arXiv:2305.04071v1 [math.AP] 6 May 2023

分数阶反射体的反射系数

Laurent Demanet* 和 Olivier Lafitte‡

2023年5月9日

摘要

本文探讨了如何刻画由波速剖面中的分数阶奇异性反射的波的行为，即具有以下形式的奇异性

$$c(x_1,x_2,x_3) = c_0\left(1+\left(\frac{x_1}{\ell}\right)_+^{\alpha}\right)^{-1/2},$$

对于 $\alpha>0$ 不一定为整数的情况。我们首先关注一维空间和谐波时间依赖性。我们根据极限吸收原理定义反射系数 R。我们给出 R 关于沃尔泰拉方程解的精确公式。我们得到该系数在大 $\ell\omega/c_0$区域下的渐近极限，即

$$R = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2i)^{\alpha+2}}\left(\frac{c_0}{\ell\omega}\right)^{\alpha} + \text{lower order terms.}$$

振幅与 $\omega^{-\alpha}$ 成正比，而相位旋转行为由 $i^{-(\alpha+2)}$ 因子决定。该证明方法不依赖于用特殊函数表示解，因为 $\alpha>0$ 是一般的。

在多维分层情形下，我们得到了一个类似的结果，其中无量纲变量 $\ell\omega/c_0$ 经过修改，以考虑入射角。此时，渐近分析要求波为非掠射波。由此得到的反射系数现在可以解释为一个 $-\alpha$ 阶傅里叶乘子。

在实践中，了解 R 的振幅和相位对 ω 和 α 的依赖关系，或许有助于确定表征反射体分数阶特性所需的信号处理方式，例如在《地球物理学》中。

致谢

L.D. 的部分研究经费由美国空军科学研究办公室通过项目编号 FA9550- 17-1-0316 提供。O. L. 感谢麻省理工学院在 2013 年至 2022 年间多次短期访问期间给予的热情接待

*麻省理工学院数学系，美国马萨诸塞州剑桥市马萨诸塞大道77号，邮编02139

†LAGA、UMR7539、法国国家科学研究中心和巴黎北索邦大学，法国93430，圣让-巴蒂斯特·克莱芒大道99号

‡IRL 3457 CRM-CNRS，数学研究中心，蒙特利尔大学塔路，魁北克省，加拿大，

而 L.D. 感谢 LAGA-USPN 在 2021 年和 2022 年给予的热情接待。部分研究结果曾在 2014 [4], 的衍射日会议和[5]的 Waves 2015 会议上报告。

1 引言

在这段中 本文研究三维声波方程的解,

$$\left(\frac{1}{c^2(\mathbf{x})}\partial_{t^2} - \Delta_{\mathbf{x}}\right) u = 0, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

其中， $c(\mathbf{x})$ 在平面界面 $x_1 = 0$ 上呈现分数阶奇异性。

1.1 研究动机

《地球物理学》中有许多波反射情形，例如点衍射、在尖锐平面或曲面界面上的反射、粗糙界面散射等。本文考虑另一种重要情形：波速值以分数形式发生跃变的“软”平面界面，其形式为（常数 $+(x_1)_+^\alpha$），其中 $\alpha > 0$，界面位于 $x_1 = 0$，而 y_+ 是 y的正部。这种模型可能自然存在，也可能是将两种材料的微观混合物进行尺度放大后的结果；这类混合物的体积分数线性变化，正如将渗流理论应用于随机混合模型 [2]所得的预测。平面分数反射体模型是层状模型的一种特殊情形，在地球物理学中十分常见。本文不讨论细层理的情形，即不同材料或沉积物的薄层交替排列。此外，本文只考虑声学（P）波。

反射系数这一概念对于沿平面界面存在不连续性的介质中传播的声波而言是标准概念。对于波速或折射率的跃变，菲涅耳方程可以预测反射波和透射波的振幅与入射角之间的关系。情形（常数 $+(x_1)_+$）也已为人所知，可以用艾里函数 [3], 处理；为求完整，后文的一个章节将对此加以回顾。

对于介质属性中的其他类型奇异性，例如平方根（常数 $+(x_1)_+^{1/2}$ ）奇异性，如何处理则鲜为人知。基于物理原理，有人提出，具有分数阶指数特征的奇异界面产生的反射，应是同阶分数阶积分器作用于入射波的结果。参见例如 [8, 9, 10]。在地震地层学中，依据地震记录中记录波振荡的特定形状来识别反射体的分数阶类型，是一个值得探讨的解释问题。

1.2 设定

本文通过将反射系数刻画为一个分数阶伪微分算子，使“分数阶积分器”这一启发式概念得到了精确表述。反射波和透射波的振幅对入射角的依赖关系，显式地体现在伪微分符号的表达式中。

当 $c(x_1, x_2, x_3)$ 在 $x_1 = 0$ 处存在奇异性时，每个入射波（属于 $x_1 < 0$）都对应一个透射波和一个反射波（二者都属于 $x_1 \geq 0$）。反射系数 R 是该单位归一化入射波所对应反射波的振幅。更准确地说，令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$，我们考虑一个固定的入射平面波。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}, \qquad \omega = |\mathbf{k}|c_0, \tag{1.2}$$

这显然是一种随着 t 增大而沿着 $\mathbf{k}$ 方向传播的波；如果进一步假设 $k_1 > 0$，则该波沿右侧方向（斜向）传播。本文中的所有波都具有谐波时间依赖 $e^{i\omega t}$。完整的波 $u(\mathbf{x}\ t)$ 通过叠加得到。

$$u = u_i + Ru_r = Tu_t, \qquad (u_r \text{ reflected}, u_t \text{ transmitted}) \tag{1.3}$$

在均匀介质 c_0中，透射波 u_t 的概念很清楚：它是一个向右传播的平面波，具有 $k_1 > 0$，就像 u_i。

为了将右行波或出射波的概念推广到 $x_1 > 0$，在c 依赖于 x_1的情况下，注意到如下形式的右行波

$$e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_2^2 - k_3^2} > 0,$$

对应于一个极限吸收原理：当将 k_1 复化为 $k_1(1 + i\sigma)$时，该波带有一个 $e^{\sigma x_1}$ 前因子，并且在满足 $\sigma < 0$的条件下，按照 $x_1 \to +\infty$ 衰减。这种空间衰减也可以视为时间衰减（耗散），因为当 t较大时，该波会到达较大的 $x_1 > 0$ 。在 c 依赖于 x_1的情况下，极限吸收原理通过在模型方程（2.12）层面进行复延拓而形式化。随后给出了分别在 $\pm\infty$处的出射波和入射波的定义，详见定义 2.1。透射波被恰当地定义为在 $+\infty$处出射的波所构成的一维空间中的一个成员，这也赋予了（1.3）中 R 的含义。

1.3 主要结果

本文考虑波速的“分数阶斜坡”模型，

$$c^{-2}(\mathbf{x}) = c_0^{-2}\left[1 + \left(\frac{x_1}{\ell}\right)_+^{\alpha}\right], \tag{1.4}$$

其中 $\ell > 0$、 $\alpha > 0$，而 $(\cdot)_+$ 表示正部。长度尺度 ℓ 为趋肤深度， $\ell^{-\alpha}$ 可解释为分数反射体的强度。

入射 波在 $x_1 < 0$ 中取为 (1.2)，其中我们进一步将波矢记为 a s

$$(k_1, k_2, k_3) = \frac{\omega}{c_0}\left(\sqrt{1-\eta^2}\,, \eta_2, \eta_3\right), \qquad \eta^2 = \eta_2^2 + \eta_3^2.$$

重要的无量纲参数为

$$\theta = \left(\frac{c_0}{\ell\omega}\right)^{\alpha} (1-\eta^2)^{-\frac{\alpha+2}{2}}. \tag{1.5}$$

我们的主要结果如下。

定理 1.1. 对所有 $\alpha > 0$，且当 $\theta \to 0$ 时，

$$R(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2i)^{\alpha+2}}\,\theta + O\left(\theta^{1+\min(\frac{1}{\alpha},1)}\right).$$

θ 较小的渐近区域对应以下情形：

- 高频（ω 相较于 c_0/ℓ较大）；或
- 弱反射体（$\ell^{-\alpha}$ 较小）；并且在这两种情况下
- 非掠入射（$\eta < 1$）。

正如我们将在下文中解释的那样，当（x_1/ℓ）$_+^{\alpha}$ 被函数 $\lambda\big($（x_1/ℓ）$_+^{\alpha}\big)$ 所替代时，该结果仍然成立，其中 λ（x）是光滑的，并且在原点的某个邻域内等于 x。

我们的构造假设固定-ω 和固定-η 的入射波带有单位系数，并详细给出了相应反射波的系数 R。然而，如果入射波是不同 ω 和 η 在 $x_1 < 0$中的这类模式的叠加，例如

$$u_i(t; x_1, x_2.x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iint e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{c_0}\sqrt{1-\eta^2}\right)} e^{i\frac{\omega}{c_0}(\eta_2 x_2+\eta_3 x_3)}\widehat{u}_i(\omega; 0, \eta_2, \eta_3)\,d\eta_2 d\eta_3 d\omega,$$

那么，系数 R 在 $x_1 < 0$ 中的 u_r 表达式里充当伪微分算子：

$$u_r(t; x_1, x_2.x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iint e^{i\omega\left(t+\frac{x_1}{c_0}\sqrt{1-\eta^2}\right)} e^{i\frac{\omega}{c_0}(\eta_2 x_2+\eta_3 x_3)} R(\theta(\omega,\eta))\widehat{u}_i(\omega; 0, \eta_2, \eta_3)\,d\eta_2 d\eta_3 d\omega.$$

1.4 标准情形：跳跃界面与斜坡界面

作为参考，在 $\alpha = 0$ （跳跃间断）和 $\alpha = 1$ （斜坡）的情况下， R 的表达式是已知的，且具有显式形式：

- 当 $\alpha = 0$,

$$R = \frac{\sqrt{(\frac{c_-}{c_+})^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2} - \sqrt{1-\eta_2^2-\eta_3^2}}{\sqrt{(\frac{c_-}{c_+})^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2} + \sqrt{1-\eta_2^2-\eta_3^2}} \tag{1.6}$$

在情形 $\alpha = 0$ 下不存在 θ 参数，因此当 $\alpha \to 0$ 时，该表达式不符合我们主要结果的设定。

- 当 $\alpha = 1$ 时，引入 $\beta = \theta^{-\frac{2}{3}}$，并且 $w_{\pm}(X) = Ai(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}X)$。$R$的精确表达式已知

$$R = \frac{w'_+(\beta) + i\beta^{\frac{1}{2}}w_+(\beta)}{-w'_+(\beta) + i\beta^{\frac{1}{2}}w_+(\beta)},$$

其渐近展开式在 θ中，得益于艾里函数的经典渐近性质，为

$$R = \frac{i}{8}\theta + O(\theta^2) = \frac{1}{(2i)^3}\theta + O(\theta^2),$$

这与一般表达式相匹配（参见命题 6.1 和引理 6.2）。

1.5 相关工作

我们的构造类似于 Jost 在 [13], 中引入、并在 [14] 中提及的入射波与出射波分解。它们有时称为非正规解或 Jost 解；对于径向薛定谔方程 $-\psi'' + V(r)\psi = k^2\psi$，它们是 $f_{\pm} = e^{\pm ikr} + o(1)$，其中 $r \to +\infty$。它们构成径向薛定谔方程所有解的分解基底。事实上，文中使用了“einlaufende kugelwelle”（入射球面波）一词 $f(k,$ $e^{-ik.r}$ 4 k . $-k$. $r \simeq$) (( ) [13]), 并指出 $f(,)$ 和 $f(,)$ 构成该常微分方程的基本解系。“出射球面波”这一名称出现在 Jost 和 Pais [14] 的配套论文中。

我们广泛使用极限吸收原理，或极限振幅原理，来定义出射波和入射波。这一概念由 A. G. Sveshnikov 在 [15], 提出，他考虑了波数 k_1 ，使得 $k_1^2 = k^2 + i\epsilon$。Sveshnikov 本人提到 Ignatovski 的一篇论文 [12]；在这篇 1905年的论文中，复扰动并非任意给定的，而是由物理吸收所确定的。当然，波数的复化也构成了亥姆霍兹方程和薛¨丁格方程传播子的“$i\epsilon$”规定的基础 [6]。

关于波速的不连续性，L.M. Brekhovskikh 和 O.A. Godin [3] 讨论了斜坡的情形（例如参见第 3 章中的表达式 (3.5.1)）。然而，他们仅处理了可以用特殊函数表示的声波方程情形，而没有考虑其他非光滑剖面。

在 [17, 18], K. Wapenaar 中，量化了所谓自相似剖面的反射系数，其中 $c(x) = c_1(-x)^{\alpha}$ 对于 $x < 0$ ，且 $c(x) = c_2x^{\alpha}$ 对于 $x > 0$。他的分析依赖于一种自相似变量变换——这种变换在本文的背景下并不能直接发挥作用——以及对连接界面两侧解及其导数的传递矩阵进行渐近研究。

最近，K. Wapenaar [19] 推导出一种系统分解，该系统由一组耦合方程定义，用于描述波沿优选轴向相反方向传播，并具有优选传播方向；他还推导出了相应的格林函数。

在为本文进行最后润色时，我们获悉 O. Gannot 和 J. Wunsch [7] 的研究。该研究针对 $\alpha > 0$，就势函数在余法曲面上发生分数阶跳跃时 Schr¨odinger 方程的奇点传播定理建立了一般性结果，并给出了 $\alpha > 1$的正则性改进。他们推导出的反射系数估计与我们的结果接近，具体而言，针对一维设定下的势函数 $x_+^\alpha - 1$ （ $x \in (-\infty,\ x_0)$ ）。他们的分析依赖于对跳跃附近双特征线的微局部研究，并未涉及无穷远处的行为——这一点在波动方程与 Schr¨odinger 方程中有所不同，也是我们研究的关键之一。他们的分析似乎也无法直接给出多维设定下反射系数的精确估计。

2 定义与设定

2.1 无量纲化

我们假设密度为常数，声波在三维空间中具有非均匀波速的介质内传播(1.1)，

$$\left(\frac{1}{c^2(\mathbf{x})}\partial_{t^2} - \Delta_{\mathbf{x}}\right) u = 0, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

我们所考虑的波速模型是分数阶斜坡(1.4)。

为完整起见，我们还考虑更一般的非均匀形式

$$c^{-2}(\mathbf{x}) = c_0^{-2}\left[1 + \lambda\left(\left(\frac{x_1}{\ell}\right)_+^\alpha\right)\right], \tag{2.1}$$

其中， $\lambda(x) = \int_0^x \chi(y)dy$，其中某个正的、紧支撑的 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内等于 1。证明假设 $\lambda(x) = x$ 的情形，并在附录中讨论相应的修改。

假设时间依赖性为 $e^{i\omega t}$ 的谐波形式，即对 t 进行傅里叶变换。在横向坐标（x_2， x_3）上再次进行部分傅里叶变换，并引入 $\eta = c_0\omega^{-1}(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{1}{2}},$，波动方程变为

$$\left(\partial_{x_1}^2 + \omega^2 c_0^{-2}\left[1 + \left(\frac{x_1}{\ell}\right)_+^\alpha - \eta^2\right]\right)\widehat{u} = 0,$$

在 $x_1 = \pm\infty$ 处满足有界性条件。 $\widehat{u}$ 和 $\partial_{x_1}\widehat{u}$ 在 $x_1 = 0$ 处的连续性得益于波速 c(x) 的有界性。

通过令.....，该方程进一步无量纲化。

$$x_1 = \varepsilon x, \qquad \varepsilon = \frac{c_0}{\omega}(1 - \eta^2)^{-1/2}.$$

当 x_1 处于水平方向时，我们可以将 ε 理解为水平波长（除以 2π）。

释放 u，使 $u(x) := \widehat{u}(x_1)$，并释放 c，使

$$c^{-2}(x) := 1 + \theta\, x_+^{\alpha}, \tag{2.2}$$

with

$$\theta = \left(\frac{c_0}{\ell\omega}\right)^{\alpha} (1-\eta^2)^{-\frac{\alpha+2}{2}}, \tag{2.3}$$

我们得到模型方程

$$\left(\partial_x^2 + c^{-2}(x)\right)\, u = 0. \tag{2.4}$$

注意，入射角余弦为 $\cos\varphi_i = (1-\eta^2)^{1/2}$。因此，我们可以将 θ 改写为

$$\theta = \left(\frac{\varepsilon}{\ell}\right)^{\alpha} \frac{1}{(\cos\varphi_i)^{\alpha+2}}.$$

θ 的这种形式揭示了水平波长与趋肤深度之比这一无量纲比值 ε/ℓ 的重要性。我们看到，较小的 θ 对应于以下情况之一：

- 分数反射体强度较弱（ ℓ较大）；和/或
- 频率较高（ ε较小）。

此外，这种情形只可能出现在非掠射波中（$\cos\varphi_i \neq 0$）。

物理量纲汇总于下表，其中 m 是米， s 是秒，而1是无量纲的。

$x_j, \varepsilon, \ell, k_j^{-1}$	m
t, ω^{-1}	s
c_0	ms^{-1}
x, c, θ, η	1

现在，我们的目标是定义并估计式（2.4）的反射系数，以 θ表示。

2.2 WKB近似解

本文中的一个重要分析工具是利用 WKB 构造近似解，

$$v^{>}(x) = b(x)e^{-i\phi(x)}, \qquad v^{<}(x) = b(x)e^{i\phi(x)}, \tag{2.5}$$

with

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{1}{c(y)}\, dy, \qquad b(x) = c^{\frac{1}{2}}(x).$$

这一选择与通常 WKB展开的首项一致；写出后续项则需要 $c(x)$ 具有更高的可微次数。接下来，我们将在稍后选定的 $[x_0, +\infty[$, $x_0 > 0$ 上，使用 $c \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^2(]0, +\infty[)$，研究分数斜坡问题中的 $\alpha > 0$ 。

相位 ϕ 的一个重要性质是，当 $\phi' > 0$时，$\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = \pm\infty$ 。恒等式 $\phi'' + 2(c^{1/2})'\phi' = 0$ 也很有用。函数 $v^>$ 和 $v^<$ 不是方程 (2.4) 的解，但它们满足修正后的方程

$$v'' + c^{-2}v = c^{-\frac{1}{2}} \left(c^{\frac{1}{2}}\right)'' v. \tag{2.6}$$

函数 $v^>$ 和 $v^<$ 分别可解释为右行波和左行波。恢复时间依赖性 $e^{i\omega t}$后，这一性质便显而易见。还可以通过考察扩展方程，将这种解释形式化

$$\left(\partial_x^2 + (1 + i\sigma)^2 c^{-2}\right) v(x;\sigma) = c^{-\frac{1}{2}} \left(c^{\frac{1}{2}}\right)'' v(x;\sigma), \tag{2.7}$$

