arXiv:2305.04074v1 [math.AG] 6 May 2023

非正曲率 klt 对的 Miyaoka–Yau 不等式中的等号与一致化

BENOÎT CLAUDON、Patrick Graf 和 Henri Guenancia

谨以此文纪念 *Jean-Pierre Demailly*

摘要。设 (X,Δ) 为一个紧致 Kähler klt 对，其中 $K_X+\Delta$ 是丰沛的或数值平凡的，且 Δ 具有标准系数。我们证明，若 (X,Δ) 满足轨形 Miyaoka–Yau 不等式中的等号，则其轨形万有覆盖要么是单位球（丰沛情形），要么是仿射空间（数值平凡情形）。

目录

1. 引言 1 2. 轨形概述 4 3. klt 对的轨形陈类 12 4. 典范模型的一致化 17 5. 球商的刻画 22 6. 极小模型的一致化 22 7. 环面商的刻画 24 参考文献 29

1. 引言

设 X 是一个 n 维紧Kähler流形，并假设以下条件之一成立： r

(I) K_X 丰沛（因此 X 是射影的），或

(II) K_X 数值平凡（等价地，$\mathrm{c}_1(X)=0$ 属于 $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$）。

由于 Kähler–爱因斯坦度量的存在 ω_{KE} 于 X（由 Aubin 证明[Aub78] 和 Yau [Yau78]），的陈类满足 *Miyaoka–Yau* 不等式

$$\big(2(n+1)\,\mathrm{c}_2(X)-n\,\mathrm{c}_1^2(X)\big)\cdot\alpha^{n-2}\geq 0. \tag{MY}$$

在(I)的情形下，我们令 $\alpha=[K_X]$；而在(II)的情形下，α 可以是任意 Kähler 类。~此外，在取等号的情形下，万有覆盖 $\pi\colon X\to X$（双全纯同构于）

(I) n 维单位球 $\mathbb{B}^n=\big\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n \;\big|\; |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\big\}$，(II) n 维仿射空间 $\mathbb{C}^n$。

日期：2023年5月6日。2010 数学学科分类号。32J27, 14J60。关键词与短语。Miyaoka–Yau 不等式、轨形一致化、klt 对。

我们可以将上述结论重新表述为：

(I) $X = \mathbb{B}^n/\Gamma$ 与 $\Gamma \subset \mathrm{PU}(1,n) = \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$，(II) $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ 与 $\Gamma \subset \mathbb{C}^n \rtimes \mathrm{U}(n) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n, \pi^*\omega_{\mathrm{KE}})$，

~其中在这两种情形下，Γ 在 X 上的作用都是无不动点的。

研究由余紧格取商得到的一般情形似乎是很自然的~ ~$\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X)$（带有 $X = \mathbb{B}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$，分别赋予伯格曼度量或平坦度量），当然假设该作用是适当不连续的。相应的商空间随后自然地带有一种轨形结构，该结构可由一个 $\mathbb{Q}$-除子及标准系数编码（见下文的 设定 1.1 ）。总而言之，在处理这些商空间时，自然应考虑对 (X, Δ)。

在 klt 奇点的框架下，人们已研究过在情形 (而非对）中将空间一致化的问题：(I) 和(II)。以下列举几篇相关论文：[GKP16，LT18，GKPT19，GKPT20，GK20，CGG22]。本文源于尝试理解具有余维一轨形结构的一般情形。

遗憾的是，本节导论无法始终沿着情形 (I) 与(II)之间的相似之处展开，因为困难（即在奇异情形下处理不等式 (MY)时遇到的困难）性质并不相同。以下两个事实说明了这一点：

- 在情形(I)中，代数簇 X 必为射影的，但轨形结构的余维一部分无法轻易消除。因此，证明中必须使用轨形技术。

- 在情形(II)中，我们还需要考虑（非代数的）紧 Kähler 空间，但可以通过循环覆盖消除轨形结构的余维一部分（见命题 2.5）。因此，在论证的大部分过程中，我们可以假设 $\Delta = 0$。

由于这种对称性的破缺，我们按照典范丛的符号来分别讨论。

典范极化情形。 我们回顾一下由第三作者与 B. Taji 共同证明的(MY) 不等式的奇异版本 [GT22]。讨论情形 (I)时，我们采用以下设定：

设定 1.1。 设 (X, Δ) 是一个 n 维 klt 对，其中 X 是一个射影代数簇，且 Δ 具有标准系数，即 $\Delta = \sum_{i\in I}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\Delta_i$，其中 $m_i \geq 2$ 为整数，且这些 Δ_i 不可约且两两不同。

定理 1.2 ($\subset$ [GT22，定理 B])。 设 (X, Δ) 如设定 *1.1* 中所述，并假设 $K_X + \Delta$ 大且 *nef*。另假设 Δ_i 的每个不可约分支 Δ都是 $\mathbb{Q}$-*Cartier*。则有如下不等式：

$$\left(2(n+1)\,\tilde{c}_2(X,\Delta) - n\,\tilde{c}_1^2(X,\Delta)\right)\cdot[K_X+\Delta]^{n-2} \geq 0. \tag{1.2}$$

这里，~$c_2(X,\Delta)$ 和 ~$c_1^2(X,\Delta)$ 表示对(X,Δ)的相应轨形陈类，定义见例如[GT22，记号 3。7]。□

注：在上述定理中，关于 Δ_i 为 $\mathbb{Q}$-Cartier 的假设并非必要；证明这一点是本文的（次要）贡献之一，参见 定理 6.1。

乍看之下，这似乎只是一个无关紧要的技术问题，但在下文从 $\mathbb{Q}$-Cartier 假设中推导出推论 1.4时，消除该假设将至关重要。关于 定理 A，参见注 6.3。

与光滑情形一样，对满足(1.2)中等号条件的这些对进行几何刻画颇有意义。在 $\Delta = 0$的情形下， [GKPT19定理 12] 和[GKPT20定理 15]已给出这样的刻画：当且仅当存在一个有限的准 étale 伽罗瓦覆盖 $Y \to X$ ，使得 Y 的万有覆盖是单位球。关于一般情形的一个猜想见 [GKPT19第 10 节2]。我们的第一个主要结果证实了这一猜想。

定理 *A*（典范模型的均匀化）。设 (X, Δ) 如设定 *1.1* 中所述。假设 $K_X + \Delta$ 是丰沛的，且 *(1.2)* 中等号成立。那么，(X, Δ) 的轨形万有覆盖 $\pi\colon X_\Delta \to X$ 是单位球（参见定义 *2.17*）。更准确地说，$\widetilde{\ } \quad \widetilde{\ }(X_\Delta, \Delta) \cong (\mathbb{B}^n, \emptyset)$。

事实上，上述定理的一个适当逆命题也成立，由此得到以下推论。

推论 1.3（球商的刻画）。设 (X, Δ) 如 设定 *1.1*所述。以下命题等价：

（*1.3.1*） $K_X + \Delta$ 是丰沛的，且 (1.2)中的等号成立。
（*1.3.2*）(X, Δ) 的轨形万有覆盖是单位球 $\mathbb{B}^n$。
（*1.3.3*）(X, Δ) 存在一个有限轨形 *étale* 伽罗瓦覆盖 $f\colon Y \to X$（参见 定义 *2.1*），其中 Y 是一个万有覆盖为单位球的射影流形。
仿照 [GKPT20，定理 1。5]，我们还可以证明以下关于对数一般型极小对的一致化结论。

推论 1.4（极小模型的一致化）。设 X， Δ） 如 设定 *1.1*所述。假设 $K_X + \Delta$ 大且 *nef*，且 （1.2）中等号成立。那么，对 $_{\text{can}} =: X_{\text{can}}$， Δ_{can}） 这一 （X， Δ） 的典范模型 （X， Δ）是 定理 *A*意义下的球商。

平坦情形。如前所述， $\mathbb{C}^n$ 的凯勒商一般并非射影的，因此我们必须考虑以下框架。

设定 1.5。设 (X, Δ) 是一个 n 维的 klt 对，其中 X 是紧 Kähler 空间， Δ 具有标准系数，即 $\Delta = \sum_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\Delta_i$，其中 $m_i \geq 2$ 为整数，且 Δ_i 不可约并且两两不同。

在这一更一般的 Kähler 情形中，[GT22] 无法用于证明 Miyaoka–Yau 不等式的奇异类比。相反，我们利用[BGL22] 中的分解定理，来推出在情形(MY)（II）下的不等式的以下奇异版本。

定理 1.6（奇异 Miyaoka–Yau 不等式）。设 (X, Δ) 如 设定 *1.5* 中所述，并假设 $\mathrm{c}_1(K_X + \Delta) = 0 \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$。任取 *Kähler* 类 $\alpha \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$，则有：

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X, \Delta) \cdot \alpha^{n-2} \geq 0. \tag{1.3}$$

与之前一样，我们尤其关注等号成立时会出现什么情况。

定理 *B*（平坦情形下的一致化）。设 (X, Δ) 如设定 *1.5* 所述。假设 $c_1(K_X + \Delta) = 0 \in H^2(X, \mathbb{R})$，且对于某个 *Kähler* 类 α，*(1.3)* 中等号成立。那么，(X, Δ) 的轨形万有覆盖 $\pi\colon X_\Delta \to X$ 是仿射空间 $\widetilde{\ \ \ }$（参见定义 *2.17*）。更确切地说，$(X_\Delta, \Delta) \cong (\mathbb{C}^n, \emptyset)$。

如上所述，我们可以表述一个逆命题，并得到以下推论。

推论 1.7 (环面商的刻画)。设 (X, Δ) 如 设定 *1.5* 所述。以下条件等价：*(1.7.1)* $c_1(K_X + \Delta) = 0 \in H^2(X, \mathbb{R})$，且对于某个 *Kähler* 类 α，*(1.3)* 中等号成立。*(1.7.2)* (X, Δ) 的轨形万有覆盖是 $\mathbb{C}^n$。

(1.7.3) (X, Δ) 存在一个有限轨形 *étale* 伽罗瓦覆盖 $f\colon T \to X$（参见 定义 *2.1*），其中 T 是一个复环面。

因此，前述结论是对 [LT18，定理 1。2]（该结论本身进一步阐述了 [GKP16，定理 1。17]）的推广。这一推广体现在三个方面：

- 这里的 X 是一个紧 Kähler 空间，不一定是射影的。
- 类 α 是超越的，先验地并非充分类。
- 允许在余维一处存在分歧；也就是说，我们研究的是 klt 对，而非 klt 空间。

致谢。谨以此文献给 Jean- Pierre Demailly，以缅怀他；他一直是我们的灵感与敬仰之源。

B.C. 谨此感谢法国大学研究院（Institut Universitaire de France）提供优良的工作条件。H.G. 感谢法国国家科研署通过 ANR-21-CE40-0010 项目提供的支持。

2. 关于轨形的一般论述

本节考虑川俣对数终端（klt）对 (X, Δ)，其中包括一个维数为 n 的正规代数簇或复空间 X，以及其上的一个 $\mathbb{Q}$-除子 $\Delta = \sum_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\Delta_i$，并且 $m_i \geq 2$。

2.A. 轨形结构与轨形层。

以下给出的大多数定义和基本性质均可见于例如 [GT22，§2] 在标准系数的 *dlt* 对这一稍广泛的设定中，至少当 X 为代数的情形如此。仅讨论 klt 对将使论述更为简洁。

定义 2.1 (适配态射)。设 $f\colon Y \to X$ 是从正规代数簇或复空间 Y 出发的有限满射伽罗瓦态射。称 f 为：

- 适配 于 (X, Δ)，如果对所有 $i \in I$，都存在 $a_i \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ 和 Y 上的一个约化除子 Δ'_i，使得 $f^*\Delta_i = a_i m_i \Delta'_i$，
- 严格适配 于 (X, Δ)，如果它是适配的，并且对所有 $i \in I$，$a_i = 1$
- 轨形 *étale* 如果它是严格适配的，并且 f 的分歧轨迹的除子分量包含于 $\mathrm{supp}(\Delta)$ 中——等价地，如果 f 在 $X_{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{supp}(\Delta)$ 上是 étale 的。

注记。 如果 X 是紧的，那么上述映射 $f\colon\ Y \to X$ 是轨形 étale，当且仅当$K_Y = f^*($ $K_X + \Delta$)成立。

定义 2.2 (轨形结构)。 对 (X, Δ) 的轨形结构 由一族相容的三元组 $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, f_\alpha, X_\alpha)\}_{\alpha\in J}$构成，其中 $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$是由 étale 开子集覆盖X，且对每个 $\alpha \in J$, $f_\alpha\colon\ X_\alpha \to U_\alpha$是一个从正规复空间 X_α 出发的适配态射，该空间带有由 (X, Δ)在 U_α 上诱导的对结构。相容性条件是指，对所有 $\alpha, \beta \in J$，投影映射$g_{\alpha\beta}\colon\ X_{\alpha\beta} \to X_\alpha$ 均为拟 étale，其中 $X_{\alpha\beta}$是 $X_\alpha \times_X X_\beta$ 的正规化。

若对每个$\alpha \in J$，态射 f_α 均严格适配（分别为轨形 étale），则称轨形结构 $\mathcal{C} = \{$ $(U_\alpha, f_\alpha, X_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ 为严格 （分别为轨形 *étale*）。若对每个 $\alpha \in J$，代数簇 X_α 均光滑，则称其为光滑 。此时，由分歧轨迹纯性可知，映射 $g_{\alpha\beta}$ 均为 étale。

定义 2.3 （商奇点）。 若一对 (X, Δ) 在 X 上局部解析地存在一个轨形 étale 态射 $f\colon$ $Y \to X$，其中Y光滑，则称其具有商奇点。 X 中满足此条件的最大开子集也称为 $(X,$ $\Delta)$ 的*orbifold*轨迹，记作 $X^\circ \subset X$ 或 $X^{\mathrm{orb}} \subset X$。

注。 按照上述术语，一对 (X, Δ) 存在光滑的轨形 étale 轨形结构，当且仅当它具有商奇点。这是因为相容性条件自动满足。

以下技术结果将在后文中用到：底空间为紧Kähler的一对具有商奇点的对是一个Kähler轨形。对数光滑情形已在 [Cla08，命题 2。1]中观察到。稍作推广，我们有以下结果。

引理 2.4 （轨形凯勒度量的存在性）。 设（Z， Δ）是一个具有商奇点的对，且 Z 是*Kähler*空间。那么，对于任意相对紧开子集 $X \Subset Z$，存在一个适配于（X， $\Delta|_X$）的轨形凯勒度量 ω，其意义是 ω 在 $X_{\mathrm{reg}} \setminus$ 支集Δ 上是一个凯勒度量，并且其在光滑局部覆盖上的拉回是光滑凯勒度量。

证明。 可以找到$\overline{X} \subset Z$ 的一个开邻域 X'，它存在一个有限覆盖$X' = \bigcup_{\alpha\in I} X'_\alpha$，使得存在光滑轨形 étale 覆盖 $p_\alpha\colon Y'_\alpha \to X'_\alpha$。我们设$X_\alpha := X'_\alpha \cap X$，并设 Y_α： $= p_\alpha^{-1}(X_\alpha)$。我们在 Z 上取一个凯勒度量 ω_Z，并在 X'_α 上取势函数 ϕ_α，使得 $dd^c p_\alpha^*\phi_\alpha$ 是 Y'_α 上的凯勒度量；函数 ϕ_α 在 X_α 上仅连续，但 $p_\alpha^*\phi_\alpha$ 在 Y'_α 上光滑。我们可以假设在X_α上 $|\phi_\alpha| \le 1$。最后，取一个从属于覆盖 $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ 的单位分解 (χ_α) $_{\alpha\in I}$，并设 $\phi := \sum \chi_\alpha\phi_\alpha$。我们设 $N := |I|$，并取一个常数 $C > 0$，使得

$$\|dd^c\chi_\alpha\|^2_{\omega_Z} + \|d\chi_\alpha\|^2_{\omega_Z} \le C, \tag{2.1}$$

