arXiv:2305.04057v1 [math.DS] 6 May 2023

Feldman-Katok伪轨道与拓扑压力

FANGZHOU CAI

摘要：本文引入 Feldman-Katok 伪轨道的概念，并用它研究拓扑压力。我们证明，动力系统的拓扑压力可以通过衡量势函数上移位映射的 Feldman-Katok 伪轨道复杂度来计算，从而推广了 Barge 和 Swanson 关于熵与伪轨道的结果 [9]。

1. 引言

拓扑动力系统（简称 TDS）是指一对 (X, T)，其中 X 是配备度量 d 的紧致度量空间，且 T：X $\to$ X 是连续映射。拓扑熵最初由 Adler、Konheim 和 McAndrew 于 1965 年引入 [1] 。后来，Dinaburg[2] 和 Bowen [3] 利用分离集和生成集给出了若干等价定义。Bowen 还给出了拓扑熵的维数类型刻画，推广了非紧集上的定义 [4]。拓扑熵是拓扑共轭下一个重要的动力学不变量。粗略地说，拓扑熵衡量了拓扑动力系统中不同正向轨道的最大指数增长率。

自 Bowen [5] 和 Conley [7], 提出以来的这些年间，伪轨道已被证明是动力系统中的一种强大工具。Misiurewicz[8] 的一项重要结果指出，可以通过测量伪轨道数量的指数增长率来计算拓扑熵。随后，Barge 和 Swanson [9] 对周期伪轨道给出了类似的结果。在 [10], 中，Hurley 研究了逆像的伪轨道，并证明伪轨道的点熵实际上等于拓扑熵。在 [11], 中，Yan 和 Zeng 针对紧致一致空间上的连续映射获得了类似的结果。最近，Cheng 和 Li 利用伪轨道刻画了尺度压力 [23]这一概念。

作为拓扑熵一种非平凡且自然的推广，Ruelle 在统计力学中吉布斯态理论的启发下，于动力系统中引入了拓扑压力的概念 [21] 。随后，Walters 将其推广到一般的拓扑动力系统 [22] 。从维数理论的角度出发，Pesin 和 Pitskel 将 Bowen 对拓扑熵的定义推广，并定义了非紧集上的拓扑压力 [18] 。拓扑压力是热力学形式中的一个基本概念，也是热力学形式的主要组成部分（[6, 17, 19, 20]）。

2017年，Kwietniak 和 Łacka [24] 引入了 Feldman-Katok度量，作为编辑距离 f 的拓扑对应形式，而编辑距离 f 是由 Feldman [12] 提出的，用于研究松伯努利系统（另见 [13, 14]）。近年来，Feldman-Katok度量

被证明是研究动力系统的有效工具。在 [25], 作者用它刻画零熵松伯努利系统，并给出了其拓扑模型的纯拓扑刻画。在 [15], Downarowicz、Kwietniak 和 Łacka 引入了 f-伪度量的概念，并将其应用于有限值平稳随机过程的研究，以考察熵率。在 [16], Cai 和 Li 给出了由 Feldman-Katok 度量定义的熵公式。

使用 Feldman-Katok度量的优势在于，它允许时间延迟，不必同步轨道中的点，只需满足保序即可。受此前优秀工作的启发，本文将 Feldman-Katok度量定义中的思想引入伪轨道，并尝试用它来研究拓扑压力。

本文的组织结构如下：首先介绍 Feldman-Katok 伪轨道的概念。然后给出关于 Feldman-Katok 伪轨道的拓扑压力公式。我们还考察尺度压力，并证明在 [23, 定理 F], 中，T 的 Lipschitz 连续性是多余的。最后介绍并研究关于 Feldman-Katok 度量的拓扑压力。

2. FELDMAN-KATOK伪轨道与拓扑压力

在本节中，我们引入 Feldman-Katok 伪轨道的概念，并利用它来研究拓扑压力。我们的思路源于 Feldman-Katok 度量的定义，该度量允许轨道存在时间延迟，而只要求满足保序性。

2.1. Feldman-Katok 伪轨道。设 (X , T) 为一个拓扑动力系统，且 $\alpha > 0$。回顾一下，我们称 $(x_0, x1, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ 是一个 α-伪轨道，如果

$$d(Tx_i, x_{i+1}) \leq \alpha, i = 0, 1 \ldots, n \ldots.$$

记 \(\mathrm{PO}_{\{v1\}}(X,T)\)，或简记为 \(\mathrm{PO}_{\{v2\}}\)，表示所有 \(\{v3\}\)-伪轨道构成的集合。

我们在经典伪轨道中引入时间延迟和“跳跃”的概念，并给出 Feldman-Katok 伪轨道的定义。

定义 2.1. 设 (X , T) 是一个拓扑动力系统，$n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha, \delta > 0$. 我们称 $(x_0, x1, \ldots, x_{n-1}) \in X^n$ 是一个密度为 $1 - \delta$ 的 FK-α- 伪链，如果存在 $(1 - \delta)n < k \leq n$ 且

$$0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n - 1,$$
$$0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n - 1$$

使得

$$d(T^{j_{t+1} - j_t}(x_{i_t}), x_{i_{t+1}}) \leq \alpha, t = 1, \ldots, k - 1.$$

注 2.2. 在上述定义中，如果我们选择 $k = n$ 和 $i_1 = j_1 = 0, \ldots, i_n = j_n = n - 1$，就得到了 α-伪链的定义（参见 [9]）。

定义 2.3. 设 (X, T) 是一个拓扑动力系统，$\delta > 0$ 且 $N_\delta \in \mathbb{N}$。我们称 $(x_0, x1, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ 是一个由 N_δ 控制的、密度为 $1 - \delta$ 的 FK-α-伪轨道，当且仅当存在一个序列 $0 \leq s_0 < s_1 < \ldots < s_i < \ldots$，属于 $\mathbb{N}$，满足

$$s_0 \leq N_\delta, s_{i+1} - s_i \leq N_\delta, i = 0, 1, \ldots,$$

使得　对所有 $m > n$，$(x_{s_n}, x_{s_n+1}, \ldots, x_{s_m-1})$ 是密度为 $1 - \delta$ 的 FK-α-伪链。