其中有一个小参数 $\sigma \in \mathbb{R}$。此时的解为

$$v^>(x;\sigma) = b(x)e^{-i(1+i\sigma)\phi(x)}, \qquad v^<(x;\sigma) = b(x)e^{i(1+i\sigma)\phi(x)}. \tag{2.8}$$

左行或右行的特性，也就是“偏振”，现在与指数衰减的方向有关，而该方向取决于 σ 的符号。当 $\pm\sigma > 0$ 时，有

$$\lim_{x\to\mp\infty} v^>(x;\sigma) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} v^<(x;\sigma) = 0.$$

下一章节将以这些表达式为基础，定义模型方程 (2.4) 的偏振波。

为便于今后使用，我们引入如下记号

$$M(x) = c^{\frac{1}{2}} \left(c^{\frac{1}{2}}\right)'' = \left((v^>)'' + c^{-2}v^>\right) v^<, \tag{2.9}$$

因此，(2.6) 也可以写为

$$v'' + c^{-2}v = Mc^{-1}v,$$

(2.7) 也可类似地写为，

$$\left(\partial_x^2 + (1 + i\sigma)^2 c^{-2}(x)\right) v(x;\sigma) - Mc^{-1}v(x;\sigma) = 0. \tag{2.10}$$

函数 $M(x)$ 在所有 $\alpha > 0$ 下成立的许多性质都在附录B中列出并证明，其中包括它是 $O(\theta)$ 这一事实，以及它在 $x = +\infty$ 处局部可积这一事实。

顺便指出， $c^{-1}v^>v^< = 1$。

最后，我们还将介绍零阶WKB近似

$$w^>(x) = e^{-i\phi(x)}, \qquad w^<(x) = e^{i\phi(x)}. \tag{2.11}$$

2.3 入射波与出射波

反射系数的概念涉及对偏振方向分别为入射和出射的波进行比较。与上一章节一样，我们引入一个小参数 $\sigma \in \mathbb{R}$，并考虑扩展后的问题

$$\left(\partial_x^2 + (1+i\sigma)^2 c^{-2}(x)\right) u(x;\sigma) = 0. \tag{2.12}$$

与 WKB函数 $v^>$ 和 $v^<$不同，现在我们有四个偏振解。每个解都只确定到一个乘法常数。

定义 2.1. 方程 (2.4) 的非零解 u 称为

- 相对于 $+\infty$出射，若存在一个解序列 $u(x;\sigma)$，满足方程 (2.12) 且 $\sigma < 0$，使得[1]

$$\lim_{\sigma\to 0^-} u(x;\sigma) = u(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x;\sigma) = 0.$$

  这类解的空间记作 $\mathcal{U}^>_{+\infty}$。

从 $+\infty$ 入射，如果存在方程 (2.12) 的一个解序列 $u(x;\sigma)$，使得 $\sigma > 0$

$$\lim_{\sigma\to 0^+} u(x;\sigma) = u(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x;\sigma) = 0.$$

  此类解的空间记为 $\mathcal{U}^<_{+\infty}$。

- 朝向 $-\infty$，如果存在一个解序列 $u(x;\sigma)$，满足 (2.12) 且 $\sigma < 0$，使得

$$\lim_{\sigma\to 0^+} u(x;\sigma) = u(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x;\sigma) = 0.$$

  这类解的空间记为 $\mathcal{U}^<_{-\infty}$。

- 从 $-\infty$入射，如果存在一个解序列 $u(x;\sigma)$ 满足 (2.12)，其中 $\sigma > 0$使得

$$\lim_{\sigma\to 0^-} u(x;\sigma) = u(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x;\sigma) = 0.$$

  此类解的空间记为 $\mathcal{U}^>_{-\infty}$。

我们将任意元素 $u \in \mathcal{U}^>_{+\infty}$ 解释为透射波， $u \in \mathcal{U}^<_{-\infty}$ 解释为反射波， $u \in \mathcal{U}^>_{-\infty}$ 解释为入射波（来自左侧，本文始终如此）。利用常微分方程组渐近行为的一个经典结果，我们得到

命题 2.2. (i) 四个子空间 $\mathcal{U}^>_{\pm\infty}, \mathcal{U}^<_{\pm\infty}$ 的维数均为 1。

(ii) 任意一对非零解 (u_1, u_2)，若满足 $u_1 \in \mathcal{U}^>_{-\infty}$和 $u_2 \in \mathcal{U}^<_{-\infty}$；或 $u_1 \in \mathcal{U}^>_{+\infty}$和 $u_2 \in \mathcal{U}^<_{+\infty}$，则构成 (2.4) 的基本解系。

[1]这些 $\sigma \to 0$ 极限均理解为在 $x \in \mathbb{R}$ 的紧集上一致收敛。

(iii) 任何非零元素 $u \in \mathcal{U}^{>}_{\pm\infty}$ 都具有非零且有限的极限 $\lim_{x\to\pm\infty} {}^{u_{(x)}}v^{>}(x)$。相应地，任何非零元素 $u \in \mathcal{U}^{<}_{\pm\infty}$ 都具有非零且有限的极限 $\lim_{x\to\pm\infty} {}^{u_{(x)}}v^{<}(x)$。

(iv) $\lim_{x\to\infty} u(x;\sigma) = 0$ 当且仅当 $\|u(\cdot;\sigma)\|_\infty < \infty$。

我们将此结果的证明留在附录 A 中。
该命题为偏振解提供了一种自然的归一化方式：

- 对于 $\mathcal{U}^{>}_{\pm\infty}$ 中满足 $\lim_{x\to\pm\infty} {}^{u_{(x)}}v^{>}(x) = 1$ 的元素 u，我们令 $u^{>}_{\pm\infty}(x)$；并且
- 对于 $\mathcal{U}^{<}_{\pm\infty}$ 中满足 $\lim_{x\to\pm\infty} {}^{u_{(x)}}v^{<}(x) = 1$ 的元素 u，我们令 $u^{<}_{\pm\infty}(x)$。

在熟悉的平面波情形下，当 $\theta = 0$ 时，我们有 $u^{>}_{-\infty}(x) = u^{>}_{+\infty}(x) = e^{-ix}$ 和 $u^{<}_{-\infty}(x) = u^{<}_{+\infty}(x) = e^{ix}$；但在非均匀介质中，四种偏振波通常各不相同。在分数阶斜坡示例中，其中 $c^{-2}(x) = 1 + \theta x^{\alpha}_{+}$，或者在介质沿 $x < 0$ 均匀且均质的任何情形下，我们仍然有

$$u^{>}_{-\infty}(x) = v^{>}(x) = e^{-ix}, \qquad u^{<}_{-\infty}(x) = v^{<}(x) = e^{ix}, \qquad x < 0. \tag{2.13}$$

作为说明，在 $\alpha = 1$ 的情况下，第 6 节中展示了 that

$$u^{>}_{+\infty}(x) = \overline{u^{<}_{+\infty}(x)} = 2\pi^{1/2} e^{i\frac{\pi}{12}} \theta^{-\frac{1}{6}} Ai(e^{i\frac{\pi}{3}} \theta^{\frac{1}{3}} (x + \theta^{-1})), \qquad x > 0.$$

随后将透射波展开为

$$u^{>}_{+\infty} = A\, u^{<}_{-\infty} + B\, u^{>}_{-\infty}, \tag{2.14}$$

以及定义为 $R = A/B$ 的反射系数。注意，R 的值不依赖于 $u^{>}_{+\infty}$ 的归一化方式。透射系数为 $1/B$，且确实取决于这一选择。

由公式 (2.13) 以及 u 和 u' 在 $x = 0$ 附近的连续性很容易看出，对于 $u \in \mathcal{U}^{>}_{+\infty}$，反射系数可以由以下公式确定

$$\frac{u'(0)}{u(0)} = i\frac{R-1}{R+1}. \tag{2.15}$$

这一关系是后续计算 R 的关键。情形 $R = -1$ 对应于 $u(0) = 0$，但我们将在后文看到，θ 足够小这一假设可以排除这种情况。量 $\frac{R-1}{R+1}$ 可以视为无量纲阻抗。

We c现在提醒读者我们的主要结果（引言中的定理 1.1）).

定理 2.3。对于所有 $\alpha > 0$，当 $\theta \to 0$ 时，

$$R = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2i)^{\alpha+2}}\,\theta + O\left(\theta^{1+\min(\frac{1}{\alpha},1)}\right).$$

2.4 proof 的初步步骤和架构

第 3 节包含预备材料。证明的核心位于第 4 节。该节证明余项为 $o(\theta)$。第 5 节给出了上述余项更精确的形式。尽管证明涵盖所有情形 $\alpha \geq 0$，第 6 节还是给出了 R 的显式（精确、非渐近）公式；在特殊情形 $\alpha = 1$ 下，该公式与定理 1.1 相符（可通过特殊函数分析得到）。

证明的主要思路是用 WKB函数 $v^{>}$ 和 $v^{<}$ 表示任意一个向 $+\infty$ 出射的非零解，简记为 u，并将其定义视为相差一个无关紧要的非零乘法常数。为此，需要写出一个沃尔泰拉方程，并通过迭代求解。该过程在 $[x_0, +\infty)$ 上进行，其中 x_0 任意选取，使得当 $\theta < \theta_0(x_0)$ 时，沃尔泰拉方程具有一个压缩核。由该核的压缩性，我们得到 $u(x_0) \neq 0$。这一论证给出 $q = \frac{u'(x_0)}{u(x_0)}$ 的一个值，随后通过关于 $(u(x), u'(x))$ 的柯西问题，将其与 $\frac{u'(0)}{u(0)}$ 联系起来；该问题针对 $x \in [0, x_0]$，在 x_0 处的初值为 $(1, q)$。最后由 (2.15) 推导出反射系数。

对于 $x \in [0, x_0]$，显然该柯西问题是适定的，但将其解表示为 $w^{>}(x) := e^{-i\phi(x)}$ 和 $w^{<}(x) := e^{i\phi(x)}$ 的形式会更有利，即

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = a^{>}(x) \begin{pmatrix} w^{>}(x) \\ (w^{>})'(x) \end{pmatrix} + a^{<}(x) \begin{pmatrix} w^{<}(x) \\ (w^{<})'(x) \end{pmatrix}$$

（其中利用了 $a^{>}(x)(w^{>})'(x) + a^{<}(x)w^{<})'(x) = 0$）。随后可通过等式 $q(1 + ke^{2i\phi(x_0)}) = i\phi'(x_0)(-1 + ke^{2i\phi(x_0)})$ 推导出 k，使得 $a^{<}(x_0) = ka^{>}(x_0)$。

对于 $x \in [x_0, \infty)$，最好将 u 表示为关于 $v^{<}$ 和 $v^{>}$的形式。方程（2.10）是一个齐次线性微分方程，其中 $v^{>}(\cdot; \sigma)$ 和 $v^{<}(\cdot; \sigma)$ 是一对生成解。由于方程（2.12）可视为方程（2.10）的非齐次形式，其右端为 $-Mc^{-1}v$，根据杜哈梅尔原理（常数变易法），方程（2.12）的任意解都可以表示为 $v^{>}(.; \sigma)$ 和 $v^{<}(.; \sigma)$ 的组合，即

$$u(x; \sigma) = A_\sigma(x)\, v^{>}(x; \sigma) + B_\sigma(x)\, v^{<}(x; \sigma). \tag{2.16}$$

按照标准做法，我们还施加了

$$(A_\sigma(x))'\, v^{>}(x; \sigma) + (B_\sigma(x))'\, v^{<}(x; \sigma) = 0, \tag{2.17}$$

以便
taamaal

$$u'(x; \sigma) = A_\sigma(x)\, (v^{>})'(x; \sigma) + B_\sigma(x)\, (v^{<})'(x; \sigma). \tag{2.18}$$

由于朗斯基行列式等于 $2ib^2(x)c^{-1}(x) = 2i$，方程 (2.16) 和 (2.18) 唯一确定系数 $A_\sigma(x)$ 和 $B_\sigma(x)$，即

$$\begin{cases} A_\sigma(x) = \frac{1}{2i(1+i\sigma)}[u(x; \sigma)(v^{<})'(x; \sigma) - u'(x; \sigma)v^{<}(x; \sigma)] \\ B_\sigma(x) = \frac{1}{2i(1+i\sigma)}[-u(x; \sigma)(v^{>})'(x; \sigma) + u'(x; \sigma)v^{>}(x; \sigma)] \end{cases} \tag{2.19}$$

由 (2.17) 得到关于 A_σ 和 B_σ 的封闭系统，并将 (2.16) 和 (2.18) 代入 (2.12)，可得：

$$\begin{cases} (A_\sigma)'(x)v^>(x;\sigma) + (B_\sigma)'(x)v^<(x;\sigma) = 0 \\ (A_\sigma)'(x)(v^>)'(x;\sigma) + (B_\sigma)'x)(v^<)'(x;\sigma) = -M(x)c^{-1}(x)(A_\sigma(x)v^>(x;\sigma) + B_\sigma(x)v^<(x;\sigma)) \end{cases}$$

利用两个基函数的朗斯基行列式为 $2i(1+i\sigma)$ 这一事实，可得

$$\begin{cases} (A_\sigma)'(x) = \frac{1}{2i(1+i\sigma)}M(x)c^{-1}(x)[A_\sigma(x)v^>(x;\sigma) + B_\sigma(x)v^<(x;\sigma)]v^<(x;\sigma) \\ (B_\sigma)'(x) = -\frac{1}{2i(1+i\sigma)}M(x)c^{-1}(x)[A_\sigma(x)v^>(x;\sigma) + B_\sigma(x)v^<(x;\sigma)]v^>(x;\sigma) \end{cases}$$

利用 $c^{-1}(x)v^>(x;\sigma)v^<(x;\sigma) = 1$，可将其改写为

$$\begin{cases} (A_\sigma)'(x) = \frac{1}{2i(1+i\sigma)}M(x)[A_\sigma(x) + B_\sigma(x)e^{2i(1+i\sigma)\phi(x)}] \\ (B_\sigma)'(x) = -\frac{1}{2i(1+i\sigma)}M(x)[A_\sigma(x)e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)} + B_\sigma(x)] \end{cases}$$

现在自然可以定义一个辅助函数

$$S_\sigma^>(x) = A_\sigma(x)e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)} + B_\sigma(x), \tag{2.20}$$

以便通过以下关系将 u 与 $v^<$ 联系起来

$$u(x;\sigma) = S_\sigma^>(x)\, v^<(x;\sigma). \tag{2.21}$$

当 u 朝向 $+\infty$ 出射时（当 $\sigma = 0$），或当 $\lim_{x\to\infty} u(x;\sigma) = 0$ 时（当 $\sigma < 0$，在取极限 $\sigma \to 0^-$ 之前），我们打算使用这一关系。这里并没有笔误：我们用入射的 WKB 波来表示朝向 $+\infty$ 出射的波。证明将阐明为何必须选择 S，而不是 $A_\sigma(x) + B_\sigma(x)e^{2i(1+i\sigma)\phi(x)}$。

对 $(A_\sigma(x))'$ 和 $(B_\sigma(x))'$ 的方程进行积分后，我们得到泛函方程（该方程取决于 x_0）

$$\begin{aligned} S_\sigma^>(x) = {} & A_\sigma(x_0)e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)} + B_\sigma(x_0) \\ & + \frac{1}{2i(1+i\sigma)}\int_{x_0}^{x} M(y)S_\sigma^>(y)(e^{-2i(1+i\sigma)(\phi(x)-\phi(y))} - 1)dy, \end{aligned} \tag{2.22}$$

其中包含两个积分常数 $A_\sigma(x_0)$ 和 $B_\sigma(x_0)$。对于 $\sigma < 0$，命题 3.1 将证明，条件 $\lim_{x\to\infty} u(x;\sigma) = 0$ 唯一确定 $B_\sigma(x_0)$，其形式为

$$B_\sigma(x_0) = \frac{1}{2i(1+i\sigma)}\int_{x_0}^{+\infty} M(y)S_\sigma^>(y)dy,$$

因此，方程（2.22）变为关于 $S_\sigma^>(x)$ 的沃尔泰拉方程：

$$S_\sigma^>(x) = A_\sigma(x_0)e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)} + K_\sigma(S_\sigma^>)(x), \tag{2.23}$$

其中算子 K_σ 定义为

(2.24)
$$K_\sigma(f)(x) = \frac{1}{2i(1+i\sigma)}[\int_{x_0}^{x} M(y)f(y)e^{-2i(1+i\sigma)(\phi(x)-\phi(y))}\,dy + \int_{x}^{+\infty} M(y)f(y)dy], f \in C_b^0([x_0,\infty)).$$

该沃尔泰拉方程的不动点迭代收敛的一个充分条件是

$$M_{x_0} := \int_{x_0}^{\infty} |M(x)|\,dx < 2. \tag{2.25}$$

注意， $M(x)$ 也依赖于 θ；引理 B.1 表明，对于所有 $0 < \theta < \theta_0(x_0)$，(2.25) 均成立。在这种情况下，沃尔泰拉方程可解为一个收敛级数

$$S_\sigma^{>}(x) = A_\sigma(x_0)\left(\sum_{j\geq 0} s_{\sigma,j}^{>}(x)\right) e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)},$$

它定义了函数 $s_{\sigma,\,j}^{>}(x)$。

记 $S^{>}$ 为当 $\sigma = 0$ 时 (2.23) 的唯一解，并通过 $A_\sigma(x_0) = 1$ 进行归一化：

$$S^{>}(x) = e^{-2i\phi(x)} + K^0(S^{>})(x). \tag{2.26}$$

随后命题 3.2 证明，当取极限 $\sigma \to 0^-$ 时，沃尔泰拉方程 (2.23) 对 $\sigma = 0$ 仍然成立，并且确实将所需的出射解 $u(x)$ 表示为

$$u(x) = S^{>}(x)\, v^{<}(x),$$

即为（2.21）的 $\sigma \to 0$ 极限（同样，当 $A_\sigma(x_0) = 1$ 时）。

现在我们可以通过 $x_0 > 0$ 处的辐射条件，对 $u(x)$ 给出一种等价的重新表述。

定理 2.4. 对所有 $\alpha > 0$ 和 $x_0 \geq 0$，存在 $\theta_0(x_0)$，使得对于所有 $\theta < \theta_0(x_0)$，在 $+\infty$处向外传播的 (2.4) 的解族由以下条件刻画：

$$\frac{u'(x_0)}{u(x_0)} = \frac{(v^{>})'(x_0) + R_{x_0}(v^{<})'(x_0)}{v^{>}(x_0) + R_{x_0}v^{<}(x_0)},$$