对任意 $\alpha \in I$ 都成立，并且我们断言该流

$$\omega := M\omega_Z + dd^c\phi$$

是定义在 X 上、适用于 $M \gg 1$的轨形凯勒度量。显然， ω 作为轨形微分形式是光滑的，这一点可以通过利用覆盖的相容性直接看出。令 $x \in X$，并令 J: $= \{\alpha \in I, x \in X_\alpha\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$。我们设 $X_J := \cap_{\alpha\in J} X_\alpha$，并选择

Y_J的正规化的一个连通分支 $p_{\alpha_1}^{-1}(X_J) \times_{X_J} \cdots \times_{X_J} p_{\alpha_s}^{-1}(X_J)$。空间 Y_J 是一个光滑流形，带有由 p_{α_i}, $i = 1, \ldots, s$ 诱导的轨形 étale 映射 $p_J\colon Y_J \to X_J$。

我们有 $1 = \sum_{\alpha\in I} \chi_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in J} \chi_\alpha(x)$，因此存在 $\beta \in J$ 使得 $\chi_\beta(x) \geq \frac{1}{N}$。由于 $p_J^*(dd^c\phi_\beta|_{X_J})$ 是 Y_J上的凯勒度量（其范围略微超出），我们推断存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall \alpha \in J, \quad dd^c\phi_\beta \geq \delta d\phi_\alpha \wedge d^c\phi_\alpha \quad \text{on } X_J.$$

接下来，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有如下不等式：

$$\pm(d\phi_\alpha \wedge d^c\chi_\alpha + d\chi_\alpha \wedge d^c\phi_\alpha) \leq \varepsilon d\phi_\alpha \wedge d^c\phi_\alpha + \varepsilon^{-1} d\chi_\alpha \wedge d^c\chi_\alpha.$$

将上述不等式与 (2.1)结合，对于任意 $\varepsilon > 0$，可得：

$$\begin{aligned}\omega &= M\omega_Z + \sum_{\alpha\in I} \chi_\alpha dd^c\phi_\alpha + \sum_{\alpha\in I} \phi_\alpha dd^c\chi_\alpha + \sum_{\alpha\in I} (d\phi_\alpha \wedge d^c\chi_\alpha + d\chi_\alpha \wedge d^c\phi_\alpha) \\ &\geq (M - NC(1+\varepsilon^{-1}))\omega_Z + \chi_\beta dd^c\phi_\beta - \varepsilon \sum_{\alpha\in I} d\phi_\alpha \wedge d^c\phi_\alpha\end{aligned}$$

这在点 x处给出：

$$\omega \geq (M - NC(1+\varepsilon^{-1}))\omega_Z + \left(\frac{1}{N} - \frac{N\varepsilon}{\delta}\right) dd^c\phi_\beta.$$

因此，如果我们选择 $\varepsilon := \frac{\delta}{2N^2}$和 $M = 2NC(1+\varepsilon^{-1})$，那么 ω 在 x附近是一个轨形凯勒度量。由于 x 是任意的，且常数 N、C、δ 是一致的，引理现已得证。□

2.B. 覆盖构造。下文将介绍若干对广为人知的循环覆盖主题的变体。第一个变体，即命题 2.5，是 [Sho92, Ex. 2.4.1] 的推论：当 X 为拟射影时，K_X 可良好定义为一个魏尔除子（类）；但在复解析情形下，需要稍作不同的论证。第二个变体，即命题 2.6，改进了此前的结果，例如 [JK11, Prop. 2.9]、[GT22, Ex. 2.11] 和 [CKT21, Prop. 2.38]。核心观察是，给定一对 (X, Δ)，就我们的目的而言，只要 $K_X + \Delta$ 是 Δ，便无须假设其分支是 $\mathbb{Q}$-卡蒂尔的。正如注 6.3 所解释的，这一点对于证明推论 1.4 至关重要。

命题 2.5（轨形 étale 覆盖的存在性）。设 (X, Δ)是一个具有标准系数的对（不一定是 *klt*），其中 X 是一个正规复空间。假设存在一个反身秩1 层 $\mathscr{L}$和一个整数 $N \geq 1$，使得 $N\Delta$ 是一个 $\mathbb{Z}$-除子，并且

$$\mathscr{O}_X(N\Delta) \cong \mathscr{L}^{[N]}.$$

那么存在一个轨形 *étale* 态射 $f\colon Y \to X$。特别地：

若(X, Δ) 是 *klt* 的，且存在一个整数 $N \geq 1$，使得 $N\Delta$ 是一个 $\mathbb{Z}$-除子，并且$\omega_X^{[N]}(N\Delta) \cong \mathscr{O}_X$，那么我们可以找到一个轨形 *étale* 态射 $f\colon Y \to X$，使得 $\omega_Y \cong \mathscr{O}_Y$，并且 Y 具有典范奇点。

证明。令 $\sigma \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathscr{L}^{[N]}\big)$ 满足 $\mathrm{div}(\sigma) = N\Delta$，并考虑由 σ 诱导的循环覆盖 $g\colon Z \to X$，参见例如 [KM98，定义 2.52]。在解析情形下，我们可以按如下方式构造 f。在 $X_{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{supp}(\Delta)$ 上，$\mathscr{L}|_{X_{\mathrm{reg}}\setminus\mathrm{supp}(\Delta)}$ 是扭元，因此给出一个 étale 覆盖 $g^\circ\colon Z^\circ \to X_{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{supp}(\Delta)$（即 $\sigma|_{X_{\mathrm{reg}}\setminus\mathrm{supp}(\Delta)}$ 的 N^{th} 次根）；此外，它还是一个具有循环伽罗瓦群的伽罗瓦覆盖。根据 [DG94，定理 3.4]，，映射 g° 可延拓为一个具有相同伽罗瓦群的有限覆盖 $f\colon Z \to X$。

我们断言，g 沿着 Δ_i恰好以 m_i 阶分歧。只需在 Δ_i的一般点处验证这一断言即可。因此，不失一般性，可以假设$(X, \Delta) = (U, (1 - \frac{1}{m})D)$，其中 $U \subset \mathbb{C}^n (n = \dim(X))$是一个球，$D = (z_1 = 0) \cap U$，且 $\sigma|_U = z^{N(1-\frac{1}{m})1} \otimes \sigma_{\mathscr{L},U}^{\otimes N}$，其中$\sigma_{\mathscr{L},U}$是 U上 $\mathscr{L}$的一个平凡化截面。

写作 $N = km$，并令 $V := \{(t, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \,\big|\, t^N = z_1^{k(m-1)}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$，再令$\nu\colon V^\nu \to V$为其正规化。实际上，我们可以精确地写出 V^ν 的具体形式。事实上，令 ζ为一个本原的 k次单位根，并设 $V_p := \{(t, z) \,\big|\, t^m = \zeta^p z_1^{m-1}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$，其中 $p = 0, \ldots, k-1$。我们有一个分解 $V = \cup_p V_p$，它由不可约分支组成，而正规化 $\nu_p\colon V_p^\nu \to V_p$ 是仿射空间 $V_p^\nu \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$，其映射为 $\nu_p(u, w) = (\xi u^{m-1}, u^m, w)$，其中 ξ是 ζ^p的一个 m次方根。现在，设 $V^\nu := \sqcup_p V_p^\nu$，并通过 $\nu|_{V_p^\nu} := \nu_p$定义 $\nu\colon V^\nu \to V$。我们有如下图表。

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{j}{\cdots\!\!\rightarrow} & \\ V^\nu & \xrightarrow{\nu} & V & & Z \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{\mathbb{C}^n}} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

其中 j 由正规化的泛性质得到。特别地，j 是正规簇之间有限且一般为 1 对 1 的映射，因此是一个开嵌入。此外，如果 $(u, w) \in V_p^\nu$，则有 $\mathrm{pr}_{\mathbb{C}^n} \circ \nu(u, w) = (u^m, w)$，因此后一个映射沿 D 以阶数 m 分歧。由此可知，g 沿 D 以阶数 m 分歧。

最后，选取 Z 的一个不可约分支 Y，并令 $f := g|_Y$。由此得到所需的覆盖，其为伽罗瓦覆盖，群为 $G < \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathrm{Gal}(Z \to X)$，该群定义为 Y 的稳定子。

至于命题的最后一部分，我们可以将上述构造应用于 $\mathscr{L} = \omega_X^{[-1]} := \omega_X^\vee$。这为我们提供了一个轨形 étale 态射 $f\colon Y \to X$。特别地，Y是 klt，而上述计算表明，$f^*(K_X + \Delta)$ 在 $X_{\mathrm{reg}} \setminus \Delta_{\mathrm{sg}}$ 上是平凡的。因此我们得到 ω_Y 也平凡，最终得到 Y 仅有典范奇点。□

命题 2.6（严格适配覆盖的存在性）。设（X，Δ）是一个具有标准系数的射影对，且 $K_X + \Delta$ 是 $\mathbb{Q}$-*Cartier* 的（但不一定是 *klt*）。那么，存在一个非常丰沛除子 L，其上取一般的 $H \in |L|$时，存在一个循环伽罗瓦覆盖 $f\colon Y \to X$，具有以下性质：

(2.6.1) The morphism f is orbi-étale for $\big(X, \Delta + (1 - \frac{1}{N})H\big)$, where $N := \deg(f)$.

(2.6.2) 态射 f 对（X，Δ）是严格适配的。

(2.6.3) 如果 (X, Δ) 是 *klt*，那么对 $\big(X, \Delta + (1 - \frac{1}{N})H\big)$ 和 $(Y, \emptyset)$也都是 *klt*。

证明。固定选取 K_X 的一个代表元 K，也就是说，选取 X 上的一个整数（但不一定有效）魏尔除子 K，使得 $K_X \sim K$。在 X 上选取一个非常 ample 除子 A，并选取一个正整数 N，使得

$$L \coloneqq N \cdot \big(A - (K + \Delta)\big)$$

是整的且非常丰沛，并选取一个一般元素 $H \in |L|$。考虑主除子

$$D \coloneqq H - L = H + N \cdot (K + \Delta - A) \sim 0.$$

令 $f\colon Y \to X$ 为与 N 相关的次数为 D 的循环覆盖，如 [Sho92，§2 所述。3]。（更准确地说，Y 是该覆盖的正规化中的任意一个不可约分支。）我们需要验证性质 (2.6.1)–(2.6.3)。

根据构造，f 的分歧轨迹包含于 $\operatorname{supp}(D)$ 中。回顾 [Sho92]：若写作 $D = \sum_i d_i D_i$，则 f 沿 $f^{-1}(D_i)$ 的每个分支的分歧阶由 $N/\operatorname{hcf}(d_i, N)$ 给出。由于 K、A 和 H 是 $\mathbb{Z}$-除子，其中 H 甚至是约化的，这就推出 (2.6.1)。性质 (2.6.2) 是直接推论。

对于 (2.6.3)，得益于 (2.6.1) 和 [KM98，命题 5。20]。~为了验证该断言，我们取一个对数解消 $\pi\colon X \to X$，使其解消 (X, Δ) 并记作

$$K_{\widetilde{X}} + \Delta' = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum a_i E_i$$

和通常一样，其中 Δ' 是 Δ 的严格变换。由于 H 是 $|L|$ 的一般元素，且 $\pi^*|L|$ 无基点，因此可以假设 $\pi^* H = \pi_*^{-1} H$ 光滑，并与 π 的例外除子及 Δ' 的每个层光滑相交。特别地，π 也是对 $\big(X, \Delta + (1 - \frac{1}{N})H\big)$ 的对数解消。现在，恒等式

$$K_{\widetilde{X}} + \Delta' + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\pi_*^{-1} H = \pi^*\left(K_X + \Delta + \left(1 - \frac{1}{N}\right) H\right) + \sum a_i E_i$$

表明 $\big(X, \Delta + (1 - \frac{1}{N})H\big)$ 是 klt。 □

备注。更一般地，可以观察到，对 (X, Δ) (其中 X 是正规解析空间) 存在严格适配覆盖，只要存在一个 Cartier 除子 D 在 X 上与 Δ 没有共同分支，且满足 $m(K_X + \Delta) \sim D$ 对某个（充分可整除的）整数 $m \geq 1$ 成立。事实上，我们可以对对 命题 2.5 应用于对 $(X \setminus D, \Delta|_{X \setminus D})$，并得到一个轨形 étale 覆盖 $Y^\circ \to X \setminus D$。它在 X 上的完备化随后便是相对于 Δ 适配的，且额外分歧支集在 D的各分支之上。

以下结果似乎早已为专家所知。关于该结果的证明已在 [GKKP11] 中针对 $\Delta = 0$ 的情形写出，而一般情形几乎可直接由命题 2.5 推出，正如我们将要说明的那样。

引理 2.7（KLT 对在余维二处具有商奇点）。设（X，Δ）是一个具有标准系数的 *klt* 对。那么存在一个扎里斯基闭子集 $Z \subset X_{\mathrm{sg}} \cup \operatorname{supp} \Delta$，使得余维$_X$（$Z$）$\geq 3$，从而对于 $X^\circ \coloneqq X \setminus Z$，对（$X^\circ$，$\Delta|_{X^\circ}$）具有一个光滑轨形 *étale* 轨形结构 $\mathcal{C}^\circ$。

证明。由于 $K_X + \Delta$ 是一个 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子，我们可以用（仿射或施泰因）开子集 X 覆盖 $U_\beta \subset X$，$\beta \in I$使得 $(K_X + \Delta)|_{U_\beta} \sim_{\mathbb{Q}} 0$。根据 命题 2.5，我们可以找到一个有限循环覆盖 $g_\beta\colon U'_\beta \to U_\beta$ 其恰好在 $\Delta_i|_{U_\beta}$ 处以重数分支

m_i此外， U'_β具有 klt 奇点，因为 $K_{U'_\beta} = g_\beta^*(K_{U_\beta} + \Delta|_{U_\beta})$。现在我们可以使用 [GKKP11，命题 9。3] 或 [GK20，引理 5。8] 从而在某个 光滑 轨形 étale 轨形结构$\{U'_{\beta\gamma}, f_{\beta\gamma}, X'_{\beta\gamma}\}_{\gamma\in J}$上，$U'_\beta \setminus Z_\beta$其中某个闭子集 $Z_\beta \subset U'_\beta$的余维至少为三。令 $U_{\beta\gamma} = g_\beta(U'_{\beta\gamma})$，于是 $\bigcup_\beta U_{\beta\gamma} \subset U_\beta$是一个开子集，其补集的余维至少为三。综上，我们得到以下图表：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \overset{h_{\beta\gamma}}{\frown} & & \\
X'_{\beta\gamma} & \xrightarrow{f_{\beta\gamma}} & U'_{\beta\gamma} & \xrightarrow{g_\beta} & U_{\beta\gamma} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & U'_\beta & \xrightarrow{g_\beta} & U_\beta \hookrightarrow X
\end{array}
\tag{2.2}
$$

