平滑概率分布（PDF）。

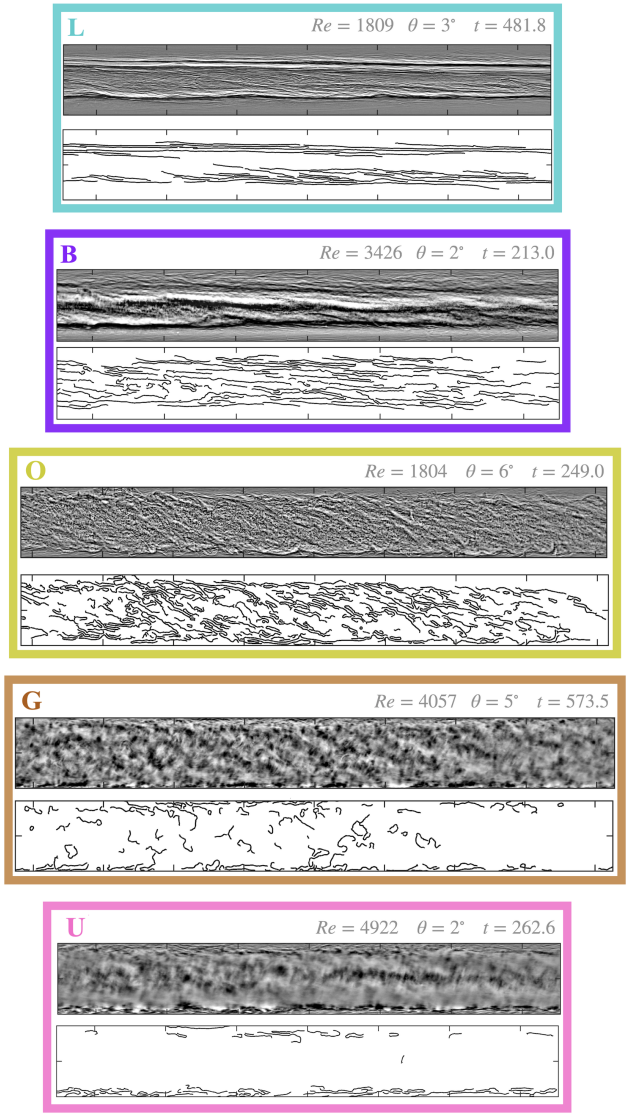

图 3：与各簇质心对应的帧（图 2a 中的方块），代表五种湍流类型。图中展示了阴影图（上）及其对应的边缘（下）。注意无量纲雷诺数 θ 和快照时间 t（右上角）。

有意义且并非显而易见的物理现象。配套文章 [28]完整描述了涵盖（雷诺数 θ）空间的全部 113 项实验中，各簇所占时间比例。

现在，我们通过考察与每个簇质心对应的代表性帧，在图 3 中解读这些簇。我们展示原始阴影图（上）和检测到的密度边缘（下），从而有效地“反转”降维流程。直观而言，帧 L 可视为最接近层流的状态（作为参考，假设存在单个层流界面，其主坐标将远远超出图 2a 右上方的顶点）。它代表了我们可以称为层流化湍流的状态，其中小尺度

前一湍流阶段的结构仍可在阴影图快照中看到，但边缘图案显示出平坦且稳定的密度界面呈“堆叠”状。相比之下，B 帧展示了编织状湍流，其特征是中央有一对“编织带”，密度场的曲率相对呈二维特征，并在阴影图强度中表现出明显的对比度，代表两条强界面及其周围若干条较弱界面。O 帧展示了翻转湍流，其特征是存在许多短小、倾斜因而不稳定的界面。G 帧和 U 帧分别展示了颗粒状 和无结构湍流，其密度场具有强烈的三维曲率，使阴影图像在导管的大部分区域变得模糊

高度。G 簇和 U 簇的相似性与它们在图 2a 中彼此相邻的情况一致； [28] 中详述的 OPTICS 结果表明，实际上可以将它们视为一个更大统一簇的子组成部分。尽管如此，这两个簇仍可通过密度界面的细微差异加以区分。G 帧中的湍流更具颗粒状特征，这是因为对比度略强，因而检测到的边缘更多，尤其是在中部高度处；而 U 帧中的结构较少，边缘较平坦且更靠近顶部和底部壁面，此处模糊的混合层与较平静的边界层相接。关于这些簇所识别的湍流类型的进一步定量描述，见配套文章 [28]，其中通过相应的 10 维形态统计向量给出 (1)。

