arXiv:2305.04109v3 [math.AT] 1 May 2025

Luca Da Col

正亏格黎曼曲面上有限子集补空间的基本群上的映射类群作用

摘要。 我们描述映射类群 $M(g,\ n)$ 在基本群 $T_{g,\ n}$ 上的作用，其中 $_n$ 是一个亏格为正、带有 n 个标记点的紧致可定向拓扑曲面。为此，我们计算了 $M(g,\ n)$ 的生成元作为基本群外自同构时的像。

关键词。 映射类群，基本群。

数学主题分类： 主要：20F34，次要：20F38，57M05，57M60。

1 - 引言

本文的主要动机源于近期关于亏格为 g 的黎曼曲面上有限群作用的拓扑类型描述的研究 [2] 。他们考察诱导曲面商空间同胚于球面的群作用，以对亏格介于 2 至 27 之间的曲面上的作用的拓扑类型进行分类。

对拓扑类型进行分类的一个重要动机是：两个具有同一群作用的黎曼曲面具有相同的拓扑类型，当且仅当它们形变等价（[2],Section2）。

正如他们所述，其算法实现中一个关键要素是理解映射类群在带有一定数量标记点的球面的基本群上的作用，从而判断两个曲面是否具有相同的拓扑类型；这一作用广为人知（例如见 [1], 推论 1.8.3）。

这些拓扑类型的完整分类，在不对商空间作进一步假设的情况下，仅对亏格小于或等于 5 的情形得以完成（[5], [6]）。为了推广 [2] 的技术，并将拓扑类型的计算扩展到商空间具有正亏格的曲面群作用，需要掌握映射类群对更一般商空间的基本群的作用的完整描述。迄今为止，文献中仅有少数情形可供参考（（$g,\ n$）=（1，1），（1，2），（2，0）），例如见 [7, 8]）。定理 3.1 和 3.3 给出了这一描述。

2 - 映射类群的生成元 $P(g,\ n)$ 和 $M(g,\ n)$

定义 2.1。令$T_{g,\ n}$ 表示一个亏格为 g 、带有n 个标记点 $Q_n := \{q_1, \ldots, q_n\} \subset T_{g,\ n}$的紧致可定向曲面。
$T_{g,\ n}$的第 n 个 $pure\ mapping\ class\ group$，记为 $P(g,\ n)$，是 $T_{g,\ n}$ 上保定向自同胚群的道路连通分支群，其中这些自同胚在 Q_n 上限制为恒等映射。

$T_{g,\ n}$的第 n 个 $mapping\ class\ group$，记为 $M(g,\ n)$，是 $T_{g,\ n}$ 上保定向自同胚群的道路连通分支群，其中这些自同胚仅将 Q_n 作为集合固定。

从现在起，我们将按照引言中所述的动机，将注意力限制在正亏格的情形。

定义 2.2。设 $A = S^1 \times [0,1]$ 为一个环带，并设 $\tau\colon A \to A$ 为由 $\tau(\theta,\ t) = (\theta - 2\pi t,\ t)$ 给出的扭转映射（这是我们对右扭转的选择）。设 α 为 $T_{g,\ n}$中的一条简单闭曲线，设 N 为 α 的一个正则邻域，并设 $\phi\colon A \to N$ 为一个保定向同胚。$Dehn\ twist\ about\ \alpha$ 是一个形如 $\tau_\alpha\colon T_{g,\ n} \to T_{g,\ n}$ 的同胚，定义如下：

$$\tau_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ \tau \circ \phi^{-1}(x) & \text{if } x \in N \\ x & \text{if } x \in T_{g,n} \setminus N \end{cases}$$

有关 Dehn 扭转的更多细节，请参阅 [3], 第 3 章。它们的重要性体现在以下结果中（[3], 定理 4.11）：

定理 2.3。对于每个 $g \geq 1$，纯映射类群 $P(g,n)$ 由关于 $T_{g,n}$ 中非分隔简单闭曲线的 *Dehn* 扭转有限生成。

就我们的目的而言，我们将使用 S. Gervais（[4]）给出的 $P(g,n)$ 的一个生成集。这里我们回顾其描述及图示（图1）。令 $\mathcal{H}_{g,n}$ 表示 $T_{g,n}$ 中 $2g + 2n - 1$ 简单闭曲线的集合：

$$\mathcal{H}_{g,n} = \{\alpha_1, \alpha_2, (\alpha_{2g+i})_{0 \leq i \leq n-2}, \beta, (\beta_i)_{1 \leq i \leq g-1}, \gamma_{1,2}, (\gamma_{2i,2i+2})_{1 \leq i \leq g-2}, (\delta_i)_{1 \leq 1 \leq n-1}\}$$

这些曲线的描述如下：

- β 是一条环绕曲面上一个孔洞的简单闭曲线（我们将其描绘为中央的孔洞）。每个 β_i，$1 \leq i \leq g-1$ 都是一条环绕其余每个 $g-1$ 孔洞的简单闭曲线（如图中所示，这些孔洞表现为把手）。
- 每条 α_{2g+i}, $0 \leq i \leq n-2$ 都是一条穿过中央孔洞并将相邻两个标记点分隔开的简单闭曲线。α_1 将最后一个标记点与第一个把手分隔开。α_2 穿过中央孔洞和第一个把手。

- $\gamma_{1,\ 2}$ 是图1中环绕第一个把手的环路。其他每个 $\gamma_{i,\ j}$ 都是一条穿过两个相邻把手的简单闭曲线，而每个 δ_i 都是一条环绕每个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$中的第 i 个标记点的简单闭曲线。

我们将对应于 $\mathcal{H}_{g,n}$ 中相应曲线的 Dehn 扭转记作 $a_\bullet = \tau_{\alpha_\bullet}$、$b_\bullet = \tau_{\beta_\bullet}$、$c_\bullet = \tau_{\gamma_\bullet}$ 和 $d_\bullet = \tau_{\delta_\bullet}$，并考虑 $P(g,n)$ 的生成元集合：

$$H_{g,n} := \{a_1, a_2, (a_{2g+i})_{0\le i\le n-2}, b, (b_i)_{1\le i\le g-1}, c_{1,2}, (c_{2i,2i+2})_{1\le i\le g-2}, (d_i)_{1\le 1\le n-1}\}$$