现在， $\left\{U_{\beta\gamma}, h_{\beta\gamma}, X'_{\beta\gamma}\right\}_{(\beta,\ \gamma)\in I\times J}$就是所需的 $(X^\circ, \Delta|_{X^\circ})$ 上的光滑轨形 étale 轨形结构，其中开子集 $X^\circ := \bigcup_{(\beta,\ \gamma)\in I\times J} U_{\beta\gamma}$的补集余维至少为三。□

备注 2.8。 特别地，具有标准系数的 klt 曲面对允许存在光滑轨形 étale 轨形结构，因此它具有定义 定义 2.3意义下的商奇点。这当然是众所周知的，可由上文回顾的循环覆盖构造及 [KM98，命题 4.18]。

定义 2.9 (轨形层)。 关于 (X, Δ) 上的轨形结构 $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, f_\alpha, X_\alpha)\}_{\alpha\in J}$，一个轨形层 是指一组数据：在每个 X_α 上各有一个凝聚层 $(\mathscr{E}_\alpha)_{\alpha\in J}$，并配有 $\mathscr{O}_{X_{\alpha\beta}}$-模的同构 $g_{\alpha\beta}^*\mathscr{E}_\alpha \cong g_{\beta\alpha}^*\mathscr{E}_\beta$，且在三重交上满足自然的相容条件。

层的所有常见概念（局部自由、反身、子层、态射等）都可以用显而易见的方式移植到这一情形中，参见 [GT22，§2。7]。Higgs 场和 Higgs 层也同样如此，参见 [GT22，定义 2。24]。

回顾 [CKT21第 3] 节中的以下定义：

定义 2.10 （适配微分）。设 $\gamma\colon\ Y \to X$ 是关于 （X， Δ）的严格适配态射。设 $X^\circ \subset X$和 $\iota\colon\ Y^\circ \hookrightarrow Y$是 γ在 良好意义下的极大开子集（见 [CKT21，定义 3。5] 适配反身微分的层定义为

$$
\Omega^{[1]}_{(X,\Delta,\gamma)} := \iota_*\left[\left(\operatorname{im}\left(\gamma^*\Omega^1_{X^\circ} \to \Omega^1_{Y^\circ}\right) \otimes \mathscr{O}_{Y^\circ}(\gamma^*\Delta)\right) \cap \Omega^1_{Y^\circ}\right].
$$

引理 2.11。以下性质成立：

(2.11.1) 层 $\Omega^{[1]}\ (X,\ \Delta,\ \gamma)$ 是 $\Omega^{[1]}_Y$ 的一个相干反身子层。

(2.11.2) 若 γ 是（X， Δ）的轨形 *étale*，则$\Omega^{[1]}\ (X,\ \Delta,\ \gamma) = \Omega$。

(2.11.3) 设 $\gamma_2\colon\ Z \to Y$是拟 *étale* 的，其中 Z是正规的。那么 $\delta := \gamma \circ \gamma_2$：$Z \to X$对于 $(X,\ \Delta)$是严格适配的，并且 $\Omega^{[1]}\ (X,\ \Delta,\ \delta) = \gamma_2^{[*]}\ \Omega^{[1]}\ (X,\ \Delta,\ \gamma)$。□

定义 2.12 (轨形余切层，参见 [GT22，定义 2.23])。 考虑 $(X,\ \Delta)$上的任意严格适配的轨形结构 $\mathcal{C} = \{(U_\alpha,\ f_\alpha,\ X_\alpha)\}_{\alpha\in J}$。那么这些层

$$\left(\Omega^{[1]}_{(X,\Delta,f_\alpha)}\right)_{\alpha\in J}$$

诱导出一个反身轨形层，称为轨形余切层，或反身微分形式层，记作 $\Omega^{[1]}_{\mathcal{C}}$。如果轨形结构 $\mathcal{C}$ 光滑且轨形 étale，那么 $\Omega^{[1]}_{\mathcal{C}}$ 局部自由。改变（严格适配的）轨形结构会产生兼容的层，具体见 [GT22，定义 3.2], 因此我们常将此层记作 $\Omega^{[1]}{}_{(X,\Delta)}$。

对于任意整数 $p \geq 0$，均可进行相同的构造，从而得到轨道层 $\Omega^{[p]}{}_{(X,\Delta)}$。当 $p = 0$ 时，我们得到结构层 $\mathscr{O}_{(X,\Delta)}$，它在每个图表 f_α 中不过就是 $\mathscr{O}_{X_\alpha}$。

引理 2.13。 设 (X,Δ) 是一个具有标准系数的射影 *klt* 对，并设 X°赋有光滑轨形 *étale* 轨形结构 $\mathcal{C}$，如引理 *2.7*所述。设 H 是 X 上的一个丰沛线丛，并取一个完全交曲面

$$S = D_1 \cap \cdots \cap D_{n-2}$$

的 $n-2$ 一般超曲面 $D_i \in |mH|$ 对于 $m \gg 1$。于是 $S \subset X^\circ$，且将 $\mathcal{C}$限制到$(S,\ \Delta|_S)$会在$(S,\ \Delta|_S)$上诱导出光滑轨形 *étale* 轨形结构。特别地，$(S,\ \Delta|_S)$具有商奇点。

证明。 出于维数和一般性方面的原因，我们有 $S \subset X^\circ$。接下来，若将结构 $\mathcal{C}$表示为 $\mathcal{C} = \{(X_\alpha, f_\alpha, U_\alpha)\}$，令 $S_\alpha := S \cap U_\alpha$、$T_\alpha := f_\alpha^{-1}(S_\alpha)$、$g_\alpha := f_\alpha|_{T_\alpha}$，并定义 $\mathcal{C}|_S := \{(T_\alpha, g_\alpha, S_\alpha)\}$。我们声称 T_α 是光滑的，这将证明该引理。事实上，由于 f_α 是准有限的（它是 étale 映射与有限映射的复合），可以找到一个开浸入 $X_\alpha \hookrightarrow \overline{X_\alpha}$ 和一个 f_α 的有限扩张 $\overline{f_\alpha}\colon \overline{X_\alpha} \to X$，如下所示：

$$\begin{array}{ccccc} T_\alpha & \hookrightarrow & X_\alpha & \hookrightarrow & \overline{X_\alpha} \\ \downarrow{\scriptstyle g_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f_\alpha}} \\ S_\alpha & \hookrightarrow & U_\alpha & \hookrightarrow & X \end{array}$$

由于 $\overline{f_\alpha}^*|mH|$ 是无基点的，贝尔蒂尼定理保证，若 $\overline{T_\alpha}$ 是 $\overline{f_\alpha}^*|mH|$中一般的 $(n-2)$ 个超曲面的交，则 $\overline{T_\alpha} \cap \overline{X_\alpha}^{\mathrm{reg}}$ 是光滑的。由于$X_\alpha \subset \overline{X_\alpha}^{\mathrm{reg}}$，这表明 T_α 是光滑的，故引理得证。□

2.C. **轨形基本群**。 设 (X,Δ) 是一个具有如前所述标准系数的 klt 对，并令 $X^* := X_{\mathrm{reg}} \setminus \operatorname{supp}\Delta$。

定义 2.14 （基本群）。 (X,Δ) 的（轨形）基本群 定义为

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(X,\Delta) := \pi_1(X^*) \Big/ \langle\!\langle \gamma_i^{m_i},\ i \in I \rangle\!\rangle.$$

这里，对于每个 $i \in I$，元素 γ_i 是“绕 Δ_i 的环”，即位于 $(\Delta_i)_{\mathrm{reg}} \cap X_{\mathrm{reg}} \subset X_{\mathrm{reg}}$ 的正规圆丛中的一个环，而 $\langle\!\langle \cdots \rangle\!\rangle$ 表示由给定子集生成的正规子群。

注意，若 $D=\emptyset$，则 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X,\emptyset)=\pi_1(X_{\mathrm{reg}})$ 通常不同于 $\pi_1(X)$。

定义 2.15 (在 Δ处至多分歧的覆盖，参见 [Cla08，定义 1。3])。在 X 处至多分歧的 Δ 覆盖是一个全纯映射 $\pi\colon\ Y\to X$，其中：

(2.15.1) Y 是正规连通复空间（不一定是拟射影的），

(2.15.2) π 具有离散纤维，且 $\pi^{-1}(X^*)\to X^*$ 是 étale 的，

(2.15.3) 在每个不可约分支$\widetilde{\Delta}_{j,\ k}\subset\pi^{-1}(\Delta_j)$处，$\pi$的分歧指数$r_{j,\ k}$ 整除m_j，

(2.15.4) 每个 $x\in X$ 都有一个连通邻域 $V\subset X$，使得 $\pi^{-1}(V)$的每个连通分支 U 与纤维 $\pi^{-1}(x)$仅交于一点，并且 $\pi|_U\colon\ U\to V$ 是有限的。

我们称 π 在 恰好沿 Δ 分歧，若在 (2.15.3) 中，对所有 j,k，有 $r_{j,k}=m_j$.

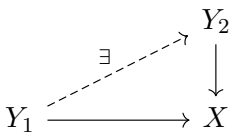
注意，若 Y 是拟射影的且 π 是伽罗瓦的，那么称 π 恰好沿 Δ 分歧，与称 π 是轨形 étale 是相同的。

定理 2.16 （覆盖与基本群）。子群 $G\subset\pi_1^{\mathrm{orb}}(X,\Delta)$ 与至多在 Δ 处分歧的覆盖 π: $Y\to X$ 之间存在自然的一一对应。此外：

(2.16.1) G 有限指数，当且仅当 π 有限。

(2.16.2) G 是正规子群，当且仅当 π 是伽罗瓦的。

(2.16.3) 设 $Y_{1,2}\to X$ 是两个至多在 Δ 处分歧的覆盖，对应的子群为 $G_{1,2}\subset\pi_1^{\mathrm{orb}}(X,\Delta)$。那么存在一个分解



当且仅当 $G_1\subset G_2$。

证明。证明与简单正规交情形相同，参见 [Cla08，定理 1。1], 但有一个重要区别：为了将 X^* 的（可能非有限的）étale 覆盖扩张为 X的分歧覆盖，我们希望应用 [DG94，定理 3。4]。为此，我们必须援引 klt 对的局部轨形基本群的有限性，该结论已由[Bra21，定理 1]证明。（请注意，[Bra21] 的工作适用于代数范畴，但鉴于 [Fuj22，定理 1。7]以及 [CGGN22，注 6。10]，其结果也可推广到复空间。）□

定义 2.17 (万有覆盖)。（轨形）万有覆盖 是 (X,Δ) 的覆盖$\pi\colon\ \widetilde{X}_\Delta\to X$它对应于平凡子群 $\{1\}\subset\pi_1^{\mathrm{orb}}(X,\Delta)$，对应关系见定理 2.16。

设 $\widetilde{\Delta}$ 是 $\widetilde{X}_\Delta$ 上支集为 $\pi^{-1}(\operatorname{supp}\Delta)$ 的除子，且满足

$$K_{\widetilde{X}_\Delta}+\widetilde{\Delta}=\pi^*(K_X+\Delta).$$

容易看出，对 $(\widetilde{X}_\Delta,\widetilde{\Delta})$ 仍然是具有标准系数的 klt 对。此外，$\Delta=0$当且仅当 π 恰好在 Δ处分歧。

定义 2.18（可发展对）。我们称 (X,Δ) 为可发展，如果在上述$\widetilde{\ }$记号下，X_Δ 是光滑的，并且 $\Delta=0$。

直观而言，可发展意味着万有覆盖是一个流形。

例 2.19。考虑 klt 对 (X,Δ)，其中 $X=\mathbb{P}^1$ 和

$$\Delta=\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdot[0]+\left(1-\tfrac{1}{m}\right)\cdot[\infty]$$

满足 $n,m\geq 2$。令 $d=$为n与m的最大公约数。那么 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X,\Delta)=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$，且万有覆盖$\pi\colon\ \widetilde{X}_\Delta=\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ 由 $[z_0\colon\ z_1]\mapsto[z_0^d\colon\ z_1^d]$给出。我们有

$$\widetilde{\Delta}=\left(1-\tfrac{1}{n/d}\right)\cdot[0]+\left(1-\tfrac{1}{m/d}\right)\cdot[\infty].$$

特别地，(X,Δ) 可发展当且仅当 $n=m$。

推论 2.20 (伽罗瓦闭包)。设 $Y\to X$ 是一个至多在 Δ处分歧的有限覆盖。那么存在一个有限覆盖 $Y'\to Y$，使得复合映射 $Y'\to X$ 是有限的、伽罗瓦的，且至多在 Δ处分歧。此外，若 $Y\to X$ 恰在 Δ处分歧，则 $Y'\to X$也恰在该处处分歧，且 $Y'\to Y$ 是拟 *étale* 的。

我们称 $Y'\to X$ 为 $Y\to X$ 的 伽罗瓦闭包 。

证明。利用 定理 2.16中的对应关系，命题归结为以下结论：对于一个群 G 及其有限指数子群 $H\subset G$，存在一个有限指数正规子群$N\trianglelefteq G$ 使得 $N\subset H$。但这很容易证明（也是众所周知的）：只需令

$$N:=\bigcap_{g\in G/H}gHg^{-1}.$$

通过比较 $Y\to X$ 和 $Y'\to X$ 在分支 Δ_i 上方的分歧指数，很容易看出最后一个结论成立。□

3. klt 对的轨形陈类

本节将按照 [GK20] 的思路，回顾 klt 对的第一和第二轨形陈类的定义。随后，我们将说明如何在两种情形下具体计算这些陈类：在射影情形中通过截降论证（第 3.C 节），以及在我们可以使用“轨形解消”时（第 3.D 节）。

3.A. 一般凯勒情形。

我们先回顾如何定义与第一陈类和第二陈类相关的陈数。这不过是对 [GK20，定义 52] 的略微推广，其中考虑了边界的存在。该构造依赖于轨形情形下的陈–韦伊形式体系。我们不再回顾轨形微分几何的基本定义和性质（例如轨形丛上的厄米度量、轨形陈类、轨形德拉姆上同调等）。可参阅 [Bla96，第 2]节。

设 (X,Δ) 如设定 1.5 中所述，并令 $X^\circ\subset X$ 为 X 的最大开子集，使得 (X,Δ) 具有光滑轨形 étale 轨形结构 $\mathcal{C}^\circ$，并设 $Z:=X\setminus X^\circ$。如引理 2.7 所证，$\dim Z\leq n-3$。接下来，令 $\alpha\in\mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})$，其中该上同调空间理解为局部常值层 $\underline{\mathbb{R}}_X$ 的上同调。出于维数方面的原因，我们有同构 $\mathrm{H}_c^{2n-4}(X^\circ,\mathbb{R})\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})$。接下来，

X° 上的轨形微分形式的德拉姆复形给出德拉姆–韦伊同构 $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{dR},\,\mathrm{c}}(X^\circ,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{c}}(X^\circ,\mathbb{R})$，因此最终得到一个自然同构

$$\psi : \mathrm{H}^{2n-4}_{\mathrm{dR},\,\mathrm{c}}(X^\circ,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})\,. \tag{3.1}$$

现在，设 $E \to X^\circ$ 为一对 (X°,Δ°) 的轨形丛。我们可以在其上赋予一个轨形厄米度量 h，并构造陈类 $\mathrm{c}_i^{\mathrm{orb}}(E,h)$，它们是双次数为 (i,i) 的轨形微分形式。当 $i=2$ 时，我们可以利用同构 (3.1) 来定义实数。如果 $\alpha \in \mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})$，则类 $\psi^{-1}(\alpha)$ 可以由 X° 上一个紧支撑的轨形 $(2n-4)$-形式 Ω 表示，从而 $\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}(E,h)\wedge\Omega$ 是 X° 上一个紧支撑的轨形 (n,n)-形式。

