arXiv:2305.04077v1 [math.CA] 6 May 2023

凸域上的双线性 Bochner-Riesz 平均与 Kakeya 极大函数

ANKIT BHOJAK、SURJEET SINGH CHOUDHARY 和 SAURABH SHRIVASTAVA

ABSTRACT. 本文引入了与平面内凸域相关的双线性 Bochner-Riesz 平均 $\mathbb{R}^2$，并研究了其在广泛指数范围内的 L^p-有界性性质。我们证明中的一个重要方面是在双线性 Bochner-Riesz 问题的背景下使用双线性 Kakeya 极大函数。这相当于为后者建立适当的 L^p- 估计。我们还指出了双线性 Kakeya 极大函数与 Lacey 的双线性极大函数之间的一些自然联系。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 主要结果 3 3. 定理 2.1 的基本框架 6 4. 定理 2.1 的辅助结果 9 5. 定理 2.1 的证明：双线性 Bochner-Riesz 平均 11 6. 定理 2.4 的证明：固定尺度双线性 Kakeya 极大函数 19 7. 定理 2.5 的证明：双线性 Kakeya 极大函数 24 8. 定理 2.7 的证明：双线性 Kakeya 极大函数的向量值扩张 27 9. 常数的锐性示例 28 10. 进一步讨论 31 致谢 33 参考文献 33

1. INTRODUCTION

近年来，双线性 Bochner-Riesz 平均的研究已成为调和分析中的一个活跃领域。指标为 $\lambda \geqslant 0$ 的双线性 Bochner-Riesz 平均是由以下定义的双线性乘子算子。

$$\mathcal{B}^{\lambda}(f,g)(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1-|\xi|^2-|\eta|^2)_+^{\lambda} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta) e^{2\pi i x\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta,$$

日期：2023年5月9日。2010 数学主题分类。主要分类：42B15、42B25。

其中，f，$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)-$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的施瓦茨类，$(1-|\xi|^2-|\eta|^2)_+^\lambda = (1-|\xi|^2-|\eta|^2)^\lambda \chi_D(\xi,\ \eta)$。记号 D 表示 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中的单位球。

我们关注算子 $\mathcal{B}^\lambda$ 的 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \to L^{p_3}(\mathbb{R}^n)$ 有界性研究，即形如以下的估计：

$$\|\mathcal{B}^\lambda(f,g)\|_{p_3} \lesssim \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}, \tag{1.1}$$

对适当函数类中的任意 f 和 g，其中隐含常数与 f 和 g 无关。此外，我们始终假设 (1.1) 中的指数p_1, p_2和 p_3 满足 H¨older 关系 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}$，其中 $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$。

算子 $\mathcal{B}^\lambda$ 的初步结果由 Bernicot 和 Germain [2] 在 n =1 的情形下得到。随后，Bernicot、Grafakos、Song 和 Yan [1]改进了这些结果，并将其推广到更高维。在维数为 $n=1$ 的情形下，他们完整刻画了算子 $\mathcal{B}^\lambda$ 的 L^p–有界性，$\lambda>0$，其中指数属于巴拿赫三角形 $\{(p_1,p_2,p_3):\ 1 \leqslant p_1,p_2,p_3 \leqslant \infty\}$。然而，在更高维时，这些结果并不尖锐。Jeong 和 Lee [14] 针对一类指数范围 p_1,p_2,p_3 及指标 $\lambda>0$，得到了尖锐结果。特别地，他们证明 $\mathcal{B}^\lambda$ 将 $L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ 映入 $L^1(\mathbb{R}^n)$，对所有$\lambda>0$ 均成立；这在 λ 中是尖锐的。最近，Kaur 和 Shrivastava [15] 得到了算子 $\mathcal{B}^\lambda$ 及其极大变体的新结果。[15] 中的结果是目前已知的最佳结果，并且在某些情形下也是尖锐的。由于这些结果较为技术性，且需要引入本文其余部分不再用到的新记号，我们在此略去细节。关于非巴拿赫三角形（即 $p_3<1$时）的结果，请参阅 Liu 和 Wang [19]；关于双线性 Bochner-Riesz 平方函数及其在双线性乘子中的应用，请参阅 Choudhary、Kaur、Shrivastava 和 S huin [3] 以及 Choudhary 和 Shrivastava [4]。

$\lambda=0$ 的情形更为微妙。Grafakos 和 Li [11] 最早研究了维数为 $n=1$时的这一问题。他们证明，算子 $\mathcal{B}^0$（通常称为双线性圆盘乘子算子）对局部 L^2–范围内的指数 $\{(p_1、\ p_2、\ p_3)$，将 $L^{p_1}(\mathbb{R})\times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 映射到 $L^{p_3}(\mathbb{R})$：$2 \leqslant p_1、\ p_2、\ p_3' < \infty\}$。一般而言，对于给定几何形状在 $\mathbb{R}^2$ 中的特征函数是否会导出双线性乘子这一问题，人们已针对许多有趣的形状进行了研究。在开创性的论文中，Lacey 和 Thiele [17, 18]证明，与半平面 $H_\alpha=\{(\xi、\ \eta)\in\mathbb{R}^2$的特征函数 $\chi_{H_\alpha}(\xi、\ \eta)$ 相关联的双线性希尔伯特变换满足 (1.1)，且指数 $p_1、\ p_2$ 和 p_3的取值范围很广：$\xi-\alpha\eta>0\}、\ \alpha\in\mathbb{R}$。Demeter 和 Gautam [9] 证明了与内接于圆盘的无限稀疏多边形相关联的双线性算子的估计 (1.1)。他们借助无限稀疏多边形逼近圆盘在一点处的边界，并表明即使在局部 L^2- 范围之外，这类双线性乘子也能得到正面结果。接下来，我们提及 Muscalu [21], ，其中证明了由有界斜率的凸函数图像确定的双线性乘子满足估计 (1.1)。最近，Saari 和 Thiele [24] 研究了与某些凸集相关联的双线性抛物乘积。特别地，他们证明，与乘子符号 $\chi_C(\xi、\ \eta)$相关联的双线性算子满足估计 (1.1)，其中 C是凸集 $\{(\xi、\ \eta)\in\mathbb{R}^2:\ \xi\leqslant 0$和 $2^\xi \leqslant \eta<1\}$，且指数 $p_1、\ p_2$ 和 p_3 属于局部 L^2–范围。

受双线性乘子领域近期进展，以及 Seeger 和 Ziesler [25]、Cladek [5, 6], 关于凸域上 Bochner-Riesz 平均的研究结果启发，我们计划探讨 $\mathbb{R}^2$中与凸域相关联的双线性 Bochner-Riesz 平均的类似问题。我们将看到，这项研究自然引出了 Kakeya 极大函数的双线性类比。本文旨在

- 将平面 $\mathbb{R}^2$ 中开有界凸域上的双线性 Bochner-Riesz 平均这一概念加以推广。现有用于处理 [1, 2, 14, 13, 15] 中双线性 Bochner-Riesz 平均的技术无法扩展到一般凸域的情形，因为这些技术依赖于乘子的显式形式$(1-|\xi|^2-|\eta|^2)_+^\lambda$。[25] 中建立的框架使我们得以着手研究这一情形。这种方法自然引出了 Kakeya 极大函数的双线性类比。在 [2], 中，研究者曾简要指出这一联系适用于双线性乘子 $(1-|\xi|^2-|\eta|^2)_+^\lambda$. 。本文将系统地发展这一方法。•将利用几何极大函数证明傅里叶乘子有界性结果的经典方法推广到双线性情形。为此，我们在平面中引入双线性 Kakeya 极大函数，并研究其 L^p-有界性性质。我们建立了双线性 Bochner-Riesz 平均与 Kakeya 极大函数之间的联系，并由此推出乘子算子的 L^p- 估计。定义与结果见第 2.2 节。

2. Main results

2.1. 与凸域相关的双线性 Bochner-Riesz 平均。 设 Ω 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中一个包含原点的开有界凸集。记 $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界。考虑与 Ω 相关的闵可夫斯基泛函，其定义为:

$$\rho(\xi,\eta)=\inf\{t>0:\ (t^{-1}\xi,t^{-1}\eta)\in\partial\Omega\}.$$

与凸域 Ω 相关的、指标为 $\lambda>0$ 的双线性 Bochner-Riesz 平均定义为

$$\mathcal{B}_\Omega^\lambda(f,g)(x)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(1-\rho(\xi,\eta))_+^\lambda\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)e^{2\pi ix(\xi+\eta)}\,d\xi d\eta.$$

注意，若 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘，则算子 $\mathcal{B}_\Omega^\lambda$ 与先前定义的 $\mathcal{B}^\lambda$ 相同。以下定理是本文关于双线性 Bochner-Riesz 平均的主要结果$\mathcal{B}_\Omega^\lambda$.

定理 2.1. 设 Ω 为开有界凸集， $\mathcal{B}_\Omega^\lambda$ 为上述双线性 *Bochner-Riesz* 平均。则对于 $\lambda>0$ 以及满足 $p_1,p_2\geqslant 2$ 和 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}$的指数 p_1,p_2,p_3，算子 $\mathcal{B}_\Omega^\lambda$ 将 $L^{p_1}(\mathbb{R})\times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 映射到 $L^{p_3}(\mathbb{R})$, 即存在常数 $C=C(\Omega,\lambda,p_1,p_2)>0$，使得对所有 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，均有

$$\|\mathcal{B}_\Omega^\lambda(f,g)\|_{p_3}\leqslant C\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}.$$

作为定理 2.1 的一个应用，我们得到了关于拟径向双线性乘子的如下结果。

推论 2.2. 设 ρ 为与上述凸域 Ω 相关联的闵可夫斯基泛函，且 $m:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为满足以下条件的函数：对于 $\lambda>0$，有

$$\int_0^\infty s^\lambda |m^{\lambda+1}(s)|ds<\infty.$$

则定义的双线性乘子 T_m

$$T_m(f,g)(x)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} m(\rho(\xi,\eta))\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)e^{2\pi ix(\xi+\eta)}\,d\xi d\eta$$

将 $L^{p_1}(\mathbb{R})\times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 映射到 $L^{p_3}(\mathbb{R})$，对所有 p_1、$p_2\geqslant 2$ 和 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}$ 均成立。

推论 2.2 可由定理 2.1 和下面给出的著名从属公式直接推出；更多细节参见 [29] 。

$$(m\circ\rho)(\xi,\eta)=\frac{(-1)^{\lfloor\lambda\rfloor+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty s^\lambda m^{\lambda+1}(s)\left(1-\frac{\rho(\xi,\eta)}{s}\right)_+^\lambda ds.$$

2.2. **双线性 Kakeya 极大函数**。 本节介绍本文关于双线性 Kakeya 极大函数的主要结果。

设 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有限测度集的一个集合。考虑与集合 $\mathfrak{F}$ 相关的极大平均算子，其定义为

$$M_{\mathfrak{F}}f(x)=\sup_{F\in\mathfrak{F}:\,x\in F}\frac{1}{|F|}\int_F |f(y)|\,dy. \tag{2.1}$$

极大平均算子在微分理论中发挥着关键作用。在满足 $\mathfrak{F}$ 上某些几何条件的集合下，算子 $M_{\mathfrak{F}}$ 具有 L^p–有界性。例如，如果 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有立方体（或球）的集合，那么算子 $M_{\mathfrak{F}}$，通常称为 Hardy-Littlewood 极大算子，它将 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 映射到自身，对所有$1<p\leqslant\infty$ 在 $p=1$ 处具有弱型有界性。然而，如果 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有矩形的集合，那么根据一个众所周知的 Besicovitch集构造（见 [26],）， 相应的算子 $M_{\mathfrak{F}}$ 已知对所有 $1\leqslant p<\infty$.都不具备 L^p–有界性。

Kakeya 极大函数涉及对矩形取平均，并对矩形的边附加条件。本文将仅研究维数为 $n=2$ 的 Kakeya 极大函数。

对于整数 $N>1$ 和 $\delta>0$，令 $\mathcal{R}_{\delta,\,N}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中所有尺寸为 $\delta\times\delta N$ 和 $\mathcal{R}_N=\cup_{\delta>0}\mathcal{R}_{\delta,\,N}$ 的矩形所构成的类。根据标准伸缩论证，固定尺度极大算子 $M_{\mathcal{R}_{\delta,\,N}}$ 的有界性等价于算子 $M_{\mathcal{R}_{1,\,N}}$ 的有界性。C´ordoba [7] 证明了

$$\|M_{\mathcal{R}_{1,N}}\|_{L^2\to L^2}\lesssim(\log N)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

而且对“偏心率”的对数依赖是精确的。 N

后来，Str¨omberg [27] 证明了极大算子$M_{\mathcal{R}_N}$的以下精确界。

$$\|M_{\mathcal{R}_N}\|_{L^2\to L^2} \lesssim \log N \tag{2.3}$$

我们考虑上述定义的 Kakeya 极大函数的双线性类比。固定尺度双线性 Kakeya 极大函数定义为

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\delta,N}}(f,g)(x) = \sup_{\substack{R\in\mathcal{R}_{\delta,N}\\(x,x)\in R}} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y_1)||g(y_2)|dy_1dy_2.$$

与集合 $\mathcal{R}_N$ 相关的双线性 Kakeya 极大函数定义为

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}(f,g)(x) = \sup_{k\leqslant N}\sup_{\substack{R\in\mathcal{R}_k\\(x,x)\in R}} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y_1)||g(y_2)|dy_1dy_2,$$

双线性 Kakeya 极大函数自然地出现在双线性 Bochner-Riesz 平均的研究中。因此，关于极大函数的尖锐 L^p- 估计可推出 Bochner-Riesz 平均相应的 L^p- 估计。

注 2.3。形式上，双线性 ***Kakeya*** 极大函数 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,\ N}}(f,g)$ 也可通过将（线性）二维 ***Kakeya*** 极大函数 $M_{\mathcal{R}_{1,\ N}}(f\otimes g)$ 限制在对角线 $\{(x,x):\ \ x\in\mathbb{R}\}$ 上得到，其中 $(f\otimes g)(x,y)=f(x)g(y)$.

