arXiv:2305.04078v1 [math.AP] 6 May 2023

薄绝热层的最优形状

P. Acampora、E. Cristoforoni、C. Nitsch、C. Trombetti

摘要

我们关注有界开集 Ω 的热绝缘问题，该开集被一个厚度在局部由 εh 描述的集合包围，其中 h 是定义在边界 $\partial\Omega$ 上的非负函数。我们利用 ε 趋于零时的一阶渐近展开，通过 Γ-收敛研究这一极限问题。

关键词：Robin 边界条件、热绝缘、强化、 Γ-收敛 MSC 2020：49J45、35J25、35B06、80A19

1 引言

近年来，能源效率已成为最紧迫的议题之一，因为它对于实现可持续发展、减少温室气体排放和缓解气候变化至关重要，同时还能促进经济增长并提高生活质量。在能源效率领域，热绝缘具有重要意义，因为它有助于减少建筑物和工业过程中的热传递与能源损失，从而显著节约能源和成本。

本文讨论通过在保持恒定温度的固体周围布置绝缘体来实现热绝缘的问题。粗略地说，最优绝热方案是在热平衡时使穿过外边界的单位时间热损失率最小的方案。具体而言，在我们的模型中，热量通过对流与环境交换，而这在现实应用中是最常见的机制。

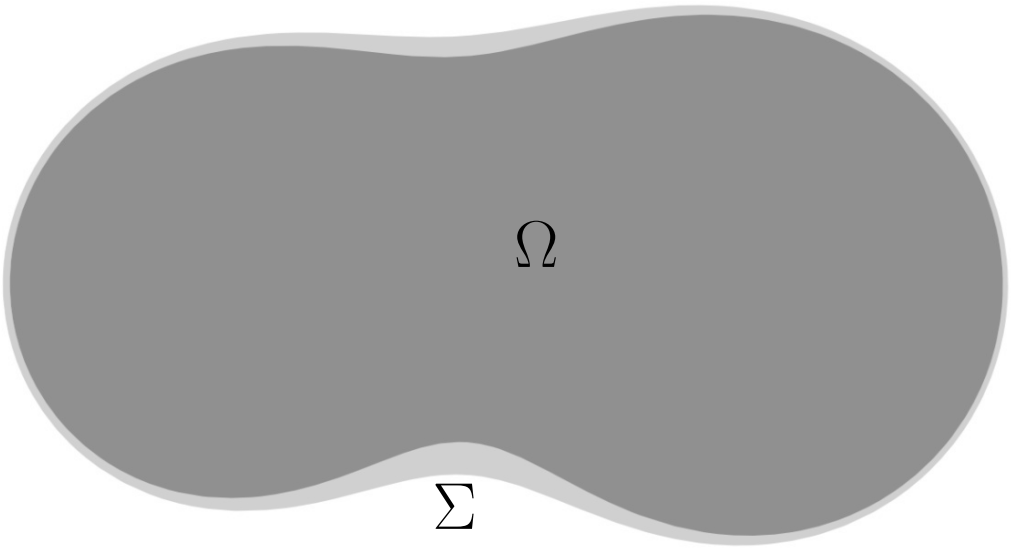
为了控制绝缘成本，需要对绝缘体的体积进行规定。由此得到的数学模型构成了一个自由边界问题，该问题此前已在 [7] 中得到研究，并在 [5]中针对更一般的热传递机制（例如还包括辐射的情况）进行了研究。特别是，前一项研究为如何证明绝缘体最优分布的存在性，以及其先验未知边界的正则性，奠定了基础。

然而，尽管对于每个待绝缘集合和任意用量的绝缘体，总是存在一个解，但关于绝缘体的最优形状，我们所知甚少；目前唯一得到彻底解决的情形恰好是径向情形。

本文探讨如何定性和定量地描述绝缘体应如何移动这一问题。为此，本文将分析范围限定在“绝缘层厚度较小”的情形；在许多场景中，这种近似都是合理的，例如建筑物及其他大型结构。

全文中，Ω 表示需要隔热的物体，其温度固定。由于该问题在温度缩放和平移变换下保持不变，不失一般性，设物体的温度为 1，环境温度为 0。如果对流是与环境进行热交换的主要机制，那么单位时间、单位表面积的热损失率与分隔绝缘体（或物体）和环境的表面微元两侧的温度差成正比。比例常数记为 $\beta > 0$。若 Σ 表示绝缘体（见图），则在平衡状态下， Σ 中的温度分布是一个调和函数，记为 u。在 Σ 与 Ω 共用的边界部分上，函数 u 等于

图 1：带有薄绝缘层 Σ 的物体 Ω



1。而在 Σ 与环境共用的边界部分上， u 满足 Robin 条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0,$$

其中 ν 是 Σ边界的外法向量。事实上，根据适用于 Σ内部的傅里叶定律，单位时间内的热通量为 $-Du$，因此穿过边界处面元的通量为 $-\frac{\partial u}{\partial \nu}$。另一方面，根据对流定律，穿过该面元的单位时间热通量等于 βu （β 乘以 u的跃变）。热通量的连续性要求这两个表达式相等，罗宾边界条件由此自然得出。

总之， u 是 $\Omega \cup \Sigma$ 中的一个连续函数，它满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Sigma, \\ u = 1 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0 & \text{on } \partial\Sigma \setminus \partial\Omega. \end{cases}$$

我们还可以将函数 u 表征为能量泛函的极小化器。

$$\mathcal{E}(v) = \int_{\Sigma} |\nabla v|^2 \, dx + \beta \int_{\partial(\Omega \cup \Sigma)} v^2 \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

在所有满足 $v \equiv 1$ in Ω 的函数 $v \in H^1(\Omega \cup \Sigma)$ 中。

对于给定的 Ω，我们的最终目标是找到使 Σ 最小化的形状。

$$\int_{\partial(\Omega \cup \Sigma)} u \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

在所有测度给定的 Σ 中。

到目前为止，这样的问题似乎难以解决，因此我们将分析范围限定在绝缘材料层和绝缘体电导率都非常小的情形。

更准确地说，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个光滑有界开集，并且 $h\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 是一个非负函数。记 ν 为 Ω 的边界的外单位法向量，我们定义

$$\Sigma_\varepsilon = \{\, \sigma + t\nu(\sigma) \mid \sigma \in \partial\Omega,\ 0 < t < \varepsilon h(\sigma) \,\}$$

并记 $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup \Sigma_\varepsilon$。这里，非负参数 ε 被认为很小，我们希望研究 ε 趋于零时的极限。但为了使这一极限非平凡，我们还假设绝缘体的电导率很小，即，内部的热通量Σ_ε 为 $-\varepsilon Du$。实际上，我们假设使用“少量”的“非常优良”的绝缘体。

现在我们可以一并考虑以下能量泛函的最小化问题。

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v,h) = \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla v|^2\, dx + \beta \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v^2\, d\mathcal{H}^{n-1},$$

其中，$v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$，且 $v = 1$ 位于 Ω 中。这里，第一个积分前的小参数 ε 表示绝缘体的电导率较低。对于给定的 h，一个最小值$u_{\varepsilon,\,h}$ 为

$$\min\left\{\, \mathcal{F}_\varepsilon(v,h) \;\middle|\; v \in H^1(\Omega_\varepsilon),\ v = 1 \text{ in } \Omega \,\right\} \tag{1.1}$$

求解边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u_{\varepsilon,h} = 0 & \text{in } \Sigma_\varepsilon, \\ u_{\varepsilon,h} = 1 & \text{in } \Omega, \\ \varepsilon \dfrac{\partial u_{\varepsilon,h}}{\partial \nu_\varepsilon} + \beta u_{\varepsilon,h} = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega, \end{cases}$$

其中，ν_ε 是 Ω_ε 边界的外单位法向量。

过去在热绝缘背景下已有针对类似问题的研究，见 [3], [11],[1], 近期的研究则见 [4] 和 [9]。极限的处理方式有多种。在我们的情形中，我们将采用 Γ-收敛。但为了尽可能多地提取有关该问题的信息，我们将在 ε [2]中进行一阶展开。据我们所知，这种方法在这一背景下尚未被采用。

我们置换出的绝缘体体积为 εm，其中 $m > 0$，并通过定义空间来规定体积约束

$$\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_m(\partial\Omega) = \left\{ h \in L^1(\partial\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\partial\Omega} h\, d\mathcal{H}^{n-1} \le m \\ h \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{1.2}$$

我们的问题归结为寻找包围 Ω 的绝缘材料的最佳配置，即

$$\min\left\{ \mathcal{F}_\varepsilon(v,h) \;\middle|\; \begin{array}{l} v \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ v = 1 \text{ in } \Omega, \\ h \in \mathcal{H}_m \end{array} \right\}. \tag{1.3}$$

沿用 [9], 中所用的类似论证可以证明，对于任意固定的利普希茨函数 $h\colon \partial\Omega \to [0,+\infty)$，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot,h)$ 在强 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 拓扑下 Γ-收敛到泛函

$$\mathcal{F}_0(h) = \beta \int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

然后，鉴于泛函关于 h 的凸性，

$$\min\{\,\mathcal{F}_0(h)\mid h\in\mathcal{H}_m\,\}$$

由常数 $h=m/P(\Omega)$ 达到，其中 $P(\Omega)$ 表示 Ω 的周长。

将绝缘体均匀地铺设在边界周围，多少算是一种显而易见的解，是常识所暗示的做法，在建筑隔热中也很常见。然而，从数学角度来看，这种做法完全不令人满意。因为我们预期，曲率（平均曲率）较高的边界部分，相较于曲率较低的部分，绝缘起来不那么方便。径向情形强烈地暗示了这一想法（例如参见 [10, 命题 5。1]）。

但是，在进行 Γ-极限时，这类证据会丢失，因此我们决定将分析推进得更深入一些。让

$$K_0=\left\{\,v\in L^2(\mathbb{R}^n)\;\middle|\;v=1\text{ in }\Omega\,\right\},$$

我们的主要结果是关于以下泛函的一个一阶渐近展开 Γ-收敛（见 定义 2.3） $\mathcal{F}_\varepsilon$。我们用 H 表示 Ω 的平均曲率（见 定义 2.9），并证明如下结果