定义 3.1. 轨形第二陈类 $\tilde{\mathrm{c}}_2(E)$是对偶空间 $\mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})^\vee$ 中的唯一元素，它在 $\psi^\vee$ 下对应于类 $\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}(E) \in \mathrm{H}^4_{\mathrm{dR}}(X^\circ,\mathbb{R})$ 的庞加莱对偶，其中后者是相对于（但独立于）轨形结构 $\mathcal{C}^\circ$ 定义的。该量

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(E)\cdot\alpha \coloneqq \int_{X^\circ} \mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}(E,h)\wedge\Omega$$

因此，对于任意类 $\alpha \in \mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})$，它都是一个定义良好的实数。

现在将上述构造应用于微分形式的轨形丛 $\Omega^1_{(X^\circ,\Delta^\circ)}$。对于第一陈类，我们可以避免使用轨形结构，直接将其定义为如下的上同调类。

定义 3.2。 对于 klt 对 (X,Δ)，我们定义

$$\tilde{\mathrm{c}}_1(X,\Delta) \coloneqq \frac{1}{m}\mathrm{c}_1\Big(\big(\omega_X{}^{[m]}\otimes\mathscr{O}_X(m\Delta)\big)^{\vee\vee}\Big) \in \mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$$

其中 $m\geq 1$ 是一个整数，使得自反秩一层 $\big(\omega_X{}^{[m]}\otimes\mathscr{O}_X(m\Delta)\big)^{\vee\vee}$ 是一个线丛。

现在来考虑第二陈类的情形。

定义 3.3。 对偶第二陈类 $\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta) \in \mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})^\vee$ 是对 (X,Δ) 的第二陈类，即轨形丛 $\Omega^1_{(X^\circ,\Delta^\circ)}$ 在 X° 上，定义见 定义 2.12。

注记 3.4。 正如 [GK20第 893], 中已指出， 定义 3.3 中构造的对象自然是一个同调类：

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta) \in \mathrm{H}_{2n-4}(X,\mathbb{R})\,.$$

3.B. 射影情形——Mumford 的构造。设 (X,Δ) 是一个具有标准系数的射影 dlt 对，且每个分支 Δ_i of Δ 都是 $\mathbb{Q}$-Cartier。在 [GT22, §3.1, 第 1458], 页中，轨形陈类 $\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta)$ 和 $\tilde{\mathrm{c}}_1^2(X,\Delta)$ 被定义为 $\mathrm{N}^1(X)_{\mathbb{Q}}$ 上的多重线性形式。这里我们想指出，即使不假设 Δ_i 是 $\mathbb{Q}$-Cartier，也可以进行这一构造。我们的论证与 [GKPT19, 定理 3.13] 的证明十分相似。——本文只讨论 klt 对，因为我们只关注这类对象。

因此，令 $(X,\ \Delta)$ 为一个 n维的、具有标准系数的射影 klt 对。应用 引理 2.7，我们得到一个开子集$X^\circ \subset X$，其补集的余维为

≥ 3 并且 $(X^\circ, \Delta|_{X^\circ})$ 具有一个光滑轨形 étale 轨形结构 $\mathcal{C}$。考虑与 $\mathcal{C}$ 相关联的“大整体覆盖” $\gamma\colon X^\circ \to X^\circ$，参见 [Mum83，第 2–3] 节；经过缩小 X° 后，不妨假设其为科恩–麦考利的。来自定义 2.12 的局部自由轨形层 $\Omega_{\mathcal{C}}^{[1]}$ 在 X° 上诱导出一个真正的局部自由层 $\mathscr{F}$。$\mathscr{F}$ 的陈类诱导出类 $\mathrm{c}_i\left(\Omega_{\mathcal{C}}^{[1]}\right) \in \mathrm{A}_{n-i}(X^\circ)$。由于 $\mathrm{A}_*(X^\circ)$ 具有环结构，我们也有 $\mathrm{c}_1^2\left(\Omega_{\mathcal{C}}^{[1]}\right) \in \mathrm{A}_{n-2}(X^\circ)$。出于维数的原因，对于 $i \leq 2$，$\mathrm{A}_{n-i}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}_{n-i}(X^\circ)$ 是一个同构。我们得到类 $\mathrm{c}_2\left(\Omega_{\mathcal{C}}^{[1]}\right)$ 以及 $\mathrm{c}_1^2\left(\Omega_{\mathcal{C}}^{[1]}\right) \in \mathrm{A}_{n-2}(X)$；根据 [GT22，第 3.5] 号命题，它们与 $\mathcal{C}$ 的选择无关。轨形陈类 $\tilde{\mathrm{c}}_2(X, \Delta)$ 和 $\tilde{\mathrm{c}}_1^2(X, \Delta)$ 随后由与 X 上线丛的陈类进行帽积给出：

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X, \Delta) \cdot \mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_{n-2} \coloneqq \deg\left(\mathrm{c}_2\left(\Omega_{\mathcal{C}}^{[1]}\right) \cap \mathrm{c}_1(\mathscr{L}_1) \cap \cdots \cap \mathrm{c}_1(\mathscr{L}_{n-2})\right),$$
$$\tilde{\mathrm{c}}_1^2(X, \Delta) \cdot \mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_{n-2} \coloneqq \deg\left(\mathrm{c}_1^2\left(\Omega_{\mathcal{C}}^{[1]}\right) \cap \mathrm{c}_1(\mathscr{L}_1) \cap \cdots \cap \mathrm{c}_1(\mathscr{L}_{n-2})\right),$$

且这些映射经由 $\mathrm{N}^1(X)_{\mathbb{Q}}$ 分解。

3.C. **射影情形——逐步降维**。若 (X, Δ) 是一个系数为标准系数的射影 klt 对，则引理 2.7 允许将 Mumford 构造 $\mathbb{Q}$-陈类 [Mum83] 推广到这一情形，如上文所述。根据定义 3.3 的 Chern–Weil 构造与 Mumford 对 $\mathbb{Q}$-陈类的定义等价，这一点由 [GK20] 中的断言 6 给出。5] 在 $\Delta = 0$ 的情形下。这一结论很容易推广到系数为标准系数的更一般的 klt 对。

由于 ψ 是一个抽象同构，实际计算这些数在实践中相当困难。不过，有一种重要情形会使问题变得明确得多，即当 $\alpha = \mathrm{c}_1(L)^{n-2}$ 时，其中 L 是 X 上的一个丰沛线丛（为简化起见，我们只讨论这种情形；当然，也可以有 $(n-2)$ 个不同的丰沛线丛）。由交积的齐次性可知，不妨设 L 非常丰沛，并诱导一个嵌入 $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$，使得 $L \cong i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$。我们选取处于一般位置的 $(n-2)$ 个超平面 H_1、……、H_{n-2}。特别地，$\sum H_i$ 具有简单正规交叉，且 $S \coloneqq H_1 \cap \cdots \cap H_{n-2} \cap X \subset X^\circ$。

引理 3.5。采用上述记号，来自 *定义 3.1* 的陈数可用以下公式计算：

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(E) \cdot \mathrm{c}_1(L)^{n-2} = \int_S \mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}(E, h)\big|_S. \tag{3.2}$$

证明。首先，令我们选取截面 $s_i \in \mathrm{H}^0\left(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)\right)$，使得 $H_i = \{s_i = 0\}$，并在 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ 上赋予 Fubini–Study 度量。接下来，我们选取截断函数 $\chi_i\colon \mathbb{P}^N \to [0, 1]$ 使得

$$\chi_i = \begin{cases} 0 & \text{on} \quad \{|s_i| \leq \delta\} \\ 1 & \text{on} \quad \{|s_i| \geq 2\delta\} \end{cases}$$

对于某个足够小的 $\delta > 0$，使得

$$\bigcap_{i=1}^{n-2} \{|s_i| \leq 2\delta\} \cap X \subset X^\circ.$$

对于任意 $\varepsilon \in (0,1],$，定义 $\varphi_{i,\varepsilon} := \chi_i \log |s_i|^2 + (1-\chi_i)\log(|s_i|^2+\varepsilon^2)$，并令 $\omega_{i,\varepsilon} := \omega_{\mathrm{FS}} + dd^c\varphi_{i,\varepsilon}$。显然，$\omega_{i,\varepsilon}$ 支集于 $\{|s_i| \le 2\delta\}$，且 $\omega_{i,\varepsilon} \to [H_i]$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时成立；它们在 $\mathbb{P}^N$ 上作为流是弱成立的，并且在远离 H_i 的局部范围内光滑。令 $\Omega_\varepsilon := \bigwedge_{i=1}^{n-2} \omega_{i,\varepsilon}$，其支集于 $\bigcap_{i=1}^{n-2}\{|s_i| \le 2\delta\}$。

浸入 $i : X^\circ \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ 诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{2n-4}_{\mathrm{dR}}\big(\mathbb{P}^N,\mathbb{R}\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{2n-4}\big(\mathbb{P}^N,\mathbb{R}\big) \\ \downarrow{\scriptstyle i^*} & & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ \mathrm{H}^{2n-4}_{\mathrm{dR}}(X^\circ,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{2n-4}(X^\circ,\mathbb{R})\,. \end{array}$$

并且根据我们的选择，像 $i_*[\Omega_\varepsilon]$ 落在自然映射的像中

$$\mathrm{H}^{2n-4}_{\mathrm{dR,c}}(X^\circ,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^{2n-4}_{\mathrm{dR}}(X^\circ,\mathbb{R})$$

并满足 $\psi(i_*[\Omega_\varepsilon]) = \mathrm{c}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))^{n-2}\,|_X = \mathrm{c}_1(L)^{n-2}$。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们都有恒等式

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(E)\cdot \mathrm{c}_1(L)^{n-2} = \int_{X^\circ} \mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}(E,h)\wedge\Omega_\varepsilon. \tag{3.3}$$

现在，由于 $\sum H_i$ 具有简单正规交叉，通过简单的局部计算可得Ω_ε 收敛于沿子流形 W 的积分流：$= \bigcap_{i=1}^{n-2} H_i$，在 $\mathbb{P}^N$ 上弱收敛，并且在远离 W的地方局部光滑收敛。由于 $\Omega_\varepsilon|_X$ 的支集包含于 X°的一个固定紧子集内，可以看出，$\Omega_\varepsilon|_{X^\circ}$ 在 $[S] = [W\cap X^\circ]$上按流的意义弱收敛于 X°这一轨形上的流。令 ε 趋于 0，在 (3.3)中，我们最终得到公式 (3.2)。□

3.D. **轨形解消与陈数**。当 X 在余维二处光滑时，可以在奇点解消上计算陈数，参见例如 [CGG22]。如文献所述，在余维二处存在奇点时，一般而言，解消不再能计算陈数。此时，解消的替代方案是下文定义的轨形解消 。

定义 3.6（轨形解消）。设 (X,Δ) 是一个对，其中 X 是正规复空间，Δ 具有标准系数，并设 $X^\circ \subset X$ 是 (X,Δ) 的轨形轨迹。(X,Δ) 的一个$\widehat{\ }$轨形解消是一个满射、适当的双有理映射 $\pi\colon X \to X$，其中 $X \to X$ 来自一个$\widehat{\ }$正规复空间 X，满足：

(3.6.1) $\big(\widehat{X},\widehat{\Delta} := \pi_*^{-1}(\Delta)\big)$ 仅有商奇点，并且

(3.6.2) π 在 X°上同构。

轨形解消的存在性可以得到确立[1] 对于拟射影簇（具有$\Delta = 0$），正如徐晨阳在[LT19，§3]中所展示的，这依赖于关于代数栈的深刻结果。然而，那里提出的构造高度非典范（或非函子性），因此难以将其推广到复解析情形，即便假设奇点是代数奇点。

[1]定理 [LT19，定理 3] 在 $\Delta \neq 0$时，其证明可照搬，但我们只会在 $\Delta = 0$时用到轨形分解的存在性。

轨形解消存在性的一个重要应用由以下引理凸显：我们可以利用这类部分分解，计算(X,Δ)的轨形第二陈类与$\mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})$中的一个类的配对。

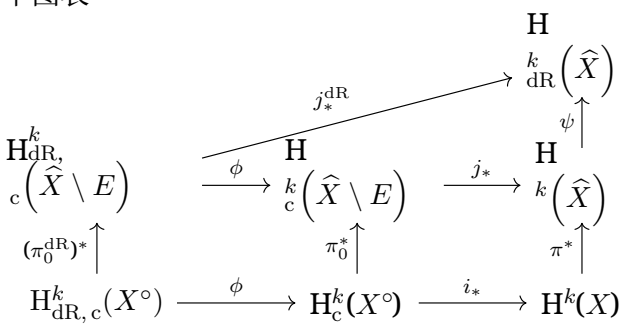
引理 3.7。 设 (X,Δ) 是符合 设定 *1.5*的一个对。假设 (X,Δ) 存在一个轨道分辨 $\pi\colon(\widehat{X},\widehat{\Delta})\to(X,\Delta)$ 如 定义 *3.6*所示。对于任意 $a\in\mathrm{H}^{2n-4}(X,\mathbb{R})$，有如下公式

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta)\cdot a=\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\left(\widehat{X},\widehat{\Delta}\right)\cdot\psi(\pi^*a),$$

其中，在右侧，$\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\left(\widehat{X},\widehat{\Delta}\right)\in\mathrm{H}^4_{\mathrm{dR}}\left(\widehat{X},\mathbb{R}\right)$ 是 $(\widehat{X},\widehat{\Delta})$ 的通常轨形第二陈类，而 $\psi\colon\mathrm{H}^\bullet\left(\widehat{X},\mathbb{R}\right)\to\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{dR}}\left(\widehat{X},\mathbb{R}\right)$ 是轨形 ***de Rham–Weil*** 同构。

证明。沿用定义 3.6中的记号，记 $\widehat{X}\setminus E:=\pi^{-1}(X^\circ)$ 以及 $\wideparen{j}\colon X\setminus E\to X$ 为自然嵌入；为简便起见，记 $k:=2n-4$，并省略 $\widehat{\ }$ 在下文上同调空间中对 $\mathbb{R}$ 的提及。最后，记 $\pi_0:=\pi|_{\widehat{X}\setminus E}\colon X\setminus E\to X^\circ$。

于是我们得到如下图表



其中除 j_*、j_*^{dR} 和 π^* 外，所有箭头都是同构。现在，可以在 $T_{\widehat{X},\widehat{\Delta}}$ 上选取一个 $\widehat{\ }$轨形厄米度量 h，并将其下降为 T_{X° 上的轨形厄米度量 $h^{\widehat{\ }}$，因为 π 是同构 $X\setminus E\to X^\circ$。然后，若与之前一样，α 是 $\phi^{-1}(i_*^{-1}(a))$ 的一个轨形代表元，且在 X° 中具有紧支撑，则我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta)\cdot a&=\int_{X^\circ}\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}(X^\circ,h)\wedge\alpha\\&=\int_{\widehat{X}\setminus E}\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\left(\widehat{X},\widehat{h}\right)\wedge\pi^*\alpha\\&=\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\left(\widehat{X},\widehat{\Delta}\right)\cdot[\pi^*\alpha]_{\mathrm{dR}}\\&=\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\left(\widehat{X},\widehat{\Delta}\right)\cdot\psi(\pi^*a)\end{aligned}$$