注 2.4. 存在一个群的短正合列：

$$1 \to P(g,n) \to M(g,n) \to S_n \to 1$$

其中，S_n 表示作用在 n 个元素上的对称群。由定理 2.3 以及该序列的正合性可知，$M(g,n)$ 的一个生成集由 $P(g,n)$ 的一个生成集的像，与一组称为半扭转或 Hurwitz 变换的元素构成；这些元素映射到 S_n 的相邻换位生成集（[3], 推论 4.15），并记作 $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$。也就是说，$M(g,n)$ 由以下元素生成：$H_{g,n} \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$。

3 - 基本群上的作用 $\pi_1(T_{g,\ n})$

设 $q_0 \in T_{g,\ n} \setminus Q_n$。基本群 $\pi_1(T_{g,\ n},\ q_0)$ 可表示为：

$$(\star)\quad \pi_1(T_{g,n}, q_0) = \langle \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_g, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_g, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n \mid \prod_{i=1}^{g} [\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i] \cdot \prod_{i=1}^{n} \hat{\gamma}_i = 1 \rangle$$

ˆ其中 ˆα_i 和 β_i 是绕$T_{g,\ n}$ 中每个孔洞的非平凡环路的通常同伦类，而 ˆγ_i 是环绕标记点的环路的同伦类。
设 $\varphi \in M(g,\ n)$。等价类 φ的一个代表是一个同胚 $\psi: T_{g,\ n} \to T_{g,\ n}$，满足 $\psi(q_i) \in Q_n$，$\forall q_i \in Q_n$。对于每个满足$p(0) = q_0$ 且 $p(1) = \psi(q_0)$的路径 $p: I \to T_{g,\ n}$，我们考虑所诱导的群同态

$$\begin{aligned} \psi_*^p: \pi_1(T_{g,n}, q_0) &\longrightarrow \pi_1(T_{g,n}, q_0) \\ [\alpha] &\longmapsto \left[p(\psi \circ \alpha)p^{-1}\right] \end{aligned}$$

其中，路径的并置表示路径的乘积，而 p^{-1} 表示逆路径 $p^{-1}(t) = p(1-t)$。我们注意到，对路径 p 的不同选择会得到共轭的诱导映射。事实上，设 p、p': $I \to T_{g,\ n}$是两条路径，使得 $p(0) = p'(0) = q_0$ 且 $p(1) = p'(1) = \psi(q_0)$。那么：

$$\left[p'p^{-1}\right]\left[p(\psi \circ \alpha)p^{-1}\right]\left[p'p^{-1}\right]^{-1} = \left[p'(\psi \circ \alpha)\left(p'\right)^{-1}\right]$$

换言之， ψ_*^p 在 Out($\pi_1(T_{g,n}, q_0)$) 中的类，即$\pi_1(T_{g,n}, q_0)$的外自同构群，与路径 p 的选择无关，因此我们可以直接将其记为 ψ_*。最后， ψ_*只取决于 ψ的同伦类， $\varphi \in M(g,n)$，这使我们可以写作 $\varphi_* := \psi_* \in \mathrm{Out}(\pi_1(T_{g,n}, q_0))$。

主要结果见下述定理 3.1 和定理 3.3。稍微滥用记号，我们仍将相应同伦类的 $\pi_1(T_{g,n}, q_0)$ 的代表元记为 $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_g, \beta_1, \ldots, \beta_g, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n$。

定理 3.1。 $P(g,n) \to$外自同构群($\pi_1(T_{g,n}, q_0)$) 的自然同态由表 *1*、*2* 和 *3* 描述，其中每一列标记 $P(g,n)$ 的一个生成元（由 $H_{g,n}$ 表示），每一行标记 $\pi_1(T_{g,n}, q_0)$ 的一个生成元（由 $(\star)$ 表示）。表中的空白项表示单位元。表中出现的 $\pi_1(T_{g,n}, q_0)$ 的非生成元元素定义如下：

$$\sigma := \hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1};$$

$$\lambda_i := \left(\prod_{k=j}^{n} \hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1, \quad j := i - 2g + 2, \forall i \in \{2g, \ldots, 2g+n-2\};$$

$$\mu_i := \mu_{2i,2i+2} := \hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, g-2\}.$$

注记 3.2。 表格中的每一项都按以下方式得到：对于$P(g,n)$的每个生成元在外自同构群 $\mathrm{Out}(\pi_1(T_{g,n}, q_0))$中的像（如本节上文所述），我们在 $\mathrm{Aut}(\pi_1(T_{g,n}, q_0))$中选取一个代表；而在给定列的每一项中，我们都填入对应的 $\pi_1(T_{g,n}, q_0)$生成元在该自同构下的像。

最后，我们得到：

定理 3.3。 自然同态 $M(g,n) \to$外自同构群($\pi_1(T_{g,n}, q_0)$) 由表 *1*、*2*、*3* 如前述定理 *3.1* 所述，并且对所有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，由下式给出：

$$\begin{aligned}
\omega_i\colon\ & \hat{\alpha}_k \mapsto \hat{\alpha}_k, \quad k \in \{1, \ldots, g\} \\
& \hat{\beta}_k \mapsto \hat{\beta}_k, \quad k \in \{1, \ldots, g\} \\
& \hat{\gamma}_i \mapsto \hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_{i+1}\hat{\gamma}_i^{-1} \\
& \hat{\gamma}_{i+1} \mapsto \hat{\gamma}_i \\
& \hat{\gamma}_j \mapsto \hat{\gamma}_j \quad j \notin \{i, i+1\}
\end{aligned}$$