对于算子 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\delta,\ N}}$，我们有以下结果。与前面一样，只需考虑 $\delta=1$ 的情形。

定理 2.4。设 $1\leqslant p_1,p_2\leqslant\infty$ 满足 $\frac{1}{p_3}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$，则有以下估计。

(1) **Banach 情形：**
(a) 对于 $1\leqslant p_1,p_2,p_3\leqslant\infty$，$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,\ N}}$ 将 $L^{p_1}(\mathbb{R})\times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 映射到 $L^{p_3,\ \infty}(\mathbb{R})$，其算子范数有一个与 N 无关的常数作为上界。注意，标准的双线性插值论证可得对所有 $p_3>1$ 的强型估计，且算子范数与 N 无关。(b) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,\ N}}$ 映射 $L^p(\mathbb{R})\times L^{p'}(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})$，其算子范数有一个由常数倍的 $(\log N)^{\min\{p_1,p_2\}}$ 作为上界。这里 p' 表示共轭指标 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

(2) **非巴拿赫情形：**
(a) 对于 $1\leqslant p_1、\ p_2\leqslant\infty$ 和 $\frac{1}{2}<p_3\leqslant 1$、$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,\ N}}$ 从 $L^{p_1}(\mathbb{R})\times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 到 $L^{p_3}(\mathbb{R})$ 有界，其常数为 $N^{\frac{1}{p_3}-1}$。(b) **端点** $(1,1,1/2)$：$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}$ 将 $L^1(\mathbb{R})\times L^1(\mathbb{R})$ 映射到 $L^{\frac{1}{2},\ \infty}(\mathbb{R})$，其常数为 N。

接下来，我们得到算子 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}$ 的以下 L^p-有界性结果。

定理 2.5。设 $1\leqslant p_1、\ p_2\leqslant\infty$ 和 $\frac{1}{p_3}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$。以下界成立。

(1) **Banach 情形：**
(a) 对于所有 $1 \leqslant p_1, p_2, p_3 \leqslant \infty$，我们有 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3,\,\infty}} \lesssim 1$. 注意，由此我们得到强型估计 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}} \lesssim 1$，对所有 $p_3 > 1$均成立。(b) 对于所有 $1 < p_1, p_2 \leqslant \infty$，我们有 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{1}} \lesssim \log\, N$. 此外，界 $\log N$ 在此处是尖锐的。
(2) **非巴拿赫情形：**
(a) 对于 $1 < p_1、\ p_2 \leqslant \infty$ 和 $\frac{1}{2} \leq p_3 < 1$，我们有 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}} \lesssim N^{\frac{1}{p_3}-1}$。(b) **端点情形：** 如果 p_1 或 p_2 中至少有一个为 1，那么 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3,\,\infty}} \lesssim N$。

在第9节中，我们将给出一些例子，以说明上述定理中关于参数 N 的常数的锐性。

注2.6。事实上，在定理 *2.1* 的证明中，我们需要考虑偏心率小于或等于 N 的矩形上的双线性 *Kakeya* 极大函数。我们将这种极大函数记为 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\leqslant N}}$。对于 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\leqslant N}}$，定理 *2.5* 的类似结论也成立，但其算子范数上会多出一个常数 $\log\, N$，作用于 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\leqslant N}}$。由于记号上的不便且内容重复，我们将略去细节。

最后，我们描述算子 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}$ 的一个向量值结果。这将在定理 2.1 的证明中用到。

定理 2.7。令 $1 < p_1、\ p_2 < \infty、\ 1 \leqslant p_3 < \infty$ 和 $1 < r_1、\ r_2 \leqslant \infty、\ 1 \leqslant r_3 \leqslant \infty$ 满足 $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ 和 $\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$。则对于任意 $\epsilon > 0$，我们有

$$\left\| \left(\sum_j |\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}(f_j, g_j)|^{r_3} \right)^{\frac{1}{r_3}} \right\|_{p_3} \lesssim N^{\epsilon} \left\| \left(\sum_j |f_j|^{r_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} \right\|_{p_1} \left\| \left(\sum_j |g_j|^{r_2} \right)^{\frac{1}{r_2}} \right\|_{p_2}.$$

$L^p(R) \times L^{p'}(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})-$ 有界性的证明以及定理 2.5 中的 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}$，基于在适当选取的指数之间使用插值技巧。这个想法源于 C´ordoba [7] 和 Str¨omberg [27] 的线性对应结果。这种方法给出了关于定理 2.5 中 N 的尖锐常数。然而，对于定理 2.4 中的固定尺度极大函数 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\delta,\,N}}$，这种方法无法在 N 中给出尖锐常数。事实上，如前所述，$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}$ 与乘积型函数上的线性 Kakeya 极大函数之间的联系，使我们能够利用 Tanaka [28] 的思想，在定理 2.4 中证明更好的界。这种方法更加直接，并且涉及对所考虑矩形进行一定的计数论证。

3. Basic framework for Theorem 2.1

本节将建立处理一般凸域所需的基本框架。这部分涉及新的定义、将问题约化到光滑域，以及对边界 $\partial\Omega$的参数化。这部分我们主要遵循 Seeger 和 Ziesler [25] 的做法。

3.1. 约化到边界光滑的区域。 首先注意到，利用双线性乘子的标准伸缩论证，我们不妨假设

$$B(0,4) \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset B(0,2^M),$$

其中 $M \geqslant 3$ 是一个固定常数。

接下来注意，边界 $\partial\Omega$ 可能并不光滑。此时，我们采用 Seeger 和 Ziesler [25] 在线性情形中使用的方法。这样便可将问题归结为边界光滑的区域。我们用一列光滑曲线逼近 $\partial\Omega$，这些曲线由多边形构成，并在顶点附近将边界光滑化。为进行这一归约，我们需要先在凸域的背景下给出一些预备定义。

给定一点 $P \in \partial\Omega$，若一条经过 P 的直线 ℓ 是 Ω 在 P 处的支撑线，指的是 Ω 包含于某个闭半平面内，且该半平面的边界就是直线 ℓ。令 $T(\Omega, P)$ 表示 Ω 在 P 处所有支撑线构成的集合。注意，若 $\partial\Omega$ 在 P 处光滑，则该点处的切线是 Ω 在 P 处唯一的支撑线。

对于 $\delta > 0$，考虑 Ω 上沿 ℓ 给定的、以 P 为中心的 ∂ 球。

$$B(P,\ell,\delta) = \{X \in \partial\Omega : \operatorname{dist}(X,\ell) < \delta\}.$$

用 $\mathfrak{N}_\delta = \{B(P,\ell,\delta)$ 表示这类球的集合：$P \in \partial\Omega$, $\ell \in T(\Omega, P)\}$。令 $N(\Omega, \delta)$ 表示覆盖边界 $\partial\Omega$ 所需的最少球数。Ω 的上 Minkowski 维数 κ_Ω 定义为

$$\kappa_\Omega = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N(\Omega,\delta)}{\log \delta^{-1}}. \tag{3.1}$$

请注意，对于任意凸集 Ω，我们有 $0 \leqslant \kappa_\Omega \leqslant \frac{1}{2}$。此外，$\kappa_\Omega = 0$ 如果 Ω 是凸多边形，并且 $\kappa_\Omega = \frac{1}{2}$ 如果 Ω 是光滑区域，例如 Ω 是单位球，那么 $\kappa_\Omega = \frac{1}{2}$。

有了这些概念，我们就可以运用 [25] 中的逼近引理。

引理 3.1。 [25]存在一个区域序列 Ω_n，其边界 $\partial\Omega_n$ 是 C^∞–光滑的，并且与 Ω_n 对应的闵可夫斯基泛函 ρ_n 满足以下条件。

(1) $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \subset \Omega$ 且 $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. (2) $\rho(\xi) \leqslant \rho_{n+1}(\xi) \leqslant \rho_n(\xi)$ 其中 $\rho_n(\xi) - \rho(\xi) \leqslant 2^{-n-1}\rho(\xi)$。特别地，$\lim_{n\to\infty} \rho_n(\xi) = \rho(\xi)$，且在紧集上一致收敛。

(3) 若 $\delta \geqslant 2^{-n+2}$，则

$$N(\Omega_n, 2\delta) \lesssim N(\Omega,\delta).$$

注意，只需证明引理中上述区域 Ω_n 的定理 2.1，且其界对 n一致。然后，利用法图引理即可推出区域 Ω 的定理 2.1。

3.2. **边界的分解** $\partial\Omega$。 遵循 Seeger 和 Ziesler [25] 的方法，我们考虑光滑边界 $\partial\Omega$的如下参数化。

引理 3.2。 [25] 设 $\{u_p\}_{p=1}^{2^{2M}}$ 为 2^{2M} 在 $\mathbb{R}^2$和 $\mathfrak{G}_{u_p} = \{(\xi$中的$\eta) \in \mathbb{R}^2 : \ \langle(\xi, \eta), u_p\rangle \leqslant 0,$ $|\langle(\xi, \eta), u_p^{\perp}\rangle| \leqslant 2\}$ 为与 u_p相关联的半条带。我们可以将 $\partial\Omega \cap \mathfrak{G}_{u_p}$ 参数化为

$$t \mapsto tu_p^{\perp} + \gamma(t)u_p, \ -2 \leqslant t \leqslant 2,$$

其中 $\gamma: \ [-2、\ 2] \to [-2^M、\ -2]$ 是一个凸函数，其左导数和右导数分别为 γ_L'和γ_R' ，满足，

$$-2^{M-1} \leqslant \gamma_L'(t) \leqslant \gamma_R'(t) \leqslant 2^{M-1}, \ -2 \leqslant t \leqslant 2.$$

此外，对于经过点 $P \in \partial\Omega$ 的支撑线 ℓ 和外单位法向量$\vec{n}$，我们有

$$\left\langle \frac{P}{|P|}, \vec{n} \right\rangle \geqslant 2^{-M}. \tag{3.2}$$

接下来，对于给定的 $\delta > 0$，我们将边界 $\partial\Omega \cap \mathfrak{G}_{u_p}$ 分解为若干部分，使得与每个部分相对应的核均可积，且其增长由 $N(\Omega\ \delta)$的覆盖数控制。与 [25] 中一样，考虑 $\mathfrak{U}_{u_p}(\delta) = \{-1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{Q_{u_p}} = 1\}$ 的一个分划 $[-1, \ 1]$使得对于 $j = 0, \ldots, Q_{u_p}(\delta) - 1$，我们有

$$(a_{j+1} - a_j)(\gamma_L'(a_{j+1}) - \gamma_R'(a_j)) \leqslant \delta,$$

and

$$(t - a_j)(\gamma_L'(t) - \gamma_R'(a_j)) \leqslant \delta, \text{ if } t > a_{j+1}.$$

以下引理给出了相对于覆盖数 $N(\Omega\ \delta)$对数量 $Q_{u_p}(\delta)$的控制。

引理 3.3。 [25] 存在一个常数 $C_M > 0$ 使得

(1) $Q_{u_p}(\delta) \leqslant C_M \delta^{-\frac{1}{2}}$.
(2) $C_M^{-1} N(\Omega, \delta) \leqslant \sum_{p=1}^{2^{2M}} Q_{u_p}(\delta) \leqslant C_M N(\Omega, \delta) \log \delta^{-1}$.

我们需要进一步细化分划，以便获得底层核更精确的估计。对于每个固定的 j，考虑满足以下条件的点$\{a_{j,\ \nu}: \ \nu = -2M - l, \ \ldots, \ 2M + l\}$即，

- 对于任意区间 $A_{j,\ \nu} = [a_{j,\ \nu}, \ a_{j,\ \nu+1}]$，有 $|A_{j,\ \nu}| \geqslant 2^{-5M}\delta$。 •

对于任意两个相邻区间 $A_{j,\ \nu}$ 和 $A_{j',\ \nu'}$，有:

$$(t - s)(\gamma_L'(t) - \gamma_R'(s)) \leqslant \delta, \text{ if } t < s, \text{ and } t, s \in A_{j,\nu} \cup A_{j',\nu'}. \tag{3.3}$$

4. Auxiliary results for Theorem 2.1

本节将讨论一些辅助结果，这些结果在证明主要结果定理 2.1 时会用到。第一个引理是众所周知的，它是闵可夫斯基积分不等式的一个直接推论。该引理表明，双线性乘子算子的核具有可积性，就足以保证该算子从 $L^{p_1}(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 到 $L^{p_3}(\mathbb{R})$ 对于 $p_3 \geqslant 1$是有界的。

引理 4.1. 令 S_m 为与乘子 m相关联的双线性算子，其定义如下：

$$S_m(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} m(\xi,\eta)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)e^{2\pi i x(\xi+\eta)}d\xi d\eta.$$

假设 $\|\mathcal{F}^{-1}m\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < \infty$，则对于 p_1、p_2、$p_3 \geqslant 1$、$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3}$，有：

$$\|S_m\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}} \lesssim \|\mathcal{F}^{-1}m\|_1.$$

这里，记号 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示傅里叶逆变换。

接下来，我们回顾 [25]中的一个引理，它为所考虑的乘子提供局部可积性估计。

引理 4.2。 [25] 设 $h: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个绝对连续函数，满足极限 $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ 且 $\|th'(t)\|_{L^1[0,\ \infty)} < 0$。假设函数

$$F(\tau) = \int_0^\infty h'(s)e^{is\tau}\, ds$$

满足 $|F(\tau)| + |F'(\tau)| \lesssim (1+|\tau|)^{-2}$。设 $A_k = B(0,2^k)\backslash B(0,2^{k-1})$, $k \geqslant 1$。则有，

$$\|\mathcal{F}^{-1}(h\circ\rho)\|_{L^1(B(0,1))} \lesssim 1,\ and$$
$$\|\mathcal{F}^{-1}(h\circ\rho)\|_{L^1(A_k)} \lesssim k2^{-k}.$$

以下引理给出了证明定理 2.1 时遇到的核的逐点估计。

引理 4.3。 设 A_k 为上述环域，且 $l \geqslant 1$。若 K 是在 $\mathbb{R}^2$中定义的核，满足

$$|K(x)| \leqslant \frac{a}{(1+|ax_1|)^2}\frac{1}{1+x_2^2},\ x=(x_1,x_2),$$

对某个 $a \geqslant 2^{-l}$成立。则有以下结论。

(1) 若 H 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 中的另一个核，且满足 $\|H\chi_{A_k}\|_1 \leqslant k2^{l-k}$，则

$$H * K(x)\chi_{\{|\cdot|>2^{10l}\}}(x) = \left(H\chi_{\{|\cdot|>2^{5l}\}}\right) * K(x)\chi_{\{|\cdot|>2^{10l}\}}(x) + L_1(x),$$

其中 $\|L_1\|_1 \lesssim 2^{-2l}$。

(2) 如果 H 满足 $\|H\chi_{A_k}\|_1 \lesssim 1$，则

$$H * K(x)\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}(x) = \left(H\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{20l}\}}\right) * K(x)\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}(x) + L_2(x)$$