因为由上述图表的交换性可得 $\psi(\pi^*a)=(j_*)^{\mathrm{dR}}([\pi^*\alpha]_{\mathrm{dR}})$。□

我们以关于非轨形点集的一条注记结束本段。为清晰起见（也因为我们只会用到这种情形），我们仅讨论情形 $\Delta=0$。

^如果 X 是一个正规复空间，并且存在一个轨形解消 $\pi\colon X \to X$ 按照 定义 3.6 的意义，那么显然，其非轨形点集 $X \setminus X^{\mathrm{orb}}$ 与 $\pi(E)$重合，^其中 $E \subset X$ 是 π的例外点集。特别地，非轨形点集是 X的一个解析子集。后一结论十分自然，即使不存在轨形解消也应当成立。遗憾的是，在一般的解析情形下，我们既无法证明这一点，也无法找到合适的参考文献。不过，我们可以在额外假设 X 的奇点是代数的条件下证明这一结论。这足以满足 第 7 节中的应用。

引理 3.8 (非轨形点集的解析性)。 设 X 是一个正规复空间，且只有代数奇点（按照 [CGGN22，定义 2.4]）。则其非轨形点集 $Z := X \setminus X^{\mathrm{orb}}$ 是一个闭解析子集。

特别地，若 X 是一个紧致 *klt* 凯勒空间，且满足$\mathrm{c}_1(X) = 0$，则上述结论适用。

证明。 当 X 是代数的时，这是 [Art69，推论 2.6] 的直接推论。若 $U \subset X$ 是 X 的一个欧几里得开子集，并且通过映射 $\varphi\colon U \xrightarrow{\sim} V$同代数簇的一个开子集 $V \subset Y$同构，则有 $\varphi(Z \cap U) = V \setminus V_{\mathrm{orb}}$，根据代数情形，这是 V的一个解析子集。于是，子集 $Z \cap U$ 由一族全纯函数的共同零点集给出，也就是说，它在 U中是解析的。

最后一个结论是 [BGL22，定理 B]的推论： X 可以实现为一个局部平凡族中的成员，该族也具有射影纤维。由于该族是（在光滑连通底空间上）局部平凡的，所有纤维在局部上同构，因此这样的 X 具有局部代数奇点（参见 [CGGN22，例 2。5]）。□

4. 典范模型的均匀化

本节中，我们证明定理 A。先引入一些记号。令 $A := K_X + \Delta$ 并选取一个完全交曲面 $S = D_1 \cap \cdots \cap D_{n-2}$，它由 $n-2$ 一般超曲面 $D_i \in |mA|$组成，其中 m 充分大且可被整除。——证明分为四个步骤。

步骤 1：轨形 Higgs 层$(\mathscr{E}_X, \vartheta_X)$。使用引理引理 2.7的证明中引入的记号，我们可以找到一个（先验而言并非光滑的）轨形 étale 结构 $\mathcal{C} = \{U_\alpha, g_\alpha, U'_\alpha\}$，相对于$(X, \Delta)$ 定义在整个 X上。于是，可以如下定义反身轨形 Higgs 层$(\mathscr{E}_X, \vartheta_X)$，使其相对于 $\mathcal{C}$：

$$\vartheta_X\colon \mathscr{E}_X := \Omega^{[1]}_{(X,\Delta)} \oplus \mathscr{O}_{(X,\Delta)} \longrightarrow \mathscr{E}_X \otimes \Omega^{[1]}_{(X,\Delta)}, \tag{4.1}$$

在每个坐标图上 U'_α，我们定义 $\vartheta_{U'_\alpha}(a, f) := (0, a)$其中 (a, f)是 $\mathscr{E}_{U'_\alpha}$ 的一个截面：$=\Omega^{[1]}_{U'_\alpha} \oplus \mathscr{O}_{U'_\alpha}$。另见 定义 2.12 和 [GT22，§5.1，第 2] 步。

为了计算涉及 $\mathscr{E}_X$ 的陈数，需要引入一个全局覆盖 $f\colon Y \to X$ 以及一个实际的反身层 $\mathscr{E}_Y$，定义在 Y 上，下面将对此作出说明。由 命题 2.6 可知，存在一个有限态射 $f\colon Y \to X$，它对 (X, Δ) 严格适配，且其在余维一处的额外分歧（即在 $\mathrm{supp}(\Delta)$之外）支承在 H 上；其中 X 是一个非常丰线性系的一般元素。令 N 为沿 H的分歧阶；则有

$$K_Y = f^*\big(K_X + \Delta + \big(1 - \tfrac{1}{N}\big)H\big)\,. \tag{4.2}$$

令 $D := \Delta + \big(1 - \frac{1}{N}\big)H$，并定义 $(X, D)_{\mathrm{orb}}$ 为X 的最大开子集，使得对 (X, D) 存在光滑轨形 étale 轨形结构 $\mathcal{C}^\circ$；由引理 2.7 可知，$\mathrm{codim}_X(X \setminus (X, D)_{\mathrm{orb}}) \geq 3$。关于 $\mathcal{C}^\circ$ 的形状还可以作出更精确的描述，这在后文会有用。回顾引理 2.7 的证明，若令 $K := I \times J$ 且 $\alpha := (\beta, \gamma) \in K$，则有如下图表

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \overset{h_\alpha}{\frown} & & & \\
X'_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & U'_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & U_\alpha & \hookrightarrow & X \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
 & & U'_\beta & \xrightarrow{g_\beta} & U_\beta & \hookrightarrow & X
\end{array}$$

其中 X'_α 光滑， f_α 拟 étale。注意，可以将 $\mathscr{E}_X$ “限制”到轨形 $\bigcup_\alpha U_\alpha \subset X$ (X, Δ) 的 orbifold轨迹上，从而得到一个局部自由轨形 Higgs 层，它相对于余维二中的对 (X, Δ) 的光滑轨形 étale 结构 $\{U_\alpha, h_\alpha, X'_\alpha\}_{\alpha \in K}$，由 $\mathscr{E}_{X'_\alpha} := f_\alpha^{[*]}(\mathscr{E}_{U'_\beta}|_{U'_\alpha}) \simeq \Omega^1_{X'_\alpha} \oplus \mathscr{O}_{X'_\alpha}$ 给出。特别地，可以按照第 3.A 节中的说明定义陈数 $\tilde{\mathrm{c}}_2(\mathscr{E}_X) \cdot A^{n-2}$。

通过选取一般的 H，根据贝尔蒂尼定理，可以使得对所有指标 $\alpha \in K$，$h_\alpha^* H$ 都是光滑的，因此进一步取川俣覆盖 $\kappa_\alpha \colon X_\alpha \to X'_\alpha$，使其相对于 $(X'_a, h_\alpha^*(1 - \frac{1}{N})H)$ 为轨形 étale，即可得到预期的光滑轨形 étale 轨形结构$\mathcal{C}^\circ := \{U_\alpha, p_\alpha, X_\alpha\}_{\alpha \in K}$，该结构在余维二处适用于对 (X, D)，其中 $p_\alpha = h_a \circ \kappa_\alpha$。最终得到如下分解：

$$\begin{array}{ccccc}
X_\alpha & & \xrightarrow{p_\alpha} & & U_\alpha \xrightarrow{\text{étale}} X \\
 & \searrow^{\kappa_\alpha} & & \nearrow_{h_\alpha} & \\
 & & X'_\alpha & &
\end{array}$$

接下来，设

$$Y^\circ := f^{-1}\big((X, D)_{\mathrm{orb}}\big) \cap (Y, \emptyset)_{\mathrm{orb}} \subset Y.$$

由于 f是有限的，并且根据 引理 2.7 应用于 $(Y, \emptyset)$，我们有 余维$_Y(Y \setminus Y^\circ) \geq 3$。映射 f限制为 $f^\circ \colon Y^\circ \to X^\circ := (X, D)_{\mathrm{orb}}$。

最后，设 $T := f^{-1}(S)$。由于线性系 $|mA|$（分别为 $f^*|mA|$）无基点，且 S 是一般的，我们有 $S \subset X^\circ$（分别为 $T \subset Y^\circ$）。此外，回顾 引理 2.13 可知$(S, D|_S)$ 具有商奇点。下图概括了这一情形：

$$\begin{array}{ccccc}
T & \hookrightarrow & Y^\circ & \hookrightarrow & Y \\
{\scriptstyle f|_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^\circ} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
S & \hookrightarrow & X^\circ & \hookrightarrow & X
\end{array}$$

此外，分歧公式 $K_T = f^*(K_S + D|_S)$ 表明 T也是 klt 的，即它是一个具有商奇点的曲面。

步骤 2：计算 $\mathscr{E}_X$ 的陈数。设定 $\Delta^\circ \colon = \Delta|_{X^\circ}$和 $D^\circ \colon = D|_{X^\circ}$。考虑关于对（$X^\circ$， D°）且相对于轨形结构 $\mathcal{C}^\circ$ 的局部自由轨形层

在上面的步骤 1 中构造，其定义为

$$\mathscr{E}_{X_\alpha} = \Omega^{[1]}_{(X^\circ,\Delta^\circ,p_\alpha)} \oplus \mathscr{O}_{X_\alpha}. \tag{4.3}$$

由于 $\big(X_\alpha, p_\alpha^{-1}(H)\big)$ 是对数光滑的，子层 $\Omega^{[1]}{}_{(X^\circ,\Delta^\circ,p_\alpha)} \subset \Omega^1_{X_\alpha}$ 可用局部坐标非常明确地表示。更准确地说，若 $(z_1,\dots,z_n)$ 是一个局部坐标图，并且 $p_\alpha^{-1}(H) = \{z_1 = 0\}$ 在该坐标图上成立，那么这里涉及的丛就是 $\Omega^1_{X_\alpha}$ 的子丛，由 $z_1^{N-1}\mathrm{d}z_1, \mathrm{d}z_2, \dots, \mathrm{d}z_n$ 生成。特别地，在$p_\alpha^{-1}(H)$之外，它与 $\Omega^1_{X_\alpha}$ 一致。

现在令 $\mathscr{E}_Y := \Omega^{[1]}_{(X,\Delta,f)} \oplus \mathscr{O}_Y \subset \Omega^{[1]}_Y \oplus \mathscr{O}_Y$，我们应将其视为 f 对 $\mathscr{E}_X$ 的反身拉回。我们在此层上赋予通常的 Higgs 场 ϑ_Y，并用$\mathscr{E}_{Y^\circ}$表示它在 Y°上的限制。注意，由 (2.11.2)， $\mathscr{E}_Y = \Omega^{[1]}_Y \oplus \mathscr{O}_Y$在 $Y \setminus f^{-1}(H)$ 上成立。令 $\big\{(V_\beta, q_\beta, Y_\beta)\big\}_{\beta\in K}$为 $(Y^\circ,\emptyset)$ 的一个光滑轨形 étale（即在此情形下为拟 étale）轨形结构；由 (2.6.3) 和引理 2.7，这样的结构存在，至少在缩小 Y° 后存在。令$\mathscr{E}_{Y_\beta} := q_\beta^{[*]}\mathscr{E}_Y$，并考虑下图

$$\begin{array}{ccc} W_{\alpha\beta} & \xrightarrow{r_{\alpha\beta}} & Y_\beta \\ \downarrow{\scriptstyle g_{\alpha\beta}} & & \downarrow{\scriptstyle q_\beta} \\ & & Y^\circ \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X_\alpha & \xrightarrow{p_\alpha} & X^\circ \end{array} \tag{4.4}$$

其中 $W_{\alpha\beta}$ 是 $X_\alpha \times_{X^\circ} Y_\beta$的正规化。由于 p_α 相对于D°是轨形 étale 的，因此映射 $r_{\alpha\beta}$ 在 $X^\circ_{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{supp}(D^\circ)$上是 étale 的。此外，由于 q_β 是拟 étale 的，可知 $f\circ q_\beta$ 和 p_α 沿着 D的每个分支以相同阶数分歧。换言之，光滑轨形 étale 轨形结构 $\mathcal{C}^\circ$和 $\big\{\big(f(V_\beta)\ f\circ q_\beta, Y_\beta\big)\big\}$彼此相容。特别地，$g_{\alpha\beta}$ 和 $r_{\alpha\beta}$ 是 étale 的，因此 $W_{\alpha\beta}$ 是光滑的；由 (2.11.3) 还可得 $g_{\alpha\beta}^*\mathscr{E}_{X_\alpha} \cong r_{\alpha\beta}^*\mathscr{E}_{Y_\beta}$。由于 $\mathscr{E}_{X_\alpha}$是局部自由的， $\mathscr{E}_{Y_\beta}$也如此，因此反身层 $\mathscr{E}_{Y^\circ}$是轨形 Y°上的真正轨形丛。

令 ω 为适配于 (X°,Δ°)的轨形凯勒度量，如 引理 2.4所给出。它定义在 X°的任意大的相对紧开子集上。特别地，它定义在 S 的一个邻域内，这对我们的目的已足够。令$S^* := S_{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{supp}\, D$。根据定义，有

$$\tilde{\mathrm{c}}_2\Big(\Omega^{[1]}_{(X,\Delta)}\big|_S\Big) = \int_{S_{\mathrm{reg}}\setminus\mathrm{supp}(\Delta)} \mathrm{c}_2\Big(\Omega^1_{X_{\mathrm{reg}}}, \omega\Big) = \int_{S^*} \mathrm{c}_2\Big(\Omega^1_{X_{\mathrm{reg}}}, \omega\Big)$$

右侧最后两个积分是良定义的，因为 ω 通过有限映射 h_α拉回后，在 $S_{\mathrm{sing}} \cup \mathrm{supp}(\Delta)$ 中的点处延拓为光滑的凯勒度量。光滑形式$p_\alpha^*\omega = f_\alpha^* h_\alpha^*\omega$ 是半正的，并沿着 $p_\alpha^{-1}(H)$ 退化。更准确地说，若 $p_\alpha^{-1}(H)\cap U =$

$\{z_1 = 0\}$ 对于某个坐标图 $U \subset X_\alpha$，则

$$p_\alpha^*\omega|_U = a_{1\bar{1}}|z_1|^{2(N-1)} i dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \sum_{k=2}^{n} a_{1\bar{k}} z_1^{N-1} dz_1 \wedge i d\bar{z}_k + \\ + \sum_{k=2}^{n} a_{k\bar{1}} \bar{z}_1^{N-1} dz_k \wedge i d\bar{z}_1 + \sum_{j,k=2}^{n} a_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

其中 $(a_{j\bar{k}})$ 光滑且正定。特别地，$p_\alpha^*\omega$ 在 $\Omega^{[1]}_{(X^\circ,\Delta^\circ,p_\alpha)}$ 上定义了一个光滑厄米度量。换言之，$g_{\alpha\beta}^* p_\alpha^* \omega$ 在 $g_{\alpha\beta}^* \Omega^{[1]}_{(X^\circ,\Delta^\circ,p_\alpha)} \cong r_{\alpha\beta}^* \Omega^{[1]}_{(X^\circ,\Delta^\circ,f\circ q_\beta)}$ 上诱导了一个光滑厄米度量。因此，$q_\beta^* f^*\omega$ 是向量丛 $\Omega^{[1]}_{(X^\circ,\Delta^\circ,f\circ q_\beta)} = q_\beta^{[*]} \Omega^{[1]}_{(X^\circ,\Delta^\circ,f)}$ 上的光滑厄米度量，从而 $f^*\omega$ 在轨形丛 $\Omega^{[1]}_{(X^\circ,\Delta^\circ,f)}$ 上诱导了一个轨形度量。根据轨形向量丛陈类的定义，我们有