证明 该结果由注释 2.4、定理 3.1 和 [1], 推论 1.8.3 得出。 □

	a_1	a_2	a_{2g}	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_{2g+n-2}
$\hat{\alpha}_1$			$\lambda_{2g}^{-1}\hat{\alpha}_1\lambda_{2g}$	$\cdots$	$\lambda_i^{-1}\hat{\alpha}_1\lambda_i$	$\cdots$	$\lambda_{2g+n-2}^{-1}\hat{\alpha}_1\lambda_{2g+n-2}$
$\hat{\alpha}_2$		$\sigma\hat{\alpha}_2\sigma^{-1}$					
$\vdots$							
$\hat{\alpha}_g$							
$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1$	$\sigma\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_1\lambda_{2g}$	$\cdots$	$\hat{\beta}_1\lambda_i$	$\cdots$	$\hat{\beta}_1\lambda_{2g+n-2}$
$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_2\sigma^{-1}$					
$\vdots$							
$\hat{\beta}_g$							
$\hat{\gamma}_1$							
$\hat{\gamma}_2$			$\lambda_{2g}^{-1}\hat{\gamma}_2\lambda_{2g}$				
$\vdots$			$\vdots$	$\ddots$			
$\hat{\gamma}_j$			$\vdots$		$\lambda_i^{-1}\hat{\gamma}_j\lambda_i$		
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	
$\hat{\gamma}_n$			$\lambda_{2g}^{-1}\hat{\gamma}_n\lambda_{2g}$	$\cdots$	$\lambda_i^{-1}\hat{\gamma}_n\lambda_i$	$\cdots$	$\lambda_{2g+n-2}^{-1}\hat{\gamma}_n\lambda_{2g+n-2}$

表1：同态 $P(g,\ n) \to$外自同构群$(\pi_1(T_{g,\ n},\ q_0))$. (i)

	b	b_1	$\cdots$	b_i	$\cdots$	b_{g-1}
$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_1\hat{}$					
$\hat{\alpha}_2$	β_1^{-1}	$\hat{\alpha}_2\hat{}$				
$\vdots$		β_2^{-1}	$\ddots$			
$\hat{\alpha}_{i+1}$				$\hat{\alpha}_{i+1}\hat{}$		
$\vdots$				β_{i+1}^{-1}	$\ddots$	
$\hat{\alpha}_g$						$\hat{\alpha}_g\hat{\beta}_g^{-1}$
$\hat{\beta}_1$						
$\vdots$						
$\hat{\beta}_g$						
$\hat{\gamma}_1$						
$\vdots$						
$\hat{\gamma}_n$						

表 2：同态 $P(g,\ \ n) \to$外自同构群$(\pi_1(T_{g,\ n},\ q_0))$。(ii)

	$c_{1,2}$	$c_{2,4}$	$\cdots$	$\cdots$	$c_{2i,2i+2}$	$\cdots$	$\cdots$	$c_{2g-4,2g-2}$	$d_1,\ldots,d_{n-1}$
$\hat{\alpha}_1$									
$\hat{\alpha}_2$									
$\hat{\alpha}_3$		$\mu_1\hat{\alpha}_3\mu_1^{-1}$							
$\vdots$			$\ddots$						
$\vdots$				$\ddots$					
$\hat{\alpha}_{i+2}$					$\mu_i\hat{\alpha}_{i+2}\mu_i^{-1}$				
$\vdots$						$\ddots$			
$\vdots$							$\ddots$		
$\hat{\alpha}_g$								$\mu_{g-2}\hat{\alpha}_g\mu_{g-2}^{-1}$	
$\hat{\beta}_1$									
$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2$	$\mu_1\hat{\beta}_2$							
$\hat{\beta}_3$		$\hat{\beta_3\mu_1^{-1}}$	$\ddots$						
$\vdots$			$\ddots$	$\ddots$					
$\hat{\beta}_{i+1}$				$\ddots$	$\mu_i\hat{\beta}_{i+1}$				
$\hat{\beta_{i+2}}$					$\hat{\beta_{i+2}\mu_i^{-1}}$	$\ddots$			
$\vdots$						$\ddots$	$\ddots$		
$\hat{\beta}_{g-1}$							$\ddots$	$\mu_{g-2}\hat{\beta}_{g-1}$	
$\hat{\beta}_g$								$\hat{\beta_g\mu_{g-2}^{-1}}$	
$\hat{\gamma}_1$									
$\vdots$									
$\hat{\gamma}_n$									

表3：同态 $P(g,\ n)\ \rightarrow$外自同构群$(\pi_1(T_{g,\ n},\ q_0))$. (iii)

4 - 定理 3.1 的证明

每个小节都以所考察的生成元命名。所有引用的图示都列在下方。在图中，路径的乘积用 $*$ 表示，同伦用 $\sim$ 表示。我们还要重申，选择的是向右扭转。

Dehn 扭转仅对与被扭转的简单闭曲线横截相交的曲线产生非平凡作用；这些正是每个小节中需要计算的所有像。

4.1 - a_1

$\hat{}$ 曲线 α_1 仅与 β_1 横截相交。图2展示了扭转后的像，以及使我们能够写出下式的同伦：

$$a_1(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1$$

我们验证基本群的唯一关系在 a_1 的作用下保持不变。事实上，我们有：

$$\begin{aligned} a_1([\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1]) &= \hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_1^{-1}(\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1)^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1} \\ &= [\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1]. \end{aligned}$$

4.2 - a_2

$\hat{}\,\hat{}$ 曲线 α_2 与三个不同的环路横截相交： β_1, β_2 和 $\hat{}\alpha_2$。令 $\sigma = \hat{}\alpha_2^{-1}\hat{}\beta_1\hat{}\alpha_1\,\hat{}\beta_1^{-1}$为图 3 中构造的环路。由此可计算如下结果（参见图 4、5 和 6）：

$$\begin{aligned} a_2(\hat{\beta}_1) &= \sigma\hat{\beta}_1 \\ &= \hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\beta}_1 \\ &= \hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(\hat{\beta}_2) &= \hat{\beta}_2\sigma^{-1} \\ &= \hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(\hat{\alpha}_2) &= \sigma\hat{\alpha}_2\sigma^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2(\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1})^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2. \end{aligned}$$