定理 1.1. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界开集，具有 C^3 边界，并固定一个 C^2 函数$h\colon\ \partial\Omega\to(0,+\infty)$。则泛函

$$\delta\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot,h)=\frac{\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot,h)-\mathcal{F}_0(h)}{\varepsilon}$$

在强 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 拓扑下，当 $\varepsilon\to0^+$ 时 Γ-收敛到

$$\mathcal{F}^{(1)}(v,h)=\begin{cases}\beta\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{Hh(2+\beta h)}{2(1+\beta h)^2}\,d\mathcal{H}^{n-1} & \text{if } v\in K_0,\\ +\infty & \text{if } v\in L^2(\mathbb{R}^n)\setminus K_0.\end{cases}$$

本文安排如下。在第 3.2 小节中，我们证明定理 1.1。随后，在第 4 节中，我们固定Ω 并处理极小问题

$$\inf\left\{\,\mathcal{F}_0(h)+\varepsilon\mathcal{F}^{(1)}(h)\;\middle|\;h\in\mathcal{H}_m\,\right\},$$

其中，$\mathcal{F}^{(1)}(h)=\mathcal{F}^{(1)}(\chi_\Omega,h)$。正如我们已经提到的，上述问题是关于$\varepsilon>0$的问题（1.3）的一阶近似。事实上，我们有（见注 2.4）

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon,h)=\mathcal{F}_0(h)+\varepsilon\mathcal{F}^{(1)}(h)+R(\Omega,h,\varepsilon),$$

其中，u_ε 是问题（1.1）的极小化器，并且

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{R(\Omega,h,\varepsilon)}{\varepsilon}=0.$$

特别是，我们将证明，正如直觉所示，如果 ε 足够小，那么绝缘层的最优配置会集中在 $\partial\Omega$ 中平均曲率相对较小的点附近。最后，在 第 4.2 小节 中，我们讨论泛函 $\mathcal{F}_0+\varepsilon\mathcal{F}^{(1)}$ 在集合Ω上满足各种几何约束（体积、周长、拟面积积分）时的行为。

2 符号与工具

2.1 Γ-收敛

在本节中，我们回顾 Γ-收敛以及通过 Γ-收敛进行渐近展开的一些基本性质。例如，以下概念可参见 [8] 和 [2] 。

定义 2.1。 设 X 是一个度量空间，并且对于任意 $\varepsilon > 0$，考虑泛函$\mathcal{F}_\varepsilon, \mathcal{F}_0 \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$。如果对每个 $x \in X$，以下条件都成立，我们称 $\mathcal{F}_\varepsilon$ Γ 在 X 中关于强拓扑 $\varepsilon \to 0^+$ Γ-收敛到 $\mathcal{F}_0$：

- 对于每个收敛到 x 的序列 $\{x_\varepsilon\} \subset X$，

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) \geq \mathcal{F}_0(x);$$

- 存在一个序列 $\{x_\varepsilon\} \subset X$，其收敛到 x，使得

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \mathcal{F}_0(x).$$

特别地，根据定义，如果 $\mathcal{F}_\varepsilon$ Γ 收敛到 $\mathcal{F}_0$，则对每个 $x \in X$，都存在一个恢复序列 $\{x_\varepsilon\} \subset X$，收敛到 x，使得

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) = \mathcal{F}_0(x).$$

我们有如下内容

命题 2.2. 设 X 为一个度量空间，对于任意 $\varepsilon > 0$，考虑泛函$\mathcal{F}_\varepsilon, \mathcal{F}_0 \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，使得 $\mathcal{F}_\varepsilon$ Γ在 X中关于强拓扑，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时收敛到 $\mathcal{F}_0$。设 $\{x_\varepsilon\}$ 是 X 中的一个序列，使得

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) = \min_X \mathcal{F}_\varepsilon.$$

如果存在 $x \in X$ 使得 x_ε 收敛到 x，那么

$$\mathcal{F}_0(\overline{x}) = \min_X \mathcal{F}_0 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \min_X \mathcal{F}_\varepsilon.$$

Let

$$m_0 = \inf_X \mathcal{F}_0,$$

并且，对于每个 $x \in X$，令

$$\delta\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{\mathcal{F}_\varepsilon(x) - m_0}{\varepsilon}$$

定义 2.3。 如果存在一个泛函 $\mathcal{F}^{(1)} \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，使得当 $\varepsilon \to 0^+$ 趋于 $\mathcal{F}^{(1)}$时，$\delta\mathcal{F}_\varepsilon$ Γ关于 X中的强拓扑收敛，我们称 $\mathcal{F}^{(1)}$ 为泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon$的通过 Γ-收敛得到的一阶渐近展开。

Let

$$\mathcal{U}_0 = \{\, x \in X \mid \mathcal{F}_0(x) = m_0 \,\},$$

对前述定义的关注可由以下内容得到解释

注 2.4。 设 $\{x_\varepsilon\}$ 是 X 中的一个序列，使得

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) = \min_X \mathcal{F}_\varepsilon,$$

并假设存在 $x \in X$ 使得 x_ε 收敛到 x；则由 命题 2.2 可得 $x \in \mathcal{U}_0$ 进而

$$\mathcal{F}^{(1)}(\bar{x}) = \min_X \mathcal{F}^{(1)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) - m_0}{\varepsilon}.$$

特别地，我们有

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) = m_0 + \varepsilon \mathcal{F}^{(1)}(\bar{x}) + o(\varepsilon).$$

2.2 超曲面上的微积分

本节中的概念参见 [12] 。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有C^1 边界的有界开集，并设 ν 是其边界的外单位法向量。对于每个 $\sigma \in \partial\Omega$ ，令$\tau = \{\tau_1(\sigma) \ldots, \tau_{n-1}(\sigma)\}$ 为与 $\nu(\sigma)$正交的标准正交基，即 $\partial\Omega$ 处切平面的一个基，该切平面位于 σ中。

定义 2.5 （切向梯度）。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个包含 $\partial\Omega$ 的开集，且$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : U \to \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 函数。我们将 ϕ 的切向梯度定义为矩阵值函数 $D_\tau\phi$: $\partial\Omega \to \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$，满足

$$(D_\tau\phi)_{i,j} = \nabla\phi_i \cdot \tau_j,$$

其中 $i = 1$，…， n和 $j = 1$，…， $n - 1$。

定义 2.6 （切向雅可比）。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个包含 $\partial\Omega$ 的开集，且 $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 函数。我们将 ϕ 的切向雅可比定义为

$$J_\tau\phi = \sqrt{\det\left((D_\tau\phi)^T(D_\tau\phi)\right)}.$$

定理 2.7 (曲面上的面积公式)。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是包含 $\partial\Omega$ 的开集，令$\phi : U \to \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 函数，并令 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个正的博雷尔函数。我们有

$$\int_{\partial\Omega} g(\phi(\sigma))\, J_\tau\phi \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\phi(\partial\Omega)} g(\sigma)\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

定义 2.8 （切向散度）. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个包含 $\partial\Omega$ 的开集，且 $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 函数。我们将 ϕ 的切向散度定义为

$$\operatorname{div}_\tau \phi = \sum_{j=1}^{n-1} (D\phi\, \tau_j) \cdot \tau_j$$

定义 2.9 （平均曲率）。 设 Ω 是具有 C^2 边界的有界开集，且令ν 为其边界的外单位法向量。设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是包含 $\partial\Omega$ 的开集，并令 X 为 $C^1(U)$ 对 ν的延拓。对于任意 $\sigma \in \partial\Omega$，我们将 $\partial\Omega$ 的平均曲率定义为

$$H(x) = \operatorname{div}_\tau \nu.$$

注 2.10. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是包含 $\partial\Omega$ 的一个开集，设 X: $U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1函数，并且 $\phi(x) = x + tX(x)$。通过直接计算，我们得到

$$J_\tau\phi(\sigma) = 1 + t \operatorname{div}_\tau X(\sigma) + t^2 R(t, \sigma)$$

其中余项 R 是有界函数。特别地，如果 Ω 具有 C^2 边界，且 X 是 ν的延拓，则有

$$J_\tau\phi(\sigma) = 1 + tH(\sigma) + t^2 R(t, \sigma).$$

定义 2.11 (有限周长集)。 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个可测集。我们将 E 的周长 定义为

$$P(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \, d\mathcal{L}^n \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ |\varphi| \leq 1 \end{array} \right\}.$$

若 $P(E) < +\infty$ 我们称 E 是一个 有限周长集。

定义 2.12 （广义平均曲率）。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限周长集，且 $p \in [1, +\infty]$。若存在 $H_\Omega \in L^p(\partial\Omega)$，使得 Ω 具有在 L^p 中的广义平均曲率，则

$$\int_{\partial\Omega} \operatorname{div}_\tau F \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} H_\Omega F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

对于任意满足 A 的 $F \in C_C^\infty(A; \mathbb{R}^n)$，其中 A 是包含 Ω 的开集。

定理 2.13 （余面积公式）。 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个利普希茨函数，设 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数，并设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，则

$$\int_U g(x) |\nabla f(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{U \cap \{ f = t \}} g(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \, dt.$$

3 Γ-极限

3.1 问题的设定

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集，具有 $C^{1,1}$ 边界，并固定一个正的 Lipschitz函数$h\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$。回顾

$$\Sigma_\varepsilon = \{ \sigma + t\nu(\sigma) \mid \sigma \in \partial\Omega, \, 0 < t < \varepsilon h(\sigma) \},$$

and

$$\Omega_\varepsilon = \overline{\Omega} \cup \Sigma_\varepsilon.$$

对 $\partial\Omega$ 的假设保证存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega, h)$，使得若 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$，映射

$$(\sigma, t) \longmapsto \sigma + t\nu(\sigma)$$

可逆，即对每个 $x \in \Sigma_\varepsilon$，存在唯一的 $\sigma(x) \in \partial\Omega$ 和 $t(x)$，满足 $0 \leq t(x) \leq \varepsilon h(\sigma(x))$，使得

$$x = \sigma(x) + t(x)\nu(\sigma(x)).$$

因此，我们可以将 h 和 ν 分别延拓到 Σ_ε 上，定义为 $h(x) = h(\sigma(x))$ 和 $\nu(x) = \nu(\sigma(x))$。此外，对每个 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$，令

$$d(x) = d(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

表示到 $\partial\Omega$ 的距离，则对每个 $x \in \Sigma_\varepsilon$，有 $d(x) = t(x)$。

注 3.1。 根据余面积公式（定理 2.13）、曲面上的面积公式（定理 2.7）以及 注 2.10，我们有：如果 $f : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ 是一个正的博雷尔函数，则