其中 $\|L_2\|_1 \lesssim 2^{-9l}$。

证明。为估计第一个不等式，我们写作

$$\begin{aligned}
H * K(x)\chi_{\{|\cdot|>2^{10l}\}}(x) &= \chi_{\{|\cdot|>2^{10l}\}}(x)\int_{\mathbb{R}^2} H(y)K(x-y)dy \\
&= \chi_{\{|\cdot|>2^{10l}\}}(x)\left(\int\limits_{|y|>2^{5l}} H(y)K(x-y)dy + \int\limits_{|y|\leqslant 2^{5l}} K_1(y)K_2(x-y)dy\right) \\
&= \chi_{\{|\cdot|>2^{10l}\}}(x)\int_{\mathbb{R}^2} H(y)\chi_{\{|\cdot|>2^{5l}\}}(x)K(x-y)dy \\
&+ \chi_{\{|\cdot|>2^{10l}\}}(x)\int_{|y|\leqslant 2^{5l}} H(y)K(x-y)dy \\
&= \left(H\chi_{\{|\cdot|>2^{5l}\}}\right) * K(x)\chi_{\{|\cdot|>2^{10l}\}}(x) + L_1(x).
\end{aligned}$$

对于核 L_1，我们有如下估计

$$\begin{aligned}
\|L_1\|_1 &\leqslant \int_{|x|>2^{10l}}\int_{|y|\leqslant 2^{5l}} |H(y)K(x-y)|dydx \\
&= \int_{|y|\leqslant 2^{5l}} |H(y)|\int_{|x|>2^{10l}} |K(x-y)|dxdy \\
&\leqslant \int_{|y|\leqslant 2^{5l}} |H(y)|dy\int_{|z|>2^{5l}} |K(z)|dz,
\end{aligned}$$

其中我们用到了，当 $|x|>2^{10l}$ 时 $|z|=|x-y|>2^{5l}$，且 $|y|\leqslant 2^{5l}$。对于涉及核 H 的积分，我们有

$$\int_{|y|\leqslant 2^{5l}} |H(y)|dy = \sum_{k=0}^{5l}\int_{A_k} |H(y)|dy \leqslant \sum_{k=0}^{5l} k2^{l-k} \leqslant l2^l.$$

当 $|z|>2^{5l}$ 时，要么 $|z_1|>2^{5l-1}$，要么 $|z_2|>2^{5l-1}$。若 $|z_1|>2^{5l-1}$，则

$$\begin{aligned}
\int_{|z|>2^{5l}} |K(z)|dz &\leqslant \int_{|z_1|>2^{5l}} \frac{a}{(1+|az_1|)^2}dz_1\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+z_2^2}dz_2 \\
&\leqslant C\frac{1}{a}\int_{|z_1|>2^{5l}} \frac{1}{|z_1|^2}dz_1 \\
&\leqslant 2^{-4l}.
\end{aligned}$$

同样，当 $|z_2|>2^{5l-1}$ 时，我们可以得到该估计，

$$\int_{|z|>2^{5l}} |K(z)|dz \leqslant 2^{-5l}.$$

因此，我们得到

$$\|L_1\|_1 \lesssim 2^{-2l}$$

现在我们估计引理 4.3 中的第二项。

$$\begin{aligned}
H * K(x)\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}(x) &= \chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}(x)\int_{\mathbb{R}^2} H(y)K(x-y)dy \\
&= \chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}(x)\left(\int\limits_{|y|>2^{20l}} H(y)K(x-y)dy + \int\limits_{|y|\leqslant 2^{20l}} K_1(y)K_2(x-y)dy\right) \\
&= \chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}(x)\int_{\mathbb{R}^2} H(y)\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{20l}\}}(x)K(x-y)dy \\
&\quad + \chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}(x)\int_{|y|>2^{20l}} H(y)K_2(x-y)dy \\
&= \left(H\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{20l}\}}\right) * K(x)\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}(x) + L_2(x).
\end{aligned}$$

对于核 L_2，我们有如下估计

$$\begin{aligned}
\|L_2\|_1 &\leqslant \int_{|x|\leqslant 2^{10l}}\int_{|y|>2^{20l}} |K_1(y)K(x-y)|dydx \\
&= \int_{|y|>2^{20l}} |H(y)|\int_{|x|\leqslant 2^{10l}} |K(x-y)|dxdy \\
&= \sum_{k=20l}^{\infty}\int_{A_k} |H(y)|\int_{|x|\leqslant 2^{10l}} |K(x-y)|dxdy \\
&\leqslant \sum_{k=20l}^{\infty}\int_{A_k} |H(y)|\int_{|z|>2^{k-10l}} |K(z)|dxdz,
\end{aligned}$$

其中我们用到了，当 $|x|\leqslant 2^{10l}$ 时，$|z|=|x-y|>2^{k-10l}$，并且 $|y|>2^k$。我们知道 $\|H\|_{L^1(A_k)}\leqslant C.$。如上对 K 使用积分估计，可得

$$\int_{|z|>2^{k-10l}} |K(z)|dz \leqslant 2^{-k+11l}.$$

因此，我们得到

$$\|L_2\|_1 \leqslant \sum_{k=20l}^{\infty} C2^{k-11l} \lesssim 2^{-9l}.$$

引理 4.3 的证明至此完成。 □

5. Proof of Theorem 2.1: Bilinear Bochner-Riesz means

注意到，根据第 3.1 节中的引理 3.1 和法图引理，只需对边界为 C^∞–光滑边界的区域 Ω 证明定理 2.1，其中隐含常数仅取决于边界 C^1–Ω 的参数化 ∂。

我们将在 Ω 上增加一个附加假设，即边界 $\partial\Omega$ 的任何部分都不与坐标轴平行，以完成定理 2.1 的证明。注意，由于 Ω 是一个凸域，边界 $\partial\Omega$ 最多可以四次转为与坐标轴平行。稍后将去掉这一假设，从而完成对定理 2.1 中所考虑的一般凸域的证明。

设 $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\text{supp}(\phi) \subset B(0,1)$, $\phi(x) = 1$，其中 $x \in B(0, \frac{1}{2})$，且 $\text{supp}(\psi) \subset \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leqslant |(\xi,\eta)| \leqslant 2\}$，并且

$$\begin{aligned}(1-\rho(\xi,\eta))_+^\lambda &= \phi(\xi,\eta)(1-\rho(\xi,\eta))_+^\lambda + \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-\lambda l}\psi(2^l(1-\rho(\xi,\eta)))(1-\rho(\xi,\eta))_+^\lambda \\ &= m_0(\xi,\eta) + \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-\lambda l} m_l(\xi,\eta).\end{aligned}$$

我们将为上述每个乘子 m_l 证明适当的估计。我们还将进一步分解这些部分。引理 3.2 中对边界 $\partial\Omega \cap \mathfrak{G}_{u_p}$ 的参数化使我们能够将乘子 m_l 分解为 2^{2M} 个部分。这里我们沿用引理 3.2 中的记号。

设 S_p 为单位圆上的一个扇形，其角平分线经过向量 u_p，且弧长为 2^{-2M+1}。设 $b_p \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 为一个支撑集包含于 S_p 的径向函数，使得

$$m_l = \sum_{p=1}^{2^{2M}} m_l b_p.$$

接下来，我们调用第 3.2 节中边界分解的细化，进一步分解乘子。对于向量 $u_p = e^{i\theta_p}$，考虑第 3.2 节中得到的区间集合 $\{A_{l,p,j,v} : \ j = 1, \dots, Q,\ \nu = -2M - l, \dots, 2M + l\}$。令 $I^*_{l,p,j,\nu}$表示包含 $a_{j,\nu}$和 $I_{l,p,j,\nu} = \frac{2}{3} I^*_{l,p,j,\nu}$的两个区间的并集。令 $\beta^p_{j,v} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$为支撑在区间 $I_{l,p,j,\nu}$ 上的函数，使得

$$\sum_{j,\nu} \beta^p_{j,\nu}(t) = 1, \ -1 \leqslant t \leqslant 1, \text{ and}$$

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\beta^p_{j,\nu}(t)\right| \lesssim |I_{l,p,j,\nu}|^{-n}, \text{ for } n = 1,2,3,4. \tag{5.1}$$

这给出了乘子 $m_l(\xi,\eta)$ 的如下分解。

$$m_l(\xi,\eta) = \sum_{p=1}^{2^{2M}} \sum_{j,\nu} m_l(\xi,\eta) b_p(\xi,\eta) \beta^p_{j,\nu}(\langle u_p^\perp, (\xi,\eta)\rangle) =: \sum_{p=1}^{2^{2M}} \sum_{j,\nu} m_{l,p,j,\nu}(\xi,\eta).$$

记$K_{l,\ p,\ j,\ \nu} := \mathcal{F}^{-1}(m_{l,\ p,\ j,\ \nu})$。

我们可以写成

$$K_{l,p,j,\nu} := \mathcal{F}^{-1}(m_{l,p,j,\nu}) = \sum_{k=0}^{10l} K_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k} + \sum_{k=10l+1}^{\infty} K_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k}. \tag{5.2}$$

我们先估计含有 $k > 10l$ 的项。我们有

$$K_{l,p,j,\nu}(x) = \mathcal{F}^{-1}m_l * H_{l,p,j,\nu}(x),$$

其中 $H_{l,p,j,\nu} = \mathcal{F}^{-1}(b_p(.)\beta^p_{j,\nu}(\langle u_p^{\perp}, (.)\rangle))$。

将引理 4.2 应用于函数 $h = \psi(2^l(1-t))$，可得

$$\|\mathcal{F}^{-1}m_l\|_{L^1(A_i)} \leqslant 2^{l-\frac{i}{2}},\ i \in \mathbb{N}.$$

将估计 (5.1) 与分部积分论证两次应用于 $H_{l,p,j,\nu}$，可得

$$|H_{l,p,j,\nu}(x)| \lesssim \frac{|I|}{(1+|I||\langle x, u_p\rangle|)^2}\frac{1}{1+|\langle x, u_p^{\perp}\rangle|^2}.$$

注意，利用这个核估计，我们可以应用引理 4.3（第 1 部分），从而得到

$$\|\sum_{k=10l+1}^{\infty} K_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k}\|_{L^1} \lesssim 2^{-3l}. \tag{5.3}$$

上述估计中关于 l 的衰减使我们能够验证该核是可积的。因此，对于 $p_1, p_2, p_3 \geqslant 1$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}$，我们可以应用引理 4.1，得到所考虑的双线性乘子算子将 $L^{p_1}(\mathbb{R})\times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 映射到 $L^{p_3}(\mathbb{R})$，且其范数有界于

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\lambda l}\sum_{p=1}^{2^{2M}}\sum_{j,\nu}\sum_{k=10l}^{\infty}K_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k}\right\|_1 &\lesssim \sum_{l=1}^{\infty}2^{-(\lambda+3)l}lQ\\ &\lesssim \sum_{l=1}^{\infty}2^{-(\lambda+3-\kappa_\Omega-\epsilon)l}l \lesssim 1,\end{aligned}$$

其中我们用到了如下事实：$Q \leqslant 2^{(\kappa_\Omega+\epsilon)l}$ 对于任意 $\epsilon > 0$，参见估计式 (3.1)。

因此，接下来只需估计对应于核（在 (5.2) 中具有 $k \leqslant 10l$）的双线性算子。

注意到

$$\beta^p_{j,\nu}\left(\frac{\langle u_p^{\perp}, (\xi,\eta)\rangle}{\rho(\xi,\eta)}\right) = 1,\ \text{for } (\xi,\eta) \in \operatorname{supp}(m_{l,p,j,\nu}).$$

我们可以写成

$$m_{l,p,j,\nu}(\xi,\eta) = m_l(\xi,\eta)\beta^p_{j,\nu}\left(\frac{\langle u_p^{\perp}, (\xi,\eta)\rangle}{\rho(\xi,\eta)}\right)b_p(\xi,\eta)\beta^p_{j,\nu}(\langle u_p^{\perp}, (\xi,\eta)\rangle).$$

该核具有如下形式：$K_{l,p,j,\nu} = J_{l,p,j,\nu} * H_{l,\,p,\,j,\,\nu}(x)$，其中 $J_{l,p,j,\nu} = \mathcal{F}^{-1}\left(m_l(\xi,\eta)\beta^p_{j,\nu}\left(\frac{\langle u_p^{\perp}, (\xi,\eta)\rangle}{\rho(\xi,\eta)}\right)\right)$。

设 $P^1_{l,\,p,\,j,\,\nu}$ 和 $P^2_{l,\,p,\,j,\,\nu}$ 分别为乘子 $m_{l,\,p,\,j,\,\nu}$ 的支集在 ξ-轴和 η-轴上的投影。对于每个 $i = 1, 2$，区间 $\{P^i_{l,\,p,\,j,\,\nu},\quad j = 1, \ldots\ldots, Q_{u_p}(2^{-l})\}$具有有界重叠，且该界与参数 l 无关。考虑傅里叶投影

$\hat{}\,\hat{}$ 由 $f_{l,p,j,\nu} = \chi_{P^1_{l,p,j,\nu}} f$ 和 $\hat{}g_{l,p,j,\nu} = \chi_{P^2_{l,p,j,\nu}} \hat{}g$ 定义的算子。这有助于我们将与核 $K_{l,p,j,\nu}$ 相关联的双线性算子改写如下。

$$K_{l,p,j,\nu} * (f,g)(x) = K_{l,p,j,\nu} * (f_{l,p,j,\nu}, g_{l,p,j,\nu})(x).$$

这里我们采用记号 $K*(f,\ g)(x) = K*(f\otimes g)(x,\ x).$

为了证明核 $J_{l,\ p,\ j,\ \nu}$ 的所需估计，我们引入与边界 $\partial\Omega$ 相关的齐次坐标系，其定义如下

$$(s,\alpha) \mapsto (\xi,\eta)(s,\alpha) = s(u_p^{\perp}\alpha + u_p\gamma(\alpha)),$$

其中 $s = \rho(\xi,\ \eta)$ 和 γ 是用于参数化边界的映射，见引理 3.2。容易验证，变量替换的雅可比行列式为 $s(\alpha\gamma'(\alpha) - \gamma(\alpha))$。因此，我们可以将核 $J_{l,\ p,\ j,\ \nu}$ 写为

$$J_{l,p,j,\nu}(R_{u_p}x) = \int_{s=\frac{1}{2}}^{2} sm_l(s) \int_{\alpha=-2^{-2M-2}}^{2^{-2M-2}} \beta^p_{j,\nu}(\alpha) e^{is(\alpha x_1+\gamma(\alpha)x_2)}(\alpha\gamma'(\alpha)-\gamma(\alpha))\, d\alpha ds.$$