还需要检查基本群的关系是否得到保留:

$$\begin{aligned}
a_2([\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1][\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2]) &= \hat{\alpha}_1(\sigma\hat{\beta}_1)\hat{\alpha}_1^{-1}(\sigma\hat{\beta}_1)^{-1}(\sigma\hat{\alpha}_2\sigma^{-1})(\hat{\beta}_2\sigma^{-1})(\sigma\hat{\alpha}_2\sigma^{-1})^{-1}(\hat{\beta}_2\sigma^{-1})^{-1}\\
&= \hat{\alpha}_1\sigma\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1}\cancel{\sigma^{-1}\sigma}\,\hat{\alpha}_2\sigma^{-1}\hat{\beta}_2\cancel{\sigma^{-1}\sigma}\,\hat{\alpha}_2^{-1}\cancel{\sigma^{-1}\sigma}\,\hat{\beta}_2^{-1}\\
&= \hat{\alpha}_1\sigma\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2\sigma^{-1}\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_2^{-1}\\
&= \hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1\cancel{\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\beta}_1}\,\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_2^{-1}\\
&= \hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_1\cancel{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_1^{-1}}\,\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_2^{-1}\\
&= \hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2^{-1}\cancel{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_1^{-1}}\,\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_2^{-1}\\
&= \hat{\alpha}_1\cancel{\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\alpha}_2}\,\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_2^{-1}\\
&= [\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1][\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2].
\end{aligned}$$

4.3 - a_i, 对于所有 $i \in \{2g,\dots,2g+n-2\}$

ˆ 每条曲线 α_i 与 β_1横截相交，ˆα_1 以及每个 ˆγ_k，使得 $k \in \{j := i-2g+2,\dots,n\}$。在图7中，我们构造这些环路:

$$\lambda_i = \left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1 \quad j := i-2g+2,\ \forall i \in \{2g,\dots,2g+n-2\}.$$

图8、图9和图10展示了如何得到:

$$\begin{aligned}
a_i(\hat{\beta}_1) &= \hat{\beta}_1\lambda_i\\
&= \hat{\beta}_1\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_i(\hat{\alpha}_1) &= \lambda_i^{-1}\hat{\alpha}_1\lambda_i\\
&= \left(\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1\right)^{-1}\hat{\alpha}_1\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1\\
&= \hat{\alpha}_1^{-1}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)^{-1}\hat{\alpha}_1\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} a_i(\hat{\gamma}_k) &= \lambda_i^{-1}\hat{\gamma}_k\lambda_i \\ &= \left(\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1\right)^{-1}\hat{\gamma}_k\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1 \\ &= \hat{\alpha}_1^{-1}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)^{-1}\hat{\gamma}_k\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1, \quad \forall k \in \{j,\dots,n\},\, j = i-2g+2. \end{aligned}$$

还需要检查对于所有 $i \in\{2g,\dots,2g+n-2\}$，基本群的关系是否得以保持:

$$\begin{aligned} a_i([\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1]) &= (\lambda_i^{-1}\hat{\alpha}_1\lambda_i)(\hat{\beta}_1\lambda_i)(\lambda_i^{-1}\hat{\alpha}_1\lambda_i)^{-1}(\hat{\beta}_1\lambda_i)^{-1} \\ &= \lambda_i^{-1}\hat{\alpha}_1\lambda_i\hat{\beta}_1\cancel{\lambda_i\lambda_i^{-1}}\hat{\alpha}_1^{-1}\cancel{\lambda_i\lambda_i^{-1}}\hat{\beta}_1^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_1^{-1}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)^{-1}\hat{\alpha}_1\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_1^{-1}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)^{-1}\hat{\alpha}_1\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)[\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_i\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right) &= (\lambda_i^{-1}\hat{\gamma}_j\lambda_i)(\lambda_i^{-1}\hat{\gamma}_{j+1}\lambda_i)\dots(\lambda_i^{-1}\hat{\gamma}_n\lambda_i) \\ &= \lambda_i^{-1}\hat{\gamma}_j\cancel{\lambda_i\lambda_i^{-1}}\hat{\gamma}_{j+1}\cancel{\lambda_i}\dots\cancel{\lambda_i^{-1}}\hat{\gamma}_n\lambda_i \\ &= \lambda_i^{-1}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\lambda_i \\ &= \hat{\alpha}_1^{-1}\cancel{\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)^{-1}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1 \\ &= \left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)^{-1}\hat{\alpha}_1^{-1}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)\hat{\alpha}_1. \end{aligned}$$

因此，我们得到:

$$a_i\left(\left(\prod_{k=1}^{g}[\hat{\alpha}_k,\hat{\beta}_k]\right)\prod_{k=1}^{n}\hat{\gamma}_k\right) = \left(\left(\prod_{k=1}^{g}[\hat{\alpha}_k,\hat{\beta}_k]\right)\prod_{k=1}^{n}\hat{\gamma}_k\right)^{\hat{\alpha}_1^{-1}\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)^{-1}\hat{\alpha}_1\left(\prod_{k=j}^{n}\hat{\gamma}_k\right)} = 1.$$

（在最后一行中，我们使用指数约定表示共轭： $x^y := yxy^{-1}$）。

4.4 - b

曲线 β 仅与 $\hat{\alpha}_1$ 横截相交。图 11 描述了像曲线 $b(\hat{\alpha}_1)$ 以及使我们能够写出下式的同伦：

$$b(\hat{\alpha}_1) = \hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1}.$$

还需检查基本群的关系是否保持不变：

$$\begin{aligned} b([\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1]) &= \hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1}\hat{\beta}_1(\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1^{-1})^{-1}\hat{\beta}_1^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1^{-1}\hat{\beta}_1^{-1} \\ &= [\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1]. \end{aligned}$$

4.5 - b_i, 对于所有 $i \in \{1, \ldots, g-1\}$

每条曲线 β_i 仅与 $\hat{\alpha}_{i+1}$ 横截相交。图 12 描述了扭转的像以及使我们能够写出下式的同伦：

$$b_i(\hat{\alpha}_{i+1}) = \hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}.$$

还需检查基本群的关系是否保持不变：

$$\begin{aligned} b_i([\hat{\alpha}_{i+1}, \hat{\beta}_{i+1}]) &= \hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}(\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1})^{-1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1} \\ &= [\hat{\alpha}_{i+1}, \hat{\beta}_{i+1}]. \end{aligned}$$

4.6- $c_{1,2}$

$\hat{}$ 曲线$\gamma_{1,\ 2}$ 仅横向相交于 β_{2}。图 13 表示扭转和使我们能够写出以下内容的同伦：

$$c_{1,2}(\hat{\beta}_2) = \hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2.$$