相空间动力学与时间间歇性。——现在，我们在图 4 中考察数据集所含 113 次实验中，跨越不同（Re θ）选取的六次实验在相空间（P_1,P_2）中的轨迹（图 4a）。我们比较了传统上（凭肉眼）被归类为完全「湍流态」的三次实验（$\mathrm{Re}\,\theta \approx 1\times10^4$，图 4b–d），以及被归类为「间歇态」的三次实验（$\mathrm{Re}\,\theta \approx 6\times10^3$，图 4e–g）。我们注意到，乘积 $\mathrm{Re}\,\theta$ 与流动中湍动能耗散的时间和体积平均速率成正比 ε [23]，也与分层湍流的动态范围（即浮力雷诺数 $\mathrm{Re}_b = (\mathrm{L}_O/\mathrm{L}_K)^{4/3}$）成正比；后者衡量 Ozmidov 长度尺度 $\mathrm{L}_O = (\varepsilon/\mathrm{N}^3)^{1/2}$与 Kolmogorov 湍流长度尺度 $\mathrm{L}_K = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ 之间的分离程度（N 为平均浮力频率） [36, 第 5 节1]。沿着最高动态范围对应的顶部 $\mathrm{Re}\,\theta$ 线，耗散最强的湍流呈现出不同类型。在 Re 较高、 $\theta = 2°$ 较低时（图 4b），湍流完全无结构，始终处于簇 U 内或其附近。在 Re 居中且$\theta = 4°$ 时（图 4c），湍流转变为簇 G 中的颗粒状状态，并短暂偏离至更稀疏（未成簇）的区域，朝向 O。在 Re 较低、 $\theta = 6°$ 较高时（图 4d），湍流完全呈翻转型，处于簇 O 内或其附近。

相比之下，底部雷诺数θ线上的耗散较弱的湍流会随时间在各个簇之间转换（图 4e–i）。在中等雷诺数 和 θ 条件下（图 4f），湍流呈编织状／翻转混合类型，局限于 B、O 簇及其间的区域，且偶尔发生再层流化。在高雷诺数 、低 θ 条件下（图 4e、h），转捩为湍流的路径截然不同：此时时间序列在 L、B 和 G 之间呈准周期变化。以粗体标出的周期，其周期为$T \approx 120-140$ 个平流单位。每个周期都以一次极短暂的编织状湍流偏移开始（停留时间为 ≈ 5），接着长时间处于颗粒状湍流中或附近（≈ 50），随后再次短暂转为编织状湍流（≈ 10），最终进入长时间的再层流化（≈ 65）。在低雷诺数、高 θ 条件下（图 4g、i），转捩为湍流的路径又有所不同，在 L、B 和 O 之间呈准周期变化（周期$T \approx 120-220$ 的变化更大）。值得注意的是，强烈的湍流阶段属于翻转型（O），而非颗粒状（G）。不过，这些阶段仍通过同一个编织状（B）“入口”进入，只是沿着.....顶部“向上转入”