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \int_0^{\varepsilon h(\sigma)} f(\sigma + t\nu) \, (1 + \varepsilon R_1(\sigma, t, \varepsilon)) \, dt \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.1}$$

and

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} f(\sigma)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} f(\sigma+\varepsilon h\nu)\,(1+\varepsilon R_2(\sigma,\varepsilon))\; d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{3.2}$$

其中，余项 R_1 和 R_2 是有界函数，则存在 $Q_0>0$，使得 $|R_1|,|R_2|\le Q_0$。此外，如果 Ω 是具有 C^3 边界的有界开集，那么我们有

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega}\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} f(\sigma+t\nu)\left(1+tH(\sigma)+\varepsilon^2 R_3(\sigma,t,\varepsilon)\right)\, dt\, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.3}$$

and

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} f(\sigma)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} f(\sigma+\varepsilon h\nu)\left(1+\varepsilon h(\sigma)H(\sigma)+\varepsilon^2 R_4(\sigma,\varepsilon)\right)\, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{3.4}$$

其中余项 R_3 和 R_4 是有界函数，那么存在 $Q>0$，使得 $|R_3|,|R_4|\le Q$。

Let

$$K_\varepsilon = \left\{\, v\in H^1(\Omega_\varepsilon) \;\middle|\; v=1 \text{ in } \Omega \,\right\}, \tag{3.5}$$

and

$$K_0 = \left\{\, v\in L^2(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; v=1 \text{ in } \Omega \,\right\}, \tag{3.6}$$

并考虑该泛函

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v,h) = \begin{cases} \varepsilon\displaystyle\int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla v|^2\, dx + \beta\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v^2\, d\mathcal{H}^{n-1} & \text{if } v\in K_\varepsilon,\\ +\infty & \text{if } v\in L^2(\mathbb{R}^n)\setminus K_\varepsilon. \end{cases}$$

表示为

$$\mathcal{F}_0(v,h) = \begin{cases} \beta\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1} & \text{if } v\in K_0,\\ +\infty & \text{if } v\in L^2(\mathbb{R}^n)\setminus K_0, \end{cases}$$

按照 [9], 的方法，我们得到以下结果

命题3.2。 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界开集，其 $C^{1,1}$ 边界为，且固定一个*Lipschitz*函数 h: $\partial\Omega\to(0,+\infty)$。则 $\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot,h)$ Γ-收敛，当 $\varepsilon\to 0^+$时，在强 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 拓扑下，收敛到 $\mathcal{F}_0(\cdot,h)$。

证明。 我们首先证明 Γ-下极限不等式：设 $v\in L^2(\mathbb{R}^n)$，并设 $v_\varepsilon\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时， v_ε 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 v。不妨在取子列后，假设 that

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon,h) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon,h),$$

此外，我们可以假设这样的极限是有限的，并且 $v_\varepsilon\in K_\varepsilon$。因此，我们有$v\in K_0$ 并且，由（3.1）、（3.2），我们有

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2\, dx \ge \int_{\partial\Omega}\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} |\nabla v_\varepsilon(\sigma+t\nu)|^2(1-\varepsilon Q_0)\, dt\, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.7}$$

and

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2\, d\mathcal{H}^{n-1} \ge \int_{\partial\Omega} v_\varepsilon^2(\sigma+\varepsilon h(\sigma)\nu)(1-\varepsilon Q_0)\, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{3.8}$$

另一方面，对于 $\mathcal{H}^{n-1}$-几乎处处的 $\sigma \in \partial\Omega$，我们有，

$$\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} |\nabla v_\varepsilon(\sigma + t\nu)|^2 \, dt \geq \frac{1}{\varepsilon h(\sigma)} \left(\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} |\nabla v_\varepsilon(\sigma + t\nu)| \, dt \right)^2$$

$$\geq \frac{(v_\varepsilon(\sigma + \varepsilon h\nu) - 1)^2}{\varepsilon h(\sigma)},$$

那么，根据Young不等式，对于每个 $\lambda > 0$ 以及对 $\mathcal{H}^{n-1}$-几乎处处的 $\sigma \in \partial\Omega$,

$$\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} |\nabla v_\varepsilon(\sigma + t\nu)|^2 \, dt \geq \frac{(1-\lambda) v_\varepsilon(\sigma + \varepsilon h\nu)^2}{\varepsilon h(\sigma)} + \frac{1}{\varepsilon h(\sigma)} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right). \tag{3.9}$$

结合（3.7）、（3.8）和（3.9），最终得到

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon, h) \geq \int_{\partial\Omega} \left(\left(\frac{1-\lambda}{h} + \beta \right) v_\varepsilon(\sigma + \varepsilon h\nu)^2 + \frac{1}{h} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \right) d\mathcal{H}^{n-1} - \varepsilon Q_0 R_\varepsilon(\varepsilon, v_\varepsilon),$$

其中，若 ε 足够小，再次利用（3.1）和（3.2），可得

$$R_\varepsilon(\varepsilon, v_\varepsilon) \leq 2\mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon, h).$$

Fi最后，令 $\lambda = \lambda(\sigma) = 1 + \beta h(\sigma)$，并令 $\varepsilon \to 0^+$ 趋于极限，可得 t

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon, h) \geq \beta \int_{\partial\Omega} \frac{1}{1 + \beta h} \, d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{F}_0(v, h)$$

并且证明了 Γ-liminf不等式。

Γ-limsup不等式：设 $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$，若 $v \notin K_0$，则 Γ-limsup不等式显然成立，因此令 $v \in K_0$。设

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega, \\ 1 - \dfrac{\beta d(x)}{\varepsilon(1 + \beta h(x))} & \text{if } x \in \Sigma_\varepsilon, \\ v(x) & \text{if } x \notin \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

其中我们回顾，若 $x = \sigma + t\nu(\sigma)$，则 $h(x) = h(\sigma)$。显然，v_ε 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 和 $v_\varepsilon \in K_\varepsilon$中收敛到 v。对于每个 $x \in \Sigma_\varepsilon$,

$$\nabla v_\varepsilon(x) = -\frac{\beta \nabla d(x)}{\varepsilon(1 + \beta h(x))} + \frac{\beta^2 d(x) \nabla h(x)}{\varepsilon(1 + \beta h(x))^2}.$$

回顾 $0 \leq d \leq \varepsilon h$、$\nabla d = \nu$ 和 $\nabla h \cdot \nu = 0$，我们有

$$|\nabla v_\varepsilon|^2 = \frac{\beta^2}{\varepsilon^2(1 + \beta h)^2} + \frac{\beta^4 d^2 |\nabla h|^2}{\varepsilon^2(1 + \beta h)^4} \leq \frac{\beta^2}{\varepsilon^2(1 + \beta h)^2} + \frac{\beta^4 h^2 |\nabla h|^2}{(1 + \beta h)^4},$$

其中第二项有界，因为 h 是利普希茨的。因此，将 $\varepsilon h\tau = t$ 代入（3.1），得到

$$\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2 \, dx \leq \frac{\beta^2}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{(1 + \beta h)^2} \, dx + \varepsilon C |\Sigma_\varepsilon|$$

$$\leq \int_{\partial\Omega} \int_0^1 \frac{\beta^2 h}{(1 + \beta h)^2} (1 + \varepsilon Q_0) \, d\tau \, d\mathcal{H}^{n-1} + \varepsilon C |\Sigma_\varepsilon|$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\beta^2 h}{(1 + \beta h)^2} \, d\mathcal{H}^{n-1} + o(\varepsilon).$$

另一方面，对于每个 $\sigma \in \partial\Omega$,

$$v_\varepsilon(\sigma + \varepsilon h(\sigma)\nu(\sigma)) = \frac{1}{1+\beta h(\sigma)},$$

由此可得

$$\beta \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} \le \int_{\partial\Omega} \frac{\beta}{(1+\beta h)^2}(1+\varepsilon Q_0)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} \frac{\beta}{(1+\beta h)^2}\, d\mathcal{H}^{n-1} + o(\varepsilon).$$

因此我们有

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon, h) \le \beta \int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1} + o(\varepsilon),$$

从而

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon, h) \le \beta \int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

并且证明了 Γ-上极限不等式。 □

下文中，为简便起见，我们将记

$$\mathcal{F}_0(h) = \beta \int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

由 [9]中的更一般结果可以推知，在函数类 h 中，给定此类泛函的质量后，当 h 为常数时，函数取得最小值。下面我们将对此结论给出一个直接证明

命题 3.3. 设 Ω 是具有利普希茨边界的有界开集，设 $P(\Omega) = P$，并设 $m > 0$。则该问题

$$\min\{\, \mathcal{F}_0(h) \mid h \in \mathcal{H}_m \,\} \tag{3.10}$$

存在

$$h_0 = \frac{m}{P}$$

作为唯一的解。

证明。 设 $h \in \mathcal{H}_m$。 由 Holder不等式可得

$$P = \int_{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{n-1} \le \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} (1+\beta h)\, d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/2}$$

$$\le \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/2} (P + \beta m)^{1/2},$$

因此

$$\mathcal{F}_0(h) \ge \frac{\beta P^2}{P+\beta m} = \mathcal{F}_0(h_0).$$

最后，解的唯一性由函数的严格凸性得出

$$x \longmapsto \frac{1}{1+\beta x}$$

对于 $x \ge 0$。 □

设 H 为 Ω 的平均曲率，我们旨在证明

$$\delta\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot,h)=\frac{\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot,h)-\mathcal{F}_0(h)}{\varepsilon}$$

Γ-收敛，在强 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 拓扑下收敛到

$$\mathcal{F}^{(1)}(v,h)=\begin{cases}\beta\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{Hh(2+\beta h)}{2(1+\beta h)^2}\,d\mathcal{H}^{n-1} & \text{if } v\in K_0,\\ +\infty & \text{if } v\in L^2(\mathbb{R}^n)\setminus K_0,\end{cases}$$

其中 K_0 是由式（3.6）定义的集合。

3.2 定理 1.1 的证明

设 Ω 是一个具有 C^3 边界的有界开集，并固定一个正的 C^2 函数 $h\colon \partial\Omega\to\mathbb{R}$。本节中，我们研究泛函族的 Γ-收敛

$$\delta\mathcal{F}_\varepsilon(v)=\frac{\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot,h)-\mathcal{F}_0(h)}{\varepsilon},\tag{3.11}$$