仍需检查基本群的关系是否保持不变：

$$\begin{aligned} c_{1,2}([\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2]) &= \hat{\alpha}_2\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_2^{-1}(\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2)^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_2\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_2^{-1}\hat{\beta}_2^{-1} \\ &= [\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2]. \end{aligned}$$

4.7 - $c_{2i,\ 2i+2}$, 对于所有 $i \in \{1, \ldots, g-2\}$

ˆ ˆ 对于每个 $i \in \{1, \ldots, g-2\}$, 曲线 $\gamma_{2i,2i+2}$ 仅与 β_{i+1}, β_{i+2} 和 ˆα_{i+2} 横截相交。图14展示了如何得到:

$$\mu_{2i,2i+2} = \hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1} \quad \forall i \in \{1, \ldots, g-2\}.$$

通过图15、图16和图17, 我们计算得出:

$$\begin{aligned} c_{2i,2i+2}(\hat{\beta}_{i+1}) &= \mu_{2i,2i+2}\hat{\beta}_{i+1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{2i,2i+2}(\hat{\beta}_{i+2}) &= \hat{\beta}_{i+2}\mu_{2i,2i+2}^{-1} \\ &= \hat{\beta}_{i+2}(\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1})^{-1} \\ &= \hat{\beta}_{i+2}\hat{\beta}i+1\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\alpha}_{i+2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{2i,2i+2}(\hat{\alpha}_{i+2}) &= \mu_{2i,2i+2}\hat{\alpha}_{i+2}\mu_{2i,2i+2}^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\alpha}_{i+1}(\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1})^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\alpha}_{i+2}\hat{\beta}i+1\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\alpha}_{i+2}. \end{aligned}$$

接下来需要验证基本群的关系保持不变:

$$\begin{aligned} c_{2i,2i+2}([\hat{\alpha}_{i+1}, \hat{\beta}_{i+1}]) &= \hat{\alpha}_{i+1}(\mu_{2i,2i+2}\hat{\beta}_{i+1})\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}(\mu_{2i,2i+2}\hat{\beta}_{i+1})^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}\cancel{\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}}\,\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\mu_{2i,2i+2}^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}\cancel{\hat{\alpha}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}}\,\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\mu_{2i,2i+2}^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\cancel{\hat{\beta}_{i+1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}}\,\mu_{2i,2i+2}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{2i,2i+2}([\hat{\alpha}_{i+2}, \hat{\beta}_{i+2}]) &= (\mu_{2i,2i+2}\hat{\alpha}_{i+2}\mu_{2i,2i+2}^{-1})(\hat{\beta}_{i+2}\mu_{2i,2i+2}^{-1})(\mu_{2i,2i+2}\hat{\alpha}_{i+2}\mu_{2i,2i+2})^{-1}(\hat{\beta}_{i+2}\mu_{2i,2i+2}^{-1})^{-1} \\ &= \mu_{2i,2i+2}\hat{\alpha}_{i+2}\mu_{2i,2i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+2}\cancel{\mu_{2i,2i+2}^{-1}\mu_{2i,2i+2}}\,\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\cancel{\mu_{2i,2i+2}^{-1}\mu_{2i,2i+2}}\,\hat{\beta}_{i+2}^{-1} \\ &= \mu_{2i,2i+2}\hat{\alpha}_{i+2}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\alpha}_{i+2}\hat{\beta}_{i+2}\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+2}^{-1}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} c_{2i,2i+2}([\hat{\alpha}_{i+1}, \hat{\beta}_{i+1}][\hat{\alpha}_{i+2}, \hat{\beta}_{i+2}]) &= c_{2i,2i+2}([\hat{\alpha}_{i+1}, \hat{\beta}_{i+1}])c_{2i,2i+2}([\hat{\alpha}_{i+2}, \hat{\beta}_{i+2}]) \\ &= \hat{\alpha}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\cancel{\mu_{2i,2i+2}^{-1}\mu_{2i,2i+2}}\,\hat{\alpha}_{i+2}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\alpha}_{i+2}\hat{\beta}_{i+2}\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+2}^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_{i+1}\cancel{\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\alpha}_{i+2}}\hat{\beta}_{i+1}\hat{\alpha}_{i+1}^{-1}\hat{\beta}_{i+1}^{-1}\hat{\alpha}_{i+2}\hat{\beta}_{i+2}\hat{\alpha}_{i+2}^{-1}\hat{\beta}_{i+2}^{-1} \\ &= [\hat{\alpha}_{i+1}, \hat{\beta}_{i+1}][\hat{\alpha}_{i+2}, \hat{\beta}_{i+2}]. \end{aligned}$$

4.8 - $d_1, \ldots, d_{n-1}$

曲线 $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ 与基本群生成元的交集为空，因此无需计算。 $d_1, \ldots, d_{n-1}$ 的作用始终是平凡的。

□

5 - 图示

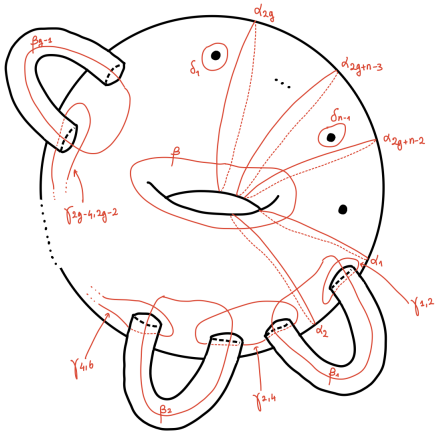
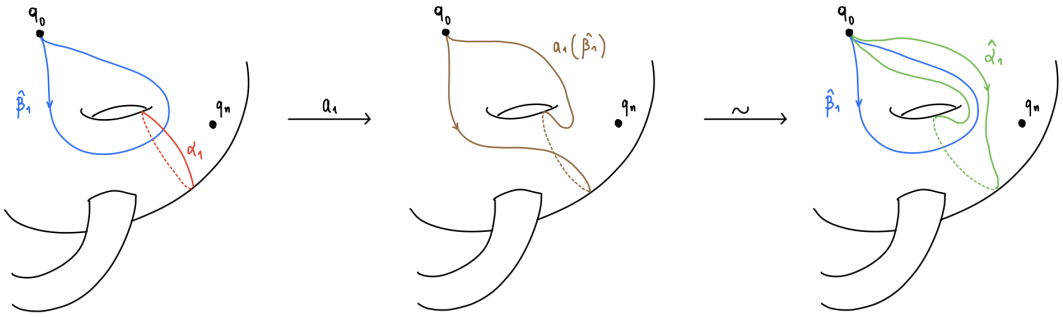