其中

$$R_{x_0} = \frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty} M(x')S^{>}(x')dx'. \tag{2.27}$$

现在必须将 $x_0 > 0$ 处的辐射条件与反射系数 R的参考公式进行比较，即

$$\frac{u'(0)}{u(0)} = i\frac{R-1}{R+1}.$$

照此写法，可能不容易看出两者的相似之处。不过，可以将定理 2.4 的恒等式改写为

$$\frac{u'(x_0)}{u(x_0)} = \frac{(v^>)'(x_0)}{v^>(x_0)} \frac{1 + R_{x_0} \frac{(v^<)'(x_0)}{(v^>)'(x_0)}}{1 + R_{x_0} \frac{v^<(x_0)}{v^>(x_0)}}$$

其中可以注意到，在常系数情形下，$\frac{(v^<)'(x_0)}{(v^>)'(x_0)} = -\frac{v^<(x_0)}{v^>(x_0)} = -1$ 和 $\frac{(v^>)'(x_0)}{v^>(x_0)} = -i$。

以下评论也有助于阐明 x_0 的作用：

- 当 $\alpha > 1$ 时，$x_0 \to 0$ 的极限存在且有限，并且给出

$$R = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} M(x') S^>(x') dx',$$

  其中，现在将 $S^>(x)$ 理解为对应于 (3.1) 和 (2.26) 中的 $x_0 = 0$。事实上，在这种情况下，整个论证本可以使用 $x_0 = 0$。

- 当 $\alpha < 1$ 时，无法以相同的方式取极限。由于 $M(x)$ 在 $x = 0$ 处不具可积性，算子 K_σ 在极限 $x_0 \to 0$ 下不再能由 (2.24) 定义。量 R_{x_0} 也会在 $x_0 \to 0$ 时发散。相反，我们考虑 $[0, x_0]$ 上的柯西问题，并找出一个表达式，将 R 与 R_{x_0} 联系起来。由于这一更一般的论证也适用于 $\alpha > 1$ 的情形，因此在第 4 节的证明中，我们不区分这两种情形。

最后考虑 $\frac{R}{\theta}$ 在 $\theta \to 0$ 时的极限，由此证明定理 1.1。这是第 4 节的目标。第 5 节给出了关于 $\frac{R}{\theta} - \frac{\Gamma}{(\alpha+1)(2i)^{\alpha+2}}$ 以及函数 Γ 的精确估计。

3 沃尔泰拉级数与辐射条件

本节建立关于 $S^>_\sigma(x)$ 的沃尔泰拉方程，并研究相应沃尔泰拉级数的收敛性质。我们还将证明定理 2.4。

回顾一下，$S^>_\sigma(x)$ 由（2.20）或（2.21）定义，不对 $\sigma \in \mathbb{R}$ 加以限制，并与（2.12）的任意解 $u(x;\sigma)$ 相关；它满足方程（2.22），其中含有两个任意常数 $A_\sigma(x_0)$ 和 $B_\sigma(x_0)$。在 $\sigma < 0$ 的情况下，我们首先在方程（2.22）中固定 $B_\sigma(x_0)$，这是通过施加条件 $u(x;\sigma) \to 0$ 当 $x \to \infty$ 时成立（根据命题 A.1 的 (iv)，这等价于 $u(x;\sigma)$ 在 $[x_0, \infty$ 上一致有界）。由此得到半直线 $[x_0, \infty)$ 上的一个沃尔泰拉方程，其中涉及算子 K_σ（定义 2.24）：

命题 3.1. 假设 $x_0 > 0$ and $\sigma < 0$。当 $u(x;\sigma)$ 对于 $x \in [x_0, \infty)$ 一致有界时，由 (2.21) 给出的函数 $S^>_\sigma$ 满足沃尔泰拉方程

$$S^>_\sigma(x) = A_\sigma(x_0) e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)} + K_\sigma(S^>_\sigma)(x). \tag{3.1}$$

命题 3.1 的证明。固定 $\sigma < 0$。如果 $u(x;\sigma)$ 在 $[x_0, \infty$ 上有界，那么根据不等式，当 $x \to +\infty$ 时，$S_\sigma^>(x) = {}^{u}{}_{(x;\sigma)}\, v_\sigma^<(x)$ tends to 0

$$|\frac{u(x;\sigma)}{v_\sigma^<(x)}| \le b^{-1}(x)e^{\sigma\phi(x)} \max_{x_0 \le x < \infty} |u(x;\sigma)|,$$

以及当 $x \to +\infty$ for $\sigma < 0$ 时，$b^{-1}(x)e^{\sigma\phi(x)} = (1+\theta x^\alpha)^{\frac{1}{4}} e^{\sigma \int_0^x (1+\theta y^\alpha)^{\frac{1}{2}} dy}$ 趋于零[2]的事实。因此，它在 $[x_0, +\infty$ 上有界。由于 (i) $S_\sigma^>$ 有界，(ii) $\int_{x_0}^{+\infty} |M(y)|dy < +\infty$，(iii) 当 $y \le x$ 时 $|e^{-2i(1+i\sigma)(\phi(x)-\phi(y))} - 1| \le 2$，以及 (iv) 当 $x \to \infty$ 时 $e^{2\sigma\phi(x)} \to 0$，勒贝格控制收敛定理的条件得到满足，从而我们得到

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} M(y)S_\sigma^>(y) \left(e^{-2i(1+i\sigma)(\phi(x)-\phi(y))} - 1\right) dy = -\int_{x_0}^{+\infty} M(y)S_\sigma^>(y)dy.$$

因此，一个根据方程（2.22），$\lim_{x\to+\infty} S_\sigma^>(x) = 0$ 的必要条件是

$$B_\sigma(x_0) = \frac{1}{2i(1+i\sigma)} \int_{x_0}^{+\infty} M(y)S_\sigma^>(y)dy.$$

方程（2.22）因此变为

$$S_\sigma^>(x) = A_\sigma(x_0)e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)} + \frac{1}{2i(1+i\sigma)}[\int_{x_0}^{x} M(y)S_\sigma^>(y)e^{-2i(1+i\sigma)(\phi(x)-\phi(y))}dy + \int_{x}^{+\infty} M(y)S_\sigma^>(y)dy], \tag{3.2}$$

或者简写为 $S_\sigma^>(x) = A_\sigma(x_0)e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)} + K_\sigma(S_\sigma^>)(x)$。 □

顺便指出，若在方程（2.21）中，$S_\sigma^>$ 不是由 $v^<$ 而是由 $v^>$ 定义，那么利用勒贝格定理的证明思路便行不通。

现在也可以在 $\sigma = 0$ 的情形下考虑沃尔泰拉方程（3.1）。以下结果表明，正如方程（2.25）所示，$M_{x_0} < 2$ 是使 K_σ 成为压缩映射的充分条件，因此该方程可以通过迭代求解。

命题 3.2。设 $x_0 > 0$ 和 $\theta > 0$，使得 $M_{x_0} < 2$，并设 $\sigma \le 0$。

(i) 算子 K_σ 是压缩映射，并满足泛函不等式

$$||K_\sigma(f)(x)||_{L^\infty(x_0,\infty)} \le \frac{M_{x_0}}{2} ||f||_{L^\infty(x_0,\infty)}.$$

（ii）方程（3.1）的唯一解为 $A_\sigma(x_0)S_\sigma^>(x)$，其中

$$S_\sigma^>(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{\sigma,n}^>(x),$$

[2]更一般的形式 $\lambda(x) \ne x$ 也同样如此。

其中 $S^{>}_{\sigma,\ n}(x)$依次定义为

$$
\begin{aligned}
&S^{>}_{\sigma,0}(x) = e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)},\\
&S^{>}_{\sigma,n+1}(x) = K_\sigma(S^{>}_{\sigma,n})(x), \qquad n \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

并且满足

$$
||S^{>}_{\sigma,n}(x)||_{L^\infty(x_0,+\infty)} \leq \left(\frac{M_{x_0}}{2}\right)^n.
$$

此外，引入 $s^{>}_{\sigma,\ n} = S^{>}_{\sigma,\ n}(x)e^{2i(1+i\sigma)\phi(x)}$。有

$$
S^{>}_{\sigma}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} s^{>}_{\sigma,n}(x)\right) e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)},
$$

with

$$
||s^{>}_{\sigma,n}(x)||_{L^\infty(x_0,+\infty)} \leq \left(\frac{M_{x_0}}{2}\right)^n
$$

and

$$
||\sum_{n=N+1}^{+\infty} s^{>}_{\sigma,n}(x)||_{L^\infty(x_0,+\infty)} \leq \frac{1}{1-\frac{M_{x_0}}{2}}\left(\frac{M_{x_0}}{2}\right)^{N+1}
$$

(iii) 对每个 $\sigma < 0$，方程 **(2.12)** 的解族对于每个 $\sigma \leq 0$when$x \to +\infty$都有界，其形式为

$$
u(x;\sigma) = A_\sigma(x_0)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} s^{>}_{\sigma,n}(x)\right) b(x)e^{-i(1+i\sigma)\phi(x)}. \tag{3.4}
$$

命题 3.2 的证明。**(i)** 的证明只需简单计算。对于 **(ii)**，考虑命题中定义的序列 $S^{>}_{\sigma,\ n}$。由于 K_σ 是压缩映射，级数 $\sum_{n\geq 0} S^{>}_{\sigma,\ n}(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上一致收敛。这意味着部分和 $S^{>}_{\sigma,\ N} = \sum_{k=0}^{N} S^{>}_{\sigma,\ k}$ 当 $N \to +\infty$ 时一致收敛于一个连续函数。

注意，关于 $S^{>}_{\sigma,\ n}$ 的不等式并不意味着关于 $s^{>}_{\sigma,\ n}$ ($s^{>}_{\sigma,\ n} = e^{2i(1+i\sigma)\phi(x)}S^{>}_{\sigma,\ n}$ 的不等式蕴含 $|s^{>}_{\sigma,\ n}(x)| \leq \left(\frac{M_{x_0}}{2}\right)^n e^{-2\sigma\phi(x)}$，后者对于 $\sigma < 0$ 无界)。导致关于 $s^{>}_{\sigma,\ n}$ 的估计的等式为序列

$$
s^{>}_{\sigma,n+1}(x) = \frac{1}{2i}[e^{-2i(1+i\sigma)\phi(x)}\int_{x_0}^{x} M(y)s^{>}_{\sigma,n}(y)dy + \int_{x}^{+\infty} M(y)s^{>}_{\sigma,n}dy]
$$

这意味着

$$
|s^{>}_{\sigma,n+1}(x)| \leq \frac{1}{2}[e^{2\sigma\phi(x)}\int_{x_0}^{x} |M(y)||s^{>}_{\sigma,n}(y)|dy + \int_{x}^{+\infty} |M(y)||s^{>}_{\sigma,n}(y)|dy] \leq \frac{M_{x_0}}{2}\max_{[x_0,+\infty)}|s^{>}_{\sigma,n}(y)|.
$$

通过迭代，很容易推导出关于 $s^{>}_{\sigma,\ n}$ 的估计，并由关于$s^{>}_{\sigma,\ n}$ 的估计推导出关于 $\sum_{n\geq N+1} s^{>}_{\sigma,\ n}$的估计。

第（iii）项是 $v^{<}_{\sigma}(x) = b(x)e^{i(1+i\sigma)\phi(x)}$ 以及以下事实的推论：若 $u(x,\sigma)$ 是方程（2.12）的有界解，则 $u(x,\sigma) = S^{>}_{\sigma}(x)v^{<}_{\sigma}(x)$。由于 $A_{\sigma}(x_0)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} s^{>}_{\sigma,\ n}(x)\right) b(x)e^{-i(1+i\sigma)\phi(x)}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上有界，我们证明了通过此过程得到的 $u(x;\ \sigma)$ 有界。

（iii）的证明是以下一致有界性的推论：$|\sum_{n=0}^{+\infty} s^{>}_{\sigma,\ n}(x)| \leq \frac{1}{1-\frac{M_{x_0}}{2}}$，以及 $b\leq 1, \phi\geq 0, \sigma<0$。利用前面的估计，可得

$$|u(x;\sigma)| \leq |A_{\sigma}(x_0)|\frac{1}{1-\frac{M_{x_0}}{2}}e^{\sigma\phi(x)}b(x) \leq |A_{\sigma}(x_0)|\frac{1}{1-\frac{M_{x_0}}{2}}$$

由 $b(x) \leq 1$、$\phi(x) \geq 0$ 和 $\sigma<0$ 可知。因此，由（3.4）给出的 u 有界。命题得证。

注意，在第三项中必须考虑 $\sigma<0$，因为对于 $\sigma=0$，(2.10) 的所有解都是有界的。

□

作为说明，前两项为

$$s^{>}_{\sigma,0}(x) = 1,$$
$$s^{>}_{\sigma,1}(x) = \frac{1}{2i(1+i\sigma)}[\int_{x_0}^{x} M(y)dy + \int_{x}^{+\infty} M(y)e^{2i(1+i\sigma)(\phi(x)-\phi(y))}dy],$$
$$\cdots$$

命题 3.3。设 $x_0>0$ 和 $\theta>0$，使得 $M_{x_0}<2$。

1. 在 $+\infty$ 处向外辐射的 (2.4) 的解族由某个常数乘以以下非零函数给出

$$S^{>}(x)v^{<}(x),$$

其中 $S^{>}$ 满足 (2.26)。

2. 函数 $S^{>}(x)e^{2i\phi(x)}$ 具有一致收敛展开

$$S^{>}(x)e^{2i\phi(x)} = 1+\sum_{j\geq 1} s^{>}_{j}(x)$$

3. 命题 3.2 中的不等式可推广到 $\sigma=0$ 的情形。

证明　　命题 3.3。首先证明 $S^{>}v^{<}$ 非零。可以验证这两个关系　　s

$(S^{>}v^{<})(x_0) = b(x_0)(e^{-i\phi(x_0)}+R_{x_0}e^{i\phi(x_0)})$, $(S^{>}v^{<})'(x_0) = b'(x_0)(S^{>}v^{<})(x_0)+i\phi'(x_0)(R_{x_0}e^{i\phi(x_0)}-e^{-i\phi(x_0)})$ 感谢 $(K^0(f))'(x) = -\phi'(x)\int_{x_0}^{x} M(y)f(y)e^{-2i(\phi(x)-\phi(y))}dy$ 以及 $v^{<}(x_0) = b(x_0)e^{i\phi(x_0)}$，$(v^{<})'(0) = b'(x_0)e^{i\phi(x_0)} + i\phi'(x_0)b(x_0)e^{i\phi(x_0)}$.

由于不存在任何 R_{x_0} 值，使得 $(S^{>}v^{<})(x_0) = (S^{>}v^{<})'(x_0) = 0$，$S^{>}v^{<}$ 是 $\mathcal{U}^{>}_{+\infty}$ 的非零元素。

现在考虑 u 的 $\mathcal{U}^{>}_{+\infty}$中的一个非零元素。存在一个函数序列$u(x;\sigma)$ $\sigma < 0$，它是方程 (2.12) 的解，并且当 $\sigma \to 0$时，$u(x,\sigma) \to u(x)$；当$x \to +\infty$时，$u(x,\sigma) \to 0$。

后一个条件意味着 $u(x,\sigma)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界。根据命题 3.2，在条件 $M^{x_0}_{\infty} < 2$ 下有，

$$u(x;\sigma) = A_\sigma(x_0)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} s^{>}_{\sigma,j}(x))v^{<}(x;\sigma).$$

现在我们来证明 $\lim_{\sigma\to 0-} A_\sigma(x_0)$ 存在且非零。由于 u 非零，因此存在$X_0 > 0$ 使得 $u(X_0) \neq 0$。

我们已经观察到 $S^{>}v^{<}$ 不为零。因此，存在 $X_1 > 0$，使得 $(S^{>}v^{<})(X_1) \neq 0$；并且存在 σ_*，使得 $|(S^{>}_{\sigma}v^{<}_{\sigma})(X_1)| > \frac{1}{2}|(S^{>}v^{<})(X_1)| > 0$，且 $|u(X_1;\sigma)| \leq 2|u(X_1)|$对所有 $\sigma_* < \sigma < 0$ 均成立。因此

$$|A_\sigma(x_0)| = |\frac{u(X_1,\sigma)}{(S^{>}_{\sigma}v^{<}_{\sigma})(X_1)}| \leq \frac{2}{|(S^{>}v^{<})(X_1)|}2|u(X_1)|,$$

这表明 $|A_\sigma(x_0)| \leq C < \infty$。因此，存在一个子序列 $\sigma_n \to 0^-$，使得 $\lim_{n\to\infty} A^{\sigma_n}(x_0)$ 存在。这个极限不可能为零，否则对于每个x，都有 $u(x,\sigma) \to 0$，这与 $u(X_0) \neq 0$ 的事实矛盾。

由此我们得出结论：$A_\sigma(x_0)$ 存在一个非零极限，我们将其记为 A_*。这证明了对于所有 x，$u(x) = A_* S^{>}(x)v^{<}(x)$。命题 3.3 的第一项得证。其余两项的估计是命题 3.2 中不等式的直接推论。注意，对于属于 $\mathcal{U}^{>}_{+\infty}$ 的 u，这一结果等价于推论 A.1 中陈述的一般结果。它等价于求得方程 (2.4) 的解 u，使得当 $x \to +\infty$ 时，$b^{-1}(x)u(x)e^{-i(1+i\sigma)\phi(x)} \to 0$。

□

我们可能会注意到，这个展开式类似于单向算子的Bremmer耦合级数，例如参见 [11]。

定理 2.4 的证明。像之前一样，考虑由 (2.26) 给出的 $S^{>}$。由于 u 是出射解，存在一个常数 A_*，使得 $u = A_* S^{>}v^{<}$。上文命题 3.3 的证明中引入的函数 A 和 B 满足 $u = A_*(Av^{>} + Bv^{<})$ $u' = A_*(A(v^{>})' + B(v^{<})')$。此外，$B(x_0) = \frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty} M(y)S^{>}(y)dy = R_{x_0}$，且 $A(x_0) = 1$。由此得到所需的等式。

$$\frac{u'(x_0)}{u(x_0)} = \frac{A(v^{>})' + B(v^{<})'}{Av^{>} + Bv^{<}}(x_0) = \frac{(v^{>})'(x_0) + R_{x_0}(v^{<})'(x_0)}{v^{>}(x_0) + R_{x_0}v^{<}(x_0)}.$$