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2\left(\Omega^{[1]}_{(X^\circ,\Delta^\circ,f)}|_T\right) &= \int_{f^{-1}(S^*)} c_2\left(\Omega^1_{Y_{\mathrm{reg}}}, f^*\omega\right) \\ &= \deg(f|_T) \cdot \int_{S^*} c_2\left(\Omega^1_{X_{\mathrm{reg}}}, \omega\right) \\ &= \deg(f) \cdot \tilde{c}_2\left(\Omega^{[1]}_{(X,\Delta)}|_S\right) \end{aligned}$$

其中最后一个等式由 $\deg(f|_T) = \deg(f)$ 得出，因为 S 是一般的。总之，根据引理 3.5

$$\tilde{c}_2(\mathscr{E}_Y) \cdot (f^*A)^{n-2} = \deg(f)\, \tilde{c}_2(\mathscr{E}_X) \cdot A^{n-2}. \tag{4.5}$$

同样的论证表明，类似的等式成立

$$\tilde{c}_1^2(\mathscr{E}_Y) \cdot (f^*A)^{n-2} = \deg(f)\, \tilde{c}_1^2(\mathscr{E}_X) \cdot A^{n-2}. \tag{4.6}$$

步骤 3：(X,Δ) 具有商奇点。 考虑 X 上的轨形 Higgs 层 $(\mathscr{F}_X, \Theta_X) := \mathrm{End}(\mathscr{E}_X, \vartheta_X)$。它满足：

$$\tilde{c}_1^2(\mathscr{F}_X) \cdot A^{n-2} = \tilde{c}_2(\mathscr{F}_X) \cdot A^{n-2} = 0,$$

这可由关于 (X,Δ) 的陈类的假设得出，即假设 (1.2) 中等号成立。结合 (4.5)–(4.6)，后一个等式意味着（真正的）Higgs 层 $(\mathscr{F}_Y, \Theta_Y) := \mathrm{End}(\mathscr{E}_Y, \vartheta_Y)$ 在 Y 上满足

$$\tilde{c}_1^2(\mathscr{F}_Y) \cdot (f^*A)^{n-2} = \tilde{c}_2(\mathscr{F}_Y) \cdot (f^*A)^{n-2} = 0.$$

此外，根据 [GT22，第 4.4 节、定理 C 的证明，层 $\Omega^{[1]}_{(X,\Delta,f)}$ 是 (f^*A)-半稳定的。回顾 $c_1\left(\Omega^{[1]}_{(X,\Delta,f)}\right) = f^*A$，见 [CKT21，(3.11.5)]。由此可得，$(\mathscr{E}_Y, \vartheta_Y)$ 是 (f^*A)-Higgs 稳定的；参见 [GKPT19，推论 7.2] 的证明中的计算。这反过来意味着自同态层 $(\mathscr{F}_Y, \Theta_Y)$ 是 (f^*A)-Higgs 多重稳定的。事实上，最后一个断言可以通过限制到一条一般完全交曲线，并对 Higgs 层使用 Mehta–Ramanathan 定理 [GKPT19，定理 5.22]，从通常的光滑情形推出。另见 [GKPT20，引理 4.7]。

对于 klt 空间的 Simpson 对应 [GKPT20，定理 5。1], Higgs 层$(\mathscr{F}_Y, \Theta_Y)\big|_{Y_{\mathrm{reg}}}$是局部自由的，并且由一个温和的、纯虚的调和丛诱导。根据 [GKPT20，命题 3。17], 反身拉回 $g^{[*]}\mathscr{F}_Y$ 于 $\mathscr{F}_Y$ 一个极大拟 étale 覆盖 $g\colon\ Z \to Y$（其存在性由 [GKP16，定理 1。5]保证）是局部自由的。

现在，令 $W := X \setminus H \subset X$和 $h := f \circ g\colon Z \to X$。在 $h^{-1}(W)$ 上，我们有：

$$g^{[*]}\mathscr{E}_Y \cong g^{[*]}\big(\Omega_Y^{[1]} \oplus \mathscr{O}_Y\big) \cong \Omega_Z^{[1]} \oplus \mathscr{O}_Z.$$

因此 $g^{[*]}\mathscr{F}_Y \cong \mathrm{End}\big(\Omega_Z^{[1]} \oplus \mathscr{O}_Z\big)$，其中包含切层 $\mathscr{T}_Z$ 作为一个直和项（同样，仅在 $h^{-1}(W)$上）。由于局部自由层的直和项由中山引理可知是局部自由的，针对 klt 空间的 Lipman–Zariski 猜想的证明 [GKKP11、GK14、Dru14] 意味着 $h^{-1}(W)$ 是光滑的。

根据构造，映射 $h^{-1}(W) \to W$ 恰好在 $\Delta|_W$ 处分歧。由推论 2.20 可知，其伽罗瓦闭包 $W \to W$ 也具有这一性质；而 W 是光滑的，因为它是光滑空间 $h^{-1}(W)$ 的拟 étale（因而也是 étale）覆盖。这表明 $(W, \Delta|_W)$ 具有商奇点。到目前为止，我们只要求 H 是其（无基点）线性系中的一般元素。因此，我们可以通过选取一般元素 H_1、 ..... 、$H_{n+1} \in |H|$ 重复这一论证，并得出结论：(X, Δ) 具有商奇点。这意味着，按 [BG08，第 109] 页中的定义，(X, Δ) 是一个“复轨形”。

步骤 4：$(X,\ \Delta)$ 是一个球商。 由于 $(X,\ \Delta)$ 是一个复轨形，且 $K_X + \Delta$丰沛，因此存在一个轨形 Kähler–Einstein 度量 ω 使得 $\mathrm{Ric}\,\omega = -\omega$，参见 [BG08，定理 5.2。2]。令 $X^* := X_{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{supp}(\Delta)$，于是 ω 是 X^*上的真正凯勒度量。利用 ω可以计算轨形陈类，特别是根据通常的陈形式计算可得

$$\begin{aligned} 0 &= \big(2(n+1)\,\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta) - n\,\tilde{\mathrm{c}}_1^2(X,\Delta)\big) \cdot [K_X + \Delta]^{n-2} \\ &= \int_{X^*} \big(2(n+1)\mathrm{c}_2(X,\omega) - n\mathrm{c}_1^2(X,\omega)\big) \wedge \omega^{n-2} \\ &= C_n \int_{X^*} |\Theta^\circ(T_X,\omega)|_\omega^2\, \omega^n, \end{aligned}$$

其中 $C_n > 0$ 是一个维数常数，而

$$\Theta^\circ(T_X,\omega) := \Theta(T_X,\omega) - \frac{1}{n}\mathrm{tr}_{\mathrm{End}}(\Theta(T_X,\omega)) \cdot \mathrm{id}_{T_X}$$

是 (T_X, ω) 的无迹陈曲率张量。

因此，ω 具有常负双截面曲率。这意味着 ω 在 X^* 上具有负黎曼截面曲率，例如参见 [Gol99，§2.4。2]。（注意，也可以说 $(X^*,\ \omega)$ 由 [Boc47，定理 6] 可知局部等距于复双曲空间$(\mathbb{B}^n,\ \omega_{\mathrm{hyp}})$，[Boc47，定理 6]，然后利用复双曲度量的通常曲率性质得出结论。）

设$X_\Delta \xrightarrow{\pi} X$ 是 (X, Δ) 的轨形万有覆盖，参见 定义 2.17。根据上一段，(X, Δ, ω) 是一个黎曼截面曲率非正的轨形。因此，由 [BH99，第 603] 页的推论 2.16 可知，(X, Δ) 是可发展的。现在，$(X_\Delta, \pi^*\omega)$ 是一个具有恒定负双全纯截面曲率的单连通凯勒流形

，因此它全纯等距于 $(\mathbb{B}^n, \omega_{\mathrm{hyp}})$ ，根据 [KN69，定理 7。9]。特别地，$\widetilde{X}_\Delta \cong \mathbb{B}^n$，从而证明了 定理 A。□

5. 球商的刻画

在本节中，我们证明推论 1.3。我们分别证明以下蕴含关系：(1.3.1) $\Rightarrow\Rightarrow$ (1.3.2) (1.3.3) $\Rightarrow$ (1.3.1) 。

(1.3.1) $\Rightarrow$ (1.3.2)。 这就是定理 A。

(1.3.2) $\Rightarrow$ (1.3.3)。设 $\pi\colon \mathbb{B}^n \to X$ 是 (X, Δ) 的轨形万有覆盖。（特别地，(X, Δ) 是可发展的。）由 (2.16.2)，映射 π 是伽罗瓦的，其伽罗瓦群为$\Gamma \cong \pi_1^{\mathrm{orb}}(X, \Delta)$。注意，$\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n) = \mathrm{PU}(1, n)$ 是一个有限生成线性群。此外，由 (2.15.4)，作用 $\Gamma \quad \mathbb{B}^n$ 的稳定子均为有限群。由塞尔伯格引理 [Alp87], ，存在一个有限指数正规子群 $\Gamma' \subset \Gamma$ ，它是无挠的。这意味着 Γ' 在 $\mathbb{B}^n$上的作用是自由的。我们得到 π的如下分解：

$$\mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n/\Gamma' \xrightarrow{f} \mathbb{B}^n/\Gamma = X,$$

其中，f 是射影流形 $Y := \mathbb{B}^n/\Gamma'$ 上有限群 $G := \Gamma/\Gamma'$ 作用下的商空间。由于第一个映射是 étale，它表明 $\mathbb{B}^n$ 是 Y 的万有覆盖。结合 π 恰好在 Δ 处分歧这一事实，我们推得 f 是轨形 étale。

(1.3.3) $\Rightarrow$ (1.3.1)。 回顾一下，K_Y是丰沛的，并且 Y满足 Miyaoka– Yau 不等式中的等号，参见例如 [Kol95, (8.8.3)]。由于 $f\colon Y \to X$ 是轨形 étale，因此 $K_X + \Delta$ 也是丰沛的，并且 Miyaoka–Yau 不等式对(X, Δ)同样取等号。□

6. Uniformization of minimal models

本节有两个（相关的）目的：首先，去除 Δ 的不可约分支为 $\mathbb{Q}$-Cartier 这一假设，以推广定理 1.2。其次，证明推论 1.4。

6.A. 轨形 Miyaoka–Yau 不等式。

在定理 1.2中，或者更一般地，在 [GT22，定理 B], 中，可以不作替代地去掉 Δ_i 为 $\mathbb{Q}$-Cartier 的假设。我们给出这一结果的两种证明，第一种依赖于 [BCHM10]，第二种则依赖于 命题 2.6。

定理 6.1（Miyaoka–Yau 不等式）。 设（X， Δ）是一个具有标准系数的 n 维射影 *klt* 对，并假设 $K_X+\Delta$ 大且 *nef*。则有以下不等式：

$$\big(2(n+1)\,\tilde{c}_2(X,\Delta) - n\,\tilde{c}_1^2(X,\Delta)\big)\cdot[K_X+\Delta]^{n-2} \geq 0. \tag{6.1}$$

第一种证明。考虑一个 $\mathbb{Q}$-阶乘化 $f\colon X' \to X$，参见 [BCHM10，推论 1.4.3] ，应用于 $\mathfrak{E} = \emptyset$。令 $\Delta' := f_*^{-1}\Delta$。映射 f是小的，即 $\mathrm{Exc}(f) \subset X'$的余维至少为二。因此，$(X', \Delta')$ 保留了对 (X, Δ) 所作的所有假设，此外 X'还是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。特别地， $K_{X'} + \Delta' = f^*(K_X + \Delta)$ 大且 nef。此外， $f(\mathrm{Exc}(f)) \subset X$的余维为 ≥ 3，因此 $f_*\big(\tilde{c}_2(X', \Delta')\big) =$

$\tilde{c}_2(X,\Delta)$ 作为同调类，对于 $\tilde{c}_1^2(X',\Delta')$ (参见 备注 3.4）。由投影公式可得

$$\big(2(n+1)\,\tilde{c}_2(X,\Delta)-n\,\tilde{c}_1^2(X,\Delta)\big)\cdot[K_X+\Delta]^{n-2}=\\ \big(2(n+1)\,\tilde{c}_2(X',\Delta')-n\,\tilde{c}_1^2(X',\Delta')\big)\cdot[K_{X'}+\Delta']^{n-2}.$$

右侧根据 [GT22，定理 B]非负。 □

第二个证明。 注意，在 [GT22], 中，假设 Δ_i be $\mathbb{Q}$-Cartier 仅用于构造一个严格适配态射，其额外分歧支撑在一般非常 ample 除子上（参见该文的例 2.11）。然而，利用 命题 2.6 ，即使没有这一假设，我们也能构造这样的覆盖。之后， [GT22，定理 B] 的证明可逐字适用。 □

6.B. **极小模型的一致化**。 为了证明 推论 1.4，我们采用 [GKPT20 中步骤 1（第 1086] 页）所阐述的策略。这意味着我们首先必须证明以下引理。

引理 6.2。 在 推论 *1.4*的情形下，典范模型 $(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})$ 也满足(1.2)中的等号。

暂且假设引理 6.2成立，然后我们应用定理 A 于$(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})$ 得出结论。由此完成推论 1.4的证明。

注6.3。如果我们证明定理 A 时仅限于 [GT22] (即假设 Δ_i 是 $\mathbb{Q}$-Cartier)，那么上述论证就会行不通。这是因为 Δ_{can} 的不可约分支可能不是 $\mathbb{Q}$-Cartier（即使 Δ也是如此）。

引理 *6.2* 的证明。与推论 1.4的陈述一样，令$(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})$ 表示对 (X,Δ) 的典范模型，并令 $\pi\colon(X,\Delta)\to(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})$ 为典范态射（$K_X+\Delta$ 是大且 nef，因此某个倍数无基点，故 π 是一个态射）。根据构造，$K_{X_{\mathrm{can}}}+\Delta_{\mathrm{can}}$ 是丰沛的，且 π 是保典的：

$$K_X+\Delta=\pi^*\big(K_{X_{\mathrm{can}}}+\Delta_{\mathrm{can}}\big). \tag{6.2}$$

对 $(X_{\mathrm{can}},\ \Delta_{\mathrm{can}})$ 仍具有 klt 奇点。根据 定理 1.2，我们知道不等式 (1.2) 对 $(X_{\mathrm{can}},\ \Delta_{\mathrm{can}})$ 成立，因此接下来只需验证：

$$\big(2(n+1)\,\tilde{c}_2(X,\Delta)-n\,\tilde{c}_1^2(X,\Delta)\big)\cdot[K_X+\Delta]^{n-2}\geq\\ \big(2(n+1)\,\tilde{c}_2(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})-n\,\tilde{c}_1^2(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})\big)\cdot[K_{X_{\mathrm{can}}}+\Delta_{\mathrm{can}}]^{n-2}. \tag{6.3}$$

鉴于(6.2)，这相当于证明

$$\tilde{c}_2(X,\Delta)\cdot[K_X+\Delta]^{n-2}\geq\tilde{c}_2(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})\cdot[K_{X_{\mathrm{can}}}+\Delta_{\mathrm{can}}]^{n-2}. \tag{6.4}$$

此时，考虑由线性系 $|m(K_{X_{\mathrm{can}}}+\Delta_{\mathrm{can}})|$ （对于 $m\gg1$ 充分可除时）切出的一个一般曲面 $\Sigma\subset X_{\mathrm{can}}$ ，并考察其原像 $S:=\pi^{-1}(\Sigma)\subset X$ 在 X 中。对 [2] (S,Δ) 和 $(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})$ 都是轨形曲面，并且分别包含于