用 FKPO$_{\alpha,\delta}$(X, T, N$_\delta$) 表示由 N$_\delta$ 控制的密度为 $1-\delta$ 的 FK-α-伪轨道集合。

注 2.4。（1）需要 Nδ 来控制长度，因为我们必须避免出现这样的情况：点 x 的前几个有限分量可以任意选择；在这种情况下，我们会在 $X^{\mathbb{N}}$ 中得到一个稠密集。

（2）根据定义，很容易看出 FKPO$_{\alpha,\delta}$(X, T, Nδ) 包含 PO$_\alpha$(X, T)。

（3）我们可以看到，具有以下形式的点

$$(x, y_1, T^2x, y_3, \ldots, T^{2n}x, y_{2n+1}, \ldots)$$

属于 FKPO$_{\alpha,\delta}$(X , T, Nδ)，其中 $\alpha > 0$、$\delta > \frac{1}{2}$ 和 $N_\delta \geq 4$.。因此，FK-伪轨道与伪轨道之间存在本质区别。

（4）如果 $\delta N_\delta < 1$，则定义中 k 的取值只有 n；因此，为了避免平凡性，我们可以通过选择适当的 N$_\delta$，使 δN$_\delta$ 足够大。

(5) 很容易看出，FKPO$_{\alpha,\ \delta}$(X , T, Nδ) 关于 α 单调递增。但是，F KPO$_{\alpha,\ \delta}$(X , T, N$_\delta$) 关于 δ 不一定是单调的。

在下文中，我们固定 $\{N\delta : \delta > 0\} \subset \mathbb{N}$。

我们将 FKPO$_{\alpha,\delta}$ 简写为 FKPO$_{\alpha,\delta}$(X, T, Nδ)。

以下命题表明，费尔德曼-卡托克伪轨道$_{\alpha,\ \delta}$ 具有良好的结构。

命题 2.5. 设 (X , T) 是一个拓扑动力系统，且 $\alpha, \delta > 0$。那么 FKPO$_{\alpha,\delta}$ 在 $X^{\mathbb{N}}$ 中是闭的，并且在移位 σ 下不变。

证明。由于 FKPO$_{\alpha,\delta}$ 的定义对 (x0, . . . , x$_{s_0-1}$) 没有限制，因此很容易看出 FKPO$_{\alpha,\delta}$ 在 σ 下是不变的。现在我们证明 FKPO$_{\alpha,\delta}$ 是闭的。

令 $x^h \in$ 费尔德曼-卡托克伪轨道$_{\alpha,\ \delta}$ 其中 $x^h \to x$。根据定义，存在一个序列 $s_0^h < s_1^h < \ldots < s_i^h < \ldots$，满足

$$s_0^h \leq N_\delta, s_{i+1}^h - s_i^h \leq N_\delta,\ i = 0, 1, \ldots,$$

使得对所有 $m > n$，($x^h{}_{s_n^h}$, $x^h{}_{s_n^h+1}$, . . . , $x^h{}_{s_m^h-1}$) 是一个密度为 $1-\delta$ 的 FK-α-伪链。我们可以找到 $s_0 < s_1 < \ldots < s_i < \ldots$，满足

$$s_0 \leq N_\delta, s_{i+1} - s_i \leq N_\delta, i = 0, 1, \ldots,$$

使得对任意 $l \in \mathbb{N}$，都存在无穷多个 h 满足

$$(s_0^h, s_1^h, \ldots, s_l^h) = (s_0, s_1, \ldots, s_l).$$

固定 $m > n$。现在证明 (x$_{s_n}$, x$_{s_n+1}$, . . . , x$_{s_m-1}$) 是一个密度为 $1-\delta$ 的 FK-α-伪链。对于 m，存在无穷多个 h，使得

$$(s_0^h, s_1^h, \ldots, s_m^h) = (s_0, s_1, \ldots, s_m).$$

对于这样的 h，由于

$$(x^h_{s_n^h}, x^h_{s_n^h+1}, \ldots, x^h_{s_m^h-1}) = (x^h_{s_n}, x^h_{s_n+1}, \ldots, x^h_{s_m-1})$$

是密度为 $1-\delta$ 的 FK-α-伪链，存在 k_h 使得

$$(1-\delta)(s_m - s_n) < k_h \leq (s_m - s_n)$$

and

$$0 \le i_1^h < i_2^h < \ldots < i_{k_h}^h \le s_m - s_n - 1,$$
$$0 \le j_1^h < j_2^h < \ldots < j_{k_h}^h \le s_m - s_n - 1,$$

使得

$$d(T^{j_{t+1}^h - j_t^h} x_{i_t^h + s_n}^h, x_{i_{t+1}^h + s_n}^h) \le \alpha, t = 1, \ldots, k_h - 1.$$

我们可以选择某个 k，使得

$$(1-\delta)(s_m - s_n) < k \le (s_m - s_n)$$

and

$$0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le s_m - s_n - 1,$$
$$0 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le s_m - s_n - 1,$$

使得存在无穷多个 h 满足 k_h =k 且

$$(i_1^h, i_2^h, \ldots, i_k^h) = (i_1, i_2, \ldots, i_k),$$
$$(j_1^h, j_2^h, \ldots, j_k^h) = (j_1, j_2, \ldots, j_k).$$

对于这样的 h，我们有

$$d(T^{j_{t+1} - j_t} x_{i_t + s_n}^h, x_{i_{t+1} + s_n}^h) \le \alpha, t = 1, \ldots, k-1.$$

令 h $\to \infty$，我们有

$$d(T^{j_{t+1} - j_t} x_{i_t + s_n}, x_{i_{t+1} + s_n}) \le \alpha, t = 1, \ldots, k-1.$$

因此，(x_{s_n}, x_{s_n+1}, . . . , x_{s_m-1}) 是密度为 $1-\delta$ 的 FK-α-伪链。 □

2.2. 关于 Feldman-Katok 伪轨道的拓扑压力。本小节中，我们使用 Feldman-Katok伪轨道研究拓扑压力。

首先，让我们回顾一些基本概念。

设 (X, T) 为一个拓扑动力系统。对于 x, y ∈X，n ∈ℕ 和 ε > 0，令

$$d_n(x,y) = \max_{0 \le i \le n-1} d(T^i x, T^i y)$$

为 Bowen 度量。若对任意 x ≠ y ∈ E，d_n(x, y) > ε，则称 E ⊂ X 是 X 的一个 (n ε)-分离集。若对每个 x ∈X，都存在 y ∈F 使得 d_n(x, y) ≤ ε.，则称 F ⊂X 是 X 的一个 (n ε)-生成集。