反过来，假设 u 是满足下式的 (2.4) 的一个解

$$\frac{u'(x_0)}{u(x_0)} = \frac{(v^{>})'(x_0) + R_{x_0}(v^{<})'(x_0)}{v^{>}(x_0) + R_{x_0}v^{<}(x_0)}.$$

引入

$$u_* = \frac{u(x_0)}{S^>(x_0)v^>(x_0)} S^> v^>.$$

由于 $S^>v^>$ 是 $+\infty$处的出射解， u_*也是。因此， $u'_*(x_0)\ u_*(x_0) = (v^>)'(x_0)+R_{x_0}(v^<)'(x_0)\ v^>(x_0) +R_{x_0}v^<(x_0)$。利用 $u_*(x_0) = u(x_0)$，可推出 $u'_*(x_0) = u'(x_0)$。由于 u_* 和 u 是方程 (2.4) 的解，根据唯一性， $u = u_*$ 和 u 在 $+\infty$处是出射解。我们通过定理 2.4 的 x_0 条件，刻画了在 $+\infty$ 处出射的 u 。 □

4 反射系数的表达式

4.1 α > 0 时的一般公式

引入方程 (2.4) 的一个解 $u \in C^1([0,+\infty[)$，并定义函数 $a^>, a^<$，使得

$$\begin{cases} u(x) = a^>(x)w^>(x) + a^<(x)w^<(x), x \in [0, x_0[\\ (a^>)'(x)w^>(x) + (a^<)'(x)w^<(x) = 0, x \in [0, x_0[\end{cases} \tag{4.1}$$

引入

$$\begin{aligned} k &= e^{-2i\phi(x_0)} \frac{1-ibb'(x_0)+\frac{R_{x_0}e^{i\phi(x_0)}-e^{-i\phi(x_0)}}{R_{x_0}e^{i\phi(x_0)}+e^{-i\phi(x_0)}}}{1+ibb'(x_0)-\frac{R_{x_0}e^{i\phi(x_0)}-e^{-i\phi(x_0)}}{R_{x_0}e^{i\phi(x_0)}+e^{-i\phi(x_0)}}} \\ &= e^{-2i\phi(x_0)} \frac{(2-ibb'(x_0))R_{x_0}-ibb'(x_0)e^{-2i\phi(x_0)}}{ibb'(x_0)R_{x_0}+(2+ibb'(x_0)e^{-2i\phi(x_0)})} \end{aligned} \tag{4.2}$$

命题 4.1. 函数 u 是方程 (2.4) 的一个解，当且仅当 $a^<(x_0) = k\, a^>(x_0)$。

证明. 回想一下，当且仅当 $u \in \mathcal{U}^>_{+\infty}(x_0) u(x_0) = i\frac{R_{x_0}-1}{R_{x_0}+1}$。由于所有在 $[0,+\infty[$ 上连续的方程 (2.4) 的解都属于 C^1，根据 $\alpha > 0$，等式 (4.1) 得出

$$\frac{u'(x_0)}{u(x_0)} = -i\phi'(x_0)\frac{1-ke^{2i\phi(x_0)}}{1+ke^{2i\phi(x_0)}} = i\frac{R_{x_0}-1}{R_{x_0}+1},$$

因此，关系 $a^<(x_0) = k\, a^>(x_0)$ 成立。 □

R_{x_0} 的行为是估计反射系数 R 的关键环节之一，下面的命题给出了这一行为。

命题 4.2. 当 $\theta \to 0$ 时， $\frac{R_{x_0}}{\theta}$的极限为（对 $\alpha \geq 1$）：

$$\frac{1}{2i}[e^{-2ix_0}\sum_{p=2}^{[\alpha]+1}\frac{d^p}{dy^p}(\frac{y^\alpha}{(2i)^{p+1}}) + \int_{x_0}^{+\infty}\frac{e^{-2iy}}{(2i)^{[\alpha]+2}}\frac{d^{[\alpha]+2}}{dy^{[\alpha]+2}}(y^\alpha)dy],$$

且对于 $0 < \alpha < 1$,

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{(2i)^3}\int_{x_0}^{+\infty} y^{\alpha-2}e^{-2iy}dy.$$

命题 4.2 的证明是第 4.2 节的内容。

现在我们已具备所有要素，可以完成定理 1.1 的证明，并对余项给出粗略估计 $o(\theta)$。

由于 $R_{x_0} = O(\theta)$（来自命题 4.2），利用 $b'(x_0) = O(\theta)$ 和 $\phi(x_0) = 1 + O(\theta)$，以及由 (4.2) 给出的 k 的表达式，可以直接推得

$$k = R_{x_0} + \frac{bb'(x_0)}{2i} + O(\theta^2). \tag{4.3}$$

有了 k 的这一表达式，在 $[0, x_0[$ 上求解柯西问题，并在 $x = x_0$ 处给定柯西数据，即可得到系数 R 的主导阶渐近行为。

命题 4.3. 1. 若 u 是 (2.4) 的解，则由 (4.1) 定义的 $\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}$ 满足

$$\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(y) = \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x_0) + \mathcal{V}(\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix})(y), \forall y \in [0, x_0]$$

矩阵沃尔泰拉算子 $\mathcal{V}$ 由 (4.5) 定义。

2. 存在 $\theta_1 > 0$，使得对于所有 $\theta < \theta_1$，等式成立

$$R = \frac{[(Id - \mathcal{V})^{-1}(0)\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}]_2}{[(Id - \mathcal{V})^{-1}(0)\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}]_1}.$$

（其中 $[\cdot]_j$ 表示第 j 个分量。）

3. 对于 $\theta < \min(\theta_0(x_0)\ \theta_1)$，可得

$$R = R_{x_0} + \frac{bb'(x_0)}{2i}e^{-2i\phi(x_0)} + \int_0^{x_0} \frac{b'}{b}(y)e^{-2i\phi(y)}dy + O(\theta^2). \tag{4.4}$$

证明。第 1 项）：

考虑由（4.1）给出的 u，其中 $(a^>)'e^{-i\phi(x)} + (a^<)'e^{i\phi(x)} = 0$。由（2.4）式可得

$$\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}' = \frac{\phi''(x)}{2\phi'(x)} \begin{pmatrix} i\phi'(x)e^{i\phi(x)} & -e^{i\phi(x)} \\ i\phi'(x)e^{-i\phi(x)} & e^{-i\phi(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\phi(x)} & -e^{i\phi(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix},$$

这意味着

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x) &= \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{\phi''(y)}{2\phi'(y)} \begin{pmatrix} -1 & e^{2i\phi(y)} \\ e^{-2i\phi(y)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(y)dy \\ &:= \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x_0) + \mathcal{V}(\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix})(x), \end{aligned} \tag{4.5}$$

这个等式定义了矩阵沃尔泰拉算子 $\mathcal{V}$。

第 2 项）作为 $L^1([0,x_0])$，该积分算子的核属于 $L^1([0,x_0])$。注意，对于所有 $x \in [0,x_0]$,

$$|\mathcal{V}(f)(x)| \leq \int_x^{x_0} |\frac{\phi''(y)}{\phi'(y)}|dy||f||_{L^\infty[0,x_0]}$$

由于 $\phi' = c^{-1}$ 和 c 递减， ϕ' 递增且为正，因此

$$|\mathcal{V}(f)(x)| \leq \ln \frac{\phi'(x_0)}{\phi'(x)}||f||_{L^\infty[0,x_0]}.$$

存在一个常数 $C(x_0)$，与 θ 无关，使得

$$\ln \phi'(x_0) \leq C(x_0)\theta$$

因此，映射 $U \to S + \mathcal{V}(U)$ 在 $\theta < \theta_1$、 θ_1 足够小时是一个压缩映射，故存在唯一不动点，从而得到式 (4.5) 的唯一解 $\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}$，其为

$$\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x) = (Id - \mathcal{V})^{-1}(y) \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x_0).$$

命题 4.1 得出 $\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x_0) = a^>(x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$。

Let $r(x) = \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x) - a^>(x_0)[\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \mathcal{V}(\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix})(x)]$. It satisfies

$$r(x) = a^>(x_0)\mathcal{V}^2(\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix})(x) + \mathcal{V}(r)(x).$$

由于 $\mathcal{V}$ 对 $\theta < \theta_1$ 是压缩映射，这里存在 c，使得 $||r||_{(L^\infty[0,x_0])^2} \leq c\,\theta^2$。

由 (2.14) 和关系 $u(0) = a^>(0) + a^<(0)$ $u'(0) = ia^>(0)R - ia^>(0)$，可推出 $R = \frac{a^<}{a^>}(0)$。由

$$\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(0) = (Id - \mathcal{V})^{-1}(0) \begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(x_0) = a^>(x_0)(Id - \mathcal{V})^{-1}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}(x_0),$$

借助 $a^>(0) \neq 0$，可得到反射系数 R，从而证明命题 4.3 的第 2) 项。

第 3 项）利用 $k = O(\theta)$，可得

$$\begin{pmatrix} a^> \\ a^< \end{pmatrix}(0) = a^>(x_0)[\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} + \mathcal{V}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})(x)] + O(\theta^2).$$

As

$$\mathcal{V}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})(0)=\int_{x_0}^{0}\frac{\phi''(x)}{2\phi'(x)}\begin{pmatrix}-1 & e^{2i\phi(x)}\\ e^{-2i\phi(x)} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix}-\int_{x_0}^{0}\frac{\phi''(x)}{2\phi'(x)}dx\\ \int_{x_0}^{0}\frac{\phi''(x)}{2\phi'(x)}e^{-2i\phi(x)}dx\end{pmatrix},$$

利用 $b^2\phi'=1$ 和 $\frac{\phi''}{\phi'}=O(\theta)$，可得:

$$\mathcal{V}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})(0)=\begin{pmatrix}O(\theta)\\ \int_{x_0}^{0}\frac{\phi''(x)}{2\phi'(x)}e^{-2i\phi(x)}dx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O(\theta)\\ \int_{0}^{x_0}\frac{b'(x)}{b(x)}e^{-2i\phi(x)}dx\end{pmatrix}.$$

$[\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}+\mathcal{V}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})(0)]$ 的第一分量是 $1+O(\theta)$，而第二分量是 $k+\int_0^{x_0}\frac{b'}{b}(x)\,e^{-2i\phi(x)}dx$，

由此可得

$$R=k+\int_0^{x_0}\frac{b'}{b}(x)e^{-2i\phi(x)}dx+O(\theta^2)=R_{x_0}+\frac{bb'(x_0)}{2i}e^{-2i\phi(x_0)}+\int_0^{x_0}\frac{b'}{b}(x)e^{-2i\phi(x)}dx+O(\theta^2).$$

□

定理 1.1 的证明 由（4.4）可得

$$\frac{R}{\theta}=\frac{R_{x_0}}{\theta}+\frac{\alpha x_0^{\alpha-1}}{(2i)^3}e^{-2ix_0}-\int_0^{x_0}\frac{\alpha y^{\alpha-1}}{4}e^{-2iy}dy+O(\theta)$$

根据命题 4.2，有

$$\frac{R}{\theta}=\frac{1}{2i}[e^{-2ix_0}\sum_{p=2}^{[\alpha]+1}\frac{d^p}{dy^p}(\frac{y^\alpha}{(2i)^{p+1}})+\int_{x_0}^{+\infty}\frac{e^{-2iy}}{(2i)^{[\alpha]+2}}\frac{d^{[\alpha]+2}}{dy^{[\alpha]+2}}(y^\alpha)dy]-\frac{\alpha x_0^{\alpha-1}}{8i}+\frac{1}{(2i)^2}\int_0^{x_0}\frac{d}{dy}y^\alpha e^{-2iy}dy+o(1)$$

利用等式（D.3），上述表达式可写为

$$\frac{R}{\theta}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2i)^{\alpha+2}}+o(1),$$

这就证明了定理 1.1。

当 $\alpha>1$ 时，注意 $\frac{bb'(x_0}{2i}+\int_0^{x_0}\frac{b'}{b})(x)e^{-2i\phi(x)}dx=\frac{1}{2i}\int_0^{x_0}(M(y)+(b'(y))^2)e^{-2i\phi(y)}dy$。由此可验证，在 $\alpha>1$ 的情况下，可以选择 $x_0=0$。

4.2 计算 $\lim_{\theta\to0}\frac{R_{x_0}}{\theta}$

现在我们来讨论命题 4.2 的证明。

本章节依赖于一个与 θ 无关的固定值 $x_0>0$。在 $0<\alpha<1$ 的情况下，极限的计算以及余项 $\frac{R_{x_0}}{\theta}-\lim_{\theta\to0}\frac{R_{x_0}}{\theta}$ 的估计都十分直接，正如下述引理所示。

引理 4.4。对于 $0 < \alpha < 1$，存在 $\theta_0(x_0)$ 和 c，使得对于所有 $\theta < \theta_0(x_0)$ 以及 $\theta < c^{-1}$

$$|R_{x_0} - \frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty} M(y)e^{-2i\phi(y)}dy| \leq \frac{c^2\theta^2}{1-c\theta}.$$

从而得到如下估计

$$|\frac{R_{x_0}}{\theta} + \frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty} y^{\alpha-2}T_0(0)dy| \leq C\theta.$$

事实上，存在常数 C 和常数 c，使得对于给定的 $x_0 > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$

$$M_{x_0} \leq \theta\frac{x_0^{\alpha-1}}{1-\alpha}C = 2c\theta \tag{4.6}$$

根据这一估计，可以验证，对于 $0 < \alpha < 1$,

$$|S^{>}(x) - e^{-2i\phi(x)}| \leq \frac{c\theta}{1-c\theta}, \tag{4.7}$$

由此可推出

$$|R_{x_0} - \frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty} M(x')e^{-2i\phi(x')}dx'| \leq (c\theta)^2\frac{1}{1-c\theta}.$$

这就证明了引理 4.4。

关于 $\alpha > 1$的证明更为复杂。事实上，难点之一在于，当 $\theta > 0$时，$\theta^{-1}M(x)$ 属于 $L^1([x_0, +\infty[)$，而其在 $\theta \to 0$时的极限为 $-^{\alpha}{}_{(\alpha-1)}{}_4 \quad x^{\alpha-2}$，它并不属于 $L^1([x_0, +\infty[)$。

由于 M 乘以一个振荡项，我们将使用反复分部积分来降低 $x^{\alpha-2}$的次数。

在给出此情形下命题 4.2 证明的详细过程之前，我们先概述一下证明思路。

引入算子 $\mathcal{L}$，定义为

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{d}{dx}(cf)(x), \tag{4.8}$$

其中，$c(x)$ 来自方程（2.2）。

- 利用估计 $M_{x_0} = O(\theta^{\frac{1}{\alpha}})$，只需研究以下量，而无需研究 R_{x_0}:

$$\frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty} M(y)e^{-2i\phi(y)}(\sum_{j=0}^{j_0-1} s_{0,j}^{>}(y))dy$$

其中 $\frac{j_0+1}{\alpha} > 1 > \frac{j_0}{\alpha}$,

- 反复使用分部积分（引理 4.6），可得恒等式 (4.9)

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(y)e^{-2i\phi(y)}dy = \frac{c(x_0)}{2i}e^{-2i\phi(x_0)}[\sum_{p=0}^{n-1}(2i)^{-p}\mathcal{L}^p(f)(x_0)]+(2i)^{-n}\int_{x_0}^{+\infty}\mathcal{L}^n(f)(y)e^{-2i\phi(y)}dy,$$

- 最后注意到，当 $f(y) = T_0(\theta y^\alpha)(\sum_{j=0}^{j_0-1} s_{0,j}^{>}(y))$时，$\mathcal{L}^p(f)(x_0)$收敛至 $\frac{d^p}{dx^p}(T_0(0)x^{\alpha-2})(x_0)$。

证明了这些步骤后，我们为 $\alpha \notin \mathbb{N}$选择 n，使得 $\alpha - 2 - n < -1$。控制收敛定理证明，当 $\theta \to$趋于0时，$\int_{x_0}^{+\infty}\mathcal{L}^n(f)(y)e^{-2i\phi(y)}dy$ 收敛至$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d^n}{dy^n}(T_0(0)y^{\alpha-2})e^{-2iy}dy$。

请注意，对 $\alpha \in \mathbb{N}$需要采用特殊处理。
命题 4.2 的证明依赖于引理 4.6 和附录 C。我们引入 j_0，使得 $j_0 < \alpha < j_0 + 1$。

第一个引理对于所有 $\alpha > 0$，都将 L^∞ 范数为 $o(\theta)$ 的所有项消去：

Lemma 4.5. 令 $\alpha > 1$。对于所有满足 $\theta < \theta_0(x_0)$ 的 θ（参见引理 B.1），有一】【。s

$$|R_{x_0} - \frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty} M(y)e^{-2i\phi(y)}(\sum_{j=0}^{j_0-1} s_{0,j}^{>}(y))dy| \leq \theta^{\frac{j_0+1}{\alpha}}(\frac{I}{2})^{j_0+1}(1-\frac{1}{2}\theta^{\frac{1}{\alpha}}I)^{-1}.$$

第二个引理给出了分部积分公式，这对于基于 $[x_0, +\infty[$ 的估计至关重要。

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(y)e^{-2i\phi(y)}dy = \frac{f(x_0)c(x_0)}{2i}e^{-2i\phi(x_0)} + \frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty}\mathcal{L}(f)(y)e^{-2i\phi(y)}dy,$$

对于 $f \in L^1([x_0, +\infty[)$ 和 $\mathcal{L}(f) \in L^1([x_0, +\infty[)$。它可以推广为

引理 4.6. 设 f 为有界的 $C^{j_0-1}([0, +\infty[)$ 类函数，当 y 足够大时，其所有导数均由 y^{-1} 界。对每个 $n_0 \geq 0$，(4.9) 成立。

命题 4.2 的证明 我们对 α 区分两种情况。事实上，我们所依据的证明基于 f 与 $x^{\alpha-2}$ 成比例时 $\mathcal{L}^n(f)$ 的行为；可以采用的论据之一是，$\mathcal{L}^n(x^{\alpha-2})$ 的表现为 $x^{\alpha-2-n}$，并且当 n 足够大时，$\alpha-2-n$ 严格小于 -1，但若 α 为整数则例外，因为 x^0 的导数为 0。