并证明 定理 1.1。下文中，我们考虑函数 h、$H\colon \partial\Omega\to\mathbb{R}$ 在集合 Σ_ε 上的延拓形式为 $h(\sigma+t\nu)=h(\sigma)$ 以及 $H(\sigma+t\nu)=H(\sigma)$。

对每个 $\varepsilon>0$，令 $u_\varepsilon\in K_\varepsilon$ 为 $\mathcal{F}_\varepsilon$的极小化器，其中 K_ε 由式（3.5）定义。根据关于 Ω 和 h的假设，有 u_ε 是一个 $C^2(\Sigma_\varepsilon)$ 函数，并且它是以下方程的解

$$\begin{cases}-\Delta u_\varepsilon=0 & \text{in } \Sigma_\varepsilon,\\ u_\varepsilon=1 & \text{on } \partial\Omega,\\ \varepsilon\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu_\varepsilon}+\beta u_\varepsilon=0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon.\end{cases}\tag{3.12}$$

令 $\alpha\in(0,\alpha_0)$，其中

$$\alpha_0=1-\max_{\sigma\in\partial\Omega}\frac{\beta h(\sigma)}{1+\beta h(\sigma)},$$

并令 $\varepsilon>0$，则在 Σ_ε 上定义

$$w_{\varepsilon,\alpha}(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{d(x)}{\varepsilon h(x)}\right)^{1-\alpha}\dfrac{\beta h(x)}{(1-\alpha)(1+\beta h(x))} & \text{if } H(x)\geq 0,\\ 1-\left(\dfrac{d(x)}{\varepsilon h(x)}\right)^{1+\alpha}\dfrac{\beta h(x)}{(1+\alpha)(1+\beta h(x))} & \text{if } H(x)<0.\end{cases}$$

于是有 $w_{\varepsilon,\alpha}>0$，并且下述结论成立

命题 3.4. 对于每个 $\alpha\in(0,\alpha_0)$，存在 $\varepsilon_\alpha>0$，使得若 $0<\varepsilon<\varepsilon_\alpha$，则

$$H(x)u_\varepsilon(x)\geq H(x)w_{\varepsilon,\alpha}(x)\qquad \textit{for } x\in\Sigma_\varepsilon.$$

证明。 固定 $\alpha\in(0,\alpha_0)$。为简单起见，我们记为

$$v_\gamma:=1-\left(\frac{d(x)}{\varepsilon h(x)}\right)^{\gamma}\frac{\beta h(x)}{\gamma(1+\beta h(x))},$$

并且我们旨在证明存在一个 $\varepsilon_\alpha > 0$ 使得对于任意 $0 < \varepsilon < \varepsilon_\alpha$，我们有$v_{1-\alpha}$ 是（3.12）的次解，而 $v_{1+\alpha}$ 是同一问题的上解。也就是说，

$$\begin{cases} -\Delta v_{1-\alpha} \le 0 & \text{in } \Sigma_\varepsilon, \\ v_{1-\alpha} = 1 & \text{on } \partial\Omega, \\ \varepsilon \dfrac{\partial v_{1-\alpha}}{\partial \nu_\varepsilon} + \beta v_{1-\alpha} \le 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta v_{1+\alpha} \ge 0 & \text{in } \Sigma_\varepsilon, \\ v_{1+\alpha} = 1 & \text{on } \partial\Omega, \\ \varepsilon \dfrac{\partial v_{1+\alpha}}{\partial \nu_\varepsilon} + \beta v_{1+\alpha} \ge 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.13}$$

下文中，我们始终假设 $\varepsilon < 1$。我们回顾一下

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{d(x)}{h(x)} \le \varepsilon \right\}, \qquad \partial\Omega_\varepsilon = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid d(x) - \varepsilon h(x) = 0 \,\}.$$

通过标准计算可得

$$\nabla\left(\frac{d}{h}\right) = \frac{\nabla d}{h} - \frac{d\nabla h}{h^2}, \qquad \left|\nabla\left(\frac{d}{h}\right)\right| = \frac{1}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 |\nabla h|^2}.$$

于是，回顾 $\nabla d = \nu$ 以及 $\nabla h \cdot \nu = 0$，集合 Ω_ε 的法向量 ν_ε 为

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla h|^2}} (\nu - \varepsilon \nabla h).$$

通过直接计算，对于任意 $\gamma \in (0,2) \setminus \{1\}$，我们有

$$\Delta v_\gamma = -\frac{\beta h}{\gamma \varepsilon^\gamma (1+\beta h)} \Delta\left[\left(\frac{d}{h}\right)^\gamma\right] - \frac{2}{\gamma\varepsilon^\gamma} \nabla\left[\left(\frac{d}{h}\right)^\gamma\right] \cdot \nabla\left[\frac{\beta h}{1+\beta h}\right] - \frac{1}{\gamma\varepsilon^\gamma}\left(\frac{d}{h}\right)^\gamma \Delta\left[\frac{\beta h}{1+\beta h}\right]. \tag{3.14}$$

接下来计算

$$\nabla\left[\left(\frac{d}{h}\right)^\gamma\right] = \gamma\left(\frac{d}{h}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{\nu}{h} - \frac{d\nabla h}{h^2}\right), \qquad \nabla\left[\frac{\beta h}{1+\beta h}\right] = \frac{\beta \nabla h}{(1+\beta h)^2}, \tag{3.15}$$

由此得到

$$\nabla\left[\left(\frac{d}{h}\right)^\gamma\right] \cdot \nabla\left[\frac{\beta h}{1+\beta h}\right] = -\gamma\left(\frac{d}{h}\right)^\gamma \frac{\beta |\nabla h|^2}{h(1+\beta h)^2}. \tag{3.16}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} \Delta\left[\left(\frac{d}{h}\right)^\gamma\right] &= \gamma(\gamma-1)\left(\frac{d}{h}\right)^{\gamma-2}\left|\nabla\left(\frac{d}{h}\right)\right|^2 + \gamma\left(\frac{d}{h}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{\Delta d}{h} - \frac{d\Delta h}{h^2} + 2\frac{d|\nabla h|^2}{h^3}\right) \\ &= \gamma\left(\frac{d}{h}\right)^{\gamma-2}\left(-\frac{1-\gamma}{h^2} - \left(\frac{d}{h}\right)^2 \frac{(1-\gamma)|\nabla h|^2}{h^2} + \frac{d}{h}\frac{\Delta d}{h} - \left(\frac{d}{h}\right)^2 \frac{\Delta h}{h} + \left(\frac{d}{h}\right)^2 \frac{2|\nabla h|^2}{h^2}\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

因此，由（3.14）、（3.17）和（3.16），可得

$$\left(\frac{d(x)}{h(x)}\right)^{2-\gamma} \varepsilon^\gamma \Delta v_\gamma(x) = \frac{\beta(1-\gamma)}{h(x)(1+\beta h(x))} + R_1(x,\varepsilon,\gamma), \tag{3.18}$$

其中，$R_1(x,\varepsilon,\gamma)$ 是一个适当的余项。由于 $d \le \varepsilon h$,

$$0 < \inf_{\Sigma_\varepsilon} h \le \sup_{\Sigma_\varepsilon} h < +\infty,$$

且 $|\nabla h|$、 Δh、 Δd 有界，则存在 $C_\gamma, \varepsilon_0 > 0$ 使得

$$|R_1(x, \varepsilon, \gamma)| \leq C_\gamma \varepsilon \tag{3.19}$$

对于任意 $\varepsilon < \varepsilon_0$。因此，将 (3.19) 代入 (3.18)，可知存在 $\varepsilon_\alpha > 0$ 使得若$0 < \varepsilon < \varepsilon_\alpha$，则

$$-\Delta v_{1-\alpha} < 0, \qquad -\Delta v_{1+\alpha} > 0. \tag{3.20}$$

O另一方面，对于每个 $x \in \partial\Omega_\varepsilon$，由于 $d(x) = \varepsilon h(x)$ 以及 (3.15) 均成立，我们得到 t

$$\nabla v_\gamma(x) = -\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta h(x))}(\nu(x) - \varepsilon\nabla h(x)) - \frac{\beta\nabla h(x)}{\gamma(1+\beta h(x))^2},$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\gamma}{\partial \nu_\varepsilon}(x) &= -\frac{\beta\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla h|^2}}{\varepsilon(1+\beta h)} - \frac{\beta}{\gamma}\nu_\varepsilon \cdot \frac{\nabla h}{(1+\beta h)^2} \\ &= -\frac{\beta\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla h|^2}}{\varepsilon(1+\beta h)} + \frac{\beta\varepsilon|\nabla h|^2}{\gamma(1+\beta h)^2\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla h|^2}},\end{aligned} \tag{3.21}$$

而

$$v_\gamma(x) = 1 - \frac{\beta h(x)}{\gamma(1+\beta h(x))}. \tag{3.22}$$

因此，由 (3.21) 和 (3.22) 可得

$$\varepsilon\frac{\partial v_\gamma}{\partial \nu_\varepsilon} + \beta v_\gamma = -(1-\gamma)\frac{\beta^2 h}{\gamma(1+\beta h)} + R_2(\sigma, \varepsilon, \gamma) \quad \text{on } \partial\Omega_\varepsilon,$$

其中，与前面一样，在适当选取一个更小的 ε_0 后，

$$|R_2(\sigma, \varepsilon, \gamma)| \leq C_\gamma \varepsilon.$$

再次地，对于足够小的 ε，在 $\partial\Omega_\varepsilon$ 上我们得到

$$\varepsilon\frac{\partial v_{1-\alpha}}{\partial \nu_\varepsilon} + \beta v_{1-\alpha} < 0, \qquad \varepsilon\frac{\partial v_{1+\alpha}}{\partial \nu_\varepsilon} + \beta v_{1+\alpha} > 0. \tag{3.23}$$

最后，将（3.20）与（3.23）结合起来，根据椭圆算子的标准比较结果，命题得证。

□

现在我们可以证明定理 1.1。

证明 *定理 1.1*。 我们首先证明 Γ-下极限不等式：不失一般性，我们可以对极小化器序列 u_ε 证明该不等式。这里我们回顾 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 和 $\mathcal{F}_0$的定义，省略对 h的依赖。