令 $\eta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\text{supp}(\eta) \in B(0,\ 2^{-2M-10})$ 且 $\eta = 1$ 在 $B(0,\ 2^{-2M-11})$ 上。定义

$$\Phi_0(x,\alpha) = \phi(|I_{l,p,j,\nu}|(x_1+x_2\gamma'(\alpha)))\eta\left(\frac{x_1+x_2\gamma'(\alpha)}{|x|}\right), \text{ and}$$

$$\Phi_n(x,\alpha) = \left(\phi(2^{-n-1}|I_{l,p,j,\nu}|(x_1+x_2\gamma'(\alpha))) - \phi(2^{-n}|I_{l,p,j,\nu}|(x_1+x_2\gamma'(\alpha)))\right)\eta\left(\frac{x_1+x_2\gamma'(\alpha)}{|x|}\right).$$

我们可以写成

$$\begin{aligned}
&J_{l,p,j,\nu}(R_{u_p}x)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{s=\frac{1}{2}}^{2} sm_l(s) \int_{\alpha=-2^{-2M-2}}^{2^{-2M-2}} \Phi_n(x,\alpha)\beta^p_{j,\nu}(\alpha) e^{is(\alpha x_1+\gamma(\alpha)x_2)}(\alpha\gamma'(\alpha)-\gamma(\alpha))\, d\alpha ds\\
&\quad + \int_{s=\frac{1}{2}}^{2} sm_l(s) \int_{\alpha=-2^{-2M-2}}^{2^{-2M-2}} \left[1-\eta\left(\frac{x_1+x_2\gamma'(\alpha)}{|x|}\right)\right]\beta^p_{j,\nu}(\alpha) e^{is(\alpha x_1+\gamma(\alpha)x_2)}(\alpha\gamma'(\alpha)-\gamma(\alpha))\, d\alpha ds\\
&:= \sum_{n=0}^{\infty} J^n_{l,p,j,\nu}(R_{u_p}x) + \tilde{J}_{l,p,j,\nu}(R_{u_p}x)
\end{aligned}$$

注意到，由于函数 ϕ 和 η 的支集，上式中只有有限项有非零贡献。事实上，只需考虑 $C_M \log(1+|I_{l,\ p,\ j,\ \nu}||x|)$ 项。核 $J^n_{l,\ p,\ j,\ \nu}$ 满足以下核估计。

引理 5.1。 以下估计成立，

$$|J^0_{l,p,j,\nu}(x)| \lesssim \int\limits_{\substack{\alpha\in I^*_{l,p,j,\nu}:\\ |\langle x,u_p\rangle+\langle x,u_p^\perp\rangle\gamma'(\alpha)|\\ \leqslant |I_{l,p,j,\nu}|^{-1}}} \frac{2^{-l}\,d\alpha}{(1+2^{-l}|\langle x,u_p\rangle\alpha+\langle x,u_p^\perp\rangle\gamma(\alpha)|)^4}, \tag{5.4}$$

$$|J^n_{l,p,j,\nu}(x)| \lesssim \int\limits_{\substack{\alpha\in I^*_{l,p,j,\nu}:\\ |\langle x,u_p\rangle+\langle x,u_p^\perp\rangle\gamma'(\alpha)|\\ \sim 2^n|I_{l,p,j,\nu}|^{-1}}} \frac{(1+2^{-n}|\langle x,u_p^\perp\rangle||I_{l,p,j,\nu}|)|\gamma''(\alpha)|+|I_{l,p,j,\nu}|^{-1}}{|\langle x,u_p\rangle+\langle x,u_p^\perp\rangle\gamma'(\alpha)|} \times \frac{2^{-l}\,d\alpha}{(1+2^{-l}|\langle x,u_p\rangle\alpha+\langle x,u_p^\perp\rangle\gamma(\alpha)|)^4}, \tag{5.5}$$

$$|\tilde{J}_{l,p,j,\nu}(x)| \lesssim \int\limits_{I^*_{l,p,j,\nu}} \frac{2^{-l}(|I_{l,p,j,\nu}|^{-1}+|\gamma''(\alpha)|)\,d\alpha}{|\mathcal{R}_{u_p}x|(1+2^{-l}|\langle x,u_p\rangle\alpha+\langle x,u_p^\perp\rangle\gamma(\alpha)|)^4}. \tag{5.6}$$

这些估计的证明是对变量 α 和 s 运用分部积分论证得到的。类似的估计可参见 [25] 。作为引理 5.1 的推论，我们得到关于这些核的如下积分估计。

引理 5.2. 对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t\geqslant 0$，我们有以下估计，

$$\|J^0_{l,p,j,\nu}\|_1 \lesssim 1, \tag{5.7}$$

$$\|J^n_{l,p,j,\nu}\|_{L^1(A_t)} \lesssim 2^{-|t-l|}, \tag{5.8}$$

$$\|\tilde{J}_{l,p,j,\nu}\|_{L^1(A_t)} \lesssim 1. \tag{5.9}$$

$$\|K_{l,p,j,\nu}\|_1 \lesssim l. \tag{5.10}$$

证明。 应用变量替换:

$$v_1 = 2^{-l}(\langle x,u_p\rangle+\langle x,u_p^\perp\rangle\gamma'(\alpha)),\ v_2 = 2^{-l}(\langle x,u_p\rangle\alpha+\langle x,u_p^\perp\rangle\gamma(\alpha)).$$

注意，该映射的雅可比行列式有界于 $c2^{2l}$，因此，我们得到，

$$\|J^0_{l,p,j,\nu}\|_1 \lesssim \int\limits_{\alpha\in I^*_{l,p,j,\nu}} \iint\limits_{|v_1|\leqslant 2^{-l}|I_{l,p,j,\nu}|^{-1}} \frac{2^l\,dv_1dv_2d\alpha}{(1+|v_2|)^4} \lesssim 1.$$

估计式 (5.8) 可由上述变量替换论证得到。事实上，我们有

$$\|J^n_{l,p,j,\nu}\|_{L^1(A_t)} \lesssim \int\limits_{\alpha\in I^*_{l,p,j,\nu}} ((1+2^{t-n}|I_{l,p,j,\nu}|)|\gamma''(\alpha)|+|I_{l,p,j,\nu}|^{-1}) \iint\limits_{\substack{|v_1|\sim 2^{n-l}|I_{l,p,j,\nu}|^{-1}\\ (v_1,v_2)\sim 2^{t-l}}} \frac{dv_1dv_2d\alpha}{|v_1|(1+|v_2|)^4} \tag{5.11}$$

利用 (3.3)，我们得到 $\int_{I_l^*{}_{,p,j,\nu}} |I_{l}{}_{,p,j,\nu}|\gamma''(\alpha)d\alpha \leqslant 2^{-l}$。因此， α 中的积分被某个常数倍的 $(2^{t-n-l}+1)$ 所控制。此外，$\operatorname{supp}(J_l^n{}_{,p,j,\nu}) \cap A_t \neq \varnothing$ 意味着 $2^n|I_{l,p,j,\nu}|^{-1} \leqslant 2^{-M}2^t$，从而对于 (5.11) 中的积分域， $|v_2| \gtrsim 2^{t-l}$ 。因此，我们有

$$\|J^n_{l,p,j,\nu}\|_{L^1(A_t)} \lesssim (2^{t-n-l}+1)\min\{2^{t-l}, 2^{3(l-t)}\},$$

于是得到估计式 (5.8)。

对于 p, j, ν 的情况由类似的论证得到。细节留给读者。

接下来，我们证明 (5.10)。考虑，

$$\begin{aligned}\|K_{l,p,j,\nu}\|_1 \lesssim & \|K_{l,p,j,\nu}\chi_{|.|\geqslant 10l}\|_1 \\ & + \|J^0_{l,p,j,\nu}\|_{L^1}\|H^0_{l,p,j,\nu}\|_1 \\ & + \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{t}\|J^n_{l,p,j,\nu}\|_{L^1(A_t)}\|H^0_{l,p,j,\nu}\|_1 \\ & + \|\tilde{J}_{l,p,j,\nu} * H_{l,p,j,\nu}\chi_{|.|\leqslant 10l}\|_1.\end{aligned}$$

注意，上式中的第一项已在 (5.3) 中得到估计。第二项和第三项的估计分别由 (5.7) 和 (5.8) 得出，并结合核 $H_{l,\ p,\ j,\ \nu}$ 的可积性。对于最后一项，我们利用方程 (5.9) 得到

$$\begin{aligned}\|\tilde{J}_{l,p,j,\nu} * H_{l,p,j,\nu}\chi_{|.|\leqslant 10l}\|_1 &\lesssim \sum_{t=0}^{20l}\|\tilde{J}_{l,p,j,\nu}\|_{L^1(A_t)}\|H_{l,p,j,\nu}\|_1 + \sum_{t=20l}^{\infty}\|\tilde{J}_{l,p,j,\nu}\|_{L^1(A_t)}\|H_{l,p,j,\nu}\|_{L^1(|.|\geqslant 2^k)} \\ &\lesssim l + \sum_{t=20l}^{\infty}2^{l-t} \lesssim l.\end{aligned}$$

□

利用这些关于核的估计，我们可以证明，相应的双线性乘子算子可以通过偏心率取决于参数 l 的双线性 Kakeya 极大函数逐点控制。更确切地说，我们有】【: 】【“】【

引理 5.3. 设 $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $0 \leqslant k \leqslant 20l$。以下逐点支配关系成立。

$$\left|(J^0_{l,p,j,\nu}\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{20l}\}}) * (f,g)(x)\right| \lesssim \mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\leqslant 30l}}(f,g)(x) \tag{5.12}$$

$$\left|(J^n_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k}) * (f,g)(x)\right| \lesssim \mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\leqslant 30l}}(f,g)(x), \tag{5.13}$$

$$\left|(\tilde{J}_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k}) * (f,g)(x)\right| \lesssim \mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\leqslant 30l}}(f,g)(x). \tag{5.14}$$

证明。 **证明 (5.12)：** 回顾估计 (3.2)，并注意到它蕴含切向量 $(u_p+\gamma'(\alpha)u_p^{\perp})$ 与位置向量 $(\alpha u_p+\gamma(\alpha)u_p^{\perp})$ 的垂直向量之间的夹角小于某个常数，比如 C_M，且该常数小于 $\frac{\pi}{2}$。因此，由向量 $(\alpha u_p+\gamma(\alpha)u_p^{\perp})$ 和 $u_p+\gamma'(\alpha)u_p^{\perp}$张成的平行四边形

可以用面积相当且边平行于 $(\alpha u_p+\gamma(\alpha)u_p^{\perp})$和 $(-\gamma(\alpha)u_p+\alpha u_p^{\perp})$的矩形控制。结合这一观察与估计 (5.4)，我们可以推得

$$\left|(J^0_{l,p,j,\nu}\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{20l}\}})(x)\right| \lesssim \int_{I^*_{l,p,j,\nu}} |I_{l,p,j,\nu}|^{-1}\sum_{t=0}^{20l}\frac{2^{-3t}}{|R_\alpha|}\chi_{R_\alpha}(x)d\alpha,$$

其中， R_α 是一个矩形，其边分别平行于 $(\alpha u_p+\gamma(\alpha)u_p^{\perp})$ 和 $(-\gamma(\alpha)u_p+\alpha u_p^{\perp})$，边长分别为 2^{t+l}和$|I_{l,\ p,\ j,\ \nu}|^{-1}$。由于$2^{-l}\leqslant|I_{l,\ p,\ j,\ \nu}|$，因此估计式 (5.12) 得证。

证明 (5.13)： 这涉及核 $J^n_{l,\ p,\ j,\ \nu}$ 它满足由 (5.5) 给出的估计。我们将 (5.5) 中关于 $I^*_{l,\ p,\ j,\ \nu}$ 的积分分解为两部分，分别由 $I^1=\{\alpha\in I^*_{l,\ p,\ j,\ \nu}$ 和 $|\langle x,\ \alpha u_p+\gamma(\alpha)u_p^{\perp}\rangle|\geqslant|\langle x,\ u_p+\gamma'(\alpha)u_p^{\perp}\rangle|\}$ 以及 $I^2=I^*_{l,\ p,\ j,\ \nu}\backslash I^1$给出。这就得到彩在线

$$\left|(J^n_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k})(x)\right|\leqslant\mathfrak{I}_1(x)+\mathfrak{I}_2(x)$$

其中 $\mathfrak{I}_i(x)$ 对应于方程（5.5），该方程在 I^i 上对 $i=1$进行积分，2。注意，对于 $\mathfrak{I}_1(x)$，我们有

$$\mathfrak{I}_1(x)\lesssim\int_{I^1}((1+2^{k-n}|I_{l,p,j,\nu}|)|\gamma''(\alpha)|+|I_{l,p,j,\nu}|^{-1})\frac{\min\{2^{k-l},2^{3(l-k)}\}}{|R_\alpha|}\chi_{R_\alpha}(x)d\alpha,$$

其中， R_α 是边分别平行于 $(\alpha u_p+\gamma(\alpha)u_p^{\perp})$ 和 $(-\gamma(\alpha)u_p+\alpha u_p^{\perp})$的矩形，其对应边长分别为 2^k 和$2^n|I_l$的常数倍$_{,\ p,\ j,\ \nu}|^{-1}$。特别地， R_α 的偏心率有一个由2^{30l}的常数倍控制的上界。此外，我们有彩争霸

$$\int_{I^*_{l,p,j,\nu}}|I_{l,p,j,\nu}|\gamma''(\alpha)d\alpha\leqslant 2^{-l}.$$

因此，对应于核 $\mathfrak{I}_1$ 的双线性算子可以轻易地由双线性 Kakeya 极大函数 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\leqslant 30l}}$. 控制。

接下来，考虑项 $\mathfrak{I}_2(x)$ ，其中涉及对 $I^2=I^*_{l,p,j,\nu}\backslash I^1$ 的积分。注意，对于 $\alpha\in I^2$，我们有 $2^n|I_{l,p,j,\nu}|^{-1}\sim|\langle x,u_p+\gamma'(\alpha)u_p^{\perp}\rangle|\sim|x|\sim 2^k$。特别地， $k\leqslant n+l$。因此，

$$\mathfrak{I}_2(x)\lesssim\int_{I^2}((1+2^{k-n}|I_{l,p,j,\nu}|)|\gamma''(\alpha)|+|I_{l,p,j,\nu}|^{-1})\sum_{i=1}^{k}\min\{2^{i-l},2^{3(l-i)}\}\frac{1}{|R_\alpha|}\chi_{R_\alpha}(x)d\alpha,$$

其中 R_α 是边平行于 $(\alpha u_p+\gamma(\alpha)u_p^{\perp})$ 和 $(-\gamma(\alpha)u_p+\alpha u_p^{\perp})$、边长分别为 2^i 和 2^k 的常数倍的矩形。这就证明了所需的估计。