第一种情况：$\alpha \notin \mathbb{N}$ 设 f 由下式给出

$$f(y) = y^{\alpha-2}T_0(\theta y^\alpha)(\sum_{j=0}^{j_0-1} s_{0,j}^{>}(y)). \tag{4.10}$$

使得 $M\ y\ \sum_{j=0}^{j_0-1} s_{0\,j}^{>}\ y\ = -\theta f\ y$ $\theta_0\ x_0$ D_0 $\theta <$ ( )(,( )) ( )。存在 ( ), 且 $\theta_0\ x_0$ 使得, 对于 ( ):

$$\forall y \geq x_0, ||f(y)|| \leq D_0 y^{\alpha-2}.$$

这来自 T_0 有界、 M_{x_0} 被 $K_0\theta^{\frac{1}{\alpha}}$ 所界，以及展开式的所有项均有界（命题 3.3）。

由于对于所有 $y \in [x_0, +\infty[$，当 $\theta \to 0$ 时， $f(y)$ 收敛于 $y^{\alpha-2}T_0(0)$，这归功于 $c(y) \to 1$，即 $\mathcal{L}(f)$ 收敛于 $(\alpha-2)y^{\alpha-3}T_0(0)$。

此外，对于所有 $n \geq 0$，在 $[x_0, +\infty[$, 上一致成立;

$$\lim_{\theta\to 0}\mathcal{L}^n(f)(x) = \frac{d^n}{dy^n}(y^{\alpha-2})T_0(0). \tag{4.11}$$

令 $n_0 = [\alpha]$ ，并回顾 x_0 是已知的，且与 θ无关。当 $\alpha \notin \mathbb{N}$时，对于所有$p \geq 1$，存在 T_p, 在 $[0, +\infty)$上有界，使得

$$\mathcal{L}^p(f)(x) = x^{\alpha-2-p}T_p(\theta x^\alpha),$$

对于所有 $p \geq 0$ ，借助 $\alpha \notin \mathbb{N}$，有 $T_p(0) \neq 0$ 。

引理 C.2 中得到的估计使我们能够在 $\int_{x_0}^{+\infty} \mathcal{L}^{n_0}(M)e^{-2i\phi(y)}dy$ 上使用控制收敛定理。该方法可应用于本文研究的两种情形（可得 $\mathcal{L}^n(M)(x) = \theta x^{\alpha-2-n}T_n^*(\theta x^\alpha)$，其中 T_n^* 在模型情形 (1.4) 中是一个有界的 $[0, +\infty[$ 有理分式，而在 (2.1) 中是一个紧支撑函数，因此两种情形下它都被常数 K_0 一致有界），并且利用极限 (4.11) 可得:

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\int_{x_0}^{+\infty} f(y)e^{-2i\phi(y)}dy &= \frac{e^{-2ix_0}}{2i}\sum_{p=0}^{n_0-1}\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathcal{L}^p(f)}{(2i)^p}(x_0)) + \int_{x_0}^{+\infty}\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathcal{L}^{n_0}(f)}{(2i)^{n_0}}(y)e^{-2iy}dy \\ &= T(0)[\frac{e^{-2ix_0}}{2i}\sum_{p=0}^{[\alpha]-1}\frac{1}{(2i)^p}\frac{d^p}{dy^p}(y^{\alpha-2})(x_0)) + \frac{1}{(2i)^{[\alpha]}}\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d^{[\alpha]}}{dy^{[\alpha]}}(y^{\alpha-2})e^{-2iy}dy].\end{aligned}$$

也就是说，利用 $T(0) = -\frac{\alpha(\alpha-1)}{(2i)^2}$ 和 $T_{[\alpha]}(0) = (\alpha-2)...(\alpha-[\alpha]-1)T_0(0)$

$$\begin{aligned}-\lim_{\theta\to 0}\int_{x_0}^{+\infty} f(y)e^{-2i\phi(y)}dy &= \frac{e^{-2ix_0}}{2i}[\sum_{p=0}^{n_0-1}\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathcal{L}^p(f)}{(2i)^p}(x_0)] + \int_{x_0}^{+\infty}\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathcal{L}^{n_0}(f)}{(2i)^{n_0}}(y)e^{-2iy}dy \\ &= \frac{e^{-2ix_0}}{2i}[\sum_{p=2}^{[\alpha]+1}\frac{1}{(2i)^p}\frac{d^p}{dy^p}(y^\alpha)(x_0))] + \frac{1}{(2i)^{[\alpha]+2}}\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d^{[\alpha]+2}}{dy^{[\alpha]+2}}(y^\alpha)e^{-2iy}dy].\end{aligned} \tag{4.12}$$

可以辨认出表达式 (D.3) 的最后一部分。

第二种情形： $\alpha \in \mathbb{N}$，记作 n。注意，对于 $p \geq 1$，存在一个函数$T_p \in L^1([0, +\infty[)$（在模型情形 (1.4) 中，它是一个有界的有理分式；对于 (2.1)，它是一个紧支撑函数），使得 $\mathcal{L}^{n_0}(f)(x) = x^{n-2-n_0}T_{n_0}(\theta x^n)$，且对于每个 n_0， $T_{n_0}(0) = (n-2)(n-3)...(n-1-n_0)T_0(0)$。函数 $x \to T_{n_0}(\theta x^n)$ 一致有界于常数 K_{n_0}。取 $n_0 = n-2$。有

$$\mathcal{L}^{n-2}(f)(x) = T_{n-2}(\theta x^n).$$

考虑另外两个导数，存在一个函数 Q_n，其一致有界于常数 C_n，且该常数不依赖于 θ，对于 $\theta < \theta_0(x_0)$，使得

$$\mathcal{L}^n(f)(x) = \theta x^{n-2}[(n-1)c(cT_{n-2})'(\theta x^n) + n\theta x^n(c(cT_{n-2})')'(\theta x^n)] = x^{-2}Q_n(\theta x^n), \tag{4.13}$$

此外，$Q_n(0) = 0$。因此有

$$\int_{x_0}^{+\infty} T_{n-2}(\theta x^n)e^{-2i\phi(x)}dx = c(x_0)e^{-2i\phi(x_0)}[\frac{T_{n-2}(\theta x_0^n)}{2i} + \frac{\mathcal{L}(T_{n-2})(\theta x_0^n)}{(2i)^2}] + \int_{x_0}^{+\infty} x^{-2}\frac{Q_n(\theta x^n)}{(2i)^2}e^{-2i\phi(x)}dx,$$

积分中的一致有界性由 Cx^{-2}, C 给出，且与 θ 无关（对于 $\theta < \theta_1$），这使得我们可以使用控制收敛定理。利用 $x^{-2}Q_n(\theta x^n) \to 0$ （当 $\theta \to 0$ 时），并得益于 $Q_n(0) = 0$ （如果 $\alpha \in \mathbb{N}$，则还有 $\frac{d^{[\alpha]+2}}{dy^{[\alpha]+2}}(y^\alpha) = 0$），可得

$$\lim_{\theta\to 0}\int_{x_0}^{+\infty} f(y)e^{-2i\phi(y)}dy = T_0(0)e^{-2ix_0}[\sum_{p=0}^{n-2}(2i)^{-p}\frac{d^p}{dy^p}(y^{n-2})]|_{y=x_0}, \tag{4.14}$$

这证明了 $\alpha \in \mathbb{N}$ 情形下的命题 4.2。

至此，命题 4.2 对所有 $\alpha > 0$ 的证明完成。

下文中，我们用 θ_1 表示满足 $0 < \theta_1 < \theta_0(x_0)$ 的任意常数，并在需要时用 C 表示一般常数。下一章节的目标是评估 R_{x_0} 中的余项及其在 θ 中的数量级；该章节的内容相当技术性。

5 R 的渐近界

本节量化了 R 表达式中的余项，尤其确定了其在 θ 中的大小。

$0 < \alpha < 1$ 的情形已在引理 4.4 中讨论。因此，接下来需要证明

定理 5.1. 对所有 $\alpha \geq 1$，存在常数 C 和 θ_1，使得对所有 $\theta < \theta_1$，

$$|\frac{R}{\theta} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2i)^{\alpha+2}}| \leq C\theta^{\frac{1}{\alpha}}.$$

这是论文中技术性最强的部分，我们将区分两种情况，即 α 为整数的情况和 α 不是整数的情况。这是所用证明方法的结果，也就是我们通过反复分部积分来研究形如 $\int_{x_0}^{+\infty} x^{\alpha-2}T(\theta x^\alpha)e^{-2i\phi(x)}dx$ 的积分。当 α 不是整数时，存在 n 使得 $\alpha - n < -1$，并且经过 $n-2$ 次分部积分后得到的积分中，$x^{\alpha-n}$ 的系数不为零。当 α 为整数时，若 $n = \alpha$，则会得到形如 $\int_{x_0}^{+\infty} T_{n-2}(\theta x^n)e^{-2i\phi(x)}dx$ 的积分，而再进行一次分部积分会得到一个含有 x^{n-1} 的积分，而这不属于 $L^1([1, +\infty))$。

首先注意，一个类似于引理 4.5 中估计的估计是

$$|R_{x_0}-\frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty}M(y)e^{-2i\phi(y)}(\sum_{j=0}^{j_0+1}s_{0,j}^{>}(y))dy|\leq\theta^{\frac{j_0+2}{\alpha}}(\frac{I}{2})^{j_0+2}(1-\frac{1}{2}\theta^{\frac{1}{\alpha}}I)^{-1},$$

由此可推出

$$|\frac{R_{x_0}}{\theta}-\frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty}\theta^{-1}M(y)e^{-2i\phi(y)}(\sum_{0}^{[\alpha]+1}s_j^{>}(y))dy|\leq C\theta^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{5.1}$$

请注意，我们并不局限于这一估计；此外还有

$$|\frac{R_{x_0}}{\theta}-\frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty}\theta^{-1}M(y)e^{-2i\phi(y)}(\sum_{0}^{2[\alpha]+1}s_j^{>}(y))dy|\leq C\theta. \tag{5.2}$$

附录 C 得出

$$|\frac{R_{x_0}}{\theta}-\frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty}\theta^{-1}M(y)e^{-2i\phi(y)}dy|\leq C_2\theta^{\frac{1}{\alpha}}.$$

定理 5.1 的证明依赖于以下估计

$$|\frac{R_{x_0}}{\theta}-\frac{1}{2i}[e^{-2ix_0}\sum_{p=2}^{[\alpha]+1}\frac{d^p}{dy^p}(\frac{y^\alpha}{(2i)^{p+1}})+\int_{x_0}^{+\infty}\frac{e^{-2iy}}{(2i)^{[\alpha]+2}}\frac{d^{[\alpha]+2}}{dy^{[\alpha]+2}}(y^\alpha)dy]|\leq C\theta^{\frac{1}{\alpha}}$$

对于 $\alpha\geq 1$。至于极限 $\frac{R_{x_0}}{\theta}$，则分为 $\alpha\notin\mathbb{N}$ 和 $\alpha\in\mathbb{N}$ 两种情况。注意，$c(x_0)=1+O(\theta)$ 且 $\phi(x_0)=x_0+O(\theta)$，因此，$\theta^{\frac{1}{\alpha}}$ 阶的贡献只能来自项 $s_j^{>}$，以及积分 $\int_{x_0}^{+\infty}\mathcal{L}^p(f)(x)e^{-2i\phi(x)}dx$.

- 在 $\alpha\in\mathbb{N}$ 的情况下，利用 (4.13) 可得

$$\mathcal{L}^{n+1}(f)=x^{-2}\theta x^{n-1}[(n-2)R_n(\theta x^n)+n\theta x^nR_n'(\theta x^n)].$$

注意到

$$\int_{x_0}^{+\infty}T_{n-2}(\theta x^n)e^{-2i\phi(x)}dx=\frac{c(x_0)e^{-2i\phi(x_0)}}{2i}[T_{n-2}+\frac{\mathcal{L}(T_{n-2})}{(2i)}+\frac{\mathcal{L}^2(T_{n-2}}{(2i)^2}])(\theta x_0^n)+\frac{1}{(2i)^3}\int_{x_0}^{+\infty}\mathcal{L}^{n+1}(f)e^{-2i\phi(x)}dx,$$

已证明 $[x_0,+\infty[$ 上的一致最优界（引理 C.2）

$$|\theta x^{n-1}[(n-2)R_n(\theta x^n)+n\theta x^nR_n'(\theta x^n)]|\leq C\theta^{\frac{1}{n}}$$

由此可推得，存在一个常数 C 使得

$$|\int_{x_0}^{+\infty}T_{n-2}(\theta x^n)e^{-2i\phi(x)}dx-\frac{c(x_0)e^{-2i\phi(x_0)}}{2i}[T_{n-2}+\frac{\mathcal{L}(T_{n-2})}{(2i)}+\frac{\mathcal{L}^2(T_{n-2})}{(2i)^2}](\theta x_0^n)|\leq C\theta^{\frac{1}{n}}x_0^{-1}$$

因此，由于 $\frac{c}{(2i}^{x_0}[T_{n-2}(\theta x_0^n)+\frac{\mathcal{L}(T_{n-2})(\theta x_0^n)(2i)}{\theta}+\frac{\mathcal{L}^2(T_{n-2})(\theta x_0^n)(2i)^2}{+}]$ 仅取决于 θ 和 $\theta \leq (\theta_0(x_0))^{1-\frac{1}{n}}\theta^{\frac{1}{n}}$，对于 $\theta < \theta_0(x_0)$，存在一个常数 M 使得，对于 $\theta < \theta_0(x_0)$

$$|\int_{x_0}^{+\infty} T_{n-2}(\theta x^n)e^{-2i\phi(x)}dx - \frac{T_{n-2}(0)}{2i}e^{-2ix_0}| \leq M\theta^{\frac{1}{n}}. \tag{5.3}$$

因此，利用 $n \geq 3$ 的引理 4.6，可推出

$$|\frac{R_{x_0}}{\theta} - \frac{c(x_0)}{2i}e^{-2i\phi(x_0)}[\sum_{p=0}^{n-3}(2i)^{-p}\mathcal{L}^p(f)(x_0)] - \frac{T_{n-2}(0)}{2i}e^{-2ix_0}| \leq 2^{-n+2}M\theta^{\frac{1}{n}},$$

并利用

$$\frac{c(x_0)}{2i}e^{-2i\phi(x_0)}[\sum_{p=0}^{n-3}(2i)^{-p}\mathcal{L}^p(f)(x_0)] = \frac{1}{2i}e^{-2ix_0}[\sum_{p=0}^{n-3}(2i)^{-p}x_0^{n-2-p}T_p(0)] + O(\theta^{\frac{1}{n}}),$$

我们得到估计

$$\frac{R_{x_0}}{\theta} = \frac{1}{2i}e^{-2ix_0}[\sum_{p=0}^{n-2}(2i)^{-p}x_0^{n-2-p}T_p(0)] + O(\theta^{\frac{1}{n}}),$$

根据等式 D.3，这恰好是

$$\frac{R_{x_0}}{\theta} = \frac{\Gamma(n+2)}{(2i)^{n+2}} - \int_0^{x_0} y^{n+1}e^{-2iy}dy + O(\theta^{\frac{1}{n}}).$$

因此，定理 5.1 在 $\alpha \in \mathbb{N}$ 的情况下得证。

- 在 $\alpha \notin \mathbb{N}$、$\alpha > 1$ 的情况下:

再次使用附录 C 中关于 $r_0(x_0, \theta)$ 的精确表达式。根据恒等式（由关于 $j = 0$ 和 $m = M$的引理 C.1 得出）：

$$\int_{x_0}^{+\infty} \theta^{-1}M(y)e^{-2i\phi(y)}dy = \frac{c(x_0)}{2i}T_k^S(x_0^{-1}, \theta x_0^\alpha) + \frac{1}{(2i)^{k+1}}\int_{x_0}^{+\infty} \mathcal{L}^{k+1}(\theta^{-1}M)e^{-2i\phi(y)}dy.$$

首先注意到 $|\frac{c(x_0)}{2i}T_k^S(x_0^{-1}, \theta x_0^\alpha) - \frac{1}{2i}T_k^S(x_0^{-1}, 0)| = O(\theta)$。只需研究该等式的第二项。将这第二项记为 J。于是我们使用引理 C.2 中的恒等式 (C.3):

$$-J = \frac{1}{(2i)^{k+1}}\int_{x_0}^{+\infty} y^{\alpha-3-k}T_{k+1}(\theta y^\alpha)e^{-2i\phi(y)}dy.$$

现在假设 $\alpha - 2 - k < 0$。一致有界性 $|T_{k+1}| \leq T_{k+1}^\infty$ 转化为$|y^{\alpha-3-k}T_{k+1}(\theta y^\alpha)| \leq y^{\alpha-3-k}T_{k+1}^\infty$，因此对于所有 $\theta \geq 0$，该积分都收敛。

进行变量替换 $y = \theta^{-\frac{1}{\alpha}}X$。可得

$$-J = \frac{1}{(2i)^{k+1}}\theta^{\frac{2+k}{\alpha}}\int_{\theta^{\frac{1}{\alpha}}x_0}^{+\infty} X^{\alpha-3-k}T_{k+1}(X^\alpha)e^{-2i\theta^{-\frac{1}{\alpha}}Xh(X^\alpha)}dX.$$

进行变量替换 $u = Xh(X^\alpha)$。由于 $X \to \sqrt{1+X^\alpha}$ 大于 1， $X \to u(X)$ 是从 $[0,+\infty[$ 到 $[0,+\infty[$ 的微分同胚，满足 $u'(0) = 1$，因此其倒数也是一个微分同胚，且 $X'(0) = 1$。由此可得

$$J = -\frac{1}{(2i)^{k+1}}\theta^{\frac{2+k}{\alpha}} \int_{\theta^{\frac{1}{\alpha}} x_0 h(\theta x_0^\alpha)}^{+\infty} (1+(X(u))^\alpha)^{-\frac{1}{2}} (X(u))^{\alpha-3-k} T_{k+1}((X(u))^\alpha) e^{-2i\theta^{-\frac{1}{\alpha}}u} du.$$

用 $Q(u)$ 表示满足以下条件的量

$$(1+(X(u))^\alpha)^{-\frac{1}{2}} (X(u))^{\alpha-3-k} T_{k+1}((X(u))^\alpha) - (1+u^\alpha)^{-\frac{1}{2}} u^{\alpha-3-k} T_{k+1}(u^\alpha) = u^\alpha Q(u).$$