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon\int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx + \beta\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2\, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{3.24}$$

$$\mathcal{F}_0 = \beta^{\wedge} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{3.25}$$

由（3.3）和（3.4）可得

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \geq \int_{\partial\Omega}\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} |\nabla u_\varepsilon(\sigma + t\nu)|^2 \left(1 + tH(\sigma) - \varepsilon^2 Q\right)\, dt\, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.26}$$

and

$$\frac{\beta}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2\,\mathcal{H}^{n-1} \geq \frac{\beta}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} u_\varepsilon^2(\sigma+\varepsilon h(\sigma)\nu(\sigma))\left(1+\varepsilon h(\sigma)H(\sigma)-\varepsilon^2 Q\right)\,d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{3.27}$$

当 ε 充分小时，对于每个 $\sigma\in\partial\Omega$ 和 $0<t<\varepsilon h(\sigma)$，我们有 $1+tH(\sigma)>0$，因此，利用Holder不等式并分部积分，

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} |\nabla u_\varepsilon(\sigma+t\nu)|^2\,(1+tH(\sigma))\,dt &\geq \frac{1}{\varepsilon h}\left(\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} |\nabla u_\varepsilon(\sigma+t\nu)|\sqrt{1+tH}\,dt\right)^2\\ &\geq \frac{1}{\varepsilon h}\left(\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} \frac{d}{dt}(u_\varepsilon(\sigma+t\nu))\sqrt{1+tH}\,dt\right)^2\\ &\geq \frac{1}{\varepsilon h}\left(u_\varepsilon(\sigma+\varepsilon h\nu)\sqrt{1+\varepsilon hH}-\left(1+\int_0^{\varepsilon h(\sigma)}\frac{Hu_\varepsilon(\sigma+t\nu)}{2\sqrt{1+tH}}\,dt\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Up t通过选取较小的 ε，我们可以应用Young不等式，从而得到对每个 $\lambda>0$

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon h(\sigma)} |\nabla u_\varepsilon^2(\sigma+t\nu)|\,(1+tH(\sigma))\,dt \geq& \frac{(1-\lambda)(1+\varepsilon hH)u_\varepsilon(\sigma+\varepsilon h\nu)^2}{\varepsilon h}\\ &+\frac{1}{\varepsilon h}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\int_0^{\varepsilon h(\sigma)}\frac{Hu_\varepsilon(\sigma+t\nu)}{2\sqrt{1+tH}}\,dt\right)^2.\end{aligned} \tag{3.28}$$

然后，结合（3.24）、（3.26）、（3.28）、（3.27）和（3.25），得到

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)=\frac{\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)-\mathcal{F}_0}{\varepsilon} \geq& \int_{\partial\Omega}\frac{1}{\varepsilon h(\sigma)}\left((1-\lambda)(1+\varepsilon hH)+\beta h(1+\varepsilon hH)\right)u_\varepsilon^2(\sigma+\varepsilon h\nu)\,d\mathcal{H}^{n-1}\\ &+\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\varepsilon h}\left(\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\int_0^{\varepsilon h}\frac{Hu_\varepsilon(\sigma+t\nu)}{2\sqrt{1+tH}}\,dt\right)^2-\frac{\beta h}{1+\beta h}\right)d\mathcal{H}^{n-1}\\ &-Q\varepsilon R(\varepsilon,u_\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.29}$$

其中，若 ε 足够小，

$$\begin{aligned}R(\varepsilon,u_\varepsilon)&=\varepsilon\int_{\partial\Omega}\int_0^{\varepsilon h(\sigma)}|\nabla u_\varepsilon(\sigma+t\nu)|^2\,d\mathcal{H}^{n-1}+\beta\int_{\partial\Omega}u_\varepsilon(\sigma+\varepsilon h(\sigma)\nu(\sigma))^2\,d\mathcal{H}^{n-1}\\ &\leq 2\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon).\end{aligned}$$

令 $\lambda=\lambda(\sigma)=1+\beta h(\sigma)$ 代入（3.29），并利用不等式 $(1+x)^2\geq 1+2x$,

$$\delta\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)\geq\int_{\partial\Omega}\frac{\beta hH}{\varepsilon(1+\beta h)}\int_0^\varepsilon\frac{u_\varepsilon(\sigma+th\nu)}{\sqrt{1+thH}}\,dt\,d\mathcal{H}^{n-1}+O(\varepsilon).$$

此外，对于每个 $t\in(0,\varepsilon)$，都有 $(1+thH)^{-1/2}=1+O(\varepsilon)$，因此

$$\delta\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)\geq\beta\int_{\partial\Omega}\frac{hH}{(1+\beta h)}\fint_0^\varepsilon u_\varepsilon(\sigma+th\nu)\,dt\,d\mathcal{H}^{n-1}+O(\varepsilon). \tag{3.30}$$

最后，令 $\alpha \in (0,1)$，并令

$$\gamma = \gamma(\sigma) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{if } H(\sigma) \geq 0 \\ 1+\alpha & \text{if } H(\sigma) < 0. \end{cases}$$

回顾一下，

$$w_{\varepsilon,\alpha}(\sigma + th(\sigma)\nu(\sigma)) = 1 - t^{\gamma}\frac{\beta h(\sigma)}{\varepsilon^{\gamma}\gamma(1+\beta h(\sigma))}.$$

根据 命题 3.4 我们有，对于每个 $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\alpha}$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) &\geq \beta \int_{\partial\Omega} \frac{hH}{(1+\beta h)} \fint_0^{\varepsilon} w_{\varepsilon,\alpha}(\sigma + th\nu)\, dt\, d\mathcal{H}^{n-1} + O(\varepsilon) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(1 - \frac{\beta h}{(1+\beta h)\gamma(\gamma+1)}\right) \frac{\beta h H}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

因此

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \delta\mathcal{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq \int_{\partial\Omega} \left(1 - \frac{\beta h}{(1+\beta h)\gamma(\gamma+1)}\right) \frac{\beta h H}{1+\beta h}\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

令 α 趋于 0，我们有 γ 趋于 1，并且

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \delta\mathcal{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq \beta \int_{\partial\Omega} \frac{hH(2+\beta h)}{2(1+\beta h)^2}\, d\mathcal{H}^{n-1},$$

于是证明了 Γ-下极限不等式。

现在我们证明 Γ-上极限不等式：

Let

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega, \\ 1 - \dfrac{\beta d(x)}{\varepsilon(1+\beta h(x))} - \dfrac{\beta d(x)^2 H(x)}{2\varepsilon(1+\beta h(x))^2} & \text{if } x \in \Sigma_{\varepsilon}, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

其中回顾一下，若 $x = \sigma + t\nu(\sigma)$，则 $h(x) = h(\sigma)$ 且 $H(x) = H(\sigma)$。我们有$\varphi_{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$，并且 φ_{ε} 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中收敛于 Ω 的示性函数。计算 φ_{ε} 的梯度，对于任意 $x \in \Sigma_{\varepsilon}$,

$$\nabla\varphi_{\varepsilon}(x) = -\frac{\beta\nu(x)}{\varepsilon(1+\beta h(x))} - \frac{\beta d(x) H(x)\nu(x)}{\varepsilon(1+\beta h(x))^2} + R_{\varepsilon}(x),$$

其中 R_{ε}是一个余项，它关于 ε一致有界，因为 $d \leq \varepsilon h$，且 h，∇h，H，∇H均有界。此外，$\nu \cdot R_{\varepsilon} = 0$，因为 h 和 H 的定义方式使得 ∇h和 ∇H 均与 ν正交。因此，对于充分小的 ε,

$$|\nabla\varphi_{\varepsilon}|^2 \leq \frac{\beta^2}{\varepsilon^2} \underbrace{\left(\frac{1}{(1+\beta h)^2} + 2\frac{Hd}{(1+\beta h)^3}\right)}_{\geq 0} + C,$$

其中w 再次利用了 h 和 H 的有界性，以及 $d \leq \varepsilon h$ 这一事实。因此，代入

$\varepsilon h\tau = t$在（3.3）中，并注意到 $d\left(\sigma+\varepsilon\tau h\left(\sigma\right)\nu\left(\sigma\right)\right) = \varepsilon h\tau$，我们得到

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_{\Sigma_\varepsilon}|\nabla\varphi_\varepsilon|^2\,dx \leq& \frac{\beta^2}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon}\left(\frac{1}{(1+\beta h)^2}+2\frac{Hd}{(1+\beta h)^3}\right)dx+\varepsilon C|\Sigma_\varepsilon|\\ \leq& \int_{\partial\Omega}\int_0^1\frac{\beta^2 h}{(1+\beta h)^2}(1+\varepsilon\tau hH+\varepsilon^2 Q)\,d\tau\,d\mathcal{H}^{n-1}+\\ &+\int_{\partial\Omega}\int_0^1\frac{2\varepsilon\beta^2h^2H\tau}{(1+\beta h)^3}(1+\varepsilon\tau hH+\varepsilon^2Q)\,d\tau\,d\mathcal{H}^{n-1}+\varepsilon C|\Sigma_\varepsilon|\\ =& \int_{\partial\Omega}\frac{\beta^2h}{(1+\beta h)^2}\,d\mathcal{H}^{n-1}+\varepsilon\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\beta^2h^2H}{2(1+\beta h)^2}+\frac{\beta^2h^2H}{(1+\beta h)^3}\right)d\mathcal{H}^{n-1}+O(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{3.31}$$

另一方面，对于每个 $\sigma\in\partial\Omega$,

$$\varphi_\varepsilon(\sigma+\varepsilon h(\sigma)\nu(\sigma)) = \frac{1}{1+\beta h(\sigma)}-\frac{\varepsilon\beta h(\sigma)^2H}{2(1+\beta h(\sigma))^2},$$

由此可得

$$\beta\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\varphi_\varepsilon^2\,d\mathcal{H}^{n-1}\leq\int_{\partial\Omega}\frac{\beta}{(1+\beta h)^2}(1+\varepsilon hH)\,d\mathcal{H}^{n-1}-\int_{\partial\Omega}\frac{\varepsilon\beta^2h^2H}{(1+\beta h)^3}\,d\mathcal{H}^{n-1}+O(\varepsilon^2). \tag{3.32}$$