图1：定义集合 $\mathcal{H}_{g,n}$ 的曲线。



ˆ图2： $a_1(\beta_1)$。

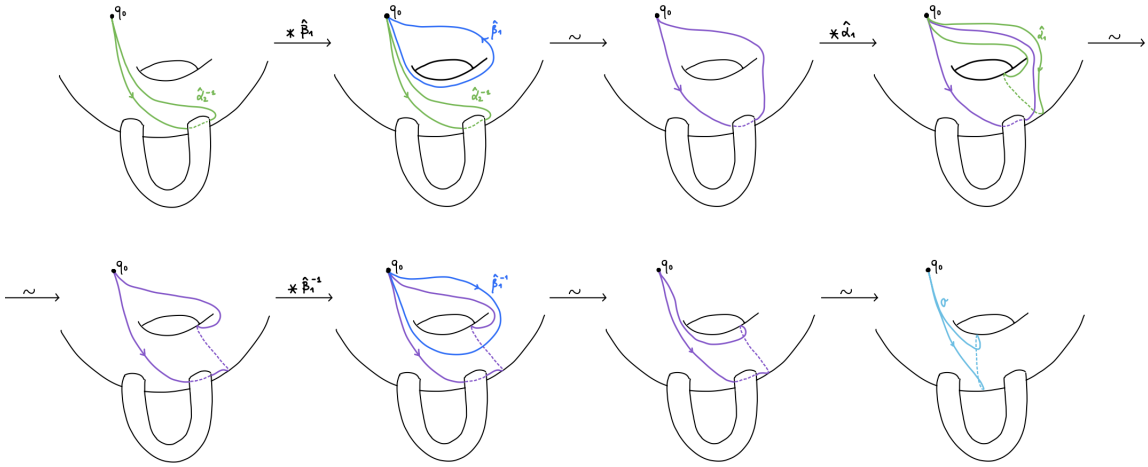
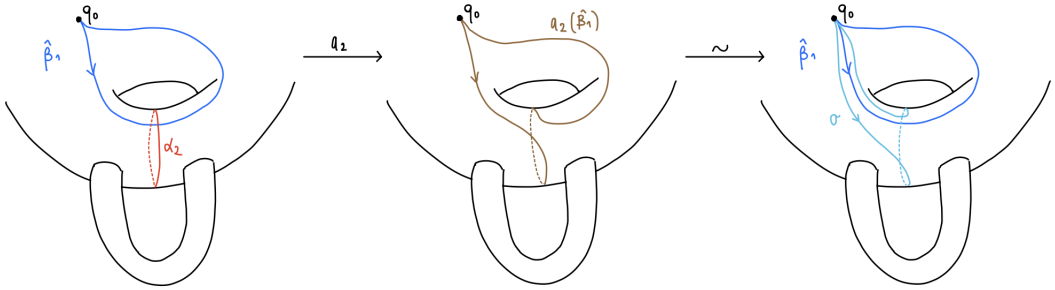
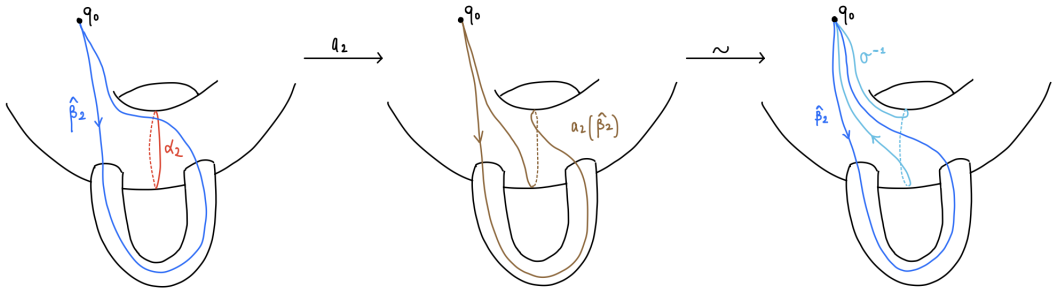