(5.14) 的证明可沿用 $\mathfrak{I}_2(x)$情形中的论证。 □

回想一下，我们正在研究与式（5.2）中给出的核相关的双线性算子的有界性，其中包含项 $k\leqslant 10l$。我们注意到，所需的估计

对于项 $\sum_{k=0}^{10l}((J_{l,p,j,\nu}\chi_{|x|\geqslant 2^{20l}})*H_{l,p,j,\nu})\chi_{A_k}$，通过运用引理 5.2 和引理 4.3 即可得到。对于其余项，我们注意到，量 $H_{l,p,j,\nu}*(f,g)$ 可以由 Hardy-Littlewood 极大函数的乘积所控制。因此，利用引理 5.3，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\lambda l}\sum_{p=1}^{2^{2M}}\sum_{j,\nu}((J_{l,p,j,\nu}\chi_{|\cdot|\leqslant 2^{20l}})*H_{l,p,j,\nu})\chi_{\{|\cdot|\leqslant 2^{10l}\}}*(f_{l,p,j,\nu},g_{l,p,j,\nu})\right\|_{p_3}\\
\lesssim&\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\lambda l}\sum_{p=1}^{2^{2M}}\left\|\sum_{j,\nu}\sum_{k=0}^{20l}(J_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k}*(Mf_{l,p,j,\nu},Mg_{l,p,j,\nu})\right\|_{p_3}\\
\lesssim&\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\lambda l}\sum_{p=1}^{2^{2M}}\left\|\sum_{j,\nu}\sum_{k=0}^{20l}(J_{l,p,j,\nu}\chi_{A_k}*(Mf_{l,p,j,\nu},Mg_{l,p,j,\nu})\right\|_{p_3}\\
\lesssim&\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\lambda l}\sum_{p=1}^{2^{2M}}\left\|\sum_{j,\nu}\sum_{k=0}^{20l}l\mathcal{M}_{2^{30l}}(Mf_{l,p,j,\nu},Mg_{l,p,j,\nu})\right\|_{p_3}\\
\lesssim&\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\lambda l}l^2\sum_{p=1}^{2^{2M}}\left\|\sum_{j,\nu}\mathcal{M}_{2^{30l}}(Mf_{l,p,j,\nu},Mg_{l,p,j,\nu})\right\|_{p_3}
\end{aligned}$$

现在，利用 Kakeya 极大函数的向量值有界性（定理 2.7）$\epsilon=\frac{\lambda}{2}$ 以及 Hardy-Littlewood 极大函数的向量值有界性（见 [10] 中的定理 5.6.6），上面的项可由以下表达式控制

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\frac{\lambda l}{2}}l^2\sum_{p=1}^{2^{2M}}\left\|\left(\sum_{j,\nu}|Mf_{l,p,j,\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p_1}\left\|\left(\sum_{j,\nu}|Mg_{l,p,j,\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p_2}\\
\lesssim&\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\frac{\lambda l}{2}}l^2\sum_{p=1}^{2^{2M}}\left\|\left(\sum_{j,\nu}|f_{l,p,j,\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p_1}\left\|\left(\sum_{j,\nu}|g_{l,p,j,\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p_2}\\
\lesssim&\sum_{l=1}^{\infty}2^{-\frac{\lambda l}{2}}l^3\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}\lesssim\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2},
\end{aligned}$$

其中，在第二个不等式中，我们对有界重叠区间族 $\{P^i_{l,\ p,\ j,\ \nu},\quad j=1,\ \ldots\ldots Q_{u_p}(2^{-l})\}$ 使用了 Rubio de Francia 的 Littlewood-Paley 不等式 [23] 。

这就完成了定理 2.1 的证明，其中假设边界 $\partial\Omega$ 的任何部分都不平行于坐标轴。这个假设很容易去掉。事实上，我们来考虑边界的一部分平行于某个坐标轴的情形。注意，我们可以像之前一样将双线性乘子分解成“环域”，从而得到$m=\sum_{l=0}^{\infty}m_l$。接下来，我们将每个 m_l 作光滑分解，得到 $m_l=m_l^1+m_l^2$

其中 m_l^1 的支集包含在至多四个平行于坐标轴的矩形的并集中。由于符号 m_l^1 与一个矩形相适配，我们可以分别对 ξ 变量和 η变量使用希尔伯特变换，从而推出对应于 m_l^1的双线性算子的有界性。最后， m_l^2 的情形可用与上述类似的方法处理。至此，定理 2.1 的证明完成。□

注 5.4。 我们在此指出，算子$\mathcal{B}^\lambda, \lambda > 0$的 $L^2(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$–有界性可以通过一个更简单的论证得到。事实上，估计 (5.10) 和引理 *4.1* 表明，与乘子 $m_{l,p,j,\nu}$ 相关联的算子将 $L^2(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$映射到 $L^1(\mathbb{R})$ ，其算子范数由 l控制。因此，简单应用柯西-施瓦茨不等式即可得到所需的有界性结果。为此，考虑

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}^\lambda(f,g)\|_1 &\lesssim \sum_l 2^{-\lambda l} l \sum_p \sum_{j,\nu} \|f_{l,p,j,\nu}\|_2 \|g_{l,p,j,\nu}\|_2 \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-\lambda l} l \sum_{p=1}^{2^{2M}} \left\| \left(\sum_{j,\nu} |f_{l,p,j,\nu}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \left\| \left(\sum_{j,\nu} |g_{l,p,j,\nu}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-\lambda l} l^2 \|f\|_2 \|g\|_2 \lesssim \|f\|_2 \|g\|_2.\end{aligned}$$

6. Proof of Theorem 2.4: Fixed scale bilinear Kakeya maximal function

首先注意到，利用标准伸缩论证可以很容易地得出：对于满足 H¨older 关系 $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ 的三元组 (p_1, p_2, p_3)，我们有

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}} = \|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\delta,N}}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}}.$$

因此，我们只需证明 $\delta = 1$ 的定理 2.4。不过，在下一个估计中，我们对任意的 $\delta > 0$ 进行讨论，因为本文后面会以这种形式用到它。

Banach 情形 (a) 部分的证明： 注意，对于给定的矩形 $R \in \mathcal{R}_{\delta,\ N}$，只需证明以下两个估计即可。

(1) 对于 $1 < s < \infty$，我们有

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f(x-y_1)||g(x-y_2)|\, dy_1 dy_2 \lesssim M_s f(x) M_{s'} g(x). \tag{6.1}$$

(2) 对于 $s = 1$，我们有

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f(x-y_1)||g(x-y_2)|\, dy_1 dy_2 \lesssim \min\{\|g\|_\infty Mf(x), \|f\|_\infty Mg(x)\}. \tag{6.2}$$

上述两个不等式中的隐含常数均与 R 无关。这里我们采用记号 $M_s f(x) = (M(f^s)(x))^{\frac{1}{s}}$, $s > 0$.

设 R 的最长边与 x轴的夹角为 θ_0。由于 f 和 g中的对称性，不失一般性，我们可以假设 $0 < \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{4}$。我们将矩形 R表示为星形集合 $R = \{(t\cos\theta,\ t\sin\theta)\colon\ \theta \in [0,\ \frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\ \frac{3\pi}{2}],\quad 0 \leqslant$

$t < r(\theta)\}$，其中 $r(\theta)$ 是相对于 θ的 R 的边界函数。通过用极坐标表示 R 上的平均值，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|R|}\int_R |f(x-y_1)||g(x-y_2)|\,dy_1dy_2\\
\leqslant&\frac{1}{\delta^2 N}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r(\theta)} |f(x-t\sin\theta)||g(x-t\cos\theta)|t\;dtd\theta\\
\leqslant&\frac{1}{\delta^2 N}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\theta)\left(\frac{1}{r(\theta)}\int_{r=0}^{r(\theta)}|f(x-t\sin\theta)|^s\,dt\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{r(\theta)}\int_{r=0}^{r(\theta)}|g(x-t\cos\theta)|^{s'}\,dt\right)^{\frac{1}{s'}}d\theta\\
\leqslant&\left(\frac{1}{\delta^2 N}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\theta)d\theta\right)M_sf(x)M_{s'}g(x)\\
\lesssim&\frac{1}{\delta^2 N}\left(\int_{\theta=0}^{\theta_0-\frac{C}{N}}(\delta\text{cosec }(\theta_0-\theta))^2d\theta+\int_{\theta=\theta_0-\frac{C}{N}}^{\theta_0+\frac{C}{N}}(\delta N)^2\,d\theta+\int_{\theta=\theta_0+\frac{C}{N}}^{\frac{\pi}{2}}(\delta\text{cosec }(\theta-\theta_0))^2d\theta\right)M_sf(x)M_{s'}g(x)\\
\lesssim&M_sf(x)M_{s'}g(x).
\end{aligned}
$$

其中我们利用了如下事实：当 $r(\theta)\lesssim\delta N$ 时， θ 是 x轴与经过原点及较短边上一点的直线之间的夹角。在其余情况下，我们有 $r(\theta)\sim\delta|\text{cosec }(\theta-\theta_0)|$。这就完成了第一个不等式的证明。另一个不等式也可用同样的方法证明。

巴拿赫情形 (b) 部分的证明:

对于 $i\in\mathbb{Z}$，令 I_i 表示区间 $[i-\frac{1}{2},\ i+\frac{1}{2})$。记作 $\mathbb{R}=\bigcup I_i.i\in\mathbb{Z}$

由 f 和 g 的局部可积性，对于每个区间 I_i，我们都可以找到一个矩形$R_i\in\mathcal{R}_{1,\ N}$，使得

(1) $\{(x,x),x\in I_i\}\cap R_i\neq\varnothing$,
(2) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}(f,g)(x)\leqslant\frac{2}{|R_i|}\int_{R_i}f(y_1)g(y_2)dy_1dy_2,\quad\forall x\in I_i.$

令 $e_i=(e_{i,1},e_{i,2})$ 表示平行于 R_i最长边的单位向量。借助以下集合，我们将矩形 R_i 划分为三个集合。

$$
\begin{aligned}
A_1&=\{i\in\mathbb{Z}\mid\frac{1}{\sqrt{2}}<|e_{i,1}|\leqslant 1\},\\
A_2&=\{i\in\mathbb{Z}\mid 0\leqslant|e_{i,1}|<\frac{1}{2}\},\\
\text{and}\quad A_3&=\{i\in\mathbb{Z}\mid\frac{1}{2}\leqslant|e_{i,1}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\}.
\end{aligned}
$$

令 $Q_j = J_{1,j} \times J_{2,j}$为 $\mathbb{R}^2$ 中的正方形，其中 $J_{1,j} = (j_1 - \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2})$且 $J_{2,j} = (j_2 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2})$，$j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$. 定义。

$$\gamma_i = \{j \in \mathbb{Z}^2 \mid Q_j \cap R_i \neq \varnothing\}.$$

下面的引理定量描述了矩形 R_i's 投影到坐标轴上时的交叠情况。

引理 6.1。 （关键引理）设 $h_{l,k}(y_l), l = 1, 2; k = 1, 2, 3$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，定义如下：

$$h_{l,k}(y_l) = \sum_{i \in A_k} \sum_{j \in \gamma_i} \chi_{J_{l,j}}(y_l).$$

那么我们有：

(1) $\|h_{l,k}\|_\infty \lesssim N$对数 N当 l，$k = 1$，2 满足 $l \neq k$.

(2) $\|h_{l,l}\|_\infty \lesssim N$ 当 $l = 1$，2。(3) $\|h_{l,3}\|_\infty \lesssim N$ 当 $l = 1$，2。

我们暂且假设引理 6.1成立，并完成定理 2.4的证明。考虑

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}(f,g)(x) &\leqslant \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{2}{|R_i|} \int_{R_i} f(y_1)g(y_2)dy_1dy_2\chi_{I_i}(x) \\
&= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i \in A_k} \int_{R_i} f(y_1)g(y_2)dy_1dy_2\chi_{I_i}(x) \\
&= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i \in A_k} \sum_{j \in \gamma_i} \int_{J_{1,j}} f(y_1)dy_1 \int_{J_{2,j}} g(y_2)dy_2.
\end{aligned}$$

结合上述估计与 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}(f,g)(x)|^{p_3}dx \\
\leqslant\ & \left(\frac{2}{N}\right)^{p_3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i \in A_k} \left(\sum_{j \in \gamma_i} \int_{J_{1,j}} f(y_1)dy_1 \int_{J_{2,j}} g(y_2)dy_2 \right)^{p_3} \\
\leqslant\ & \left(\frac{2}{N}\right)^{p_3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i \in A_k} \left(\sum_{j \in \gamma_i} \int_{J_{1,j}} f(y_1)^{p_1}dy_1 \right)^{\frac{p_3}{p_1}} \left(\sum_{j \in \gamma_i} \int_{J_{2,j}} g(y_2)^{p_2}dy_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \\
\leqslant\ & \left(\frac{2}{N}\right)^{p_3} \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i \in A_k} \sum_{j \in \gamma_i} \int_{J_{1,j}} f(y_1)^{p_1}dy_1 \right)^{\frac{p_3}{p_1}} \left(\sum_{i \in A_k} \sum_{j \in \gamma_i} \int_{J_{2,j}} g(y_2)^{p_2}dy_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \\
\leqslant\ & \left(\frac{2}{N}\right)^{p_3} \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i \in A_k} \sum_{j \in \gamma_i} \chi_{J_{1,j}}(y_1) \right) f(y_1)^{p_1}dy_1 \right)^{\frac{p_3}{p_1}}
\end{aligned}$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i \in A_k} \sum_{j \in \gamma_i} \chi_{J_{1,j}}(y_1) \right) g(y_2)^{p_2} dy_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}}.$$

利用引理 6.1 中的估计可得

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}(f,g)(x)|^{p_3} dx \\ \lesssim \; & \frac{1}{N^{p_3}} \left(N^{\frac{p_3}{p_1}} (N \log N)^{\frac{p_3}{p_2}} \|f\|_{p_1}^{p_3} \|g\|_{p_2}^{p_3} + (N \log N)^{\frac{p_3}{p_1}} N^{\frac{p_3}{p_2}} \|f\|_{p_1}^{p_3} \|g\|_{p_2}^{p_3} + N^{\frac{p_3}{p_1}+\frac{p_3}{p_2}} \|f\|_{p_1}^{p_3} \|g\|_{p_2}^{p_3} \right) \\ \leqslant \; & N^{1-p_3} (\log N)^{\frac{p_3}{\min\{p_1,p_2\}}} \|f\|_{p_1}^{p_3} \|g\|_{p_2}^{p_3}, \end{aligned}$$