设 f ∈C(X)，定义

$$sp_{n,\varepsilon}(X,T,f) = \inf\{\sum_{x \in F} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)} : F \text{ is an } (n,\varepsilon)\text{-spanning set of } X\},$$

$$sr_{n,\varepsilon}(X,T,f) = \sup\{\sum_{x \in E} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)} : E \text{ is an } (n,\varepsilon)\text{-separated set of } X\}.$$

已知，具有势函数 f 的 (X, T) 的拓扑压力定义为

$$P(X,T,f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log sp_{n,\varepsilon}(X,T,f)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log sr_{n,\varepsilon}(X,T,f).$$

对于 $X^{\mathbb{N}}$ 中的 $x=(x_0,x1,\ldots)$、$y=(y_0,y1,\ldots)$，$X^{\mathbb{N}}$ 上的度量 $\tilde{d}$ 定义为

$$\tilde{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d(x_i,y_i)}{2^i}.$$

对于 $Y\subset X^{\mathbb{N}}$，如果对于 $E\subset Y$ 中的每个 $x\neq y$，都存在 $0\le i\le n-1$ 使得 $d(x_i,y_i)>\varepsilon$，则称 E 是 Y 的一个 $(n\varepsilon)$-分离集。若对于每个 $x\in Y$，都存在 $y\in F$，使得 $d(x_i,y_i)<\varepsilon, 0\le i\le n-1.$，则称 $F\subset Y$ 是 Y 的一个 $(n\ \varepsilon)$-生成集。

对于 α、$\delta>0$ 以及 $f\in C(X)$，定义

$$FKPOsp_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}(X,T,f)=$$
$$\inf\{\sum_{\mathbf{x}\in F}e^{\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)}:F \text{ is an } (n,\varepsilon)\text{-spanning set of } FKPO_{\alpha,\delta}\},$$
$$FKPOsr_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}(X,T,f)=$$
$$\sup\{\sum_{\mathbf{x}\in E}e^{\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)}:E \text{ is an } (n,\varepsilon)\text{-separated set of } FKPO_{\alpha,\delta}\}.$$

在不引起混淆的情况下，我们简单地将 $FKPOsp_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}$ 和 $FKPOsr_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}$ 分别记作。

类似于 [9], 中的定义，我们定义

$$PFKPO(X,T,f,\varepsilon,\delta)=\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKPOsp_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}(X,T,f)$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKPOsp_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}(X,T,f).$$

由于 $FKPO_{\alpha,\delta}$ 关于 α单调递增，因此该极限存在。现在我们定义

$$PFKPO(X,T,f,\varepsilon)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}PFKPO(X,T,f,\varepsilon,\delta).$$

注意，此处的费尔德曼-卡托克伪轨道$_{\alpha,\delta}$ 关于 δ不一定是单调的，因此“$\lim_{\delta\to 0}$”不能替换为“$\inf_{\delta>0}$”或“$\lim_{\delta\to 0}$”。

容易看出，PFKPO(X, T, f ε)关于 ε是非递增的。我们定义

$$PFKPO(X,T,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}PFKPO(X,T,f,\varepsilon)$$

为关于 Feldman-Katok 伪轨道的拓扑压力。

下面的引理表明，我们可以在上述定义中使用分离集。

引理2.6. 设 (X , T) 是一个拓扑动力系统，且 $f\in C(X)$。则

$$PFKPO(X,T,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{\delta\to 0}}\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKPOsr_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}(X,T,f).$$

证明。根据定义，容易看出

$$PFKPO(X,T,f)\le\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{\delta\to 0}}\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKPOsr_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}.$$

现在我们证明反方向。令 $\alpha,\delta>0$. 对于 $\varepsilon>0$，设

$$L(\varepsilon)=\sup_{|x-y|\le\varepsilon}|f(x)-f(y)|.$$

假设 E 是 FKPOα, δ 的一个 (n ε)-分离集，F 是一个 (n $\frac{\varepsilon}{2}$)-生成集。映射 ϕ: E $\to$ F 定义如下：对于每个 x $\in$ E，选择 F 中的某个点 ϕ(x) $\in$，使得

$$d(x_i, \phi(\mathbf{x})_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}, i = 0, \ldots, n-1.$$

那么 ϕ是单射且

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{y}\in F} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(y_i)} &\geq \sum_{\mathbf{x}\in E} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(\phi(\mathbf{x})_i)} \\ &= \sum_{\mathbf{x}\in E} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(\phi(\mathbf{x})_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)} \\ &\geq e^{-nL(\frac{\varepsilon}{2})} \sum_{\mathbf{x}\in E} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}.\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{\delta\to 0}} \inf_{\alpha>0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log FKPOsr_{n,\varepsilon;\alpha,\delta} \\ &\leq \overline{\lim_{\delta\to 0}} \inf_{\alpha>0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log FKPOsp_{n,\frac{\varepsilon}{2};\alpha,\delta} + L(\frac{\varepsilon}{2}).\end{aligned}$$

令 ε $\to$ 0，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{\delta\to 0}} \inf_{\alpha>0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log FKPOsr_{n,\varepsilon;\alpha,\delta} \leq PFKPO(X, T, f).$$

□

现在我们证明，关于 Feldman-Katok 伪轨道的拓扑压力等于经典拓扑压力。我们有以下定理：

定理2.7. 设 (X , T) 是一个拓扑动力系统，且 f $\in$C(X). 那么

$$PFKPO(X, T, f) = P(X, T, f).$$

证明。根据定义，我们有 PFKPO(X, T, f) $\geq$P(X, T, f)。现在我们证明反方向。

固定 ε > 0. 令 X $= \bigcup_{i=1}^{l}$ X_i 的 X 的直径为 $_i < \frac{\varepsilon}{4}$，i $= 1, \ldots,$ l。选取某个 $z_i \in X_i$。

对于 δ $< \frac{\varepsilon}{2}$，n $>$ max{$N_{\frac{\delta}{2}}$, X的直径$_\delta$ }，m > 3n，设 F 为 X 的一个 (n $+$m $\frac{\delta}{4}$)-生成集。我们可以找到

$$0 < \delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_{2(n+m)} = \frac{\delta}{4}$$

使得对于每个 δ_k、k $= 0$、1、.....、2(n $+$m) $-$1,

$$d(x, y) < \delta_k \Rightarrow d(T^i x, T^i y) < \delta_{k+1}, i = 0, \ldots, 2(n+m)-1.$$

令 α $<$ min{$\delta_0, \delta_{k+1} - \delta_k$: k $= 0, 1, \ldots,$ 2(n $+$m) $-$1}.