图 3： σ 的构造。



ˆ图 4： $a_2(\beta_1)$。



ˆ图 5： $a_2(\{v2)$。

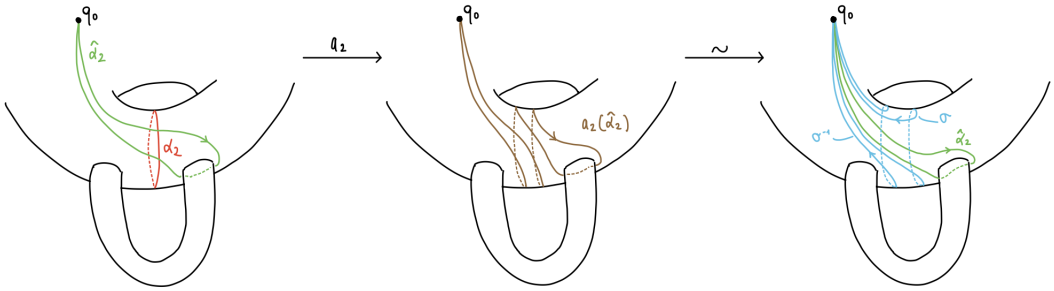


图6： $a_2(\hat{\alpha}_2)$。

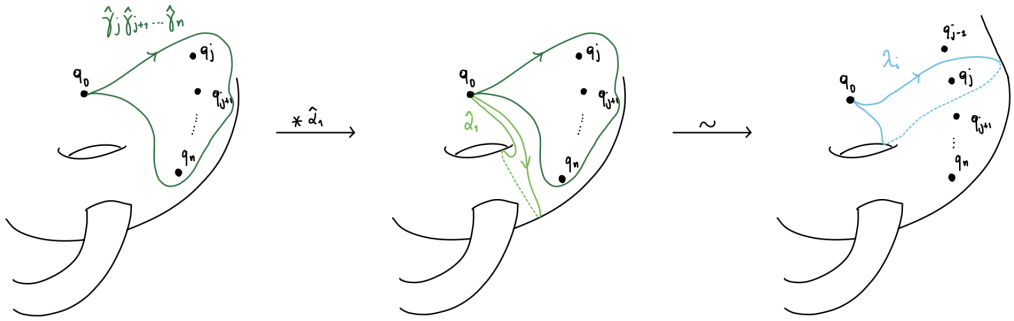
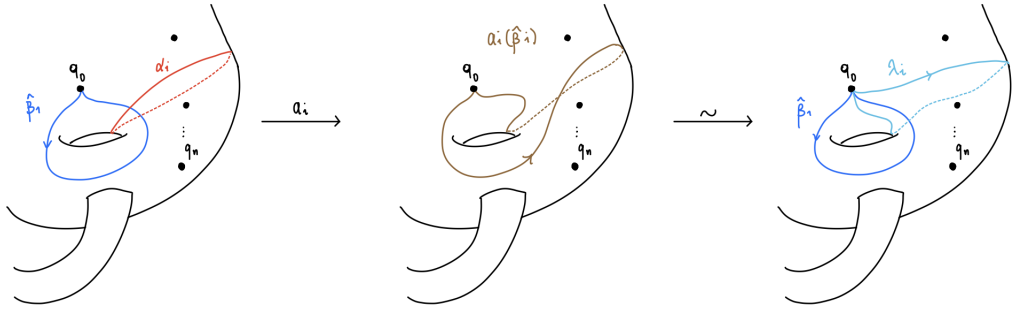