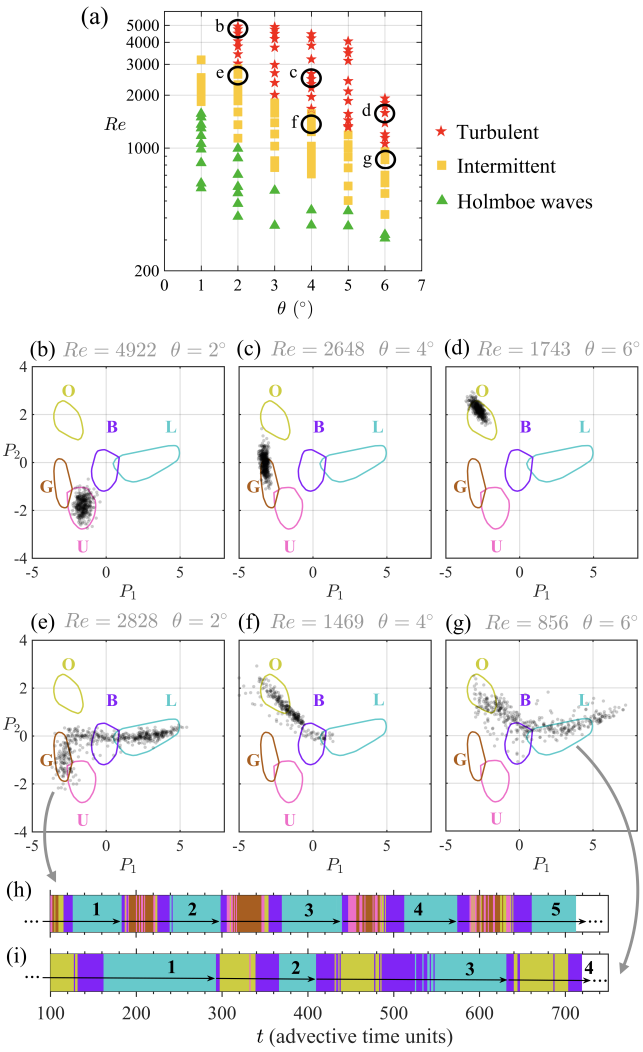

图 4：从 113 组实验的数据集的输入参数空间（a）中选取的六组实验的时间动力学（b-i）。(b-g) 中的帧以半透明符号表示，簇边界以不同颜色标示。(e、g) 中的循环时间序列分别显示在 (h、i) 中（已舍弃初始瞬态 $t < 100$），循环编号以粗体标示。未聚类的帧根据最近的簇着色。

簇，而是通过中间区域“向下转折”（比较图4g和e）。此外，在这两种情况下，经过再层流化阶段 G/O→B→L 中的 B 的过程，都一致地长于经过不稳定过渡阶段 L→B→G/O 中的 B 的过程。这些结果表明，SID间歇性的动力系统围绕两个本质不同的“慢流形”组织起来，这促使我们将其扩展到更高维的相空间，以解析正交“快流形”中的爆发与弛豫动力学 [37,§ 6.7.2]。这些循环的各阶段令人联想到（瞬态）开尔文–亥姆霍兹涡卷的生命周期 [20, 38]，但 SIDflow 蕴含着更丰富的湍流吸引子和转变路径。

结论。— 我们首次对分层倾斜管道（SID）实验中的湍流进行了相干结构建模。这是一种持续存在的双层剪切流，其密度分层和二维参数空间（雷诺数 θ）产生了丰富多样的湍流态和间歇态。我们开发了一种新颖的图像处理算法，将实验阴影成像视频转换为一组精简的二维向量，用以表示每帧中密度界面的形态。这使无监督算法能够自动揭示并绘制参数空间中五种不同湍流类型的分布；我们将其解读为构成SID湍流底层相干“骨架”的基本单元。

高耗散和大动态范围湍流的时间动力学 $\propto$ 雷诺数 θ 局限于各个簇内部；随着雷诺数 降低且 θ增加，其类型从无结构态转变为颗粒状态，再转变为翻转态。较低雷诺数 θ 下耗散较少的间歇性湍流则在簇之间转变，通常呈准周期性。研究确定了两条在根本上不同的湍流转捩路径，二者均经过共同的编织状湍流“入口”，但最终分别进入不同的颗粒状或翻转态“吸引子”。SID中至少存在两次转变，这凸显了这一典型流动对于更广泛地理解具有额外物理效应的高雷诺数 湍流的潜力尚未得到充分挖掘，例如旋转、多相或磁流体湍流。

致谢

我们感谢 Xianyang Jiang、Gaopan Kong 以及 G. K. Batchelor实验室的技术人员对实验提供的帮助。我们也感谢 Paul Linden 和 Stuart Dalziel 的支持，并感谢 Colm-cille Caulfield 就这项工作的意义进行的深刻讨论。实验设施由欧洲研究理事会资助“分层湍流与混合过程”（STAMP，编号 742480）提供经费。A.L. 感谢 Leverhulme早期职业研究员奖和英国自然环境研究理事会独立研究奖学金（ NE/W008971/1）提供的资助。所有数据都将公开。