当 $0 \le u \le 1$ 时，注意到存在一个函数 Z，它满足 $Z(\tau)h(\tau(Z(\tau))^\alpha) = 1$，且满足 $X(u) = uZ(u^\alpha)$；因此存在一个光滑函数 r，使得

$$u - X(u) = \frac{1}{h(u^\alpha(Z(u^\alpha))^\alpha)}[h(u^\alpha(Z(u^\alpha))^\alpha) - 1] = u^\alpha r(u^\alpha),$$

这意味着 Q 在 0 的邻域内有界。
另一方面，当 X 较大时，根据估计， $u \simeq X^{\frac{\alpha}{2}+1}$ 得出 $(1+(X(u))^\alpha)^{-\frac{1}{2}}(X(u))^{\alpha-3-k} \simeq u^{-1}u^{-\frac{2+k}{\frac{\alpha}{2}+1}}$。

于是有

$$-J = \frac{1}{(2i)^{k+1}}\theta^{\frac{2+k}{\alpha}} \int_{x_0 h(\theta x_0^\alpha)}^{+\infty} (1+\theta t^\alpha)^{-\frac{1}{2}} t^{1-\frac{3+k}{\alpha}} T_{k+1}(\theta t^\alpha) e^{-2it} dt + \frac{1}{(2i)^{k+1}}\theta^{\frac{2+k}{\alpha}} \int_{\theta^{\frac{1}{\alpha}} x_0 h(\theta x_0^\alpha)}^{+\infty} u^\alpha Q(u) e^{-2i\theta^{-\frac{1}{\alpha}}u} du.$$

该等式的最后一项等于

$$K = \frac{1}{(2i)^{k+1}}\theta^{1+\frac{3+k}{\alpha}} \int_{x_0 h(\theta x_0^\alpha)}^{+\infty} u^\alpha Q(\theta^{\frac{1}{\alpha}} t) e^{-2it} dt$$

对 $+\infty$ 处的 $(1+u^\alpha)^{-\frac{1}{2}}u^{1-\frac{3+k}{\alpha}}T_{k+1}(u^\alpha)$ 以及 $(1+(X(u))^\alpha)^{-\frac{1}{2}}(X(u))^{\alpha-3-k}T_{k+1}((X(u))^\alpha)$ 的估计表明， $K = O(\theta^{1+\frac{3+k}{\alpha}})$。由此可推得

$$-\theta^{-1}J = \frac{1}{(2i)^{k+1}} \int_{x_0 h(\theta x_0^\alpha)}^{+\infty} (1+\theta t^\alpha)^{-\frac{1}{2}} t^{\alpha-3-k} T_{k+1}(\theta t^\alpha) e^{-2it} dt + O(\theta^{1+\frac{3+k}{\alpha}}).$$

现在重点关注 $J_0 := \int_{x_0 h(\theta x_0^\alpha)}^{+\infty} (1+\theta t^\alpha)^{-\frac{1}{2}} t^{\alpha-3-k} T_{k+1}(\theta t^\alpha) e^{-2it} dt$。我们验证，对于 $\alpha - 2 - k < 0$， $x_0 h(\theta x_0^\alpha) - x_0 = O(\theta)$，且 $t^{\alpha-3-k} \in L^1([x_0,+\infty[)$。利用控制收敛定理，可以轻易得到 J_0 的极限为 $\int_{x_0}^{+\infty} t^{\alpha-3-k} T_{k+1}(0) e^{-2it} dt$。为了求出 J_0 与其极限之差，我们对定义 J_0的积分进行分部积分，从而得到 $\alpha - 2 - m$，其中 $\alpha - 2 - m < -\alpha - 2$，使得该差的阶为 θ。由于这一步用到了式 (4.9)，其中的 $\mathcal{L}$经过了“简化”，因此我们不再详述。
最后，

$$\theta^{-1}J - \frac{1}{(2i)^{k+1}}\int_{x_0}^{+\infty} t^{\alpha-3-k}T_{k+1}(0)e^{-2it}dt = O(\theta). \tag{5.4}$$

这就证明了不等式

$$\int_{x_0}^{+\infty}\theta^{-1}M(y)e^{-2i\phi(y)}dy - \frac{1}{2i}T_k^S(x_0^{-1},0) - \frac{1}{(2i)^{k+1}}\int_{x_0}^{+\infty} t^{\alpha-3-k}T_{k+1}(0)e^{-2it}dt = O(\theta)$$

因此，对于 $\alpha > 1$，利用不等式 (5.1)

$$\frac{R_{x_0}}{\theta} - \frac{1}{2i}T_k^S(x_0^{-1},0) - \frac{1}{(2i)^{k+1}}\int_{x_0}^{+\infty} t^{\alpha-3-k}T_{k+1}(0)e^{-2it}dt = O(\theta^{\frac{1}{\alpha}}). \tag{5.5}$$

由此我们证明了定理 5.1。

6 情况 $\alpha = 1$

作为本文结果的一个例证，我们在模型情形下重新得到了定理 5.1 的结果。

$$c^{-2}(x) = 1 + \theta x_+$$

与该方程相关的

$$u'' + (1 + \theta x_+)u = 0, u \in C^1. \tag{6.1}$$

这种情况比较简单，因为我们有使用特殊函数表示 $[0, +\infty$ 中解的精确表达式，因此可以利用这些函数已知的经典渐近结果。

我们用 Ai 和 Bi 表示艾里方程 $u'' = xu$ 的两个经典解（即 $Ai \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 是 $e^{i\frac{t^3}{3}}$ 的逆傅里叶变换，而 Bi 是 $u''(x) = xu$ 的唯一解，满足 $Bi(0) = \sqrt{3}Ai(0)$ 和 $Bi'(0) = -\sqrt{3}Ai'(0)$，参见 [1]）。

引入 $w_\pm(X) = Ai(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}X)$ 这一对满足条件的解[3]，并回顾当 $X \in \mathbb{C}, |X|$ 足够大时：

$$Ai(X) \simeq \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}}.$$

(6.1) 的一对线性无关解为 $x > 0$，即 $(w_+(\beta(1+\theta x))\ w_-(\beta(1+\theta x)))$，其中$\beta^3\theta^2 = 1$, $\beta > 0$（也就是 $\beta = \theta^{-\frac{2}{3}}$）。在区域 $x > 0$ 中，有

$$u(x) = Aw_+(\beta(1+\theta x)) + Bw_-(\beta(1+\theta x)).$$

本段将说明，将 (6.1) 的解分解为 w_+ 和 w_-，是研究 $+\infty$处出射解和入射解的恰当分解。事实上，我们有

[3]等于 $u_\pm$，相差一个乘法常数。

命题 6.1. 函数 w_- 属于从 $+\infty$入射的解空间，而函数 w_+ 属于到 $+\infty$出射的解空间（对于 (6.1)）。

反射系数 R 为

$$R = \frac{w'_+(\beta) + i\beta^{\frac{1}{2}} w_+(\beta)}{-w'_+(\beta) + i\beta^{\frac{1}{2}} w_+(\beta)}.$$

证明。考虑 $x \to w_\pm((1+i\sigma)^{\frac{2}{3}}\beta(1+\theta x))$。这两个函数是（2.12）的解，并且当 $\sigma \to 0_-$ 趋于 $x \to w_\pm(\beta(1+\theta x))$ 时逐点收敛。

形变 $(1+\theta x) \to (1+i\sigma)(1+\theta x)$ 将 β 变换为 $\tilde{\beta}$，使得 $\tilde{\beta}^3\theta^2 = (1+i\sigma)^2$,，即 $\tilde{\beta} = \beta(1+i\sigma)_{23}$，并且 $-\frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}-}$（它是 Ai 相位的辐角）等于 $(\tilde{\beta}(1+\theta x))^{\frac{3}{2}} = (1+i\sigma)\beta^{\frac{3}{2}}(1+\theta x)^{\frac{3}{2}}$。使用 [1] 的 10.4.59。注意到 $\beta\theta > 0$，并观察到

$$\Re(-\frac{2}{3}(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\theta^{\frac{1}{3}}(x+\theta^{-1})(1+i\sigma)^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = \pm\frac{2}{3}\sigma(\theta^{\frac{1}{3}}(x+\theta^{-1}))^{\frac{3}{2}},$$

可验证，$|Ai(e^{-i\frac{\pi}{3}}\theta^{\frac{1}{3}}(1+i\sigma)^{\frac{2}{3}}(x+\theta^{-1}))| \to +\infty$ 对于 $\sigma < 0$成立，因此对于每个 $\sigma < 0$, 当 $x \to +\infty$ 时趋于零的方程（2.12）的解族是

$$A_+ Ai(e^{i\frac{\pi}{3}}\theta^{\frac{1}{3}}(1+i\sigma)^{\frac{2}{3}}(x+\theta^{-1})).$$

这描述了在 $+\infty$处为出射解的方程（2.4）的解空间，即 $x \to w_+(\beta(1+\theta x))$生成空间 $\mathcal{U}^{>}_{+\infty}$。

由于

$$\frac{w_+(\beta(1+\theta x))}{(1+\theta x)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\theta^{-1/2}(1+\theta x)^{3/2}}} := \frac{w_+(\beta(1+\theta x))}{b(x)e^{-i\varphi(x)}}$$

当 $x \to \infty$时趋于 $\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{12}}\theta^{\frac{1}{6}}$，因此唯一的归一化出射解（在 $\mathcal{U}^{>}_{+\infty}$中）为

$$2\pi^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{12}}\theta^{-\frac{1}{6}} w_+(\beta(1+\theta x)).$$

方程（6.1）的从 $-\infty$ 出射解为 e^{-ix}，从 $-\infty$ 入射的解为 e^{ix}，因此有：

- 在 $]-\infty$中，$0[$, $u(x) = e^{-ix} + Re^{ix}$,
- 在 $]0$ 中，$+\infty[$, $u(x) = Tw_+(\beta(1+\theta x))$。解为 $C^1(\mathbb{R})$，因此

$$\begin{cases} 1 + R = Tw_+(\beta) \\ i(R-1) = \beta\theta T w'_+(\beta) \end{cases}$$

关系 $\beta\theta = \beta^{-\frac{1}{2}}$ 结束了命题 6.1 的证明。 □

利用艾里函数的估计，现在可以证明

引理 6.2。存在 θ_0 和 C，使得对于 $0 < \theta < \theta_0$

$$|R - \frac{i\theta}{8}| \le C\theta^2. \tag{6.2}$$

证明。渐近展开

$$\ln Ai(u) = \ln C - \frac{1}{4}\ln u - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \ln(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}})^{-k}), |u| > 1$$

得出

$$\frac{Ai'(u)}{Ai(u)} = -\sqrt{u} - \frac{1}{4u} + u^{\frac{1}{2}}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}kc_k(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}})^{-k-1}}{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}})^{-k}}.$$

由此表达式，对于 $|u| \ge 1$，可得不等式

$$|\frac{Ai'(u)}{Ai(u)} + \sqrt{u} + \frac{1}{4u}| \le \frac{C}{u^{\frac{5}{2}}} \tag{6.3}$$

该不等式在复区域 $|\arg(u)| < \pi$ 中同样成立。由此可得到 R 的一个估计：

$$R = \frac{\frac{w_+'(\beta)}{w_+(\beta)} + i\beta^{\frac{1}{2}}}{-\frac{w_+'(\beta)}{w_+(\beta)} + i\beta^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}\frac{w_+'(\beta)}{w_+(\beta)} + \sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}\beta}}{-e^{-i\frac{\pi}{3}}\frac{w_+'(\beta)}{w_+(\beta)} + \sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}\beta}}.$$

□

R 中得到的估计实际上是 5.1 的一个特例，而 $\alpha \to 1_+$ 时 R 的取值与直接针对 $\alpha = 1$ 得到的结果一致。对于 $1 \le \alpha < 2$，反射算子的阶为 $-\alpha$，其中 $\alpha > 1$ 是 $c_0^{-2}(x_1)$ 在 $x_1 = 0$ 处的分数阶正则性。在 $\alpha = 1$ 的情况下，它也可以通过 Jost 积分表示。

偏振波存在性的证明

偏振波的存在性（以及 $\mathcal{U}_{+\infty}^{>}$ 和 $\mathcal{U}_{+\infty}^{>}$ 的维数为 1 这一事实）依赖于下述引理 A.1。作为 $c > 0$，定义新变量 $y = \phi(x)$，使得 $y(0) = 0$ 且 $\frac{dy}{dx} = c^{-1}(x)$。方程 (2.12) 等价于 $U(y)$ 上的方程 $= c^{-\frac{1}{2}}(x(y))u(x(y))$

$$\partial_y^2 U = [(\sigma - i)^2 + \epsilon(y)]U, \tag{A.1}$$

其中 $\epsilon(y) = c(x(y))M(x(y))$。确保方程 (A.1) 的解的行为能够由无穷远处的极限系统准确预测的一个必要条件是

(H) There exists $y_0 \ge 0$ such that $\int_{y_0}^{+\infty}|\epsilon(y)|dy < +\infty$.

我们注意到，

$$\int_{y_0}^{+\infty}|\epsilon(y)|dy = \int_{y_0}^{+\infty}c(x(y))|M(x(y))|dy = \int_{x(y_0)}^{+\infty}c(x)|M(x)|c^{-1}(x)dx = \int_{x(y_0)}^{+\infty}|M(x)|dx,$$

引理 A.1. 设 $\sigma < 0$。在假设 (H) 下，该系统

$$\partial_y \begin{pmatrix} U \\ \partial_y U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\sigma - i)^2 + \epsilon(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \partial_y U \end{pmatrix}$$

满足 Coddington-Levinson 第 3 章定理 8.1 的条件，因此存在其一个解 $W_+^\sigma(y)$，使得

$$W_+^\sigma(y) e^{(i-\sigma)y} \to \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma - i \end{pmatrix}, y \to +\infty,$$

以及其一个解 $W_-^\sigma(y)$，使得

$$W_-^\sigma(y) e^{(\sigma-i)y} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma + i \end{pmatrix}, y \to +\infty.$$

该系统的解为 $AW_+^\sigma(y) + BW_-^\sigma(y)$。

因此我们可以推得

推论 A.1. 设 $\sigma < 0$。当 $+\infty$ 时趋于 0 的 (2.12) 的解空间是一维的，由 $c^{\frac{1}{2}}(x)U_+^\sigma(y(x))$ 生成，其中 U_+^σ 是 W_+^σ 的第一分量。它与在 $[x_0, +\infty[$ 上有界的 (2.12) 的解空间相同。

注意到 $\partial_y^2 U = [(\sigma - i)^2 + \epsilon(y)]U$ 等价于引理 A.1 中的方程组。由于 W_+^σ 和 W_-^σ 线性无关，该方程组的所有解都是 $W(y) = AW_+^\sigma(y) + BW_-^\sigma(y)$。因此 $u(x) = c^{\frac{1}{2}}(x)[AU_+^\sigma(y(x)) e^{(i-\sigma)\phi(x)} e^{2(\sigma-i)\phi(x)} + BU_-^\sigma(y(x))e^{(\sigma-i)\phi(x)}]e^{(i-\sigma)\phi(x)}$。所以，当 $B \neq 0$ 时，$|u(x)|$ 的极限不是有限值。因此，如果 u 具有有限极限，则 $B = 0$，从而 $u(x) = Ac^{\frac{1}{2}}(x)U_+^\sigma(y(x))$。当 x 趋于 $+\infty$ 时，该函数趋于 0。推论得证。

B 函数 M 的性质

第 3 节中沃尔泰拉级数正规收敛的一个关键引理如下

引理 B.1. 对所有 $x_0 > 0$，存在 $\theta_0(x_0)$，使得对所有 $\theta < \theta_0(x_0)$，$M_{x_0} < 2$。

这是以下结论的推论

引理 B.2. 对于所有 x_0，存在 θ_* 和 I_*，使得对于所有 $\theta < \theta_*$

$$M_{x_0} \leq \theta^{\frac{1}{\alpha}} I_*, \alpha > 1$$
$$M_{x_0} \leq \theta I_*, 0 < \alpha < 1.$$

证明 由此可得，由 (2.9) 定义的 M 等于

$$M(x) = -\frac{1}{4}\theta\alpha x_+^{\alpha-2}c^3[\alpha - 1 - \frac{5}{4}\theta\alpha c^2 x_+^{\alpha}] := -\theta x_+^{\alpha-2}T_0(\theta x_+^{\alpha})$$

其中 $T_0(X) = (\frac{\alpha(\alpha-1)}{4} - \alpha^2\frac{X}{1+X})(1+X)^{-\frac{3}{2}}$在 $\lambda(x) = x$ 的情形下成立。此表达式对于非齐次情形 (2.1) 也成立（相应地改变函数 T_0 ： 对于 $\lambda(x) = \int^x \chi(y)dy$，因此 $b(x) \equiv B_{1-\eta^2}(\theta x^{\alpha})$,

(B.1)

$$T_0(X) = \frac{1}{4}(B_{1-\eta^2}(X))^6[\alpha(\alpha-1)\chi(X(1-\eta^2))+\alpha X(1-\eta^2)[\chi'(X(1-\eta^2))-\frac{5}{4}(\chi(X(1-\eta^2)))^2(B_{1-\eta^2}(X))^4]],$$

其为紧支撑的）。

对于 $\alpha > 1$，可得

$$\int_{x_0}^{+\infty} |M(y)|dy = \theta^{\frac{1}{\alpha}}I.$$

积分 I 等于 $\int_{x_0\theta^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} z^{\alpha-2}|T_0(z^{\alpha})|dz$。由于 $\alpha > 1$，并且存在一个常数C，使得 $z^{\alpha-2}T_0(z^{\alpha}) \leq Cz^{-\frac{1}{2}\alpha-2}$ 对于 $z > 1$ 成立，因此积分 $\int_0^{+\infty} z^{\alpha-2}|T_0(z^{\alpha})|dz$ 有限，且是 I 的主控函数（在 $\lambda(x) = x$ 的情形下）。在情形 (2.1) 中， I 的一个主控函数为 $\int_0^{z_0} z^{\alpha-2}|T_0(z^{\alpha})|dz$。存在一个常数 I_*，使得

$$\int_{x_0}^{+\infty} |M(y)|dy \leq \theta^{\frac{1}{\alpha}}I_*.$$

在 $0 < \alpha < 1$ 的情况下，有 $|M(x)| \leq \theta x_+^{\alpha-2}\max|T_0|$，因此对于 $\alpha < 1$

$$\int_{x_0}^{+\infty} |M(y)|dy \leq \theta\frac{x_0^{\alpha-1}}{1-\alpha}\max|T_0|.$$