图7： λ_i的构造。



ˆ图8： $a_i(\beta_1)$。



图 9: $a_i(\hat{\alpha}_1)$。

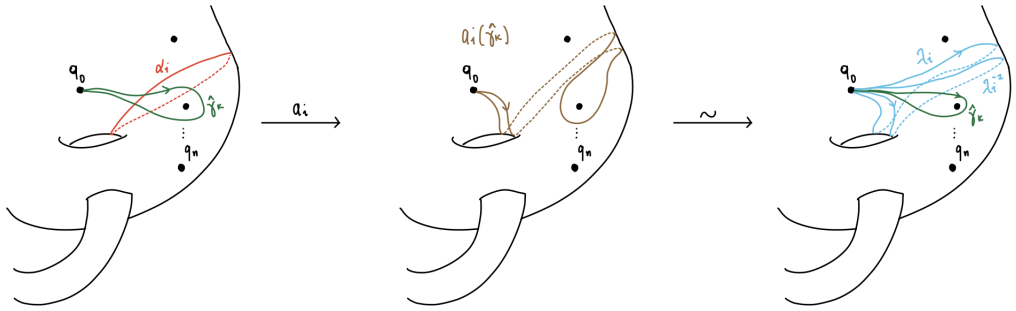


图 10: $a_i(\hat{\gamma}_k), \quad k \in \{j, \ldots, n\}$。

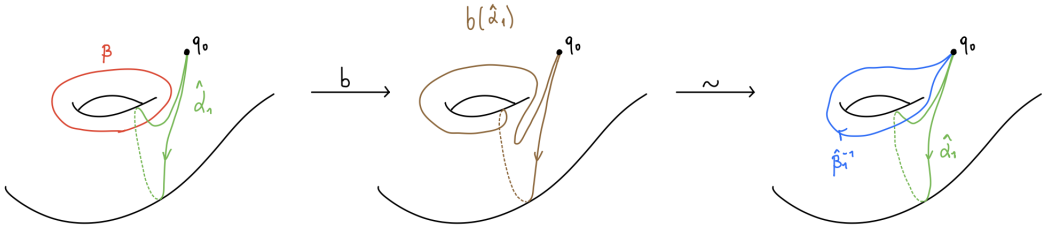


图 11: $b(\hat{\alpha}_1)$。

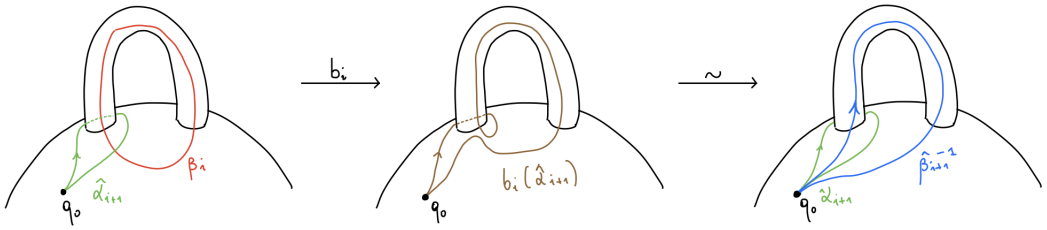


图 12： $b_i(\hat{\alpha}_{i+1})$。

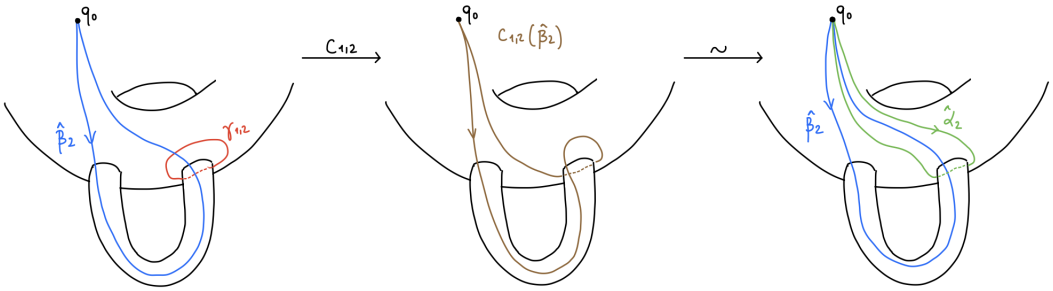


图 13： $c_{1,\ 2}(\beta_2)$。

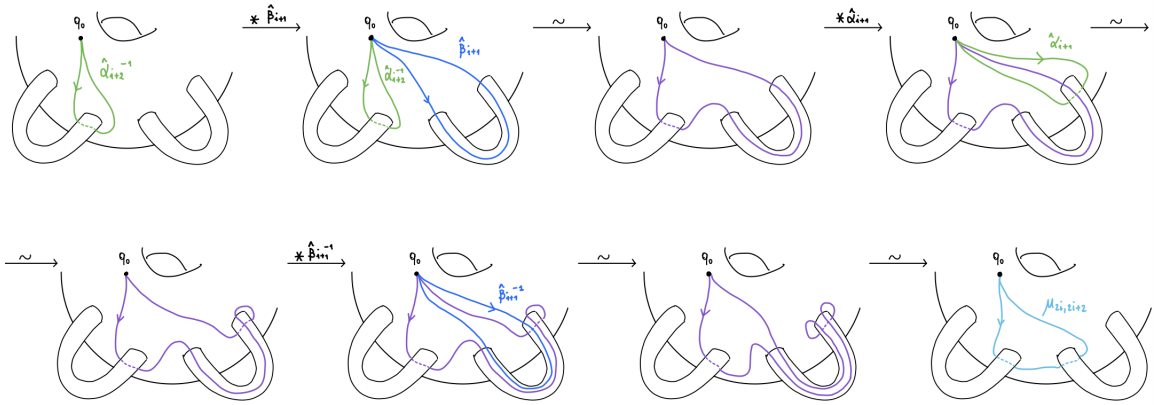
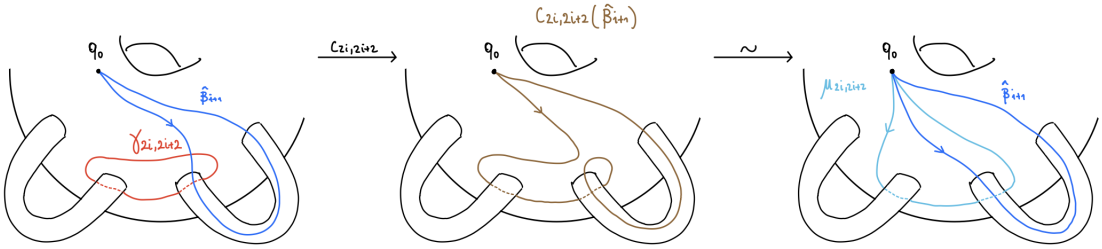
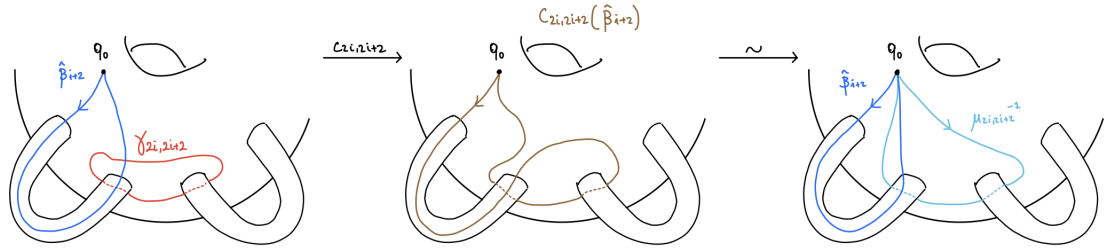


图14：对所有 $i \in \{1, \ldots, g-2\}$，构造 $\mu_{2i,\ 2i+2}$。



ˆ 图15：$c_{2i,\ 2i+2}(\beta_{i+1})$。



ˆ 图16：$c_{2i,\ 2i+2}(\beta_{i+2})$。

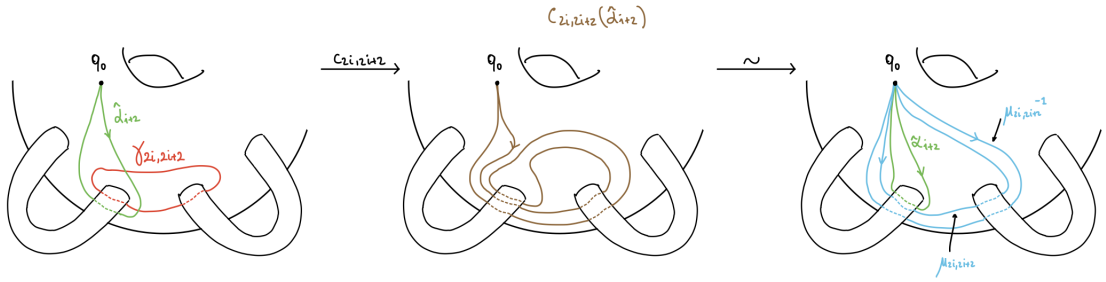


图17：$c_{2i,\ 2i+2}(\hat{\ }\alpha_{i+2})$。

参考文献

[1] J. S. Birman. 辫子、链环与映射类群. Princeton University Press Princeton, N.J, 1974.[2] D. Conti, A. Ghigi, and R. Pignatelli. 曲线作用的拓扑类型. 符号计算期刊, 118:17–31, 2023.[3] B. Farb and D. Margalit. 映射类群入门. Princeton University Press, 2011.[4] S. Gervais. 带有标记点的曲面的映射类群的有限表示.拓扑学, 40(4):703–725, 2001.[5] A. Kuribayashi and H. Kimura. 亏格为五的紧黎曼曲面的自同构群. 代数学杂志, 134(1):80–103, 1990.[6] A. Kuribayashi and I. Kuribayashi. 亏格为三和四的紧黎曼曲面的自同构群. 纯粹与应用代数学杂志, 65(3):277–292, 1990.[7] M. Penegini. 具有 $p_g = q = 2$ 的等变纤维化曲面的分类 . *Col-lectanea mathematica*, 62(3):239–274, 2011.[8] L. Schneps. 曲线模空间中的特殊轨迹。, 第217–275页. Cambridge University Press, 2003.

Luca Da Col的里雅斯特大学,
Via Valerio,12/1，意大利的里雅斯特，邮编34127，电子邮箱:
luca.dacol@phd.units.it