对于 \(x \in F\)，令 \(F\) 为具有以下形式的点的集合：

$$(y_0, y_1, \ldots, y_{i_1-1}, T^{j_1}x, y_{i_1+1}, \ldots, y_{i_k-1}, T^{j_k}x, y_{i_k+1}, \ldots, y_{m+n-1}, z_1, z_1, \ldots),$$

其中

$$\begin{aligned}(1-3\delta)(n+m) < k \leq (n+m), \\ 0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n+m-1,\end{aligned}$$

$$0 \le j_1 < \ldots < j_k \le n+m-1$$

且 $y_i \in \{z_1, \ldots, z_l\}$.

我们有

$$|F_x| \le \sum_{(1-3\delta)(n+m)<k\le n+m} (C_{n+m}^k)^2 l^{n+m-k}.$$

断言:

$$FKPO_{\alpha,\delta} \subset \bigcup_{x\in F} \bigcup_{\mathbf{y}\in F_x} B_{\tilde{d}_m}(\mathbf{y},\varepsilon),$$

其中，B ~d_m(y ε) 表示关于 ~d_m 的 y 的开 ε-球。

断言的证明：对于 x ∈ 费尔德曼-卡托克伪轨道α.δ，根据定义，存在 $0 < s_0 < s_1 < \ldots < s_i < \ldots$ 使得

$$s_0 \le N_\delta, s_{i+1} - s_i \le N_\delta, i = 0, 1, \ldots,$$

使得对所有 b > a，($x_{s_a}, x_{s_a+1}, \ldots, x_{s_b-1}$) 都是密度为 $1-\delta$ 的 FK-α-伪链。令 b 满足 $s_b \le n+m$ 且 $s_{b+1} > m+n$。容易验证

$$s_b - s_0 > (1-2\delta)(n+m).$$

由于 ($x_{s_0}, x_{s_0+1}, \ldots, x_{s_b-1}$) 是密度为 $1-\delta$ 的 FK-α-伪链，因此我们可以找到 k，使得

$$(1-3\delta)(n+m) \le (1-\delta)(s_b - s_0) < k \le s_b - s_0 \le n+m$$

and

$$s_0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le s_b - 1 \le n+m-1,$$
$$0 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le s_b - s_0 - 1 \le n+m-1$$

使得

$$d(T^{j_{t+1}-j_t}(x_{i_t}), x_{i_{t+1}}) \le \alpha, t = 1, \ldots, k-1.$$

现在我们证明

$$d(T^{j_t-j_1}(x_{i_1}), x_{i_t}) < \delta_{2(t-2)} < \frac{\delta}{4}, t = 2, \ldots, k. \tag{1}$$

我们用归纳法证明。当 $t = 2$ 时，结论显然成立。若（1）对 t 成立，则有

$$d(T^{j_{t+1}-j_1}(x_{i_1}), T^{j_{t+1}-j_t} x_{i_t}) < \delta_{2(t-2)+1},$$

因此

$$d(T^{j_{t+1}-j_1}(x_{i_1}), x_{i_{t+1}}) < \delta_{2(t-2)+1} + \alpha \le \delta_{2(t-1)}.$$

由归纳法可知（1）得证。

由于 F 是 X 的一个 (n + m $\frac{\delta}{4}$)-生成集，存在 x ∈F，使得

$$d(T^h x, T^h x_{i_1}) < \frac{\delta}{4}, h = 0, \ldots, n+m-1.$$

因此

$$d(T^{j_t-j_1} x, x_{i_t}) < \frac{\delta}{2}, t = 1, \ldots, k.$$

我们假设 $x_i \in X_{h_i}$，i = 0，1, . . . , m + n − 1.注意，$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ X 的直径。我们有 x ∈B ~d_m(yε)，其中

$$\mathbf{y} = (z_{h_0}, z_{h_1}, \ldots, z_{h_{i_1-1}}, x, z_{i_1+1}, \ldots, z_{h_{i_k-1}}, T^{j_k-j_1}x, z_{h_{i_k+1}}, \ldots, z_{h_{m+n-1}}, z_1, z_1, \ldots).$$

该断言得证。

Denote

$$Cov_{n,\varepsilon}(\beta,\delta)=$$

$$\inf\{\sum_{A\in\mathscr{A}}\sup_{\mathbf{x}\in A}e^{\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)}:\mathscr{A}\text{ is a finite subcover of }\vee_{i=0}^{n-1}\sigma^{-i}\mathscr{A}_\varepsilon\text{ covers }FKPO_{\beta,\delta}\},$$

其中 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 表示由所有开 ε球组成的覆盖（$X^{\mathbb{N}}$, $\tilde{d}$）。

根据该断言，我们有

$$Cov_{m,\varepsilon}(\alpha,\delta)\le\sum_{x\in F}\sum_{\mathbf{y}\in F_x}\sup_{\mathbf{z}\in B_{\tilde{d}_m}(\mathbf{y},\varepsilon)}e^{\sum_{i=0}^{m-1}f(z_i)}.$$

注意，α依赖于 m 和 δ。

对于 $x\in F$，若 $y\in F_x$ 且 $z\in B_{\tilde{d}_m}(y,\varepsilon)$，则有 $d(y_i,z_i)<\varepsilon$，$i=0,\ldots,m-1$. 注意到 $m>3n$，我们有

$$(1-3\delta)(n+m)-n>(1-4\delta)m$$

and

$$\sum_{i=0}^{m-1}f(z_i)-\sum_{i=0}^{m-1}f(T^ix)\le mL(\varepsilon)+2||f||4\delta m,$$