至此，Banach 情形的证明完成。 □

非巴拿赫情形的证明： 这一部分利用双线性算子的插值可以很容易地得到。首先，注意到任意矩形 $R \in \mathcal{R}_{1,\ N}$，我们都可以用一个正方形上的双线性平均来控制其在 R 上的双线性平均，其中该正方形的边长与 N 相当，且包含 R。由此可得

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}(f,g)(x) \leqslant NMf(x)Mg(x).$$

Hölder 不等式结合 Hardy-Littlewood 极大算子的弱型 $(1,1)$ 有界性，得到了端点结果 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}\|_{L^1 \times L^1 \to L^{\frac{1}{2},\infty}} \lesssim N$。最后，通过在点 $(1,\infty,1), (1,\mathbf{1},\frac{1}{2})$ 和 $(\infty,\mathbf{1},1)$ 之间插值，我们得到了 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{1,N}}$ 在非巴拿赫范围（$\frac{1}{2} < p_3 < 1$）内的有界性。注意，我们得到的常数有界于 $N^{\frac{1}{p_3}-1}$。这就完成了定理 2.4 的证明，但引理 6.1 除外；其证明将在下一节给出。 □

6.1. 关键引理 6.1 的证明。 根据 $h_{l,k}$ 的定义，我们知道它在 Q_j 上是常数。因此，只需证明

$$h_{l,k}(0) \leqslant CN \log N$$

当 N 足够大时成立，其中 C 是一个与 R_i 的选取无关的常数。令 $\Gamma_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R}$ 和 $\Gamma_2 = \mathbb{R} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$。那么，

$$\sum_{j \in \gamma_i} \chi_{J_{1,j}}(0) = \operatorname{card}\left(\left\{ j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_1 \cap R_i) \neq \varnothing \right\} \right)$$

and

$$\sum_{j \in \gamma_i} \chi_{J_{2,j}}(0) = \operatorname{card}\left(\left\{ j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_2 \cap R_i) \neq \varnothing \right\} \right).$$

注意，我们需要考虑与 Γ_1 或 Γ_2 相交的矩形 R_i，且矩形的最大边长为 N。因此，对于 $y = (0,\ 0)$，我们只需考虑 $i \in [-2N,\ 2N]$。由对称性及 $h_{l,\ k,}$ 的定义可知，

$$h_{l,k}(0) \leqslant 2 \sum_{\substack{i \in A_k \\ 0 \leqslant i \leqslant N}} \operatorname{card}\left(\left\{ j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_l \cap R_i) \neq \varnothing \right\} \right).$$

设 $R_i \cap \Gamma_l \neq \varnothing$，，则 R_i 在 y_l 轴上的投影长度大于 $i-1$。另一方面，投影长度始终小于 $N|e_{i,\ l}|+1$。因此，

$$i-1 \leqslant N|e_{i,l}|+1, \quad \text{i.e.} \quad |e_{i,l}|^{-1} \leqslant \frac{N}{i-2}. \tag{6.3}$$

令 L 是一条平行于 e_i 的直线，则 $\Gamma_l \cap L$ 的长度为 $|e_{i,\ l}|^{-1}$。由于 R_i 的宽度为 1，$\Gamma_l \cap R_i$ 至多可由 $[|e_{i,\ l}|^{-1}]+1$ 条长度为 1 的线段覆盖。因此，由 (6.3) 可得以下估计，

$$\operatorname{card}\left(\left\{j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_l \cap R_i) \neq \varnothing\right\}\right) \leqslant [|e_{i,l}|^{-1}] + 2 \leqslant \frac{N}{i-2} + 2 \lesssim \frac{N}{i-2}.$$

另外，注意到若 $i \in A_l$，$|e_{i,\ l}|^{-1} \leqslant \sqrt{2}$ 对于 $l=1$，2 成立，且对于 $i \in A_3$，$|e_{i,\ 1}|^{-1}$，$|e_{i,\ 2}|^{-1} \leqslant 2$ 成立。因此，对于 $l=1$，2，我们有

$$\begin{aligned} h_{l,l}(0) &\leqslant 2 \sum_{\substack{i \in A_l \\ 0 \leqslant i \lesssim N}} \operatorname{card}\left(\left\{j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_l \cap R_i) \neq \varnothing\right\}\right) \\ &\leqslant 2 \sum_{i=0}^{N} 3 \lesssim N, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} h_{l,3}(0) &\leqslant 2 \sum_{\substack{i \in A_3 \\ 0 \leqslant i \lesssim N}} \operatorname{card}\left(\left\{j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_l \cap R_i) \neq \varnothing\right\}\right) \\ &\leqslant 2 \sum_{i=0}^{N} 4 \lesssim N, \end{aligned}$$

当 $l \neq k$ 和 $k \neq 3$ 时，我们得到

$$\begin{aligned} & h_{l,k}(0) \\ \leqslant\ & 2 \sum_{\substack{i \in A_k \\ 0 \leqslant i \lesssim N}} \operatorname{card}\left(\left\{j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_l \cap R_i) \neq \varnothing\right\}\right) \\ \leqslant\ & 2 \left(\sum_{i=0}^{2} \operatorname{card}\left(\left\{j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_l \cap R_i) \neq \varnothing\right\}\right) + \sum_{\substack{i \in A_k \\ 3 \leqslant i \lesssim N}} \operatorname{card}\left(\left\{j \in \mathbb{Z}^2 | Q_j \cap (\Gamma_l \cap R_i) \neq \varnothing\right\}\right) \right) \\ \leqslant\ & 2[3(N+1) + N \log N] \\ \lesssim\ & N \log N \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

7. Proof of Theorem 2.5: Bilinear Kakeya maximal function

对于巴拿赫情形的 (a) 部分和非巴拿赫情形，定理 2.5 的证明可按照定理 2.4 证明中的相应论证完成。因此，我们只需证明巴拿赫情形的 (b) 部分。下面列出这些情形中的一些估计，因为证明巴拿赫情形的 (b) 部分时会用到它们。

我们有如下估计

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}} \lesssim A,$$

对于以下各情形中的三元组 $(p_1,\ p_2,\ p_3)$。

- $(p_1,\ p_2,\ p_3) = (\frac{3s}{s+2},\ \frac{3s'}{s'+2},\ \frac{3}{4})$，其中 $A = N^{\frac{1}{3}}$。
- $(p_1,\ p_2,\ p_3) = (s,\ \frac{3s'}{s'+2},\ \frac{3s}{3s+1})$，其中 $A = N^{\frac{1}{3s}}$。
- $(p_1,\ p_2,\ p_3) = (\frac{3s}{s+2},\ s',\ \frac{3s'}{3s'+1})$，其中 $A = N^{\frac{1}{3s'}}$。

C´ordoba [7] 和 Str¨omberg [27] 利用一种插值思想，推导出了线性 Kakeya 极大函数估计中的对数界。我们发展了相应的双线性类比，以证明我们的结果。我们将插值结果表述为一个引理。这可能具有独立的研究价值。通过使用上述提到的 L^p- 估计，巴拿赫情形 (b) 部分的证明可立即得到。

L引理 7.1. 设 $1 < s < \infty$。假设 T 是一个满足以下条件的双次线性算子*ng*

$$\|T\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3,\infty}} \lesssim A,$$

对于以下 *H¨older* 指数 $(p_1、\ p_2、\ p_3)$:

(1) (∞,∞,∞), (∞,s',s'), (s,∞,s), $(s,s',1)$, $(\infty,\frac{3s'}{s'+2},\frac{3s'}{s'+2})$, *and* $(\frac{3s}{s+2},\infty,\frac{3s}{s+2})$ *with* $A = 1$.
(2) $(\frac{3s}{s+2},\frac{3s'}{s'+2},\frac{3}{4})$ *with* $A = N^{\frac{1}{3}}$.
(3) $(s,\frac{3s'}{s'+2},\frac{3s}{3s+1})$ *with* $A = N^{\frac{1}{3s}}$.
(4) $(\frac{3s}{s+2},s',\frac{3s'}{3s'+1})$ *with* $A = N^{\frac{1}{3s'}}$.

于是，我们得到以下强型估计，

$$\|T\|_{L^s\times L^{s'}\to L^1} \lesssim \log N.$$

引理 7.1 的证明： 这里仅给出 $(2,2,1)$ 有界性的证明，对应于 $s = 2$。其他 s 取值的情形，可按本证明末尾所述完成。

令 $f,\ g \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\lambda > 0$。不失一般性，假设 $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$。将 f 分解为

$$f = f_1 + f_2 + f_3, \text{ where}$$
$$f_1 = f\chi_{|f(x)|<\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{4}},\ \ f_2 = f\chi_{\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{4}<|f(x)|\leqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}},\ \ f_3 = f\chi_{|f(x)|\geqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}}.$$

同样，我们写作 $g = g_1 + g_2 + g_3$。考虑一下。

$$\|T(f,g)\|_1 = \int_0^\infty |\{x\in\mathbb{R} : |T(f,g)(x)| > \lambda\}|\, d\lambda$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^\infty \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : |T(f_i, g_j)(x)| > \frac{\lambda}{9} \right\} \right| \, d\lambda.$$

由对称性，只需估计 $i \leqslant j$ 时的各项。当 T 从 $L^\infty(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ 有界时，项 $i = j = 1$ 的水平集测度为零。由 T 的 $L^\infty(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})-$ 有界性，我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : |T(f_1, g_2)(x)| > \frac{\lambda}{9} \right\} \right| \, d\lambda &\lesssim \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} \|f_1\|_\infty^2 \|g_2\|_2^2 \, d\lambda \\
&\lesssim \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{\frac{1}{4}\lambda^{\frac{1}{2}} \leqslant |g| \leqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}} |g(y_2)|^2 \, dy_2 d\lambda \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}} \int_{\lambda = \frac{|g(y_2)|^2}{N^2}}^{16|g(y_2)|^2} \frac{d\lambda}{\lambda} |g(y_2)|^2 \, dy_2 \\
&\lesssim \log N.
\end{aligned}$$

对于 $i = j = 2$，我们利用 $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R})- T$ 的有界性以及 Cauchy-Schwarz 不等式，得到，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : |T(f_2, g_2)(x)| > \frac{\lambda}{9} \right\} \right| \, d\lambda \\
\lesssim &\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \|f_2\|_2 \|g_2\|_2 \, d\lambda \\
\leqslant &\int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\frac{1}{4}\lambda^{\frac{1}{2}} \leqslant |f| \leqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}} |f(y_1)|^2 \, dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\frac{1}{4}\lambda^{\frac{1}{2}} \leqslant |g| \leqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}} |g(y_2)|^2 \, dy_2 \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda \\
\lesssim &\left(\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{\frac{1}{4}\lambda^{\frac{1}{2}} \leqslant |f| \leqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}} |f(y_1)|^2 \, dy_1 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{\frac{1}{4}\lambda^{\frac{1}{2}} \leqslant |g| \leqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}} |g(y_2)|^2 \, dy_2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\
\lesssim &\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\lambda = \frac{|f(y_1)|^2}{N^2}}^{16|f(y_1)|^2} \frac{d\lambda}{\lambda} |f(y_1)|^2 \, dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\lambda = \frac{|g(y_2)|^2}{N^2}}^{16|g(y_2)|^2} \frac{d\lambda}{\lambda} |g(y_2)|^2 \, dy_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\lesssim &\log N.
\end{aligned}$$

对应于 $i = 1, j = 3$ 的项通过使用 T 的 $L^\infty(\mathbb{R}) \times L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}) \to L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})-$ 有界性估计如下，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : |T(f_1, g_3)(x)| > \frac{\lambda}{9} \right\} \right| \, d\lambda &\lesssim \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \|f_1\|_\infty^{\frac{3}{2}} \|g_3\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \, d\lambda \\
&\lesssim \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{4}}} \int_{|g| \geqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}} |g(y_2)|^{\frac{3}{2}} \, dy_2 d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lesssim \int_{\mathbb{R}}\int_{\lambda=0}^{\frac{|g(y_2)|^2}{N^2}} \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{4}}}|g(y_2)|^{\frac{3}{2}}\,dy_2\\&\lesssim 1.\end{aligned}$$

对于含有 $i=2, j=3$ 的项， T的$L^2(\mathbb{R})\times L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})\to L^{\frac{6}{7}}(\mathbb{R})$ 有界性意味着,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left|\left\{x\in\mathbb{R}: |T(f_2,g_3)(x)|>\frac{\lambda}{9}\right\}\right|\,d\lambda\\\lesssim& N^{\frac{1}{7}}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{\frac{6}{7}}}\|f_2\|_2^{\frac{6}{7}}\|g_3\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{6}{7}}\,d\lambda\\\leqslant& N^{\frac{1}{7}}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda}\int_{\frac{1}{4}\lambda^{\frac{1}{2}}\leqslant|f|\leqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}}|f(y_1)|^2\,dy_1\right)^{\frac{3}{7}}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{4}}}\int_{|g|\geqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}}|g(y_2)|^{\frac{3}{2}}\,dy_2\right)^{\frac{4}{7}}d\lambda\\\lesssim& N^{\frac{1}{7}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\lambda=\frac{|f(y_1)|^2}{N^2}}^{16|f(y_1)|^2}\frac{d\lambda}{\lambda}|f(y_1)|^2\,dy_1\right)^{\frac{3}{7}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\lambda=0}^{\frac{|g(y_2)|^2}{N^2}}\frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{4}}}|g(y_2)|^{\frac{3}{2}}\,dy_2\right)^{\frac{4}{7}}\\\lesssim& 1.\end{aligned}$$

最后，含有 $i=j=3$ 的项利用 T 的 $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})\times L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})\to L^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R})$ 界进行估计。事实上，通过应用柯西-施瓦茨不等式，我们有，

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left|\left\{x\in\mathbb{R}: |T(f_3,g_3)(x)|>\frac{\lambda}{9}\right\}\right|\,d\lambda\\\lesssim& N^{\frac{1}{4}}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{4}}}\|f_3\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}}\|g_3\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}}\,d\lambda\\\lesssim& N^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^\infty\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{4}}}\int_{|f|\geqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}}|f(y_1)|^{\frac{3}{2}}\,dy_1d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{4}}}\int_{|g|\geqslant N\lambda^{\frac{1}{2}}}|g(y_2)|^{\frac{3}{2}}\,dy_2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\\\lesssim& N^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\lambda=0}^{\frac{|f(y_1)|^2}{N^2}}\frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{4}}}|f(y_1)|^{\frac{3}{2}}\,dy_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\lambda=0}^{\frac{|g(y_2)|^2}{N^2}}\frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{4}}}|g(y_2)|^{\frac{3}{2}}\,dy_2\right)^{\frac{1}{2}}\lesssim 1.\end{aligned}$$