[2]为避免记号繁琐，未将除子 Δ 和 Δ_{can} 在 S 和 Σ 上的限制明确写出。

的轨形空间轨迹 $(X,\ \Delta)$ 和 $(X_{\mathrm{can}},\ \Delta_{\mathrm{can}})$ 中。显然，$(\Sigma,\ \Delta_{\mathrm{can}})$ 不过就是 $(S,\ \Delta)_{\mathrm{can}}$，因此我们可以应用 [Meg99，定理 4。2]这就得到

$$4\,\tilde{\mathrm{c}}_2(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})-\tilde{\mathrm{c}}_1^2(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})\leq 4\,\tilde{\mathrm{c}}_2(S,\Delta)-\tilde{\mathrm{c}}_1^2(S,\Delta)\,.$$

由于态射 $\pi|_S\colon (S,\Delta)\to(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})$ 是保典的，上述不等式可写为

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})\leq\tilde{\mathrm{c}}_2(S,\Delta)\,. \tag{6.5}$$

采用上述记号，不等式 (6.4) 可归结为以下形式：

$$\tilde{\mathrm{c}}_2\big(\mathcal{T}_{(X,\Delta)}\big|_S\big)\geq\tilde{\mathrm{c}}_2\big(\mathcal{T}_{(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})}\big|_\Sigma\big)\,.$$

如下所示，最后这个不等式可通过考察（轨形）法正合列来验证： [GKPT20，第 1086–1087] 页

$$0\longrightarrow\mathcal{T}_{(S,\Delta)}\longrightarrow\mathcal{T}_{(X,\Delta)}\big|_S\longrightarrow\mathcal{N}_{(S,\Delta)|(X,\Delta)}\longrightarrow 0, \tag{6.6}$$

$$0\longrightarrow\mathcal{T}_{(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})}\longrightarrow\mathcal{T}_{(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})}\big|_\Sigma\longrightarrow\mathcal{N}_{(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})|(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})}\longrightarrow 0. \tag{6.7}$$

值得注意的是，两个正合列 (6.6) 和 (6.7) 都是轨形向量丛的正合列，因为曲面 S （分别为 Σ）包含在（X,Δ）（分别为（$X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}}$））的轨形轨迹中，因此中间项是真正的轨形丛。现在只需注意，法丛 $\mathcal{N}_{(S,\Delta)|(X,\Delta)}$ 和 $\mathcal{N}_{(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})|(X_{\mathrm{can}},\ \Delta_{\mathrm{can}})}$满足

$$\mathcal{N}_{(S,\Delta)|(X,\Delta)}\cong\pi^*\big(\mathcal{N}_{(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})|(X_{\mathrm{can}},\Delta_{\mathrm{can}})}\big)\,. \tag{6.8}$$

结合 (6.2)和 (6.5)，最终可得不等式 (6.4) 成立。至此，引理 6.2的证明完成。□

注记。 一般而言，典范态射 $\pi|_S\colon (S,\Delta)\to(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})$ 并非 轨形态射，但法丛是定义在 S（分别是 Σ）上的实际局部自由层，而不仅仅是定义在轨形 (S,Δ)（分别是 $(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})$）上的。$\mathcal{N}_{(\Sigma,\Delta_{\mathrm{can}})|(X_{\mathrm{can}},\ \Delta_{\mathrm{can}})}$ 的陈类因此来自 Σ，并且可以按通常方式拉回到 S。

7. 环面商的刻画

在本节最后，我们首先证明卡拉比–丘簇和不可约全纯辛簇的轨形第二陈类具有正性。利用分解定理 [BGL22]，，我们便可轻易推出 定理 1.6 和 定理 B。最后，我们证明 推论 1.7。

7.A. **第二陈类的正性——射影情形。** 若 X 是射影的，那么我们知道它具有定义 3.6 意义下的轨形解消，并且可以利用这一点来理解 定义 3.6中的轨形第二陈类 X。

命题 7.1. 设 X 是一个具有 *klt* 奇点、维数为 n 的射影不可约卡拉比–丘（分别为不可约全纯辛）代数簇，并设 $\beta\in\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$是一个 *Kähler* 类。则有

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X)\cdot\beta^{n-2}>0.$$

证明。设 $\pi\colon X \to X$ 是一个轨形解消，其存在性由 [LT19] 保证，因为 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\sim X$ 是射影的。设 β 是 X 上的一个 Kähler 类，并令 $\omega \in \beta$（分别为 $\widehat{\omega} \in \beta$）是一个 Kähler 形式。回顾一下，由 Bochner 原理 [CGGN22, Thm. A] 可直接推出，T_X 关于 β是稳定的。这意味着 $T_{\widehat{X}}$ 关于 $\pi^*\beta$是稳定的，因此当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，$\sim T_{\widehat{X}}$ 关于 $\pi^*\beta + \varepsilon\beta$ 是稳定的，参见例如 [CGG22, Prop. 3.4]。特别地，如 [ES18, Thm. 4.2], 中所述，存在一个关于 $\omega_\varepsilon := \pi^*\omega + \varepsilon\widehat{\omega}$ 的轨形 Hermite–Einstein 度量 h_ε，定义在 $T_{\widehat{X}}$ 上。由引理 3.7 可得

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X) \cdot \beta^{n-2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\widehat{X}} \mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\big(T_{\widehat{X}}, h_\varepsilon\big) \wedge \omega_\varepsilon^{n-2}.$$

<escape>与 [CGG22，命题 311] 中完全相同的论证，只需用轨形形式代替通常形式，即可表明后一个量是非负的；若其为零，则有$\tilde{\mathrm{c}}_2(X)\cdot\gamma^{n-2} = 0$ 对 任意 Kähler 类 γ 成立，其中 X。我们断言这种情况不可能发生。事实上，由于 X 是射影的，因此该结论适用于形如 $\mathrm{c}_1(H)$ 的类，其中 H是 X上的一个充足除子。于是 [LT18] 将意味着 X 是一个阿贝尔簇的商空间，这显然构成矛盾。□</escape>

7.B. **第二陈类的正性——IHS 情形**。我们将使用变形论证，从射影情形推出一般的凯勒情形，如 [CGG22，命题 4。4]。

命题 7.2. 设 X 是一个维数为 n、具有 *klt* 奇点的不可约全纯辛代数簇，并设 $\beta \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ 是一个 *Kähler* 类。那么我们有

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X) \cdot \beta^{n-2} > 0.$$

证明。 我们首先证明存在一个常数 $C_X \in \mathbb{R}$，使得

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X) \cdot a = C_X q_X(a)^{\frac{n}{2}-1} \tag{7.1}$$

对于任意 $a \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$，其中 $q_X\colon \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ 是 Beauville–Bogomolov–Fujiki 二次型。此外，我们将看到，当 X 在局部平凡族中移动时，C_X 为常数。

一旦证明 $\tilde{\mathrm{c}}_2(X) \cdot a$ 的构造在沿局部平凡变形的平行移动下保持不变，结论便可由标准论证得出（参见例如 [CGG22, 命题 4。4] 及其中的参考文献）；下面我们来证明这一点。

设 $\pi\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{D}$ 是一个真满射，它是$X = \pi^{-1}(0)$的局部平凡变形。记 $\mathfrak{X}^{\mathrm{orb}}$ (分别为 X_t^{orb}) 的 orbifold 轨迹，其中根据 $\mathfrak{X}$ (分别为 X_t) 的一个 Zariski 开子集 $\mathfrak{X}$(分别为 X_t)引理 3.8。接下来，令 $Z := \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}^{\mathrm{orb}}$并且 $Z_t = Z \cap X_t$。由于该族局部平凡，我们推得 $\mathfrak{X}^{\mathrm{orb}} \cap X_t = X_t^{\mathrm{orb}}$，从而 $Z_t = X_t \setminus X_t^{\mathrm{orb}}$。

断言7.3。缩小 $\mathbb{D}$ 后，存在一个 $\mathcal{C}^\infty$ 微分同胚 $F\colon \mathfrak{X} \to X_0 \times \mathbb{D}$，它与到 $\mathbb{D}$ 的投影相交换，使得

(i) F保留 orbifold轨迹，即 $F(X_t^{\mathrm{orb}}) = X_0^{\mathrm{orb}} \times \{t\}$。

(ii) $F|_{X_t^{\mathrm{orb}}}\colon X_t^{\mathrm{orb}} \to X_0^{\mathrm{orb}}$在轨形意义下是光滑的。

在这一奇异情形下，我们指的是 F 是一个光滑映射在 $\mathbb{C}^N$ 中的局部嵌入下的限制，并且该映射在 $\mathfrak{X}$ 与 $X_0 \times \mathbb{D}$ 之间诱导出一个同胚。

断言 断言 7.3的证明。 我们先从微分同胚 F的存在性开始。为此，由于 $\mathcal{C}^\infty$ ，可以找到一个真 ι嵌入 $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ ： [ABT79]。接下来，将 π光滑地延拓为一个光滑映射 f，其支集包含于 $\iota(X)$ 的一个邻域内。由于 π ： $\mathfrak{X} \to \mathbb{D}$是局部平凡的，可以对 $\mathfrak{X}$ 进行分层，使得 π 在每个层上的限制都是真且光滑的（在解析意义下，即它是一个次沉浸）。于是，由 Thom 的第一同伦引理可得 F的存在性，参见 [Mat12，命题 11。1]。

为了证明论断中的两项，我们先简要回顾F 在 *loc. cit.* 中的构造，并着重说明与我们目的相关的重要要点。首先，对 $\mathfrak{X}$的解析开集覆盖$(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ，取局部全纯平凡化 g_α: $U_\alpha \to (U_\alpha \cap X_0) \times \mathbb{D}$，并令$Z \subset \mathfrak{X}$为该解析集的标准分层。映射 g_α 对所有k都在 $Z^{(k)}$ 与 $Z_0^{(k)} \times \mathbb{D}$ 之间诱导局部双全纯映射；特别地，全纯向量场 $v_\alpha := g_\alpha^* \frac{\partial}{\partial t}$ 满足

$$v_\alpha\big|_{Z^{(k)}} \in \mathrm{H}^0\Big(Z^{(k)}, \mathscr{T}_{Z^{(k)}}\Big)$$

接下来，设 \((\chi_\alpha)\) 为从属于开覆盖 \((U_\alpha)_{\alpha\in A}\) 的单位分解。 $\mathcal{C}^\infty$向量场 $v := \sum \chi_\alpha v_\alpha$ 仍然满足

$$v|_{Z^{(k)}} \in \mathcal{C}^\infty(Z^{(k)}, T_{Z^{(k)}}).$$

如 [Mat12], 其流 (F_t) 在 $\pi^{-1}(\mathbb{D}_{1/2})$ 上有定义，且对 $|t| < 1/2$保持不变，对所有 $Z^{(k)}$ ，因此它也对 k保持不变，故它也保持 Z 。等价地， v 的流保持$\mathfrak{X}^{\mathrm{orb}}$，这就证明了 (i)。

此外， $v|_{\mathfrak{X}^{\mathrm{orb}}}$ 在轨形意义下是光滑的（即拉回到局部光滑覆盖上时是光滑的），而任意向量场未必具有这一性质。这一点是直接的，因为 v_α 满足该性质（它们可提升为拟 étale 局部覆盖上的全纯向量场），而乘以光滑函数不会造成影响。为证明（ii），令 $x_0 \in X_0^{\mathrm{orb}}$ 为任意一点，并令 $U \subset \mathfrak{X}^{\mathrm{orb}}$ 为 x_0 的一个足够小的$\widehat{\ }$连通开邻域，其允许一个光滑的拟 étale 覆盖 p ： $U \to U$。我们可以找到 $U' \Subset U$，使得对于 $|t| \le s$ （其中 $s > 0$ 足够小），流 F_t 在 U 上有定义，并满足 $F_t(U') \subset U$。记住， $\widehat{v} := p^* v|_{U_{\mathrm{reg}}}$ 可延拓为 U 上的光滑向量$\widehat{\ }$场，我们仍将其记作 $\widehat{v}$，并将其流记作 F_t。由于 p 是 U_{reg}上的 étale 覆盖，流的唯一性保证我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U') & \xrightarrow{\widehat{F}_t} & p^{-1}(F_t(U')) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ U' & \xrightarrow{F_t} & F_t(U'). \end{array}$$

事实上，由于 p 是 U_{reg} 上的局部微分同胚，我们得到

$$F_t \circ p = p \circ \widehat{F}_t \text{ on } p^{-1}(U_{\mathrm{reg}}),$$

因此，由上述映射的连续性可知，这对处处成立。总之， F_t： $U' \to F_t(U')$是一个$\widehat{\ }$同胚，因此可提升为微分同胚 F_t ，介于流形$p^{-1}(U')$与其像 $p^{-1}(F_t(U'))$之间。也就是说， F_t诱导了一个轨形微分同胚，介于U' 与 $F_t(U')$之间。现已证明(ii) 。 □

现在考虑轨形微分同胚 $F_t^{\mathrm{orb}}\colon X_t^{\mathrm{orb}} \to X_0^{\mathrm{orb}}$，并设 h_0 是 $T_{X_0^{\mathrm{orb}}}$上的一个轨形厄米度量。最后，设 α_0 是 X_0^{orb}上一个具有紧支撑、代表类 $a_0 \in \mathrm{H}^{2n-4}(X_0,\mathbb{R})$ 的闭轨形形式。我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{c}}_2(X_0)\cdot a_0 &= \int_{X_0^{\mathrm{orb}}} \mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\left(X_0^{\mathrm{orb}}, h_0\right)\wedge\alpha_0\\ &= \int_{X_t^{\mathrm{orb}}} (F_t^{\mathrm{orb}})^*\left(\mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\left(X_0^{\mathrm{orb}}, h_0\right)\wedge\alpha_0\right)\\ &= \int_{X_t^{\mathrm{orb}}} \mathrm{c}_2^{\mathrm{orb}}\left(X_t^{\mathrm{orb}}, (F_t^{\mathrm{orb}})^* h_t\right)\wedge (F_t^{\mathrm{orb}})^*\alpha_0\\ &= \tilde{\mathrm{c}}_2(X_t)\cdot F_t^* a_0\end{aligned}$$

其中，最后一行源于我们有如下交换图这一事实

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{H}^{2n-4}_{\mathrm{dR,c}}\left(X_t^{\mathrm{orb}},\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{2n-4}(X_t,\mathbb{C})\\ {\scriptstyle (F_t^{\mathrm{orb}})^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F_t^*}\\ \mathrm{H}^{2n-4}_{\mathrm{dR,c}}\left(X_0^{\mathrm{orb}},\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{2n-4}(X_0,\mathbb{C})\end{array}$$

因此 (7.1) 得证。

最后，我们必须证明 $C_X > 0$。由于 C_X 在局部平凡变形下保持不变，因此可以利用 [BL22，推论 1。3] 和 [BGL22，推论 3。10] 将 X 局部平凡地变形为一个射影不可约全纯辛簇 Y。命题 7.1 表明 $C_Y > 0$，由此完成该命题的证明。□