[1] E. Hopf, Comm. Pure Appl. Math. 1, 303（1948年）。[2] D. Ruelle 和 F. Takens, Commun. Math. Phys. 20, 167（ 1971年）。[3] G. Kawahara、M. Uhlmann 和 L. van Veen, Ann. Rev. Fluid Mech. 44, 203（2012年）。[4] M. D. Graham 和 D. Floryan, Ann. Rev. Fluid Mech. 53, 227（ 2021年）。[5] P. Cvitanovi´c, J. Fluid Mech. 726, 1（2013年）。[6] D. Lucas 和 C. P. Caulfield, J. Fluid Mech. 832, R1（2017年）。[7] J. Page、M. P. Brenner 和 R. R. Kerswell, Phys. Rev. Fluids 06, 034402（2021年）。[8] O. Reynolds, Phil. Trans. Roy. Soc. 174, 935（1883年）。[9] B. Eckhardt、T. M. Schneider、B. Hof 和 J. Westerweel, Ann. Rev. Fluid Mech. 39, 447（2007年）。[10] A. P. Willis、J. Peixinho、R. R. Kerswell 和 T. Mullin, Phil. Trans. R. Soc. A 366, 2671–2684（2008年）。[11] D. Barkley, J. Fluid Mech. 803, P1（ 2016年）。[12] M. Avila、D. Barkley 和 B. Hof, Ann. Rev. Fluid Mech. 55, 575 2023( )。[13] G. I. Taylor, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 223, 289（1923年）。[14] D. Coles, J. Fluid Mech. 21, 385–425（1965年）。[15] D. Feldmann、D. Borrero-Echeverry、M. J. J. Burin、K. Avila 和 M. Avila, Philos. Trans. R. Soc. A 381, 10 1098 2022 0114 2023 . /rsta. . （）。[16] J. S. Turner, 流体中的浮力效应（剑桥大学出版社, 1973年）。[17] E. Deusebio、C. P. Caulfield 和 J. R. Taylor, J. Fluid Mech. 781, 298（2015年）。[18] D. Lucas、C. P. Caulfield 和 R. R. Kerswell, J. Fluid Mech. 832, 409（2017年）。[19] H. Salehipour 和 W. R. Peltier, J. Fluid Mech. 861, R4（ 2019年）。[20] K. M. Smith、C. P. Caulfield 和 J. R. Taylor, J. Fluid Mech. 910, A42（2021年）。[21] E. O. Macagno 和 H. Rouse，J. Engng Mech. Division. Proc. Am. Soc. Civ. Engrs **87**, 55 (1961). [22] C. R. Meyer 和 P. F. Linden，J. Fluid Mech. **753**, 242 (2014). [23] A. Lefauve、J. L. Partridge 和 P. F. Linden，J. Fluid Mech. **875**, 657 (2019). [24] A. Lefauve 和 P. F. Linden，J. Fluid Mech. **893**, A2 (2020). [25] J. L. Partridge、A. Lefauve 和 S. B. Dalziel，Meas. Sci. Tech. **30**, 055203 (2019). [26] A. Lefauve、J. L. Partridge、Q. Zhou、C. P. Caulfield、S. B. Dalziel 和 P. F. Linden，J. Fluid Mech. **848**, 508 (2018). [27] X. Jiang、A. Lefauve、S. B. Dalziel 和 P. F. Linden, J. Fluid Mech. **937**, A30 (2022). [28] A. Lefauve 和 M. M. P. Couchman，已提交（2023）。[29] P. F. Linden，Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **13**, 3 (1979). [30] C. P. Caulfield，Ann. Rev. Fluid Mech. **53**, 113 (2021). [31] M. M. P. Couchman、S. M. de Bruyn Kops 和 C. P. Caulfield，J. Fluid Mech. **961**, A20 (2023). [32] J. Canny，IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. **PAMI-8**, 679 (1986). [33] S. L. Brunton 和 J. N. Kutz，数据驱动科学与工程：机器学习、动力系统与控制，第1版（剑桥大学出版社, 2019）。[34] M. Ankerst、M. M. Breunig、H.-P. Kriegel 和 J. Sander，ACM SIGMOD Record **28(2)**, 49 (1999). [35] M. M. P. Couchman、B. Wynne-Cattanach、M. H. Alford、C. P. Caulfield、R. R. Kerswell、J. A. MacKinnon 和 G. Voet，Geophys. Res. Lett. **48**, 23 (2021). [36] A. Lefauve 和 P. F. Linden，J. Fluid Mech. **937**, A35 (2022). [37] P. J. Schmid，载于湍流高级研究方法 （爱思唯尔，2021），第243–305页。[38] A. Mashayek、C. P. Caulfield 和 M. H. Alford，J. Fluid Mech. **928**, A1。