这就完成了 $s=2$ 的证明。 $s\neq 2$ 的情形可类似地证明。在这种情况下，我们需要使用以下分解来进行证明： $f=f_1+f_2+f_3$ 和 $g=g_1+g_2+g_3$，其中

$$f_1=f\chi_{|f(x)|<\frac{\lambda^{\frac{1}{s}}}{4}},\quad f_2=f\chi_{\frac{\lambda^{\frac{1}{s}}}{4}<|f(x)|\leqslant N^{\frac{1}{s-1}}\lambda^{\frac{1}{s}}},\quad f_3=f\chi_{|f(x)|\geqslant N^{\frac{1}{s-1}}\lambda^{\frac{1}{s}}},\text{ and}$$

$$g_1=g\chi_{|g(x)|<\frac{\lambda^{\frac{1}{s'}}}{4}},\quad g_2=g\chi_{\frac{\lambda^{\frac{1}{s'}}}{4}<|g(x)|\leqslant N^{s-1}\lambda^{\frac{1}{s'}}},\quad g_3=g\chi_{|g(x)|\geqslant N^{s-1}\lambda^{\frac{1}{s'}}}.$$

□

8. Proof of Theorem 2.7: Vector-valued extension of bilinear Kakeya maximal function

为证明定理 2.7，我们将采用与 [20] 相似的论证，他们曾用此论证为式 (10.1) 中定义的双线性极大函数得到类似的向量值不等式。首先注意，若 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}$ 从 $L^{p_1}(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 到 $L^{p_3}(\mathbb{R})$ 有界，对于一个 H¨older 相关三元组 $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ 满足 $1 < p_1,\ p_2 \leqslant \infty$，那么它具有向量值扩张

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N} : L^{p_1}(l^{p_1})(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(l^{p_2})(\mathbb{R}) \to L^{p_3}(l^{p_3})(\mathbb{R}) \tag{8.1}$$

其算子范数与 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}$ 在标量情形下的算子范数相同。

利用估计 (6.1) 和 (6.2) 以及 H¨older 不等式，我们得到

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N} : L^{p}(l^{s})(\mathbb{R}) \times L^{\infty}(l^{\infty})(\mathbb{R}) \to L^{p}(l^{s})(\mathbb{R}), \tag{8.2}$$

and

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N} : L^{\infty}(l^{\infty})(\mathbb{R}) \times L^{p}(l^{s})(\mathbb{R}) \to L^{p}(l^{s})(\mathbb{R}), \tag{8.3}$$

其中 $1 < p < \infty$ 和 $1 < s \leqslant \infty$.

首先，我们对估计 (8.2) 和 (8.3) 进行插值，从而得到 $1 < p_1,\ p_2,\ p_3 < \infty$ 和 $1 < r_1,\ r_2,\ r_3 \leqslant \infty$的如下有界性,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N} : L^{p_1}(l^{r_1})(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(l^{r_2})(\mathbb{R}) \to L^{p_3}(l^{r_3})(\mathbb{R}). \tag{8.4}$$

现在，对于 $\epsilon > 0$，我们对 (8.4) 和 (8.1)（其中 $p_3 = \frac{1}{1+\epsilon}$ and ~~$1 <$~~ $p_1, p_2 \leqslant \infty$）进行插值，得到 申博

$$\left\| \left(\sum_j |\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}(f_j, g_j)|^{r_3} \right)^{\frac{1}{r_3}} \right\|_{L^{p_3}(\mathbb{R})} \lesssim N^{\epsilon} \left\| \left(\sum_j |f_j|^{r_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \left\| \left(\sum_j |g_j|^{r_2} \right)^{\frac{1}{r_2}} \right\|_{L^{p_2}(\mathbb{R})},$$

其中 $1 < p_1,\ p_2 \leqslant \infty$、$1 \leqslant p_3 < \infty$ 和 $1 < r_1,\ r_2 \leqslant \infty$、$1 \leqslant r_3 \leqslant \infty$。特别地，我们在 $L^{\frac{2}{1+\epsilon}}(l^{\frac{2}{1+\epsilon}})(\mathbb{R}) \times L^{\frac{2}{1+\epsilon}}(l^{\frac{2}{1+\epsilon}})(\mathbb{R}) \to L^{\frac{1}{1+\epsilon}}(l^{\frac{1}{1+\epsilon}})(\mathbb{R})$ 和 $L^{q_1}(l^{s_1})(\mathbb{R}) \times L^{q_2}(l^{s_2})(\mathbb{R}) \to L^{q_3}(l^{s_3})(\mathbb{R})$ 之间进行插值，其中 $1 < q_1,\ q_2,\ q_3 < \infty$ 和 $1 < s_1,\ s_2,\ s_3 \leqslant \infty$。注意，这样的三元组 $(q_1,\ q_2,\ q_3)$ 和 $(r_1,\ r_2,\ r_3)$ 确实存在，因为我们已经 .....

$$\frac{1}{p_1} = \frac{\theta}{\frac{2}{1+\epsilon}} + \frac{1-\theta}{q_1}.$$

Then

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{1-\theta}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{\theta(1+\epsilon)}{2}\right).$$

注意，我们需要确保的是:

$$0 < \frac{1}{1-\theta}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{\theta(1+\epsilon)}{2}\right) < 1$$

或等价地,

$$\frac{\theta(1+\epsilon)}{2} < \frac{1}{q_1} < 1-\theta+\frac{\theta(1+\epsilon)}{2}$$

我们可以选择 θ，使上述条件成立。q_2, r_1 和 r_2 的选择也可以类似地进行。□

9. Examples for sharpness of constants

本节中，我们给出一些例子，以说明定理 2.5 中 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}$ 的范数对参数 N 的依赖关系是最优的。

命题 9.1. 设 $(p_1、p_2、p_3)$ 满足 $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$.，则算子范数 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}}$ 满足以下下界。

(1) $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}} \gtrsim N^{\frac{1}{p_3}-1}$，对于 $p_3 < 1$.(2) $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^1} \gtrsim$ 对数 N.

证明。令 $f_N(x) = x^{-p_1}\chi_{\{x:3\leqslant x\leqslant N\}}(x)$ 和 $g_N(x) = x^{-p_2}\chi_{\{x:3\leqslant x\leqslant N\}}(x)$。注意到 $\|f_N\|_{p_1} = \|g_N\|_{p_2} \simeq C$。令 $6 < x < N-1$，并考虑包含 $(x、x)$、尺寸为 $x-3\times\frac{x-3}{N}$ 且沿单位向量 $(\frac{1}{\sqrt{2}}、\frac{1}{\sqrt{2}})$ 方向的矩形，其中 $(4、4)$ 是短边的中点。于是

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}(f_N,g_N)(x) &\geqslant \frac{N}{(x-3)^2}\int_{4+\frac{x-3}{2\sqrt{2}N}}^{x+1-\frac{x-3}{2\sqrt{2}N}}\int_{y-\frac{x-3}{\sqrt{2}N}}^{y} f_N(y)g_N(z)dzdy\\
&\geqslant \frac{N}{(x-3)^2}\int_{4+\frac{x-3}{2\sqrt{2}N}}^{x+1-\frac{x-3}{2\sqrt{2}N}}\int_{y-\frac{x-3}{\sqrt{2}N}}^{y} \frac{1}{y^{\frac{2}{p_1}}z^{\frac{2}{p_2}}}dzdy\\
&\geqslant \frac{N}{(x-3)^2}\int_{4+\frac{x-3}{2\sqrt{2}N}}^{x+1-\frac{x-3}{2\sqrt{2}N}} \frac{x-3}{\sqrt{2}N}\frac{1}{y^{\frac{2}{p_3}}}dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}(x-3)(1-\frac{2}{p_3})}\left(\left(x+1-\frac{x-3}{2\sqrt{2}N}\right)^{1-\frac{2}{p_3}}-\left(4+\frac{x-3}{2\sqrt{2}N}\right)^{1-\frac{2}{p_3}}\right)\\
&\gtrsim \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

因此,

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}_N}(f_N,g_N)\|_{p_3}^{p_3} \geqslant c\int_6^{N-1}\frac{1}{x^{p_3}} \gtrsim \begin{cases} N^{1-p_3}, & p_3<1\\ \log N, & p_3=1\end{cases}.$$

证明至此完成。□

9.1. 关于作用于乘积型函数的（线性）Kakeya 极大算子的注记。本节构造一些例子，以说明即使将函数类限制为乘积型函数族，（2.2）和（2.3）中的线性 Kakeya 极大函数关于参数 N 的范数依赖仍是尖锐的。更确切地说，我们有以下结论，

定理 9.2。 以下下界适用于作用于乘积型函数的算子 $M_{\mathcal{R}_{1,N}}$ *and* $M_{\mathcal{R}_N}$。

(1) 存在一个形如 $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ 的函数，使得 $\|M_{\mathcal{R}_{1,N}} f\|_2 \gtrsim$对数 $N)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2$.
(2) 存在一个形如 $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ 的函数，使得 $\|M_{\mathcal{R}_N} f\|_2 \gtrsim$对数 $N\|f\|_2$.

证明。考虑乘积型函数 $f_N(y,z) = \frac{1}{(yz)^{\frac{1}{2}}}\chi_{1\leqslant y\leqslant N}(y)\chi_{1\leqslant z\leqslant N}(z)$。注意 $\|f_N\|_2 =$log N。令 R_k为一个尺寸为 $1\times N$、平行于直线$z = \frac{k}{N}y$且位于直线 $z = \frac{k}{N}y$下方的矩形，其两个顶点为 $O = (0,0)$和 $P_k = \left(\frac{N^2}{(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{Nk}{(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$（见图 1）。

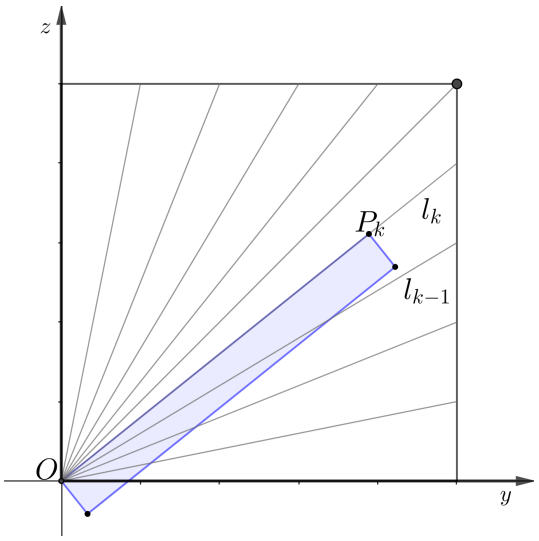

FIGURE 1. 蓝色矩形表示矩形 R_k，其顶点 O和 P_k 位于直线 l_k：$z = \frac{k}{N}y$。

对于 $x = (x_1,x_2) \in [0,N]^2$满足 $\frac{k-1}{N}x_1 \leqslant x_2 < \frac{k}{N}x_1$, $k = 2,3,...,N$和 $|x| \leqslant N$，我们有

$$M_{\mathcal{R}_{1,N}}(f_N)(x) \geqslant \frac{1}{N}\int_{R_k} f_N(y,z)dydz$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{N}\int_{\frac{N+(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}{k}}^{\frac{N^2}{(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}}\int_{\frac{k}{N}y-\frac{(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}{N}}^{\frac{k}{N}y}\frac{N^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}y}dzdy\\
&\geqslant \frac{1}{(Nk)^{\frac{1}{2}}}\frac{(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}{N}\int_{\frac{2(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}{k}}^{\frac{N^2}{(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}}\frac{1}{y}dy\\
&\geqslant \frac{1}{(Nk)^{\frac{1}{2}}}\left[\log\left(\frac{N^2}{(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}\right)-\log\left(\frac{2(N^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}{k}\right)\right]\\
&= \frac{1}{(Nk)^{\frac{1}{2}}}\log\left(\frac{N^2k}{2(N^2+k^2)}\right)\\
&\geqslant \frac{\log\frac{k}{4}}{(Nk)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Now,

$$
\begin{aligned}
\|M_{\mathcal{R}_{1,N}}(f_N)\|_2^2 &\geqslant \int_0^N\int_0^{\pi/2}|M_{\mathcal{R}_{1,N}}(f_N)(re^{i\theta})|^2rdrd\theta\\
&\geqslant \int_0^N\sum_{k=2}^{N}\int_{\theta=\arctan(\frac{k-1}{N})}^{\theta=\arctan(\frac{k}{N})}\left(\frac{\log\frac{k}{4}}{(Nk)^{\frac{1}{2}}}\right)^2rdrd\theta\\
&\gtrsim \sum_{k=2}^{N}\frac{N(\log\frac{k}{4})^2}{2k}\left(\arctan\left(\frac{k}{N}\right)-\arctan\left(\frac{k-1}{N}\right)\right)\\
&\gtrsim (\log N)^3.
\end{aligned}
$$

接下来，我们取 $x=(x_1,x_2)\in[1,N]^2$使得 $4\leqslant|x|\leqslant N$。对于每个 x，我们考虑包含 x 的矩形 R_x，其尺寸为 $\frac{|x|-2}{N}\times(|x|-2)$，其中一条短边与以原点为圆心、半径为 2 的圆相切，且长边平行于直线 $z=\frac{x_2}{x_1}y$并位于直线 $z=\frac{x_2}{x_1}y$下方。注意到，该矩形长边所在直线的方程为 $z=\frac{x_2}{x_1}y$和 $z=\frac{x_2}{x_1}y-\frac{|x|(|x|-2)}{x_1N}$，短边所在直线的方程为 $z=-\frac{x_1}{x_2}y+\frac{2|x|}{x_1}$ 和 $z=-\frac{x_1}{x_2}y+\frac{|x|^2}{x_1}$因此，

$$
\begin{aligned}
M_{\mathcal{R}_N}(f_N)(x) &\geqslant \frac{N}{(|x|-2)^2}\int_{R_x}f_N(y,z)dydz\\
&\geqslant \frac{N}{(|x|-2)^2}\int_{\frac{2x_1N+x_2(|x|-2)}{|x|N}}^{x_1}\int_{\frac{x_2}{x_1}y-\frac{|x|(|x|-2)}{x_1N}}^{\frac{x_2}{x_1}y}\frac{x_1^{\frac{1}{2}}}{x_2^{\frac{1}{2}}y}dzdy\\
&\geqslant \frac{N}{(|x|-2)^2}\frac{|x|(|x|-2)}{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}N}\int_{\frac{2x_1N+x_2(|x|-2)}{|x|N}}^{x_1}\frac{1}{y}dy\\
&\geqslant \frac{1}{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}}\left[\log(x_1)-\log\left(\frac{2x_1N+x_2(|x|-2)}{|x|N}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}} \log\left(\frac{x_1|x|N}{2x_1N + x_2(|x|-2)}\right)$$
$$\geqslant \frac{\log\frac{|x|}{4}}{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}}.$$