7.C. **定理 1.6 与定理 B的同时证明**。这里我们紧随[CGG22，定理 5 的证明。2]。

设 (X,Δ) 如设定 1.5 中所述，并且 $\tilde{\mathrm{c}}_1(X,\Delta) = 0$。记 $X^\circ := (X,\Delta)_{\mathrm{orb}}$ 为该对具有商奇点的开子集，并令 $\Delta^\circ := \Delta|_{X^\circ}$。已在 [CGP23, 推论 1.18] 中证明，这样的对具有丰沛性，特别是 $K_X+\Delta$ 为扭元。于是我们可以应用命题 2.5，并推得存在一个轨形 étale 映射 $f\colon Y \to X$，使得

$$\mathscr{O}_Y \cong K_Y \cong f^*(K_X+\Delta).$$

仿照公式的证明(4.5)，可得：

引理 7.4. 我们有如下恒等式

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(Y)\cdot f^*(\alpha)^{n-2} = \deg(f)\,\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta)\cdot\alpha^{n-2}. \tag{7.2}$$

证明。设 a 是一个次数为 $2n-4$、在X° 中具有紧支撑且代表 α^{n-2} 的轨形微分形式，并设 h 是 $\Omega^1_{(X^\circ,\Delta^\circ)}$ 上的轨形厄米度量。考虑空间 $Y^\circ = f^{-1}(X^\circ)$；通过与 X° 的局部光滑图表取纤维积，由分歧轨迹纯性可轻易推出 Y° 具有光滑轨形结构，并且

f^*h 在 Ω_{Y° 上诱导出一个光滑厄米度量。因此，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{c}}_2(Y)\cdot f^*(\alpha)^{n-2} &= \int_{Y^\circ} \mathrm{c}_2(\Omega_{Y^\circ}, f^*h)\wedge f^*a\\ &= \int_{Y^\circ\setminus f^{-1}(\operatorname{supp}\Delta)} \mathrm{c}_2(\Omega_{Y^\circ}, f^*h)\wedge f^*a\\ &= \deg(f)\int_{X^\circ\setminus\operatorname{supp}\Delta} \mathrm{c}_2\big(\Omega_{(X^\circ,\Delta^\circ)}, h\big)\wedge a\\ &= \deg(f)\int_{X^\circ} \mathrm{c}_2\big(\Omega_{(X^\circ,\Delta^\circ)}, h\big)\wedge a\\ &= \deg(f)\,\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta)\cdot\alpha^{n-2},\end{aligned}$$

这就证明了引理。 □

等式的两边 (7.2) 同时非负或为零（且$f^*(\alpha)$ 仍然是 Y 上的 Kähler 类），因此我们将用 X 替换 Y，并从现在起假设余维一处没有轨形结构，即 $\Delta = 0$。

根据 [BGL22，定理 A]，，存在一个有限伽罗瓦准étale覆盖 $f\colon X' \to X$，使得 $X' \cong T \times \prod_{i\in I} Y_i \times \prod_{j\in J} Z_j$ 其中 T 是复环面，Y_i 是 CY簇，而 Z_j 是不可约全纯辛簇。根据 [GK20，命题 5。6]，我们有

$$\tilde{\mathrm{c}}_2\big(X'\big)\cdot f^*\beta^{n-2} = \deg(f)\,\tilde{\mathrm{c}}_2(X)\cdot\beta^{n-2},$$

而 $f^*\beta$ 根据 [GK20，命题 35]，仍然是 Kähler 类。总之，假设 $X = X'$ 是分裂的并不失一般性，我们从现在起就作此假设。

由于 $\mathrm{H}^1(Y_i,\mathbb{R}) = \mathrm{H}^1(Z_j,\mathbb{R}) = 0$，空间 $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ 上的 Künneth分解使我们可以写成

$$\beta = p_T^*\beta_T + \sum_{i\in I} p_{Y_i}^*\beta_{Y_i} + \sum_{j\in J} p_{Z_j}^*\beta_{Z_j}$$

其中，β_T、β_{Y_i} 和 β_{Z_j} 分别是 T、Y_i 和 Z_j 上的 Kähler 类。特别地，我们得到

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X)\cdot\beta^{n-2} = \sum_{i\in I}\lambda_i\,\tilde{\mathrm{c}}_2(Y_i)\cdot\beta_{Y_i}^{\dim(Y_i)-2} + \sum_{j\in J}\mu_j\,\tilde{\mathrm{c}}_2(Z_j)\cdot\beta_{Z_j}^{\dim(Z_j)-2},$$

其中 $\lambda_i,\ \mu_j > 0$ 是正组合系数。 命题 7.1 和 命题 7.2 说明上述量非负，且除非 $I = J = \emptyset$；也就是说，除非 $X = T$ 是复环面。 定理 1.6 和 定理 B 至此得证。 □

7.D. **推论 1.7 的证明。** 最后，我们通过分别证明各个蕴含关系来证明推论 1.7，方法与推论 1.3类似。

(1.7.1) $\Rightarrow$ **(1.7.2)**。 这就是定理 B。

(1.7.2) $\Rightarrow$ **(1.7.3)**。令 $\pi\colon\ \mathbb{C}^n \to (X,\Delta)$ 为 (X,Δ) 的万有覆盖。赋予轨形 (X,Δ) 一个度量后，我们推知群 $\Gamma := \pi_1^{\mathrm{orb}}(X,\Delta)$ 是 $\mathbb{C}^n \rtimes \mathrm{U}(n)$ 的一个离散余紧子群（同构意义下）。于是可以应用 Bieberbach定理，并得到一个有限指数正规子群 $\Lambda \subset \Gamma$，它是一个格 $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$，通过平移作用。万有覆盖经过相应的商空间分解为：

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/\Lambda \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{C}^n/\Gamma = X,$$

其中 f 是有限群 $G\colon=\Gamma/\Lambda$ 在复环面 $T\colon=\mathbb{C}^n/\Lambda$ 上的作用所得到的商空间。结合 π 恰好在 Δ 处分歧这一事实，我们推知 f 是轨形 étale 的。

(1.7.3) $\Rightarrow$ (1.7.1)。若 $f\colon T\to X$ 是来自复环面的伽罗瓦轨形 étale 映射（对应于对 (X,Δ)），则截面 $(\mathrm{d}z_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z_n)^{\otimes m}$ 是 G-不变的，其中 $G:=\mathrm{Gal}(f)$ 且 $m:=|G|$。这证明了 $m(K_X+\Delta)\sim 0$，从而 $\mathrm{c}_1(K_X+\Delta)=0$。令 ω_T 为 T 上的任意凯勒度量，并考虑

$$\omega_f:=\sum_{g\in G} g^*\omega_T.$$

它下降为 (X,Δ) 上的轨形凯勒度量 ω_X，且由于映射 f 是轨形 étale 映射，我们有：

$$\tilde{\mathrm{c}}_2(X,\Delta)\cdot[\omega_X]^{n-2}=\frac{1}{\deg(f)}\,\tilde{\mathrm{c}}_2(T)\cdot[\omega_f]^{n-2}=0.$$

由于 $[\omega_X]$ 是一个 Kähler 类，证明至此完成。 □

参考文献

[ABT79] F. Acquistapace、F. Broglia 和 A. Tognoli。实解析空间的嵌入定理。比萨高等师范学校科学年刊（*4* 6 3 415 426, 1979 ↑ 26），( ): – 。

[87] Alp Roger C. Alperin。塞尔伯格引理的初等论述。数学教学（第二辑），33(3- 4 269 273, 1987 ↑ 22): – 。

[69] Art M. Artin。完备局部环上结构的代数逼近。高等科学研究所数学出版物，(36 23 58, 1969 ↑ 17): – 。

[78] Aub Thierry Aubin。紧 Kähler 流形上的 Monge-Ampère 型方程。数学科学通报（*2* 102 1 63 95, 1978 ↑ 1），( ): – 。

[10] BCH C. Birkar、P. Cascini、C. Hacon 和 J. McKernan。对数一般型簇的极小模型的存在性。美国数学会杂志，23 405 468, 2010 ↑ 22 : – 。

[08] BG Charles P. Boyer 和 Krzysztof Galicki。*Sasakian* 几何。牛津数学专著。牛津大学出版社，牛津，2008 ↑ 21 。

[22] BGL Benjamin Bakker、Henri Guenancia 和 Christian Lehn。Kähler Calabi-Yau 簇的代数逼近与分解定理。数学发明，228 3 1255 1308, ( ): – 。 , , , ,

[99] 2022 ↑ 3 17 24 27 28 BH Martin R. Bridson 和 André Haefliger。非正曲率度量空间，载于《数学科学基础原理》第 319 卷，数学科学基础原理 /数学科学基本原理 / 1999 ↑ 21 。施普林格出版社，柏林，。

[22] BL Benjamin Bakker 和 Christian Lehn。辛簇的整体模空间理论。纯粹与应用数学杂志，790 223 265, 2022 ↑ 27 : – 。

[96] Bla Raimund Blache。孤立奇点复射影轨形上凝聚层的陈类与 Hirzebruch–Riemann–Roch 定理。数学杂志，222 1 7 57, 1996 ↑ 12 ( ): – 。

[47] Boc S. Bochner。厄米度量中的曲率。美国数学会通报，53 179 195, 1947 : – 。 ↑ 21

[21] Bra Lukas Braun。川俣对数终端奇点的局部基本群是有限群。数学发明，226 845 896, 2021 ↑ 11 : – 。

[22] CGG Benoît Claudon、Patrick Graf 和 Henri Guenancia。复环面商的数值刻画。瑞士数学评论，(4 769 799, 2022 ↑ 2 15 25 27): 第 – 页。 , , , CGGN Benoît Claudon、Patrick Graf、Henri Guenancia 和 Philipp Naumann。第一陈类为零的 Kähler 空间：Bochner 原理、阿尔巴尼斯映射与基本群。纯粹与应用数学杂志，786 245 275, 2022 ↑ 11 17 25 : – 。 , , CGP Junyan Cao、Henri Guenancia 和 Mihai Paun。奇异 Kähler-爱因斯坦度量的变化：零 Kodaira 维数（附 Valentino Tosatti 的附录）。欧洲数学会杂志（*JEMS*），25(2)：633–679，2023。↑ 27

[CKT21] Benoît Claudon、Stefan Kebekus 和 Behrouz Taji。一般正性及其在模空间双曲性研究中的应用。载于《代数簇的双曲性》，全书第 56 卷《综述与综合》，第 169–208 页。法国数学会，巴黎，2021。↑6、9、20。

[08] Cla Benoît Claudon。光滑轨形的约化。数学手稿，Γ(127)：521–532，2008。↑5、11。

[94] DG Gerd Dethloff 和 Hans Grauert。半正规复空间。载于《多复变 VII》，数学科学百科全书第 74 卷，第 183–220 页。施普林格出版社，柏林，1994。↑7、11。

[14] Dru Stéphane Druel。对数典范空间上的扎里斯基–利普曼猜想。伦敦数学会通报，46(4)：827–835，2014。↑21。

[18] ES Philippe Eyssidieux 和 Francesco Sala。Kähler Deligne–Mumford 代数栈上的瞬子与带框架层。图卢兹数学学院年刊，数学版（*6*，27(3)：599–628，2018）。↑25。

[22] Fuj Osamu Fujino。复解析空间之间射影态射的极小模型纲领。arXiv: 2201.11315 [math.AG]，2022。↑11。一月。

[14] GK Patrick Graf 和 Sándor J. Kovács。关于 1-形式与 Lipman–Zariski 猜想的最优延拓定理。数学文献，19(4)：815–830，2014。↑21。：–。

[20] GK Patrick Graf 和 Tim Kirschner。三维复环面的有限商。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，70(2)：881–914，2020。↑2、9、12、13、14、28。

[11] GKKP Daniel Greb、Stefan Kebekus、Sándor J. Kovács 和 Thomas Peternell。对数典范空间上的微分形式。高等科学研究所数学出版物，(114)：87–169，2011。↑8、9、21。：–。

[16] GKP Daniel Greb、Stefan Kebekus 和 Thomas Peternell。川俣对数终端空间的 étale 基本群、平坦层与阿贝尔簇的商。杜克数学杂志，165(10)：1965–2004，2016。↑2、4、21。

[19] GKPT Daniel Greb、Stefan Kebekus、Thomas Peternell 和 Behrouz Taji。典范模型的 Miyaoka–Yau 不等式与一致化。法国高等师范学校科学年刊（第 4 辑），52(6)：1487–1535，2019。↑2、3、13、20。

[20] GKPT Daniel Greb、Stefan Kebekus、Thomas Peternell 和 Behrouz Taji。Higgs 层上的调和度量与一般型簇的一致化。数学年刊，378(3-4)：1061–1094，2020。↑2、3、20、21、23、24。

[99] Gol William M. Goldman。复双曲几何。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1999。↑21。牛津科学出版物。

[22] GT Henri Guenancia 和 Behrouz Taji。极小对的轨形稳定性与 Miyaoka–Yau 不等式。几何与拓扑，26(1435)：1482，2022。↑2、3、4、6、9、10、13、14、17、20、22、23：–。

[11] JK Kelly Jabbusch 和 Stefan Kebekus。特殊底流形上的族与 Campana 猜想。数学杂志，269(3-4)：847–878，2011。↑6(-)：–。

[98] KM János Kollár 和 Shigefumi Mori。代数簇双有理几何，剑桥数学论著第 134 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998。与 C. H. Clemens 和 A. Corti 合作。译自 1998 年日文原版。↑7、8、9。

[69] KN Shoshichi Kobayashi 和 Katsumi Nomizu。微分几何基础。第二卷，纯粹与应用数学跨学科论著第 15 卷。跨学科出版社，纽约州纽约，1969。↑22。

[95] Kol János Kollár。沙法列维奇映射与自守形式。M. B. Porter 讲座。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1995。↑22。

[18] LT Steven Shin-Yi Lu 和 Behrouz Taji。阿贝尔簇有限商的刻画。国际数学研究通知，第 292–319，2018。↑2、4、25。

[19] LT Chi Li 和 Gang Tian。弱 Kähler–爱因斯坦度量的轨形正则性。载于《复几何进展》，当代数学第 735 卷，第 169–178 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2019。↑15、25。

[12] Mat John Mather。拓扑稳定性札记。美国数学会通报（新系列），49(4)：475–506，2012。↑26。

[99] Meg G. Megyesi。Bogomolov–Miyaoka–Yau 不等式向奇异曲面的推广。伦敦数学会会刊（第 3 辑），78(2)：241–282，1999。↑24

[Mum83] David Mumford. 关于曲线模空间的枚举几何。载于算术与几何，第 *II* 卷，第 36 卷数学进展丛书，第 271–328 页。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，1983 ↑14 。

[92] Sho V. V. Shokurov. 三维对数变换。俄罗斯科学院学报，数学系列，56 1 105 203, 1992 ↑6 8 ( ): – 。, 丘成桐 Shing-Tung Yau. 关于紧Kähler流形的 Ricci曲率

[78] 与复Monge-Ampère方程。I.纯粹与应用数学通讯，31:339–411，1978。 ↑1

雷恩大学 ，CNRS，IRMAR — UMR 6625 ，F–35000 雷恩 ，法国及法国大学研究院 法国大学研究院
电子邮箱： benoit.claudon@univ-rennes1.fr
网址： perso.univ-rennes1.fr/benoit.claudon/

数学教席 I ，拜罗伊特大学 ，95440 拜罗伊特 ，德国
电子邮件地址： patrick.graf@uni-bayreuth.de
网址： www.graficland.uni-bayreuth.de

图卢兹数学研究所，保罗·萨巴捷大学，31062 图卢兹 Cedex 9，法国电子邮件地址：henri.guenancia@math.cnrs.fr网址： hguenancia.perso.math.cnrs.fr/