其中

$$L(\varepsilon)=\sup_{|x-y|\le\varepsilon}|f(x)-f(y)|.$$

因此

$$\sum_{\mathbf{y}\in F_x}\sup_{\mathbf{z}\in B_{\tilde{d}_m}(\mathbf{y},\varepsilon)}e^{\sum_{i=0}^{m-1}f(z_i)}\le|F_x|e^{\sum_{i=0}^{m-1}f(T^ix)}e^{(mL(\varepsilon)+8||f||\delta m)}.$$

注意到

$$\begin{aligned}|F_x|&\le\sum_{(1-3\delta)(n+m)<k\le n+m}(C_{n+m}^k)^2l^{n+m-k}\\&\le 3\delta(n+m)(C_{n+m}^{[3\delta(n+m)]})^2l^{3\delta(n+m)}.\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}Cov_{m,\varepsilon}(\alpha,\delta)&\le 3\delta(n+m)(C_{n+m}^{[3\delta(n+m)]})^2l^{3\delta(n+m)}\\&\quad\cdot e^{(mL(\varepsilon)+8||f||\delta m)}\sum_{x\in F}e^{\sum_{i=0}^{m-1}f(T^ix)}\\&\le 3\delta(n+m)(C_{n+m}^{[3\delta(n+m)]})^2l^{3\delta(n+m)}\sum_{x\in F}e^{\sum_{i=0}^{m+n-1}f(T^ix)}\\&\quad\cdot e^{(mL(\varepsilon)+8||f||\delta m)+n||f||}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\inf_m\inf_{\alpha>0}\frac{1}{m}\log Cov_{m,\varepsilon}(\alpha,\delta)\\&\le(L(\varepsilon)+8||f||\delta)+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log(C_{n+m}^{[3\delta(n+m)]})^2+3\delta\log l+\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log sp_{m,\frac{\delta}{4}}.\end{aligned}$$

很容易看出，对于所有的 m、n $\in \mathbb{N}$ 和 $\beta > 0$，我们都有

$$Cov_{m+n,\varepsilon}(\beta,\delta) \le Cov_{m,\varepsilon}(\beta,\delta)Cov_{n,\varepsilon}(\beta,\delta).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Cov_{n,\varepsilon}(\beta,\delta) = \inf_n \frac{1}{n}\log Cov_{n,\varepsilon}(\beta,\delta).$$

容易看出，

$$FKPOsr_{m,2\varepsilon;\beta,\delta} \le Cov_{m,\varepsilon}(\beta,\delta).$$

因此

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{\delta\to 0}}\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log FKPOsr_{m,2\varepsilon;\alpha,\delta} &\le \overline{\lim_{\delta\to 0}}\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log Cov_{m,\varepsilon}(\alpha,\delta)\\
&\le \overline{\lim_{\delta\to 0}}\inf_{\alpha>0}\inf_m\frac{1}{m}\log Cov_{m,\varepsilon}(\alpha,\delta)\\
&\le \overline{\lim_{\delta\to 0}}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log sp_{m,\frac{\delta}{4}} + L(\varepsilon)\\
&= P(X,T,f) + L(\varepsilon).
\end{aligned}$$

设 $\varepsilon \to 0$，我们有 PFKPO(X , T, f) $\le$P(X, T, f)。 □

注 2.8。(1) 容易看出，

$$\begin{aligned}
P(X,T,f) &\le \lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{\delta>0}\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKPOsp_{n,\varepsilon;\alpha,\delta}\\
&\le \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{\delta\to 0}}\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKPOsp_{n,\varepsilon;\alpha,\delta},
\end{aligned}$$

如果在 PFKPO(X , T, f) 的定义中用“ $\inf_{\delta>0}$”替换“$\overline{\lim}_{\delta\to 0}$”，我们也可以轻易地证明类似的结果。

(2) 周期Feldman-Katok伪轨道的集合包含周期伪轨道的集合，并且包含于Feldman-Katok伪轨道的集合中，因此可以直接得到关于周期Feldman-Katok伪轨道的结果。

2.3. 伪轨道与尺度压力。 在 [23], 作者研究了关于伪轨道的尺度压力。在本小节中，我们证明在 [23, 定理 F], 中，条件 T 是利普希茨连续的这一条件是多余的。

首先回顾一些概念。

若函数 S : (0, 1) $\to$(0,∞) 满足对任意 $\lambda \in (0,\infty)$，则称其为尺度函数。

$$\lim_{x\to 0}\frac{S(\lambda x)}{S(x)} = 1.$$

设 \(f\in C(X)\)，且 \(S\) 为一个尺度函数，定义

$$Spa_{n,\varepsilon}(X,T,f,S) = \inf\{\sum_{x\in F} e^{S(\varepsilon)\Sigma_{i=0}^{n-1} f(T^i x)} : F \text{ is an } (n,\varepsilon)\text{-spanning set of } X\},$$

$$Sep_{n,\varepsilon}(X,T,f,S) = \sup\{\sum_{x\in E} e^{S(\varepsilon)\Sigma_{i=0}^{n-1} f(T^i x)} : E \text{ is an } (n,\varepsilon)\text{-separated set of } X\}.$$

关于 f 和 S，(X, T) 的尺度压力定义为

$$\begin{aligned} Sdim(X,T,f,S) &= \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\log Spa_{n,\varepsilon}}{S(\varepsilon)} \\ &= \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\log Sep_{n,\varepsilon}}{S(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