最后，结合（3.24）、（3.31）、（3.32）和（3.25），得到

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)=\frac{\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)-\mathcal{F}_0}{\varepsilon}&\leq\beta\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\beta^2h^2H}{2(1+\beta h)^2}+\frac{\beta hH}{(1+\beta h)^2}\right)d\mathcal{H}^{n-1}+O(\varepsilon)\\ &=\beta\int_{\partial\Omega}\frac{hH(2+\beta h)}{2(1+\beta h)^2}\,d\mathcal{H}^{n-1}+O(\varepsilon)\end{aligned}$$

从而

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\delta\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)\leq\beta\int_{\partial\Omega}\frac{hH(2+\beta h)}{2(1+\beta h)^2}\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

并且 Γ-上极限不等式得证。 □

4 一阶展开的性质

设 Ω 是一个有界开集，具有 $C^{1,1}$ 边界。考虑泛函

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega,h)=\beta\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{1+\beta h}+\varepsilon H\frac{h(2+\beta h)}{2(1+\beta h)^2}\right)d\mathcal{H}^{n-1}.$$

下文中，我们省略对集合 Ω 的依赖，并用 $\mathcal{G}_\varepsilon(h)$ 代替 $\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega\ h)$。对于每个 $m>0$，我们将考虑如下问题

$$\inf\left\{\,\mathcal{G}_\varepsilon(h)\mid h\in\mathcal{H}_m\,\right\}, \tag{4.1}$$

其中集合 $\mathcal{H}_m$ 定义于（1.2）中。

注释 4.1。 假设问题（ $\mu \in L^1(\partial\Omega)$ 存在一个非零连续解，且集合（4.1） $U = \{\mu > 0\}$ 是开集。那么，对于每个 $\psi \in C_c^\infty(U)$ ，只要其均值为零，并且对于每个 $\eta \in \mathbb{R}$ 足够小的值，我们都可以考虑变分 $\mu + \eta\psi$ ，由此得到欧拉-拉格朗日方程

$$\int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\beta}{(1+\beta\mu)^2} + \frac{\varepsilon H}{1+\beta\mu} - \varepsilon H \frac{\beta\mu(2+\beta\mu)}{(1+\beta\mu)^3} \right) \psi \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

前一个方程得出的是

$$\frac{c}{\beta}(1+\beta\mu)^3 - (1+\beta\mu) + \frac{\varepsilon H}{\beta} = 0,$$

对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$。

设定 $\varepsilon > 0$，下文中我们将假设 that

$$\sup_{\partial\Omega} \frac{\varepsilon H}{\beta} \leq \frac{2}{3}. \tag{4.2}$$

Let

$$H_0 = \inf_{\partial\Omega} H$$

and

$$k_0 = 1 - \frac{\varepsilon H_0}{\beta}.$$

对于每个 $k \in (0, k_0)$，令

$$\Gamma_k = \left\{ \sigma \in \partial\Omega \;\middle|\; \frac{\varepsilon H(\sigma)}{\beta} < 1 - k \right\}$$

并考虑

$$P_k(y, \sigma) = ky^3 - y + \frac{\varepsilon H(\sigma)}{\beta}.$$

命题 4.2。 设 (4.2) 成立。那么，对于每个 $k \in (0, k_0)$，以及 $\sigma \in \Gamma_k$，在区间$(1, +\infty)$ 中存在唯一的 $y_k(\sigma)$ 使得

$$P_k(y_k(\sigma), \sigma) = 0, \tag{4.3}$$

并且存在 $z_k > 1$ 使得

$$\max\left\{ \frac{1}{\sqrt{3k}}, 1 \right\} \leq y_k(\sigma) \leq z_k. \tag{4.4}$$

特别地，我们有

$$\lim_{k \to k_0^-} z_k = 1. \tag{4.5}$$

此外，对于任意 $k_1 < k_2$ 和 $\sigma \in \Gamma_{k_2}$ ，我们有

$$y_{k_2}(\sigma) < y_{k_1}(\sigma). \tag{4.6}$$

证明。 对于任意固定的 $\sigma \in \Gamma_k$ ，我们有 $P_k(1, \sigma) < 0$；此外，对于 $k \geq 1/3$，多项式 $P_k(y, \sigma)$ 关于 $y \geq 1$严格递增，而对于 $k < 1/3$ ，我们有

$$\frac{\partial}{\partial y} P_k(y, \sigma) < 0 \qquad \text{if } y \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{3k}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_k(y, \sigma) > 0 \qquad \text{if } y \in \left(\frac{1}{\sqrt{3k}}, +\infty\right).$$

因此，在区间$(1,+\infty)$内存在多项式 $P_k(\cdot,\sigma)$的唯一零点 $y_k(\sigma)$，并且

$$y_k(\sigma) \geq \frac{1}{\sqrt{3k}}.$$

另外注意，对于每个 $y>1$， $y<y_k(\sigma)$ 当且仅当 $P_k(y,\ \sigma)<0$。因此，若我们选择 z_k 为区间 $(1,\ +\infty)$ 中满足以下条件的唯一实数

$$kz_k^3 - z_k + \frac{\varepsilon H_0}{\beta} = 0, \tag{4.7}$$

then

$$P_k(z_k,\sigma) = \frac{\varepsilon H(\sigma)}{\beta} - \frac{\varepsilon H_0}{\beta} \geq 0,$$

并且我们有（4.4）成立。

现在证明（4.5）。首先注意到 z_k 关于 k单调递减：令 $k_1<k_2$，于是

$$k_1 z_{k_2}^3 - z_{k_2} + \frac{\varepsilon H_0}{\beta} < k_2 z_{k_2}^3 - z_{k_2} + \frac{\varepsilon H_0}{\beta} = 0 = k_1 z_{k_1}^3 - z_{k_1} + \frac{\varepsilon H_0}{\beta},$$

这保证了

$$z_{k_2} < z_{k_1},$$

因为多项式 $k_1 y^3 - y + \varepsilon H_0/\beta$ 关于 $[1/\sqrt{3k_1},+\infty$严格递增）。现在我们有

$$z = \lim_{k\to k_0^-} z_k,$$

并且，对（4.7）取极限，并回忆根据定义 $\beta k_0 = \varepsilon H_0$，我们得到 z满足方程

$$k_0(z^3-1) - z + 1 = 0.$$

由（4.2），可得 $k_0>1/3$，因此 $z=1$ 是 $[1,+\infty)$中前一个方程的唯一解，从而证明了（4.5）。

最后，为了证明（4.6），令 $k_1<k_2$ 和 $\sigma\in\Gamma_{k_1}\cap\Gamma_{k_2}=\Gamma_{k_2}$，则（4.3）保证

$$P_{k_1}(y_{k_2},\sigma) < P_{k_2}(y_{k_2},\sigma) = 0,$$

由此可得

$$y_{k_2}(\sigma) < y_{k_1}(\sigma).$$

□

令 $k\in$ （0，k_0），并令 y_k 如 命题 4.2中所述，我们定义

$$\mu_k(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}(y_k(\sigma)-1) & \text{if } \sigma\in\Gamma_k. \\ 0 & \text{if } \sigma\in\partial\Omega\setminus\Gamma_k, \end{cases}$$

注意，由（4.6）可知， μ_k 关于 k是递减的。

我们有如下结果

命题 4.3。 设 (4.2) 成立。则，对于任意 $m>0$ ，存在唯一的 $k=k_m\in(0,k_0)$ 使得

$$\int_{\partial\Omega} \mu_k \, d\mathcal{H}^{n-1} = m.$$

证明。 我们首先证明函数

$$M(k) = \int_{\partial\Omega} \mu_k \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

是连续的。固定 $k \in (0, k_0)$ 并令 $\delta > 0$，则

$$\beta(M(k) - M(k+\delta)) = \int_{\Gamma_{k+\delta}} (y_k - y_{k+\delta}) \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\left\{ 1-k-\delta \le \frac{\varepsilon H}{\beta} < 1-k \right\}} (y_k - 1) \, d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (4.8)$$

根据定义，对于每个 $\sigma \in \partial\Omega$，我们有

$$\lim_{\delta \to 0^+} \chi_{\Gamma_{k+\delta}}(\sigma) = \chi_{\Gamma_k}(\sigma).$$

令 $\sigma \in \Gamma_k$，则当 $\delta < \delta_\sigma$ 足够小时，函数 $y_{k+\delta}(\sigma)$ 有定义；由隐函数定理以及 $P_k(y, \sigma)$ 的正则性可得

$$\lim_{\delta \to 0^+} y_{k+\delta}(\sigma) = y_k(\sigma).$$

因此，由 (4.4)、 z_k 的单调性以及控制收敛定理可得

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\Gamma_{k+\delta}} (y_k - y_{k+\delta}) \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \quad (4.9)$$

另一方面，对于每个 $\sigma \in \partial\Omega$,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \chi_{\left\{ 1-k-\delta \le \frac{\varepsilon H}{\beta} < 1-k \right\}}(\sigma) = 0,$$

这意味着

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\left\{ 1-k-\delta \le \frac{\varepsilon H}{\beta} < 1-k \right\}} (y_k - 1) \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \quad (4.10)$$

将（4.8）、（4.9）和（4.10结合起来，我们得到

$$\lim_{\delta \to 0^+} M(k) - M(k+\delta) = 0.$$

现在我们固定 $k \in (0, k_0)$、 $\delta > 0$，并计算

$$\beta(M(k-\delta) - M(k)) = \int_{\Gamma_k} (y_{k-\delta} - y_k) \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\left\{ 1-k \le \frac{\varepsilon H}{\beta} < 1-k+\delta \right\}} (y_{k-\delta} - 1) \, d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (4.11)$$

与前一种情况一样，根据隐函数定理，对每个 $\sigma \in \Gamma_k$,

$$\lim_{\delta \to 0^+} y_{k-\delta}(\sigma) = y_k(\sigma).$$

根据控制收敛定理,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\Gamma_k} (y_{k-\delta} - y_k) \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \quad (4.12)$$

另一方面，对于每个 $\sigma \in \partial\Omega$，我们有

$$\lim_{\delta \to 0^+} \chi_{\left\{ 1-k \le \frac{\varepsilon H}{\beta} < 1-k+\delta \right\}}(\sigma) = \chi_{\left\{ \frac{\varepsilon H}{\beta} = 1-k \right\}}(\sigma),$$