这两个不等式合在一起推出引理 B.1。

C 对序列 $s_j^>$ 的估计

回忆一下，构造了一个序列 $s_j^>$，使得

$$s_{j+1}^>(x) = \frac{1}{2i}[\int_{x_0}^{x} M(y)s_j^>(y)dy + \int_x^{+\infty} M(y)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)+2i\phi(x)}dy]$$

因此满足

$$c\frac{ds_{j+1}^>}{dx} = \int_x^{+\infty} M(y)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)+2i\phi(x)}dy.$$

回忆一下， $\mathcal{L}$ 由 (4.8) 给出。

第一个工具如下所示

引理 C.1. 假设函数 m 在 $+\infty$ 处足够规则，即对于所有 $k \geq 0$， $\mathcal{L}^k(m)$ 可积，且当 $y \to +\infty$ 时趋于 0。对于所有 k 和 j，有恒等式

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} m(y)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)}dy &= \frac{cs_j^>(x)}{2i}e^{-2i\phi(x)}[\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p(m)}{(2i)^p}] + \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}(\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p(m)}{(2i)^p})c\frac{ds_j^>}{dy}(y)e^{-2i\phi(y)}dy \\ &+\frac{1}{(2i)^{k+1}}\int_x^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(m)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)}dy.\end{aligned}$$

证明。由于 $\phi' c = 1$，可得

$$\int_x^{+\infty} m(y)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)}dy = -\frac{1}{2i}\int_x^{+\infty} cm(y)s_j^>(y)\frac{d}{dy}(e^{-2i\phi(y)})dy.$$

如果 $m$an d $\mathcal{L}(cm)$ 属于 $L^1([x_0,+\infty[)$，且当 $y \to +\infty$ 时 m 趋于 0，可得:

$$\int_x^{+\infty} m(y)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)}dy = e^{-2i\phi(x)}\frac{cm(x)s_j^>(x)}{2i} + \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}\mathcal{L}(ms_j^>)(y)e^{-2i\phi(y)}dy,$$

并利用 $\mathcal{L}(ms_j^>)(y) = \mathcal{L}(m)s_j^> + m(y)c\frac{ds_j^>}{dy}(y)$，可得关于 $k=0$ 的引理 (C.1)。利用

$$\mathcal{L}(m)(y)s_j^>e^{-2i\phi(y)}dy = -\frac{1}{2i}\mathcal{L}(m)(y)cs_j^>(y)\frac{d}{dy}(e^{-2i\phi(y)})$$

可得

$$\int_x^{+\infty}\mathcal{L}(m)(y)s_j^>e^{-2i\phi(y)}dy = \frac{1}{2i}\mathcal{L}(m)(x)cs_j^>(x)e^{-2i\phi(x)} + \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}\mathcal{L}[\mathcal{L}(m)s_j^>](y)e^{-2i\phi(y)}dy$$

并且 $\mathcal{L}[\mathcal{L}(m)s_j^>](y) = \mathcal{L}^2(m)s_j^>(y) + \mathcal{L}(m)(y)c\frac{ds_j^>}{dy}(y)$ 可得引理 (C.1) 对于 $k=1$。
依次进行即可。 □

一个简单的推论是恒等式

$$c\frac{ds_{>,1}}{dy} = \frac{c}{2i}[\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}] + \frac{1}{(2i)^{k+1}}e^{2i\phi(x)}\int_x^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(M)e^{-2i\phi(y)}dy \tag{C.1}$$

以及推广式， $j \geq 2$

$$\begin{aligned}c\frac{ds_{>,j}}{dy} &= \frac{cs_{>,j-1}}{2i}[\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}] + \frac{1}{2i}e^{2i\phi(x)}\int_x^{+\infty}(\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p})c\frac{ds_{>,j-1}}{dy}(y)e^{-2i\phi(y)}dy \\ &+\frac{1}{(2i)^{k+1}}e^{2i\phi(x)}\int_x^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(M)e^{-2i\phi(y)}s_{>,j-1}(y)dy\end{aligned} \tag{C.2}$$

引理 C.2. i) 存在函数 $T_p(X)$，对于 $X \in [0,+\infty[$，在 θ 中关于 T_p^∞ 一致有界，使得

$$\mathcal{L}^p(M)(x) = -\theta x^{\alpha-2-p}T_p(\theta x^\alpha) \tag{C.3}$$

此外， $T_{p+1}(0) = (\alpha-2-p)T_p(0)$ $T_0(0) = {}^{\alpha}$ $(\alpha-1)$ 4。
ii) 若 $\alpha-2-k<0$，则有不等式

$$|\int_x^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(M)e^{-2i\phi(y)}dy| \le \theta\frac{x^{\alpha-2-k}}{k+2-\alpha}T_{k+1}^{\infty} \tag{C.4}$$

iii) 考虑函数 $T_k^S(x,X) = \sum_{p=0}^k x^{-p}\,{}^{T_p}(X)\,(2i)^p$。有

$$\sum_{p=0}^k\frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p} = -\theta x^{\alpha-2}T_k^S(x,\theta x^{\alpha})$$

with

$$|T_k^S(x,\theta x^{\alpha})| \le \sum_{p=0}^k\frac{T_p^{\infty}}{(2x_0)^p}. \tag{C.5}$$

iv) 对于 $\alpha>2$，存在 $\theta_1(x_0)$ 和一个常数 C，使得对所有 $\theta<\theta_1(x_0)$ 和 $x\ge x_0$

$$|\sum_{p=0}^k\frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}(x)| \le C\theta^{\frac{2}{\alpha}} \tag{C.6}$$

并且存在 $x\in[x_0,+\infty)$，使得

$$|\sum_{p=0}^k\frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}(x)|\theta^{-\frac{2}{\alpha}} \ge \frac{1}{2}C.$$

对于 $1<\alpha<2$，存在 θ_2，使得对于 $\theta<\theta_2$ 以及所有 $x\ge x_0$

$$|\sum_{p=0}^k\frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}(x)| \le |\sum_{p=0}^k\frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}(x_0)| \simeq C\theta$$

注意，本引理的 iv) 项证明了 $\sum_{p=0}^k {}^{\mathcal{L}^p}(M)\ (2i)^p\ (x)$ 对于 $\alpha>2$ 的最优阶为 $\theta^{\frac{2}{\alpha}}$，而对于 $1<\alpha<2$，在 $[x_0,+\infty)$ 上的最优阶为 θ。

引理 C.2 的证明 项 i) 是由归纳关系 $T_{p+1}(X) = (\alpha-2-p)T_p(X) + \alpha XT_p'(X)$ 和 $T_0(X) = (\frac{\alpha(\alpha-1)}{4} - \frac{5}{4}\alpha^2\frac{X}{1+X})(1+X)^{-\frac{3}{2}}$ 得出的。于是可得

$$\mathcal{L}^{p+1}(M) = -\theta x^{\alpha-2-p}T_{p+1}(\theta x^{\alpha})$$

其中 $T_{p+1}(0) = (\alpha-2-p)T_p(0)$。此外，利用 $T_p(X) = (1+X)^{-p-\frac{5}{2}}Q_p(X)$，其中 Q_p是次数为 $p+1$ 的多项式（这也可由归纳关系证明）

第二项和第三项的证明来自 $|T_p(X)| \leq C_p(1+X)^{-\frac{3}{2}}$，它在 $+\infty$ 处递减，其所有导数也递减；在 $\lambda(x) = x$的情况下，对 $X \in [0, +\infty[$ 光滑；并且当 $\lambda(x) = \int_0^x \chi(y)dy$时，它及其所有导数均一致有界。

第 iv) 项的证明来自，对于 $\alpha > 2$,

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}(x) = \theta^{\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=0}^{p} \theta^{\frac{p}{\alpha}} z^{\alpha-2-p} T_p(z^\alpha), \theta x^\alpha = z^\alpha.$$

可以观察到，当 $(\alpha-2)T_0(z^\alpha) + \alpha z^\alpha T_0'(z^\alpha) = 0$ 时，$|z^{\alpha-2}T_0(z^\alpha)|$ 取得最大值。该方程有若干根，其中使 $|z^{\alpha-2}T_0(z^\alpha)|$ 取得最大值的点所对应的根记为 z_*。这个最大值为 $C_* = |z_*^{\alpha-2}T_0(z_*^\alpha)| > 0$。当 $\theta \to 0$ 时，利用隐函数定理，可知存在一个靠近 z_* 的点，使得 $\sum_{k=0}^{p} \theta^{\frac{p}{\alpha}} z^{\alpha-2-p} T_p(z^\alpha)$ 在该点取得最大值，且该最大值接近于 $|z_*^{\alpha-2}T_0(z_*^\alpha)|$。因此，由于当 $z \to +\infty$ 时，$|z^{\alpha-2}T_0(z^\alpha)|$ 的极限为零，故存在 $Z_1 > z_*$，使得 $|Z_1^{\alpha-2}T_0(Z_1^\alpha)| = \frac{C_*}{2}$。

对于 $1 < \alpha < 2$，当 $z \to 0$ 为 $+\infty$时，$z^{\alpha-2}T_0(z^\alpha)$ 的极限为最大值，而当$z \to +\infty$时，其极限为 0。同样，$z^{\alpha-2}T_0(z^\alpha)$ 存在唯一的最小值点，该点也是 $|z^{\alpha-2}T_0(z^\alpha)|$ 的最大值点。对于足够小的 θ，$|\sum_{p=0}^{k} \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}(x)|$ 的最大值在 $x = x_0$ 处取得。此外，由于 $\alpha = 2$，$T_0(1) = 0$，且 T_0 在 $+\infty$ 处的极限为零，因此在 $[1, +\infty[$ 中存在 $|T_0(z^2)|$ 的最大值点。

我们可以利用引理 C.1 和 C.2 证明，$s_{>,\,1}$ 并不比 $\theta^{\frac{1}{\alpha}}$ 对 $\alpha > 1$更好。

引理 C.3。存在一个常数 C_1，使得对于 $\alpha > 2$

$$|2is_{>,1}(x) - \int_{x_0}^{x} M(y)dy| \leq C_1\theta^{\frac{2}{\alpha}}, x \geq x_0$$

且对于 $1 < \alpha \leq 2$

$$|2is_{>,1}(x) - \int_{x_0}^{x} M(y)dy| \leq C_1\theta, x \geq x_0$$

注意 t hat 引理 C.3 还证明了估计 $||s_{>,1}||_\infty = O(\theta^{\frac{1}{\alpha}}$ 是最优的。

引理 C.3 的证明 设 $k = [\alpha - 1]$。考虑引理 C.1 中的恒等式中的 $j = 0$，以及$m(y) = M(y)$。我们验证：

$$-\big[2is_{>,1}(x) - \int_{x_0}^{x} M(y)dy + \frac{c}{2i}[\sum_{p=0}^{k} \theta x^{\alpha-2-p} T_p(\theta x^\alpha)]\big] = \int_x^{+\infty} \theta y^{\alpha-3-k} T_{k+1}(y) e^{2i(\phi(x)-\phi(y)} dy.$$

作为 $\alpha - 3 - [\alpha - 1] < -1$，对于 $x \geq x_0$，有，

$$|\int_x^{+\infty} \theta y^{\alpha-3-k} T_{k+1}(y) e^{2i(\phi(x)-\phi(y)} dy| \leq \theta T_{[\alpha]}^{\infty} \frac{x^{\alpha-[\alpha]-1}}{[\alpha]+1-\alpha} \leq \theta T_{[\alpha]}^{\infty} \frac{x_0^{\alpha-[\alpha]-1}}{[\alpha]+1-\alpha}.$$

因此存在 $C_0 > 0$ 使得

$$|2is_{>,1}(x) - \int_{x_0}^{x} M(y)dy + \frac{c}{2i}[\sum_{p=0}^{k} \theta x^{\alpha-2-p} T_p(\theta x^\alpha)]| \le C_0\theta.$$

对于 $\alpha > 2$，由 $\frac{2}{\alpha} < 1$ 可得，存在 θ_2，使得对于 $\theta \le \theta_2$，利用估计 (C.6)

$$|2is_{>,1}(x) - \int_{x_0}^{x} M(y)dy| \le C_2\theta^{\frac{2}{\alpha}}.$$

对于 $1 < \alpha \le 2$，可得，对于 $\theta \le \theta_2$

$$|2is_{>,1}(x) - \int_{x_0}^{x} M(y)dy| \le C_2\theta.$$

最后请注意，$\int_{x_0}^{x} M(y)dy = \theta^{\frac{1}{\alpha}} \int_{x_0\theta^{\frac{1}{\alpha}}}^{x\theta^{\frac{1}{\alpha}}} z^{\alpha-2} T_0(z^\alpha)dz$，因此 $\int_{x_0}^{x} M(y)dy$ 的阶为 $\theta^{\frac{1}{\alpha}}$。

引理 C.4. 对于每个给定的 m_0，对于所有 j，存在 j 函数 A_j^l（取决于 m_0）和 B_j^l，使得 $A_j^l(x,\theta) = (\theta x^{\alpha-2})^{j-l} B_j^l(x^{-1}, \theta x^\alpha)$，使得函数 r_j 由以下给出

$$r_j(x) = c\frac{ds_{>,j}}{dx} - \sum_{l=0}^{j-1} A_j^l(x,\theta) s_{>,l}(x) \tag{C.7}$$

对于所有 $x \ge x_0$，均满足，

$$|r_j(x)| \le \theta C_{m_0}^j j x^{\alpha-m_0}.$$

对于一个常数 $C_{m_0}^j$

证明通过归纳法完成，我们先明确写出前两步，以展示如何得到 A_j^l 和 r_j。

我们首先注意到 $c\frac{ds_{>}}{dy}^1 = \theta A_1^0(x) + r_1(x)$，其中 $A_1^0(x) = \frac{1}{2i} x^{\alpha-2} T_k^S(x, \theta x^\alpha) c(\theta x^\alpha)$，并且

$$r_1(x) = \frac{1}{(2i)^{k+1}} e^{2i\phi(x)} \int_x^{+\infty} \mathcal{L}^{k+1}(M) e^{-2i\phi(y)} dy.$$

由引理 C.1 对 $k = k_2$ 写出的恒等式，以及对$k = k_1$ 写出的等式 (C.1)，可得

$$\begin{aligned} c\frac{ds_{>,2}}{dy} = & \frac{cs_{>,1}}{2i}[\sum_{p=0}^{k_2} \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}] + \frac{1}{2i} e^{2i\phi(x)} \int_x^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_2} \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}) \frac{c}{2i} [\sum_{p=0}^{k_1} \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}] e^{-2i\phi(y)} dy \\ & + \frac{1}{(2i)^{k_1+k_2+2}} e^{2i\phi(x)} \int_x^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_2} \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}) \int_y^{+\infty} \mathcal{L}^{k_1+1}(M)(z) e^{-2i\phi(z)} dz dy \\ & + \frac{1}{(2i)^{k_2+1}} e^{2i\phi(x)} \int_x^{+\infty} \mathcal{L}^{k_2+1}(M) e^{-2i\phi(y)} s_{>,1}(y) dy \end{aligned} \tag{C.8}$$

这改写为

$$c\frac{ds_{>,2}}{dy} = \theta A_2^1(y) s_{>,1}(y) + \theta^2 A_2^0(y) + r_2(y)$$

其中 $A_2^1 = A_1^0$ （ k取相同值时，展开式的项数）以及 A_2^0（y） $=c$（θy^α） $\sum_{l=0}^{k}{}^{\mathcal{L}^l}{}_{(m)}$ ${}_{(2i)^{\,l}}$， m（~~y~~） $= \frac{c}{2i} y^{2\alpha-4} T_{k_1}^S$（$x$， θx^α）$T_{k_2}^S$（x^{-1}， θx^α）。于是得到

$$A_2^0(y) = (\theta y^{\alpha-2})^2 B_{2,0}(y^{-1}, \theta y^\alpha)$$

将 (C.2) 用于 $i = 3$，可得

$$\begin{aligned} c\tfrac{ds_{>,3}}{dy} &= \tfrac{cs_{>,2}}{2i}[\textstyle\sum_{p=0}^{k_3} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}] + \tfrac{1}{2i} e^{2i\phi(x)} \textstyle\int_x^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_3} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}) c\tfrac{ds_{>,2}}{dy}(y) e^{-2i\phi(y)} dy \\ &+ \tfrac{1}{(2i)^{k_3+1}} e^{2i\phi(x)} \textstyle\int_x^{+\infty} \mathcal{L}^{k_3+1}(M) e^{-2i\phi(y)} s_{>,2}(y) dy \end{aligned}$$

在此等式中使用 (C.8)，可得

$$\begin{aligned} c\tfrac{ds_{>,3}}{dy} &= \tfrac{cs_{>,2}}{2i}[\textstyle\sum_{p=0}^{k_3} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}] + \tfrac{1}{2i} e^{2i\phi(x)} \textstyle\int_x^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_3} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p})[\sum_{p=0}^{k_2} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}](y) \tfrac{cs_{>,1}}{2i} e^{-2i\phi(y)} dy \\ &+ \tfrac{1}{(2i)^2} e^{2i\phi(x)} \textstyle\int_x^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_3} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}) \int_y^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_2} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}) \tfrac{c}{2i} [\sum_{p=0}^{k_1} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}] e^{-2i\phi(z)} dz dy \\ &+ \tfrac{1}{(2i)^{k_2+2}} e^{2i\phi(x)} (\textstyle\sum_{p=0}^{k_3} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}) \int_y^{+\infty} \int_x^{+\infty} \mathcal{L}^{k_2+1}(M) e^{-2i\phi(z)} s_{>,1}(z) dz dy \\ &+ \tfrac{1}{(2i)^{k_1+k_2+4}} e^{2i\phi(x)} \textstyle\int_x^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_3} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}) \int_y^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_2} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p})(y) \int_z^{+\infty} \mathcal{L}^{k_1+1}(M)(t) e^{-2i\phi(t)} dt dz dy \\ &+ \tfrac{1}{(2i)^{k_3+1}} e^{2i\phi(x)} \textstyle\int_x^{+\infty} \mathcal{L}^{k_3+1}(M) e^{-2i\phi(y)} s_{>,2}(y) dy \end{aligned}$$

我们需要分析此等式的所有项。根据引理 C.2 所阐明的 $\mathcal{L}$ 的正则化效应，只要 k_1、k_3 足够大，最后三项便一致有界。举例来说，我们来看这一项

$$\frac{1}{(2i)^{k_1+k_2+4}} e^{2i\phi(x)} \int_x^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_3} \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p}) \int_y^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_2} \frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p})(y) \int_z^{+\infty} \mathcal{L}^{k_1+1}(M)(t) e^{-2i\phi(t)} dt dz dy$$