记

$$PPO_{n,\alpha}(X,T) = \{\mathbf{x} \in PO_\alpha(X,T) : x_{n+k} = x_k, k \in \mathbb{N}\}$$

n 周期 α伪轨道。

定义

$$POSpa_{n,\varepsilon,\alpha}(X,T,f,S)(resp.\ PPOSpa_{n,\varepsilon,\alpha}(X,T,f,S)) =$$
$$\inf\{\sum_{\mathbf{x}\in F} e^{S(\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)} : F \text{ is an } (n,\varepsilon)\text{-spanning set of } PO_\alpha(resp.\ PPO_{n,\alpha})\},$$
$$POSep_{n,\varepsilon,\alpha}(X,T,f,S)(resp.\ PPOSep_{n,\varepsilon,\alpha}(X,T,f,S)) =$$
$$\sup\{\sum_{\mathbf{x}\in E} e^{S(\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)} : E \text{ is an } (n,\varepsilon)\text{-separated set of } PO_\alpha(resp.\ PPO_{n,\alpha})\}.$$

将关于伪轨道（分别为周期伪轨道）的尺度压力定义为

$$\begin{aligned} &PSdim(X,T,f,S)(resp.\ PPSdim(X,T,f,S)) \\ &= \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\lim_{\alpha\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\log POSpa_{n,\varepsilon,\alpha}(resp.\ PPOSpa_{n,\varepsilon,\alpha})}{S(\varepsilon)} \\ &= \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\lim_{\alpha\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\log POSep_{n,\varepsilon,\alpha}(resp.\ PPOSep_{n,\varepsilon,\alpha})}{S(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

现在我们证明，在[23, 定理 F], 中，T 是利普希茨连续这一条件是多余的。

定理 2.9。设 (X，T) 是一个拓扑动力系统，f ∈C(X)，且 S 是一个尺度函数。那么

$$Sdim(X,T,f,S) = PSdim(X,T,f,S).$$

此外，若 f ≥0 且 S 单调不增，则

$$Sdim(X,T,f,S) = PPSdim(X,T,f,S).$$

证明。根据定义，我们有 Sdim(X, T, f, S) ≤PSdim(X, T, f, S)。现在证明反方向。

Fix ε > 0. 令 X = $\bigcup_{i=1}$ X_i，其中 X 的直径$_i$ < $\frac{\varepsilon}{4}$，i = 1，....., l。取某个 z_i ∈X_i。

对于 n ＞~~2x 的直径ε~~ 和 m，令 F 为 X 的一个 (n + m $\frac{\varepsilon}{4}$)-生成集。我们可以找到

$$0 < \delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_{2(n+m)} = \frac{\varepsilon}{4}$$

使得对于每个 δ_k，k = 0，1，...，2(n + m) − 1，

$$d(x,y) < \delta_k \Rightarrow d(T^i x, T^i y) < \delta_{k+1}, i = 0,\ldots,2(n+m)-1.$$

Let

$$\alpha < \min\{\delta_0, \delta_{k+1} - \delta_k : k = 0, 1, \ldots, 2(n+m)-1\}.$$

Let

$$\tilde{F} = \{(x, Tx, \ldots, T^i x, \ldots, T^{m+n-1}x, z_1, z_1, \ldots) : x \in F\}.$$

我们有 $\bigcup_{\mathbf{y}\in \tilde{F}} B_{\tilde{d}_m}(\mathbf{y}, \varepsilon)$ 覆盖 PO_α。记

$$Cov_{n,\varepsilon}(\beta) =$$

$$\inf\{\sum_{A\in\mathscr{A}} \sup_{\mathbf{x}\in A} e^{S(\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)} : \mathscr{A} \text{ is a finite subcover of } \vee_{i=0}^{n-1}\sigma^{-i}\mathscr{A}_\varepsilon \text{ covers } PO_\beta\},$$

其中 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 表示由所有开 ε球组成的覆盖（$X^{\mathbb{N}}$, $\tilde{d}$）。我们有

$$Cov_{m,\varepsilon}(\alpha) \le \sum_{\mathbf{y}\in\tilde{F}} \sup_{\mathbf{z}\in B_{\tilde{d}_m}(\mathbf{y},\varepsilon)} e^{S(\varepsilon)\sum_{i=0}^{m-1} f(z_i)}.$$

这里 α依赖于 m。

对于 $x \in F$、$y = (x, Tx, \ldots, T^i x, \ldots, T^{m+n-1}x, z_1, z_1, \ldots) \in \tilde{F}$，以及 $z \in B_{\tilde{d}_m}(y, \varepsilon)$，我们有 $d(T^i x, z_i) < \varepsilon$，$i = 0, \ldots, m-1$. 由此可得

$$\sum_{i=0}^{m-1} f(z_i) - \sum_{i=0}^{m-1} f(T^i x) \le mL(\varepsilon),$$

其中

$$L(\varepsilon) = \sup_{|x-y|\le\varepsilon} |f(x) - f(y)|.$$

因此

$$\sum_{\mathbf{y}\in\tilde{F}} \sup_{\mathbf{z}\in B_{\tilde{d}_m}(\mathbf{y},\varepsilon)} e^{S(\varepsilon)\sum_{i=0}^{m-1} f(z_i)} \le \sum_{x\in F} e^{S(\varepsilon)\sum_{i=0}^{m-1} f(T^i x)} e^{S(\varepsilon)mL(\varepsilon)}.$$

我们有

$$\begin{aligned} Cov_{m,\varepsilon}(\alpha) &\le e^{S(\varepsilon)mL(\varepsilon)} \sum_{x\in F} e^{S(\varepsilon)\sum_{i=0}^{m-1} f(T^i x)} \\ &\le e^{S(\varepsilon)(mL(\varepsilon)+n||f||)} \sum_{x\in F} e^{S(\varepsilon)\sum_{i=0}^{m+n-1} f(T^i x)}. \end{aligned}$$

因此

$$\inf_m \inf_{\alpha>0} \frac{1}{m}\log Cov_{m,\varepsilon}(\alpha) \le S(\varepsilon)L(\varepsilon) + \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\log Spa_{m,\frac{\varepsilon}{4}}.$$