并且，对于每个 σ 使得 $\varepsilon H(\sigma) = \beta(1-k)$，我们可以利用 $y_{k-\delta}$ 的单调性，然后在（4.3）中取极限，得到

$$\lim_{\delta\to 0^+} y_{k-\delta}(\sigma) = 1,$$

这意味着

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{\left\{1-k\le\frac{\varepsilon H}{\beta}<1-k+\delta\right\}} (y_{k-\delta}-1)\, d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \tag{4.13}$$

结合（4.11）、（4.12）和（4.13），我们得到

$$\lim_{\delta\to 0^+} M(k-\delta) - M(k) = 0,$$

由此完成了对 M 连续性的证明。

最后，由单调性以及（4.4）和（4.2），可得

$$\lim_{k\to 0^+} M(k) = +\infty, \quad \lim_{k\to k_0^-} M(k) = 0.$$

命题得证。 □

定理 4.4. 设 (4.2) 成立。那么，对于任意 $m>0$，函数 μ_{k_m} 是问题 (4.1)的唯一极小化子。

证明。令 $h\colon\ \partial\Omega \to R$ 满足 $h\ge 0$ 且

$$\int_{\partial\Omega} h\, d\mathcal{H}^{n-1} \le m.$$

对每个 $t\in[0,1]$，考虑

$$h_t = \mu_k + t(h-\mu_k)$$

and

$$g(t) = \mathcal{G}_\varepsilon(h_t).$$

我们断言， $g(t)$ 关于 t 递增。通过直接计算可得

$$g'(t) = \beta \int_{\partial\Omega} \frac{\varepsilon H - \beta(1+\beta h_t)}{(1+\beta h_t)^3}(h-\mu_k)\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

由（4.2）可知，对于每个 $\sigma\in\partial\Omega$ 函数

$$x \mapsto \frac{\varepsilon H - \beta(1+\beta x)}{(1+\beta x)^3}$$

在 $[0,+\infty$ 上递增），因此

$$\begin{aligned} g'(t) &\ge \beta \int_{\partial\Omega} \frac{\varepsilon H - \beta(1+\beta\mu_k)}{(1+\beta\mu_k)^3}(h-\mu_k)\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \beta\left(\int_{\partial\Omega\setminus\Gamma_k} (\varepsilon H-\beta)h\, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Gamma_k} \frac{\varepsilon H - \beta(1+\beta\mu_k)}{(1+\beta\mu_k)^3}(h-\mu_k)\, d\mathcal{H}^{n-1}\right). \end{aligned}$$

由（4.3）可知，在 Γ_k

$$\frac{\varepsilon H - \beta(1+\beta\mu_k)}{(1+\beta\mu_k)^3} = -\beta k$$

而在 $\partial\Omega \setminus \Gamma_k$ 上

$$\varepsilon H - \beta \geq -\beta k$$

从而

$$g'(t) \geq \beta^2 k \int_{\partial\Omega} (\mu_k - h)\, d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0,$$

并且该断言得证。特别地，我们有

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\mu_k) = g(0) \leq g(1) = \mathcal{G}_\varepsilon(h)$$

也就是说， μ_k 是问题（4.1）的极小化器。最后，由（4.2），我们有，对于每个 $\sigma \in \partial\Omega$，函数

$$x \in [0, +\infty) \mapsto \frac{1}{1+\beta x} + \varepsilon H(\sigma) \frac{x(2+\beta x)}{2(1+\beta x)^2}$$

是严格凸的，因此问题（4.1）存在唯一极小化子。 □

注 4.5。 注意，最优配置 μ_{k_m} 集中在平均曲率较小的地方：为简单起见，记为 $k = k_m$，并取 σ_1， $\sigma_2 \in \Gamma_k$ 使得

$$H(\sigma_1) < H(\sigma_2).$$

注意到

$$P_k(y_k(\sigma_1), \sigma_1) = 0 = P_k(y_k(\sigma_2), \sigma_2),$$

我们得到

$$k y_k(\sigma_1)^3 - y_k(\sigma_1) > k y_k(\sigma_2)^3 - y_k(\sigma_2).$$

根据（4.4），我们可以利用函数 $y \mapsto ky^3 - y$ 在 $[1/\sqrt{3k}, +\infty)$ 上的单调性，得到

$$y_k(\sigma_1) > y_k(\sigma_2),$$

从而 $\mu_k(\sigma_1) > \mu_k(\sigma_2)$。

注 4.6。 注意，如果对每个 $\sigma \in \partial\Omega$

$$\frac{\varepsilon H(\sigma)}{\beta} \geq 2, \tag{4.14}$$

那么最优配置由 $\mu \equiv 0$ 给出。事实上，如果（4.14）成立，则对每个 $\sigma \in \partial\Omega$ 函数

$$x \in [0, +\infty) \mapsto \frac{1}{1+\beta x} + \frac{\varepsilon H(\sigma)}{\beta} \frac{\beta x(2+\beta x)}{2(1+\beta x)^2}$$

在 $x = 0$ 时达到最小值。

4.1 周长约束下的最小化

固定 $\varepsilon > 0$。对于每个 $P > 0$ 和 $m > 0$，我们定义，

$$\mathcal{K}_P = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \Omega \text{ open and bounded with } C^{1,1} \text{ boundary} \\ H_\Omega \geq 0 \\ P(\Omega) = P \end{array} \right\},$$

其中， H_Ω 是Ω的平均曲率。设Ω $\in \mathcal{K}_P$，并设 $h \in \mathcal{H}_m(\partial\Omega)$，其中 $\mathcal{H}_m$ 是（1.2）中定义的集合，那么我们研究如下泛函

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega, h) = \beta \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{1+\beta h} + \varepsilon H_\Omega \frac{h(2+\beta h)}{2(1+\beta h)^2} \right) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

现在我们来考虑这个问题

$$\inf \{\, \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega, h) \mid (\Omega, h) \in \mathcal{K}_p \times \mathcal{H}_m(\partial\Omega) \,\}. \tag{4.15}$$

定义 4.7 (饼干形状**)。** 对于任意 $r,\ R>0$ 我们定义饼干形状

$$C_{r,R}=\left\{\,(x',x_n)\;\middle|\;-f_{r,R}(x')\le x_n\le f_{r,R}(x')\,\right\},$$

其中

$$f_{r,R}(x')=\begin{cases} r & |x'|\le R,\\ \sqrt{r^2-(|x'|-R)^2} & R<|x'|\le R+r.\end{cases}$$

备注 **论 4.8.** 对于每个 $r,\ R>0$，我们有 $C_{r,\ R}$ 是一个具有 $C^{1,\ 1}$ 边界的凸集，并且

$$H=H_{C_{r,R}}\ge\frac{1}{r}\chi_{\{H>0\}}.$$

此外,

$$P(C_{r,R})=2\omega_{n-1}\left(R^{n-1}+(n-1)r\int_0^1\frac{(r\rho+R)^{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho\right).\tag{4.16}$$

我们注意到，函数 $P(C_{r,\ R})$ 关于 r 和 R 递增。

定理 4.9. 对于每个 P、$m>0$，我们有

$$\inf\left\{\,\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega,h)\mid(\Omega,h)\in\mathcal{K}_p\times\mathcal{H}_m(\partial\Omega)\,\right\}=\frac{\beta P^2}{P+\beta m}$$

并且下确界渐近地由一列薄饼干形状达到。

证明。 对于每个 $(\Omega\ h)\in\mathcal{K}_p\times\mathcal{H}_m(\partial\Omega)$,

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega,h)\ge\beta\int_{\partial\Omega}\frac{1}{1+\beta h}\,d\mathcal{H}^{n-1}\ge\frac{\beta P^2}{P+\beta m}.$$

设 $r_k>0$ 为一个递减序列，且满足

$$\lim_k r_k=0;$$

设 R_k 满足：对于每个 k,

$$P(C_{r_k,R_k})=P.$$

则 R_k 在 k 中递增，且

$$\lim_k R_k=\left(\frac{P}{2\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

考虑

$$h_k(\sigma)=\begin{cases}\dfrac{m}{2\omega_{n-1}R_k^{n-1}} & \text{if } H(\sigma)=0,\\ 0 & \text{if } H(\sigma)>0.\end{cases}$$

我们有

$$\mathcal{G}_\varepsilon(C_{r_k,R_k},h_k)=\frac{2\beta\omega_{n-1}R_k^{n-1}}{1+\frac{m}{2\omega_{n-1}R_k^{n-1}}}+\beta\left(P(C_{r_k,R_k})-2\omega_{n-1}R_k^{n-1}\right).$$

令 k 趋于无穷大，得到

$$\lim_k\mathcal{G}_\varepsilon(C_{r_k,R_k},h_k)=\frac{\beta P^2}{P+\beta m}=\min_{h\in\mathcal{H}_m}\mathcal{F}_0(h).$$

□

4.2 带几何约束的极大化

固定 ε， $m > 0$。对于每个有界开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$，若其边界 $C^{1,\,1}$，则令

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega) = \inf \{\, \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega, h) \mid h \in \mathcal{H}_m \,\},$$

其中 $\mathcal{H}_m$ 是由式（1.2）定义的集合。本节将研究在拟面积积分固定时 $\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega)$ 的极大化。以下内容参见 [13, 6]

定义4.10 （拟面积积分）。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空、有界的凸集。我们将拟面积积分定义为唯一的系数 $W_j(\Omega)$，使得

$$|\Omega + tB| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_j(\Omega) t^j,$$

其中 B 是 $\mathbb{R}^n$中的单位球，并且

$$\Omega + tB = \{\, x + ty \mid x \in \Omega,\ y \in B \,\}.$$

特别地， $W_0(\Omega)$是 Ω 的测度，而 $W_n(\Omega) = \omega_n$，是单位球的测度。

定理4.11 （亚历山德罗夫–芬切尔不等式）。 设 $0 \le i < j \le n-1$，且设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空、有界的凸集，则

$$\left(\frac{W_i(\Omega)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-i}} \le \left(\frac{W_j(\Omega)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-j}}.$$

此外，当且仅当Ω 是一个球时，不等式取等号。

注释 4.12. 设 Ω 是一个边界具有 C^2 且高斯曲率非零的有界开凸集，则拟面积积分与 Ω 的边界主曲率相关。事实上，对每个 $j = 1, \ldots, n$，我们有

$$W_j = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} H_{j-1}(\sigma)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