因此我们有，

$$\begin{aligned}
\|M_{\mathcal{R}_N}(f_N)\|_2^2 &\geqslant \int_{[1,N]^2} \frac{\left(\log\frac{|x|}{4}\right)^2}{x_1x_2}\,dx \\
&\geqslant \int_2^N \sum_{k=2}^{N} \int_{\theta=\arctan(\frac{k-1}{N})}^{\theta=\arctan(\frac{k}{N})} \frac{\left(\log\frac{r}{4}\right)^2}{kr^2} r\,dr\,d\theta \\
&\geqslant \sum_{k=2}^{N} \left(\arctan\left(\frac{k}{N}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{N}\right)\right) \frac{N}{k} \int_2^N \frac{(\log\frac{r}{4})^2}{r} dr \\
&\gtrsim (\log N)^4.
\end{aligned}$$

□

10. Further discussions

本节开始讨论双线性 Kakeya 极大函数与双线性情形下其他类型极大函数之间的联系。本节讨论旨在指出一些有待进一步研究的问题。

令 Ω 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的向量集合，给定一个矩形集合 $\mathcal{R}$，我们用记号 $\mathcal{R}^\Omega$ 表示 $\mathcal{R}$ 中最长边平行于某个 $\omega \in \Omega$ 的那些矩形组成的集合。除非另有说明，Ω 中的元素均为单位向量。

对于线性情形，当 $\mathfrak{F}$ 是最长边平行于 Ω 中某个向量的矩形集合，且 $\mathrm{card}(\Omega) = N$ 时，在 (2.1) 中定义的算子 $M_{\mathfrak{F}}$ 满足以下界，

$$\|M_{\mathfrak{F}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \log N.$$

上述不等式由 Str¨omberg [27] 证明适用于均匀分布的方向集；对于任意方向集，这一问题由 Katz [12]解决。此外，C´ordoba 和 Fefferman [8], 证明，对于稀疏方向集，$M_{\mathfrak{F}}$ 是弱型 $(2,\ 2)$；而在 [22]中，他们使用傅里叶变换方法证明了它在 L^p, $1 < p < \infty$ 中有界。

我们将方向双线性极大算子 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^\Omega}$ 定义为

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}^\Omega}(f,g)(x) = \sup_{R\in\mathcal{R}^\Omega:(x,x)\in R} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y_1)||g(y_2)|\,dy_1dy_2.$$

这里我们想请感兴趣的读者参阅 Str¨omberg [27], C´ordoba 和 Feffer- man [8], Katz [12], Nagel、Stein 和 Wainger [22]，了解一些关于

线性对应情形的重要结果

$$M_{\mathcal{R}^\Omega} f(x) = \sup_{R\in\mathcal{R}^\Omega : x\in R} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y)|\, dy,\ x\in\mathbb{R}^2.$$

Lacey [16], 研究的双线性理论中的另一类重要极大函数定义为

$$\mathcal{M}_\alpha(f,g)(x) = \sup_{t>0}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} |f(x-t)g(x-\alpha t)|\, dt. \tag{10.1}$$

其中 $\alpha\in\mathbb{R}$。注意，如果 $\alpha = 0,1$，则 L^p–对 $\mathcal{M}_\alpha$ 的估计可以很容易地从 Hardy-Littlewood 极大函数的估计中推导出来。在其余情形下，Lacey [16] 证明了对于 $\alpha\neq 0,1$，算子 $\mathcal{M}_\alpha$ 将 $L^{p_1}(\mathbb{R})\times L^{p_2}(\mathbb{R})$ 映射到 $L^{p_3}(\mathbb{R})$，其中 $\frac{2}{3} < p_3 < \infty$ 且 $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$。众所周知，极大函数 $\mathcal{M}_\alpha$ 与双线性希尔伯特变换密切相关。

接下来，我们注意到，利用勒贝格微分定理，可以推导出

$$\mathcal{M}_\alpha(f,g)(x) \lesssim \mathcal{M}_{\mathcal{R}^{\Omega_\alpha}}(f,g)(x) \lesssim \mathcal{M}_\alpha(f, Mg)(x),$$

其中 $\Omega_\alpha = \{(1,\ \alpha)\}$. 这一关系自然引出了相关问题，以及可能用于处理两个极大函数 L^p–有界性问题的方法。

注释 10.1。我们作几点观察，以强调算子 $\|\mathcal{M}_\alpha\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^{p_3}}$ 对 α 的依赖性，其中 $(1,\alpha)$ 接近对角线。由命题 *9.1* 中给出的例子显然可见，算子 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{\Omega_1}}$ 无法从 $L^p(\mathbb{R})\times L^{p'}(\mathbb{R})$ 有界映射到 $L^1(\mathbb{R})$。如下所示对该例子进行修改，可以证明 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{\Omega_{\alpha_N}}}\|_{L^p\times L^{p'}\to L^1}$（其中 $\alpha_N = 1-\frac{c}{N}$）在 N 中按对数增长。这表明，在 $\alpha = 1$ 的邻域内，$\|\mathcal{M}_\alpha\|_{L^p\times L^{p'}\to L^1}$ 并非一致有界。

观察： 设 $\alpha_N = 1-\frac{c}{N}$，其中 c–是一个小常数，则 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{\Omega_{\alpha_N}}}\|_{L^p\times L^{p'}\to L^1} \gtrsim \log N$. 下面的例子证明了这一断言。

例 10.2. 对于 $N\in\mathbb{N}$，考虑 $f_N(x) = x^{-\frac{1}{p}}\chi_{\{x:3\leqslant x\leqslant N\}}(x)$ 和 $g_N(x) = x^{-\frac{1}{p'}}\chi_{\{x:3\leqslant x\leqslant N\}}(x)$。注意，$\|f_N\|_p \simeq \log\ N$.

对于 $2 < x < N$，考虑包含点 $(x,\ x)$、尺寸为 $(x-1)\sqrt{1+\alpha_N^2}\times\frac{(x-1)\sqrt{1+\alpha_N^2}}{N}$，且最长边沿 $z = \alpha_N y$ 方向的矩形 R_x；其较长边上的两个顶点为 $(x,\ x)$ 和 $(1,\ 1+\frac{c}{N}(x-1))$。注意，R_x 的长边由 $z = \alpha_N^2 y + \frac{c}{N}x - \frac{(x-1)\sqrt{1+\alpha_N^2}}{N}$ 和 $z = \alpha_N y + \frac{c}{N}x$. 给出。考虑

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{\Omega_{\alpha_N}}}(f_N,g_N)(x) &\geqslant \frac{1}{|R_x|}\int_{1+\frac{N-c}{\sqrt{(N-c)^2+N^2}}}^{x}\ \int_{\alpha_N y+\frac{c}{N}x-\frac{(x-1)\left(1+\alpha_N^2\right)}{N}}^{\alpha_N y+\frac{c}{N}x} f_N(y)g_N(z)dzdy \\
&\geqslant \frac{1}{|R_x|}\int_{1+\frac{N-c}{\sqrt{(N-c)^2+N^2}}}^{x}\ \int_{\alpha_N y+\frac{c}{N}x-\frac{(x-1)\left(1+\alpha_N^2\right)}{N}}^{\alpha_N y+\frac{c}{N}x} \frac{1}{y^{\frac{1}{p}}(\alpha_N y+\frac{c}{N}x)^{\frac{1}{q}}}dzdy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{|R_x|}\int_{1+\frac{N-c}{\sqrt{(N-c)^2+N^2}}}^{x}\frac{(x-1)\,(1+\alpha_N^2)}{N}\frac{1}{\alpha_N y+\frac{c}{N}x}dy\\
&= \frac{1}{\alpha_N(x-1)}\int_{\alpha_N\left(1+\frac{N-c}{\sqrt{(N-c)^2+N^2}}\right)}^{\alpha_N x}\frac{1}{s+\frac{c}{N}x}ds\\
&= \frac{1}{\alpha_N(x-1)}\left[\log x-\log\left(\alpha_N\left(1+\frac{N-c}{\sqrt{(N-c)^2+N^2}}\right)+\frac{c}{N}x\right)\right]
\end{aligned}$$

由于 当 N 较大且 c 是一个固定的小常数时，对于 $2<x<N$，我们看到

$$\alpha_N\left(1+\frac{N-c}{\sqrt{(N-c)^2+N^2}}\right)+\frac{c}{N}x\simeq 1.$$

因此，我们得到

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{\Omega_{\alpha_N}}}(f_N,g_N)(x)\geqslant\frac{\log x}{x-1}\simeq\frac{\log\ x}{x}.$$

这意味着

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{\Omega_{\alpha_N}}}(f_N,g_N)\|_1\gtrsim\int_2^N\frac{\log x}{x}=(\log N)^2-(\log 2)^2.$$

□

Acknowledgement

ANKIT BHOJAK 和 SAURABH SHRIVASTAVA 感谢科学与工程研究委员会、科学技术部（印度政府）通过核心研究资助计划提供的资金支持，项目编号为 CRG/2021/000230。SURJEET SINGH CHOUDHARY 获得 CSIR（NET）资助，其博士研究生奖学金项目编号为 09/1020(0182)/2019- EMR-I。

References

[1] Bernicot, F., Grafakos, L., Song, L. 和 Yan, L. 双线性 *Bochner–Riesz* 问题。J. Anal. Math. 127 (2015), 179-217.[2] Bernicot, F. 和 Germain, P.符号具有窄支集的双线性乘子的有界性。J. Anal. Math.119 (2013), 166-212.[3] Choudhary, S.S., Jotsaroop K., Shrivastava, S. 和 Shuin, K. 双线性 *Bochner-Riesz* 平方函数及其应用。arXiv:2107.00840v3.[4] Choudhary, S.S. 和 Shrivastava, S. 关于临界指标处的双线性 *Bochner-Riesz* 问题。J. Geom. Anal. 33(2023),no. 2,Paper No. 58, 33 pp.[5] Cladek, L. 与凸域相关的乘子变换（定义于 $\mathbb{R}^2$）。J. Geom. Anal. 26 (2016),no. 4,3129-3175.[6] Cladek, L. 与广义 *Bochner-Riesz* 平均相关的平方函数。Indiana Univ. Math. J. 66 (2017), no. 6, 2205-2238.[7] C´ordoba, A. *Kakeya* 极大函数与球面求和乘子。Amer. J. Math. 99 (1977),no.1,1-22.

[8] C´ordoba, A. 和 Fefferman, R. 积分微分。Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 74 (1977), no. 6, 2211-2213.[9] Demeter, C. 和 Gautam, S. Z. 双线性傅里叶限制定理。J. Fourier Anal. Appl. 18 (2012), no. 6, 1265-1290.[10]Grafakos, L. 现代傅里叶分析。第三版。数学研究生教材，250。施普林格，纽约，(2014).[11] Grafakos, L. 和 Li, X. 圆盘作为双线性乘子。Amer. J. Math. 128 (2006), no. 1, 91-119.[12] Katz, N. 任意方向集上的极大算子。Duke Math. J. 97 (1999), no. 1, 67–79.[13] Jeong, E. 和 Lee, S. 双线性球面平均与双线性 Bochner-Riesz 算子的极大估计。J. Funct. Anal. 279 (2020), no. 7, 108629, 29 pp.[14] Jeong, E.、Lee, S. 和 Vargas, A. 双线性 Bochner-Riesz 算子的改进界。Math. Ann. 372 (2018), no. 1-2, 581-609.[15] Jotsaroop, K. 和 Shrivastava, S. 双线性 Bochner-Riesz 平均的极大估计。Adv. Math. 395 (2022), Paper No. 108100, 38 pp.[16] Lacey, M. T. 双线性极大函数映入 L^p，当 $2/3 < p \leqslant 1$。Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 1, 35-57.[17] Lacey, M. T. 和 Thiele, C. 关于双线性希尔伯特变换的 L^p 估计，当 $2 < p < \infty$。Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 3, 693-724.[18] Lacey, M. T. 和 Thiele, C. 关于 Calder´on 猜想。Ann. of Math. (2) 149 (1999), no. 2, 475-496.[19] Liu, H. 和 Wang, M. 非巴拿赫三角形情形下双线性 Bochner-Riesz 平均的有界性。Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), no. 3, 1121-1130.[20] Mohanty, P. 和 Shrivastava, S. 向量值双线性极大算子与旋转方法。J. Math. Anal. Appl. 382 (2011), no. 1, 334–338.[21]Muscalu, C. 由奇异符号给出的多线性算子的 L(p) 估计。博士论文——布朗大学。2000. 145 pp. ISBN: 978-0599-93764-2 ProQuest LLC.[22] Nagel, A.、Stein, E. M. 和 Wainger, S. 稀疏方向上的微分。Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 75 (1978), no. 3, 1060-1062.[23] Rubio de Francia, J.L. 任意区间的 Littlewood-Paley 不等式。Rev. Mat. Iberoamer- icana 1 (1985), no. 2, 1-14.[24] Saari, O. 和 Thiele, C. 与凸集相关的双线性乘子的抛物乘积。Math. Ann. 385, 2013–2036 (2023).[25] Seeger, A. 和 Ziesler, S. 平面上与凸域相关的 Riesz 平均。Math. Z. 236 (2001), no. 4, 643-676.[26] Stein, E. M. 调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分。Ti mothy S. Murphy 协助。普林斯顿数学丛书，43。调和分析专著，III。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。xiv+695 页。[27] Str¨omberg, J. O. 与方向均匀分布的矩形相关的极大函数。Ann. of Math. (2) 107 (1978), no. 2, 399-402.[28] Tanaka, H. 关于乘积型函数的 Kakeya 极大算子估计的一个初等证明。Tohoku Math. J. (2) 48 (1996), no. 3, 429-435.[29]Trebels, W. 一些傅里叶乘子判据与球面 Bochner-Riesz 核。Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 20 (1975), no. 10, 1173-1185.

Ankit Bhojak, Department of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal-462066, India.电子邮箱地址: ankitb@iiserb.ac.in

Surjeet Singh Choudhary, Department of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal-462066, India.电子邮箱地址: surjeet19@iiserb.ac.in

Saurabh Shrivastava, Department of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal-462066, India.电子邮箱地址: saurabhk@iiserb.ac.in