容易看出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log Cov_{n,\varepsilon}(\beta) = \inf_n \frac{1}{n}\log Cov_{n,\varepsilon}(\beta)$$

and

$$POSep_{m,2\varepsilon,\beta} \le Cov_{m,\varepsilon}(\beta).$$

因此

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log POSep_{m,2\varepsilon,\alpha} &\le \inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log Cov_{m,\varepsilon}(\alpha)\\ &\le \inf_{\alpha>0}\inf_{m}\frac{1}{m}\log Cov_{m,\varepsilon}(\alpha)\\ &\le \overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log Spa_{m,\frac{\varepsilon}{4}}+S(\varepsilon)L(\varepsilon).\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\inf_{\alpha>0}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log POSep_{m,2\varepsilon,\alpha}}{S(2\varepsilon)} \le \frac{S(\frac{\varepsilon}{4})}{S(2\varepsilon)}\frac{\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\log Spa_{m,\frac{\varepsilon}{4}}}{S(\frac{\varepsilon}{4})}+\frac{S(\varepsilon)}{S(2\varepsilon)}L(\varepsilon).$$

设 $\varepsilon\to 0$，我们有 Sdim(X , T, f , S) $\ge$PSdim(X, T, f , S)。

此外，若 f ≥ 0 且 S 非递增，则

$$Sdim(X,T,f,S)=PPSdim(X,T,f,S)$$

这直接由 [23, 定理 F] 得出。 □

3. Feldman-Katok度量下的拓扑压力

本节研究 Feldman-Katok 度量下的拓扑压力。

首先回顾 Feldman-Katok 度量的定义。

设 (X , T) 是一个拓扑动力系统，n $\in\mathbb{N}$and $\delta>0$。对于 x, y $\in$X，我们将 x 和 y 的一个 (n δ)-匹配定义为一个保序（即 π(i) $<$π(j) whenever i $<$j）的双射 π: D(π) $\to$R(π)，满足 D(π), R(π) $\subset\{0,1,\dots,n-1\}$，且对于每个 i $\in$D(π)，都有 d(T ^{i}x, T $^{\pi(i)}$y) $<\delta$。令 $|\pi|$ 为 D(π) 的基数。我们设

$$\bar{f}_{n,\delta}(x,y)=1-\frac{\max\{|\pi|:\pi \text{ is an } (n,\delta)\text{-match of } x \text{ and } y\}}{n}$$

Feldman-Katok 度量定义为

$$d_{FK_n}(x,y)=\inf\{\delta>0:\bar{f}_{n,\delta}(x,y)<\delta\}.$$

对于 n $\in\mathbb{N}$and $\varepsilon>0$，我们称子集 E $\subset$X 是 X 的一个 FK-(n ε)-生成集，如果对于任意 x $\in$X，都存在 y $\in$E，使得 d_{FK_n}(x, y) $\le\varepsilon$.。我们称子集 F $\subset$X 是 X 的一个 FK-(n ε)-分离集，如果对于 x $\ne$ y $\in$F，有 d_{FK_n}(x, y) $>\varepsilon$.

对于 f $\in$C(X)，定义

$$FKsp_{n,\varepsilon}(X,T,f)=\inf\{\sum_{x\in F}e^{\sum_{i=0}^{n-1}f(T^ix)}:F \text{ is a } FK\text{-}(n,\varepsilon)\text{-spanning set of } X\},$$

$$FKsr_{n,\varepsilon}(X,T,f)=\sup\{\sum_{x\in E}e^{\sum_{i=0}^{n-1}f(T^ix)}:E \text{ is a } FK\text{-}(n,\varepsilon)\text{-separated set of } X\}.$$

定义关于 Feldman-Katok 度量的拓扑压力为

$$PFK(X,T,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKsp_{n,\varepsilon}(X,T,f).$$

与引理2.6类似，我们可以在上述定义中使用分离集。

引理 3.1. 设 (X , T) 是一个拓扑动力系统，且 f ∈C(X)。则

$$PFK(X,T,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKsr_{n,\varepsilon}(X,T,f).$$

现在我们证明，相对于 Feldman-Katok度量的拓扑压力等于经典拓扑压力。

定理 3.2. 设 (X , T) 是一个拓扑动力系统，且 f ∈C(X)。则

$$PFK(X,T,f)=P(X,T,f).$$

证明。 容易看出 PFK(X , T, f) ≤P(X, T, f), 下面证明反向不等式 .

固定 $\varepsilon>0$. 令 $X=\cup_{i=1}^{l}X_i$，其中 X 的直径为$_i<\varepsilon$，$i=1,\ldots,l$。对于 $\delta\le\varepsilon$，设 F 是 X 的一个 FK- (n$\frac{\delta}{2}$)-生成集。令 x ∈F，并考虑如下形式的集合

$$A_0\cap T^{-1}A_1\cap\ldots\cap T^{-(j_1-1)}A_{j_1-1}\cap T^{-j_1}B_{\frac{\delta}{2}}(T^{i_1}x)\cap T^{-(j_1+1)}A_{j_1+1}\cap\ldots$$

$$\cap T^{-(j_k-1)}A_{j_k-1}\cap T^{-j_k}B_{\frac{\delta}{2}}(T^{i_k}x)\cap T^{-(j_k+1)}A_{j_k+1}\ldots\cap T^{-(n-1)}A_{n-1},$$

其中

$$(1-\frac{\delta}{2})n<k\le n,$$
$$0\le i_1<\ldots<i_k\le n-1,$$
$$0\le j_1<\ldots<j_k\le n-1$$

以及 $A_i\in\{X_1,\ .....,\ X_l\}$.

对于每个具有上述形式的非空集合，任选其中一点 y。令 F'_x 为由这些 y 构成的集合，并令 $F'=\cup_{x\in F}F'_x$.。我们将证明 F′是一个 (nε)-生成集。对于每个 z ∈X，由于 F 是一个 FK-(n $\frac{\delta}{2}$)-生成集，因此存在某个 x ∈F，使得 d_{FK_n}(x, z) $<\frac{\delta}{2}$。因此存在

$$(1-\frac{\delta}{2})n<k\le n,$$
$$0\le i_1<\ldots<i_k\le n-1,$$
$$0\le j_1<\ldots<j_k\le n-1$$

使得

$$d(T^{i_h}x,T^{j_h}z)<\frac{\delta}{2},h=1,\ldots,k.$$

假设 T $_i$z ∈X_{t_i}, i = 0, . . ., n − 1. 则

$$X_{t_0}\cap\ldots\cap T^{-(j_1-1)}X_{t_{j_1-1}}\cap T^{-j_1}B_{\frac{\delta}{2}}(T^{i_1}x)\cap T^{-(j_1+1)}X_{t_{j_1+1}}\ldots\cap T^{-(n-1)}X_{t_{n-1}}\neq\emptyset$$