这一项的估计如下使用 (C.5)：

$$|\int_z^{+\infty} \mathcal{L}^{k_1+1}(M)(t) e^{-2i\phi(t)} dt| \le \theta T_{k_1+1}^\infty \frac{z^{\alpha-2-k_1}}{2+k_1-\alpha}, k_1 > \alpha - 2$$

由此可推出

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_y^{+\infty} (\sum_{p=0}^{k_2} \tfrac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p})(y) \int_z^{+\infty} \mathcal{L}^{k_1+1}(M)(t) e^{-2i\phi(t)} dt dz| &\le \theta T_{k_2+1}^\infty \theta T_{k_1+1}^\infty \tfrac{z^{2\alpha-4-k_1-1}}{3+k_1-\alpha} dz \\ &= \theta^2 T_{k_2+1}^\infty T_{k_1+1}^\infty \tfrac{y^{2\alpha-3-k_1}}{(3+k_1-2\alpha)(2+k_1-\alpha)}, k_1 > 2\alpha - 3 \end{aligned}$$

因此，该余项的最终估计为 $C\theta^2 x^{3\alpha-4-k_1}$，适用于 $k_1 > 3\alpha - 4$。当 $\alpha > 1$ 时，包含所有条件的是 $k_1 > 3\alpha - 4$。

第三项是一个不包含任何 $s_j^>$ 形式项的积分，因此可以通过分部积分轻松处理，并得到一个如下形式的项

$$(\theta y^\alpha)^3 B_{3,0}(y^{-1}, \theta y^\alpha).$$

第一项是有限和 $A_2^1(y)$。唯一剩下需要考虑的是第二项，对此我们使用引理 C.1。该积分中 $s_{>,1}$ 的系数形式为 $(\theta y^{\alpha-2})^2 B_{2,0}(y^{-1},\theta y^\alpha)$，因此 $\sum_p \frac{\mathcal{L}^p}{2i}()^p$ 的作用会返回一个类似的项，写作

$$(\theta y^{\alpha-2})^2 B_{3,2}(y^{-1},\theta y^\alpha).$$

这使我们能够写出存在三个函数 A_3^2、A_3^1 和 A_3^0，以及一个余项 r，使得

$$c\frac{ds_{>,3}}{dy} = A_3^2(x)s_{>,2}(x) + A_3^1(x)s_{>,1}(x) + A_3^0(x) + r_3(x)$$

其中 $|r_3(x)| \le C_M^3 \theta x^{\alpha-M}$，其中 M 足够大。
对于一般的归纳证明，假设引理对所有 $j' \le j$ 均成立。使用引理 C.1 可得到

$$\begin{aligned} c\tfrac{ds_{j+1}^>}{dy} &= \tfrac{cs_j^>}{2i}[\textstyle\sum_0^k \frac{(\mathcal{L})^p(M)}{(2i)^p}] + \frac{1}{2i}e^{2i\phi(x)}\int_x^{+\infty}(\sum_0^k \tfrac{(\mathcal{L})^p(M)}{(2i)^p})c\tfrac{ds_j^>}{dy}e^{-2i\phi(y)}dy \\ &+\tfrac{1}{(2i)^{k+1}}\int_x^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(M)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)}dy. \end{aligned}$$

将归纳假设代入等式，得到

$$\begin{aligned} c\tfrac{ds_{j+1}^>}{dy} &= \tfrac{cs_j^>}{2i}[\textstyle\sum_0^k \frac{(\mathcal{L})^p(M)}{(2i)^p}] + \frac{1}{2i}e^{2i\phi(x)}\int_x^{+\infty}(\sum_0^k \tfrac{(\mathcal{L})^p(M)}{(2i)^p})[\sum_{l=0}^{j-1} A_j^l(y)s_{>,l}(y)]e^{-2i\phi(y)}dy \\ &+\tfrac{1}{2i}e^{2i\phi(x)}\int_x^{+\infty}(\textstyle\sum_0^k \frac{(\mathcal{L})^p(M)}{(2i)^p})r_j(y)e^{-2i\phi(y)}dy + \frac{1}{(2i)^{k+1}}\int_x^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(M)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)}dy. \end{aligned}$$

因此，$s_j^>$ 的系数仅来自第一项，且等于 $\frac{c}{2i}\sum_0^k (\mathcal{L})^p(M)(2i)^p$。我们将其记为

$$A_{j+1}^j = \frac{1}{2i}x^{\alpha-2}c(\theta x^\alpha)M_k^S(x,\theta x^\alpha)$$

引理 C.1 的恒等式给出，采用记号 $m_j^l(x) = (\sum_0^k \frac{\mathcal{L}^p}{(2i)^p})A_j^l(x)$ 和 $l \le j-1$

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} m_j^l(y)s_{>,l}(y)e^{-2i\phi(y)}dy &= \tfrac{cs_{>,l}(x)}{2i}e^{-2i\phi(x)}[\textstyle\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p(m_j^l)}{(2i)^p}] + \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}(\sum_{p=0}^k \tfrac{\mathcal{L}^p(m_j^l)}{(2i)^p})c\tfrac{ds_{>,l}}{dy}(y)e^{-2i\phi(y)}dy \\ &+\tfrac{1}{(2i)^{k+1}}\int_x^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(m_j^l)s_j^>(y)e^{-2i\phi(y)}dy. \end{aligned}$$

对于上述等式中包含 $c\frac{ds_{>,l}}{dy}$ 的所有项，我们使用归纳假设。因此，我们只需计算 $l \ge 1$

$$\frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}(\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p(m_j^l)}{(2i)^p})c\frac{ds_{>,l}}{dy}(y)e^{-2i\phi(y)}dy = \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}(\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p(m_j^l)}{(2i)^p})[r_l(y)+\sum_{l'\le l-1} A_l^{l'}(y)s_{>,l'}(y)]e^{-2i\phi(y)}dy.$$

对于每个单独的项 $\frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}(\sum_{p=0}^k \frac{\mathcal{L}^p}{(2i)^p}(m_j^l))A_l^{l'}(y)s_{>,l'}(y)e^{-2i\phi(y)}dy$，使用引理 C.1 将此和的求值化简为对 $c\frac{ds_{>,l'}}{dy}$（当 $l' \ge 1$ 时的求值，因为

$l'=0$ 时，此项等于 0。根据恒等式 (C.2)，此求值只涉及形如 $A_{l''}^{l'}s_{>,\ l''}$ 且满足 $l''\leq l'-1\leq l-2\leq j-3$ 的项。对于这些项中的每一项，都使用引理 C.1。由于指标 j、l、l'、l'' 构成严格递减的整数序列，因此只需进行有限迭代过程。根据引理 C.1 在特殊情形 $j=0$ 下的应用，所涉及的所有项都是函数，因为 $s_{>,\ 0}=1$。

这些连续等式中的余项要么是以下形式的项

$$\int_x^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(m_l^{l'})(y)s_j^>e^{-2i\phi(y)}dy$$

or

$$\int_x^{+\infty}r_l(y)m(y)e^{-2i\phi(y)}dy.$$

利用引理 C.2，我们得到以下各项的显式表达式

$$\mathcal{L}^p(M),\sum_{p=0}^k\frac{\mathcal{L}^p(M)}{(2i)^p},\sum_{p=0}^k\frac{\mathcal{L}^p(m_j^l)}{(2i)^p},$$

所有这些项分别写作

$$-\theta x^{\alpha-2-p}T_p(\theta x^\alpha),-\theta x^{\alpha-2}T_k^S(\theta x^\alpha),-\theta x^{\beta-2}T_{j,l,k}(\theta,\theta x^\alpha)$$

其中 β 取决于 α 和 j、l、k，而 T_k^S、$T_{j,\ l,\ k}$ 的表达式较为复杂，无须给出。由这些显式表达式，我们可以得到 $\mathcal{L}^{k+1}(m_l^{l'})$ 的类似表达式，其因子为 $\theta x^{\alpha-2-k-1}$。利用关于 $\mathcal{L}$ 的显式分部积分以及 T_p、T_k^S、$T_{j,\ l,\ k}$ 的界，可以推导出余项的类似关系。

由此得到关于 $c^{\frac{ds_{>,\ j+1}}{dy}}$ 的关系，从而完成引理 C.4 的证明。这个证明还（困难地）推出了

$$A_j^l(x)=(\theta x^{\alpha-2})^{j-l}B_{j,l}(x^{-1},\theta x^\alpha).$$

连同 $|s_j^>(x)|\leq C_j\theta^{\frac{j}{\alpha}}$ 对于 $x\in[x_0,+\infty[$，这有助于计算 $c\frac{ds_j^>}{dx}$ 展开式中的所有项。

特别需要注意的是，对于固定的 $x\in[x_0,+\infty[$ 和 $x_0>0$，在给定 $\theta<\theta_0(x_0)$ 的情况下，所有项 $B_{j,l}(x^{-1},\theta x^\alpha)$ 都是一致有界的。
这个估计至关重要，它使我们能够对 $\alpha-2-p<-1$ 使用控制收敛定理，如下所示。

$$\lim_{\theta\to0_+}\int_{x_0}^{+\infty}x^{\alpha-2-p}M_p(\theta x^\alpha)e^{-2i\phi(x)}dx=\int_{x_0}^{+\infty}x^{\alpha-2-p}M_p(0)e^{-2ix}dx.$$

通过对足够大的 $x=x_0$、k，使用引理 C.1 的恒等式来处理项 $\int_{x_0}^{+\infty}\mathcal{L}^{k+1}(m)e^{-2i\phi(y)}dy$，即可确保条件 $\alpha-2-p<-1\ \ j=0$。例如，最终可得

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0_+}\int_{x_0}^{+\infty}\theta^{-1}M(y)e^{-2i\phi(y)}dy=\ &\tfrac{1}{2i}[\textstyle\sum_{p=0}^k\frac{1}{(2i)^p}\frac{d^p}{dy^p}(-\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}y^{\alpha-2})(x_0)]\\&+\tfrac{1}{(2i)^{k+1}}\textstyle\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d^{k+1}}{dy^{k+1}}(-\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}y^{\alpha-2})e^{-2iy}dy.\end{aligned}$$

由此可得

命题 C.5. 对所有足够大的 k，存在一个函数 r_j^k，使得

$$\int_{x_0}^{+\infty} \theta^{-1} M(y) s_j^>(y) e^{-2i\phi(y)} dy = \frac{c s_j^>}{2i} x_0^{\alpha-2} T_k^S(x_0^{-1}, \theta x_0^\alpha) + \theta^{\frac{j}{\alpha}} r_j^k(x_0;\theta) + O(\theta).$$

因此，当 k 足够大时可得

$$\int_{x_0}^{+\infty} \theta^{-1} M(y) e^{-2i\phi(y)} (\sum_{j=0}^{n_0} s_j^>)(y) dy = \frac{1}{2i} x_0^{\alpha-2} T_k^S(x_0^{-1}, \theta x_0^\alpha) + r_{n_0,k}(x_0, 0) + O(\theta^{\frac{1}{\alpha}}).$$

使用引理 C.1。于是，该命题的证明归结为证明

$$\frac{1}{2i} \int_{x_0}^{+\infty} \theta y^{\alpha-2} M_k^S(y^{-1}, \theta y^\alpha) c \frac{d s_j^>}{dy} e^{-2i\phi(y)} dy = O(\theta),$$

即 $\frac{1}{2i}\int_{x_0}^{+\infty} y^{\alpha-2} M_k^S(y^{-1},\theta y^\alpha) c\frac{ds_j^>}{dy} e^{-2i\phi(y)} dy$ 一致有界。使用引理 C.4，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{+\infty} y^{\alpha-2} M_k^S(y^{-1}, \theta y^\alpha) c \frac{d s_j^>}{dy} e^{-2i\phi(y)} dy \\
&= \int_{x_0}^{+\infty} y^{\alpha-2} M_k^S(y^{-1}, \theta y^\alpha) [\sum_{l=0}^{j-1} (\theta y^\alpha)^{j-l} B_{j,l}(y^{-1}, \theta y^\alpha) s_{>,l}(y)] e^{-2i\phi(y)} dy + r \\
&= \sum_{l'=1}^{j} \theta^{l'} \int_{x_0}^{+\infty} y^{(\alpha-2)(1+l')} M_k^S(y^{-1}, \theta y^\alpha) B_{j,j-l'}(y^{-1}, \theta y^\alpha) s_{>,l}(y) e^{-2i\phi(y)} dy + r
\end{aligned}$$

由于每一项 $\int_{x_0}^{+\infty} y^{(\alpha-2)(1+l')} M_k^S(y^{-1},\theta y^\alpha) B_{j,j-l'}(y^{-1},\theta y^\alpha) s_{>,l}(y) e^{-2i\phi(y)} dy$ 都是有界的（对 $s_{>,l'}$ 使用分部积分及其性质，对所有 l' 均成立），这就完成了命题 C 第一个等式的证明。第二个等式是由对所有 j 均成立的 $|s_j^>(x)| \le C_j \theta^{\frac{j}{\alpha}}$ 推出的。命题 C 得证。

D 伽马函数的性质

我们回顾一下伽马函数通过半收敛积分表示的形式，适用于 $0 < \delta < 1$:

$$\int_0^{+\infty} t^{\delta-1} e^{-it} dt = i^{-\delta} \Gamma(\delta). \tag{D.1}$$

等式 (D.1) 是以下结果的推论

$$\Gamma(\delta) = k^\delta \int_0^{+\infty} t^{\delta-1} e^{-kt} dt, \Re k > 0$$

推广到 $\alpha > 0$ 任意情形是直接的，这得益于（α 不是整数）

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-[\alpha]+1)\Gamma(\alpha-[\alpha]), \tag{D.2}$$

这确保了

$$\Gamma(\alpha+1)=k^{\alpha+1}\int_0^{+\infty}t^{\alpha}e^{-kt}dt,\Re k>0$$

由此可以推得

$$\text{(D.3)}\quad \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2i)^{\alpha+1}}=\int_0^{x_0}y^{\alpha}e^{-2iy}dy+(2i)^{-n}\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d^n}{dy^n}(y^{\alpha})e^{-2iy}dy+e^{-2ix_0}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\frac{d^p}{dy^p}(y^{\alpha})}{(2i)^{p+1}}(x_0).$$

这一等式是.....的结果

$$\Gamma(\delta)=(2i)^{\delta}\int_0^{x_0}t^{\delta-1}e^{-2it}dt+(2i)^{\delta-1}[x_0^{\delta-1}e^{-2ix_0}+\int_{x_0}^{+\infty}(\delta-1)t^{\delta-2}e^{-2it}dt]$$

通过选择 $k=\epsilon+2i,\ \epsilon>0$ 并注意到

$$\Gamma(\delta)=(\epsilon+2i)^{\delta}\int_0^{x_0}t^{\delta-1}x_0^{\delta-1}e^{-(\epsilon+2i)t}dt+(\epsilon+2i)^{\delta-1}[e^{-(2i+\epsilon)x_0}+\int_{x_0}^{+\infty}(\delta-1)t^{\delta-2}e^{-(\epsilon+2i)t}dt]$$

然后使用 $\epsilon\to 0_+$ 和控制收敛定理
选择 $\delta=\alpha-[\alpha]\in$ (0, 1)。根据 (D.2)，可得

$$\Gamma(\alpha+1)=(2i)^{\delta}\int_0^{x_0}\alpha.(\alpha-1)....\delta t^{\delta-1}e^{-2it}dt+(2i)^{\delta-1}[\alpha.(\alpha-1)....\delta x_0^{\delta-1}e^{-2ix_0}+\int_{x_0}^{+\infty}\alpha.(\alpha-1)....\delta(\delta-1)t^{\delta-2}e^{-2it}dt],$$

即改写为

$$\Gamma(\alpha+1)=(2i)^{\delta}\int_0^{x_0}\frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}}(t^{\alpha})e^{-2it}dt+(2i)^{\delta-1}[\alpha.(\alpha-1)....\delta x_0^{\delta-1}e^{-2ix_0}+\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}}(t^{\alpha})e^{-2it}dt],$$

对第一项反复使用分部积分可得到等式（D.3） .

参考文献

[1] M.A. Abramovitz，I.A. Stegun：《数学函数手册》，第10次印刷版，1972年（美国国家标准局）[2] Y. Bernab ϒ. Bernabé，F. J. Herrmann：《上地幔相变处的地震奇异性：一种位点渗流模型》，《国际地球物理学杂志》159(3):949-960（2004年）[3] L. M. Brekhovskikh，O.A. Godin：《分层介质声学 I》，Springer 波动现象丛书，Springer，1998年。[4] L. Demanet，O. Lafitte：《分数反射体的反射系数》，载于《衍射日 2014 摘要集》，俄罗斯圣彼得堡斯捷克洛夫数学研究所。[5] L. Demanet，O. Lafitte：《波在分数反射体上的反射》，载于《Waves 2015 会议论文集》，德国卡尔斯鲁厄。

[6] G. Folland, 《偏微分方程导论》, 普林斯顿大学出版社, 1995年[7] P. Gannot、J. Wunsch: 《共正规势导致的衍射俘获的无共振区域》: arXiv:1809.03012[8] F. J. Herrmann《通过单尺度分析进行奇异性表征: 在地震成像中的应用》Appl. Comput. Harmon. Anal. 11:64-88（2001年）[9] F. J. Herrmann《分数样条匹配追踪: 用于地震地层学的定量工具》SEG摘要, 2001年SEG年会, 圣安东尼奥。[10] F. J. Herrmann《多分数样条: 在地震成像中的应用》SPIE小波X论文集, 圣迭戈, 2003年[11] M. V. de Hoop, 《Bremmer耦合级数的推广》J. Math. Phys., 37, 3246-3282（1996年）。[12] W. V. Ignatowski《电磁波在导线上的反射》Annalen der Physik 323 (13)（1905年）.. [13] R. Jost《S矩阵特征值的伪零点》Helvetica Physica Acta 20（1947年）[14] R. Jost 和 A. Pais《粒子被静态势散射》Physical Review 82 (6), 1951年[15] A. G. Sveshnikov《辐射原理》《苏联科学院通报》, 73 (5), 1950年, [16] O. Vallee 和 M. Soarez《艾里函数及其在物理学中的应用》, 世界科学出版社, 2004年。[17] K. Wapenaar《自相似界面的地震反射与透射系数》Geophys. J. Int. 135:585-594（1998年）[18] K. Wapenaar《自相似界面的振幅随角度变化的行为》Geo- phys. 64:1928-1938（1999年）[19] K. Wapenaar《通量与场归一化分解波场的互易定理与表示定理》Adv. Math. Physics 1-15（2020年）