这里 H_j 表示 Ω 的主曲率的第 j 个归一化初等对称函数，即 $H_0 = 1$，并且对每个 $j = 1, \ldots n-1$,

$$H_j(\sigma) = \binom{n-1}{j}^{-1} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_j \le n-1} k_{i_1}(\sigma) \cdots k_{i_j}(\sigma),$$

其中 $k_1(\sigma) \ldots, k_{n-1}(\sigma)$ 是 Ω 上一点 $\sigma \in \partial$处的主曲率。特别地，我们有

$$W_1(\Omega) = \frac{1}{n} P(\Omega)$$

and

$$W_2(\Omega) = \frac{1}{n(n-1)} \int_{\partial\Omega} H_\Omega\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

在平面情形下，我们有如下结论

命题 4.13。 设 $n=2$，并设 Ω 是一个有界、开且单连通的集合 Ω，其边界满足 C^2，且满足以下条件之一

$$P(\Omega) \geq 3\pi\frac{\varepsilon}{\beta}$$

or

$$P(\Omega) \leq \pi\frac{\varepsilon}{\beta}.$$

Then

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega) \leq \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega^*), \tag{4.17}$$

其中 Ω^* 是与 Ω 周长相同的球。

证明。如果

$$P(\Omega) \leq \pi\frac{\varepsilon}{\beta},$$

then

$$\frac{\varepsilon H_{\Omega^*}}{\beta} \geq 2,$$

并且，根据 注 4.6，我们得到

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega^*) = \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega^*, 0) = \beta P(\Omega^*).$$

另一方面，

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega) \leq \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega, 0) = \beta P(\Omega) = \beta P(\Omega^*),$$

这给出（4.17）。如果

$$P(\Omega) \geq 3\pi\frac{\varepsilon}{\beta},$$

then

$$\frac{\varepsilon H_{\Omega^*}}{\beta} \leq \frac{2}{3},$$

并且，根据 定理 4.4，我们得到

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega^*) = \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega^*, m/P(\Omega^*)).$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega) &\leq \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega, m/P(\Omega^*)) \\ &= \beta\left(\frac{P(\Omega^*)P(\Omega)}{P(\Omega^*)+\beta m} + \frac{\varepsilon m(2P(\Omega^*)+\beta m)}{2(P(\Omega^*)+\beta m)^2}\int_{\partial\Omega} H_\Omega \, d\mathcal{H}^{n-1}\right).\end{aligned}$$

根据高斯–博内定理，我们有

$$\int_{\partial\Omega} H_\Omega \, d\mathcal{H}^{n-1} = 2\pi = \int_{\partial\Omega^*} H_{\Omega^*} \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega) &\leq \beta\left(\frac{P(\Omega^*)^2}{P(\Omega^*)+\beta m} + \frac{\varepsilon m(2P(\Omega^*)+\beta m)}{2(P(\Omega^*)+\beta m)^2}\int_{\partial\Omega^*} H_{\Omega^*} \, d\mathcal{H}^{n-1}\right) \\ &= \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega^*, m/P(\Omega^*)),\end{aligned}$$

即（4.17）。 □

在可能具有更高维数的一般情况下，我们有

命题 4.14。 令 $n \geq 3$、 $2 \leq k \leq n-1$，并设 Ω 为一个具有C^2 边界和非零高斯曲率的有界开凸集，使得以下条件之一成立

$$W_k(\Omega) \geq \omega_n \left(\frac{3(n-1)\varepsilon}{2\beta} \right)^{n-k} \tag{4.18}$$

or

$$W_k(\Omega) \leq \omega_n \left(\frac{(n-1)\varepsilon}{2\beta} \right)^{n-k}. \tag{4.19}$$

Then

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\Omega) \leq \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega^*)$$

其中Ω^* 是满足 $W_k(\Omega) = W_k(\Omega^*)$的球。

证明。 由于 $W_k(\Omega) = W_k(\Omega^*)$，根据 Alexandrov-Fenchel 不等式，对于每个 $0 \leq i \leq k$

$$\left(\frac{W_i(\Omega^*)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n-i}} = \left(\frac{W_k(\Omega^*)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n-k}} = \left(\frac{W_k(\Omega)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n-k}} \geq \left(\frac{W_i(\Omega)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n-i}},$$

也就是说

$$W_i(\Omega) \leq W_i(\Omega^*).$$

特别地，我们有

$$P(\Omega) \leq P(\Omega^*)$$

and

$$\int_{\partial\Omega} H_\Omega \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \int_{\partial\Omega^*} H_{\Omega^*} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

此外，由于

$$\left(\frac{W_k(\Omega^*)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n-k}} = \left(\frac{W_1(\Omega^*)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{P(\Omega^*)}{n\omega_n} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{H_{\Omega^*}},$$

条件（4.18）和（4.19）可写为

$$\frac{\varepsilon H_{\Omega^*}}{\beta} \leq \frac{2}{3},$$

and

$$\frac{\varepsilon H_{\Omega^*}}{\beta} \geq 2,$$

分别。因此，可以按照命题 4.13的证明得到该结果。 □

4.3 最后说明

Le设 Ω，$\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为边界光滑的有界开集，使得 $\Omega \subset \Omega_0$ 并且 le — — t

$$\mathcal{I}_\beta(\Omega, \Omega_0) = \inf \left\{ \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega_0} u^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega_0), \\ u \geq 1 \text{ in } \overline{\Omega} \end{array} \right\}.$$

命题 命题 4.13 和 命题4.14 中的结果与 [10]关于该泛函的结果一致

$$\mathcal{I}_{\beta,\delta}(\Omega) = \mathcal{I}_\beta(\Omega, \Omega + \delta B),$$

其中 $\Omega_0 = \Omega + \delta B$ 是 Ω 与单位球 $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ 的闵可夫斯基和。也就是说， [10]，中证明了以下定理

定理 4.15。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个连通、有界的开集，且具有分段光滑的 C^1 边界。那么

$$\mathcal{I}_{\beta,\delta}(\Omega) \leq \mathcal{I}_{\beta,\delta}(\Omega^*),$$

其中，Ω^* 是与Ω周长相同的球。

定理 4.16。设 $n \geq 3$，且Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开凸集。那么

$$\mathcal{I}_{\beta,\delta}(\Omega) \leq \mathcal{I}_{\beta,\delta}(\Omega^*),$$

其中，Ω^* 是满足 $W_{n-1}(\Omega^*) = W_{n-1}(\Omega)$ 的球。

最后，在 [5],证明了以下定理

定理 4.17。该问题的解

$$\min\left\{ I_\beta(\Omega,\Omega_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} |\Omega| = \omega_n, \\ |\Omega_0| \leq M \end{array} \right\}$$

由两个同心球组成。

前一个定理自然引出了以下问题

开放问题 1. 证明或证伪：该问题

$$\min\left\{ \mathcal{G}_\varepsilon(\Omega,h) \;\middle|\; \begin{array}{l} |\Omega| = \omega_n, \\ h \in \mathcal{H}_m \end{array} \right\}$$

存在一组解 (B_1, h^*)，其中 h^* 是一个常函数。

参考文献

[1] Emilio Acerbi 和 Giuseppe Buttazzo。“变分法中的强化问题”。载于：亨利·庞加莱研究所年刊 *C* 辑：非线性分析 3.4（1986），第 273–284 页。ISSN：0294-1449。[2] Gabriele Anzellotti 和 Sisto Baldo。“通过 Γ-收敛进行渐近展开”。载于：应用数学与优化 27（1993），第 105–123 页。[3] Haïm Brézis、Luis ACaffarelli 和 AvnerFriedman。“椭圆方程与变分不等式的强化问题”。载于：纯粹与应用数学年刊 123.1（1980），第 219–246 页。[4] Dorin Bucur、Giuseppe Buttazzo 和 Carlo Nitsch。“最优绝热问题中的对称性破缺”。载于：纯粹与应用数学杂志 107.4（2017），第 451–463 页。[5] Dorin Bucur、Mickaël Nahon、Carlo Nitsch 和 Cristina Trombetti。“热绝缘问题的形状优化”。载于：变分法与偏微分方程 61.5（2022），第 186 页。[6] Yu. D. Burago 和 V. A. Zalgaller。几何不等式。第 285 卷。数学科学基础丛书 [数学科学基本原理]。施普林格出版社，柏林，1988 年，第 xiv+331 页。ISBN：3-540-13615-0。[7] L. A. Caffarelli 和 D. Kriventsov。“与热绝缘相关的自由边界问题”。载于：偏微分方程通讯 41.7（2016），第 1149–1182 页。

[8] Gianni Dal Maso.《 Γ-收敛简介. 第8卷。非线性微分方程及其应用进展。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，1993，第 xiv+340 页。isbn：0-8176-3679-X。[9] Francesco Della Pietra、Carlo Nitsch、Riccardo Scala 和 Cristina Trombetti。“具有 Robin 边界条件的热绝缘优化问题”。载于：《偏微分方程通讯》46.12（2021），第 2288–2304 页。[10] Francesco Della Pietra、Carlo Nitsch 和 Cristina Trombetti。“最优绝热问题”。载于：数学年刊382.1-2（2022），第 745–759 页。issn：0025-5831。[11] Avner Friedman。“椭圆算子主特征值的强化”。载于：理性力学与分析档案73.1（1980），第 1–17 页。[12] Francesco Maggi。有限周长集与几何变分问题：几何测度论导论。第135卷。剑桥大学出版社，2012。[13] Rolf Schneider。凸体：布伦-闵可夫斯基理论。扩充版。第151卷。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，剑桥，2014，第 xxii+736 页。isbn：978-1-107-60101-7。

“R. Caccioppoli”数学与应用系，那不勒斯费德里科二世大学，Cintia街，圣安杰洛山大学校园，80126，那不勒斯，意大利。

电子邮件地址，P. Acampora：paolo.acampora@unina.it

电子邮件地址，C. Nitsch：c.nitsch@unina.it

电子邮件地址，C. Trombetti：cristina@unina.it

先进材料与技术数学和物理科学，南方高等学校，圣马尔切利诺广场 10 号，80126，那不勒斯，意大利。

电子邮件地址，E. Cristoforoni：emanuele.cristoforoni@unina.it