因为 z 属于其中。根据 F′ 的构造，上述集合中存在 y ∈ F′。容易看出，d_n(y, z) < ε. 因此，F′ 是一个 (n ε)-生成集。

我们有

$$\begin{aligned} sp_{n,\varepsilon}(X,T,f) &\le \sum_{y\in F'} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i y)} \le \sum_{x\in F}\sum_{y\in F'_x} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i y)} \\ &\le \sum_{x\in F}\sum_{y\in F'_x} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)+\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i y)-\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)} \\ &\le \sum_{x\in F}\sum_{y\in F'_x} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)} e^{nL(\frac{\delta}{2})+n\delta||f||}, \end{aligned}$$

其中 $L(\varepsilon)=\sup_{|x-y|\le\varepsilon} |f(x)-f(y)|$. 由于

$$|F'_x| \le \sum_{(1-\frac{\delta}{2})n<k\le n} (C_n^k)^2 l^{n-k} \le \frac{\delta}{2} n (C_n^{[\frac{\delta}{2}n]})^2 l^{\frac{\delta}{2}n},$$

我们有

$$sp_{n,\varepsilon} \le e^{(nL(\frac{\delta}{2})+n\delta||f||)} \frac{\delta}{2} n (C_n^{[\frac{\delta}{2}n]})^2 l^{\frac{\delta}{2}n} \sum_{x\in F} e^{\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)}.$$

因此我们有

$$sp_{n,\varepsilon} \le e^{(nL(\frac{\delta}{2})+n\delta||f||)} \frac{\delta}{2} n (C_n^{[\frac{\delta}{2}n]})^2 l^{\frac{\delta}{2}n} FKsp_{n,\frac{\delta}{2}}.$$

由此可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\log sp_{n,\varepsilon} \le L(\frac{\delta}{2})+\delta||f||+\frac{\delta}{2}\log l+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}2\log C_n^{[\frac{\delta}{2}n]}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log FKsp_{n,\frac{\delta}{2}}.$$

设 $\delta\to 0$，我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\log sp_{n,\varepsilon} \le PFK(X,T,f).$$

设 $\varepsilon\to 0$，我们得到 $P(X,T,f)\le PFK(X,T,f)$. □

注 3.3. 在计算拓扑压力时，Feldman-Katok伪轨道和 Feldman-Katok度量都允许适当的时间延迟和误差。Feldman-Katok伪轨道包含伪轨道，因此也包含真实轨道，它从上界逼近拓扑压力。另一方面，Feldman-Katok度量小于 Bowen 度量，因此它从下界逼近拓扑压力。

参考文献

[1] R. Adler, A. Konheim, M. McAndrew，拓扑熵。《美国数学会会刊》，114，（1965），309–319。[2] E. Dinaburg，关于动力系统各种熵特征之间的关系。《苏联科学院数学辑刊》，35，（1971），324–366。[3] R. Bowen，群自同态与齐性空间的熵。《美国数学会会刊》，153，（1971），401–414。[4] R. Bowen，非紧集的拓扑熵。《美国数学会会刊》，184，（1973），125–136。[5] R. Bowen，《平衡态与 Axiom A微分同胚的遍历理论》。《数学讲义》，第470卷，施普林格出版社，纽约，1975。[6] R. Bowen，拟圆的豪斯多夫维数。《Publ. Math. IH´ES.》，50，（1979），11–25。[7] C. Conley，《孤立不变集与莫尔斯指标》。《CBMS会议丛书》，第38卷，1978。

[8] M. Misiurewicz，关于拓扑熵定义的注。在：动力系统与偏微分方程，1986年，第65–68页。[9] M. Barge，R. Swanson，伪轨道与拓扑熵。美国数学会会刊，109，（1990），559–566。[10] M. Hurley，关于映射的拓扑熵。遍历理论与动力系统，15，（1995），557–568。[11] K. Yan，F. Zeng，拓扑熵、伪轨道与一致空间。拓扑学及其应用，210，（2016），168–182。[12] J. Feldman，新的K自同构与Kakutani的一个问题。以色列数学杂志，24（1），16–38，1976。[13] A. Katok，遍历理论中的单调等价。苏联科学院学报·数学辑，41（1），104–157，231，1977。[14] D. Ornstein，D. Rudolph，B. Weiss，保测变换的等价性。美国数学会回忆录，37，（262），1982。⊥[15] T. Downarowicz，D. Kwietniak，M. Łacka，关于f-伪度量的熵率的一致连续性。IEEE信息论汇刊，67，（2021），第11期，7010–7018。[16] F. Cai，J. Li，关于Feldman-Katok度量与熵公式。arXiv：2104.12104。[17] Y. Pesin，动力系统中的维数理论：当代观点与应用，芝加哥数学讲座，芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1997。[18] Y. Pesin，B. Pitskel，非紧集上的拓扑压力与变分原理。泛函分析及其应用，18（4），（1984），307–318。[19] D. Ruelle，热力学形式主义：经典平衡统计力学的数学结构，数学及其应用百科全书，第5卷，Addison–Wesley出版公司，雷丁，马萨诸塞州，1978。[20] D. Ruelle，实解析映射的排斥子。遍历理论与动力系统，2，（1982），99–107。[21] D. Ruelle，在满足扩张性与规格性的Z^{ν}作用下紧集上的统计力学。美国数学会会刊，187，（1973），237–251。[22] P. Walters，连续变换压力的变分原理。美国数学杂志，97，（1975），937–971。[23] D. Cheng，Z. Li，动力系统的尺度压力。微分方程杂志，342，（2023），441–471。[24] D. Kwietniak，M. Łacka，Feldman-Katok伪度量与非双曲遍历测度的GIKN构造。arXiv：1702.01962。[25] F. Garc´ía-Ramos，D. Kwietniak，关于零熵松弛伯努利系统的拓扑模型。美国数学会会刊，375，（2022），第9期，6155–6178。

（F. Cai）广东技术师范大学数学与系统科学学院，中华人民共和国广州市，510665。电子邮箱：cfz@mail.ustc.edu.cn