arXiv:2305.04112v1 [stat.ME] 6 May 2023

函数驱动的扩散过程随机波动率模型

Piotr Kokoszka[a*] Neda Mohammadi[a] Haonan Wang[a] Shixuan Wang[b]

[a] 美国科罗拉多州立大学统计系 [b] 英国雷丁大学经济系

摘要

我们提出了一种适用于曲线时间序列的随机波动率模型。该模型受到日内价格曲线动态的启发，这类曲线既表现出日间依赖性，也体现了日内价格演变。我们对曲线进行适当归一化，使其在函数空间中平稳；它们是点对点日收益的函数型类比。曲线间依赖性由潜在自回归建模，曲线内部的行为则由扩散过程建模。我们建立了该模型的性质，并提出了几种估计方法。这些方法由渐近论证加以支持，其中涉及潜在自回归与日内扩散过程之间的相互作用。渐近框架结合了日曲线数量的增加，以及观测每条日曲线所用离散网格的细化。我们推导了日内波动率曲线估计量的一致性收敛速率，以及潜在自回归估计量的渐近正态性。我们还通过对七千多只美国股票的日内价格曲线进行应用，并开展一项具有启发性的模拟研究，进一步探讨和比较这些估计方法。

JEL 分类：C51,C58.

关键词：函数型数据分析、日内价格曲线、Itˆo 扩散过程、随机波动率。

1 引言

时变波动率是金融时间序列的主要特征之一。价格演变的扩散过程模型已有百余年的应用历史，或许始于巴舍利耶（1900），并自 20 世纪 70 年代以来得到稳健发展。本文提出一种模型，将用于日内价格演变的扩散过程模型与用于刻画日间依赖性的随机波动率范式相结合。我们结合了时间序列分析、函数型数据分析和随机微积分的工具。

*通讯作者。电子邮箱：Piotr.Kokoszka@colostate.edu

单变量条件异方差的概念至少可追溯到 Engle（1982），他提出了自回归条件异方差（ARCH）模型；以及 Bollerslev（1986）的重要贡献，他提出了广义自回归条件异方差（GARCH 模型）。此后，Bollerslev等人 （1988）、Bollerslev（1990）、Engle 和 Kroner（1995）、Engle（2002）等许多学者运用 GARCH 模型分析多变量异方差时间序列。Bauwens等人 （2006）以及 Silvennoinen 和 Ter¨asvirta（2009）对多变量 GARCH 模型作了概述。Vrontos等人（2003）探讨了多变量 GARCH 模型的贝叶斯推断。H¨ormann等人 （2013）在函数数据分析（FDA）的框架下研究条件异方差。具体而言，他们提出了 ARCH 模型的函数型版本，Aue等人（2017）则将其扩展为函数型 GARCH 模型。上述所有模型的共同特征是，随机波动率相对于过去事件可测；也就是说，给定过去观测值 后，波动率过程是确定性的。为说明这一点，考虑基本的单变量 ARCH(1) 模型。

$$\begin{cases} r_i &= g_i w_i, \quad w_i \sim \text{ iid } N(0,1); \\ g_i^2 &= \eta_1 r_{i-1}^2 + \eta_0, \end{cases}$$

当前波动率 g_i^2 是先前观测值 r_{i-1}的函数。更复杂的函数会产生 ARCH 家族中的各种模型。刻画波动率随机性的另一种方法是所谓的随机波动率（SV）模型。与 ARCH 型模型不同，在给定过去事件的条件下，波动率过程并非完全可观测。最简单的单变量随机波动率模型形式为

$$\begin{cases} r_i &= g_i w_i, \quad w_i \sim \text{ iid } N(0,\sigma_w^2); \\ g_i &= \exp\left\{\varphi \log g_{i-1} + \varepsilon_i\right\}, \quad \varepsilon_i \sim \text{ iid } N(0,\sigma_\varepsilon^2), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 φ 是满足 $|\varphi| < 1$的参数。类比线性时间序列模型，GARCH 模型类似于 ARMA 模型，而随机波动率模型则类似于状态空间模型。随机波动率模型由 Taylor（1982）提出，随后由 Taylor（1994）、Ghysels 等 （1996）、Shephard（1996）和 Taylor（2008）进一步发展。Harvey 等 （1994）、Danielsson（1998）以及 Asai 等 （2006）将随机波动率模型扩展到多变量情形。Yu 和 Meyer（2006）研究了多变量随机波动率模型的贝叶斯方法。ARCH 和 SV 建模领域已有数千篇研究成果，也出版了若干优秀专著。我们仅列出部分文献，重点关注多变量模型。我们提出一种函数型 SV 模型。

在最简单的形式下，我们的模型由类似于方程 (1.1) 的方程给出：

$$\begin{cases} R_i(t) = & g_i \int_0^t \sigma(u) dW_i(u), \quad t \in [0,1], \\ \log g_i = & \varphi \log g_{i-1} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \text{ iid } \mathcal{WN}(0,\sigma_\varepsilon^2), \quad i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{WN}(0,\sigma_\varepsilon^2)$ 表示均值为零且二阶矩有限的白噪声 σ_ε^2。$W_i(\cdot)$s 是相互独立的标准布朗运动，且独立于误差序列

$\{\varepsilon_i\}$。随机系数 g_i 几乎必然为正， $\sigma(\cdot)$ 是一个非参数函数，满足 $\|\sigma\|_\infty < \infty$ ，而 φ 是一个标量，满足 $|\varphi| < 1$；完整讨论见第3节。在 (1.2) 中令 $t = 1$ ，可得

$$R_i(1) = g_i \int_0^1 \sigma(u) dW_i(u),$$

从而得到单变量模型 (1.1)，其中 $r_i = R_i(1)$、 $w_i = \int_0^1 \sigma(u) dW_i(u)$ 和 $\sigma_w^2 = \int_0^1 \sigma^2(u) du$。这一性质表明，所提出的模型 (1.2) 扩展了成熟的单变量模型 (1.1)。

促使我们建立模型 (1.2) 的数据，是经过适当变换后形成平稳曲线序列的日内价格曲线。详细定义见第 5 节。基本上，$R_i(t)$ 是交易日 i 截至日内时刻 t的累积收益。如果将交易所开盘时间重新缩放到单位区间上，那么 $R_i(1)$ 就是第 i天的收益；不同之处在于，我们将收盘价与开盘价进行比较，而不是与前一天的收盘价比较。(1.2) 中第二个方程里的 AR(1) 形式刻画了每日曲线之间的依赖结构。该依赖的强度由 φ 或更多参数量化，详见第 4 节。M¨uller 等人(2011) 提出了一种利用扩散过程对波动率建模的框架，但假设曲线是独立同分布的。人们普遍认为，价格数据存在日与日之间的依赖关系。Jang 等人(2022) 也研究了不相关的随机波动率曲线，并通过基展开进行降维。然而，这种技术忽略了样本路径的粗糙性，而这对价格过程而言是一项关键性质；连续时间价格模型是路径处处不可微的扩散过程。Chong 等人(2022) 将粗糙性视为金融连续时间模型的一项关键特征，并提出由分数布朗运动驱动的随机波动率模型，其 Hurst 指数为 $H < 1/2$。他们的推断以 Hurst 指数 H 为目标，并针对该参数建立了极小极大理论。他们的工作补充了 Rosenbaum (2008) 的研究，后者聚焦于一个类似的、针对 $H > 1/2$ 的推断问题。Rosenbaum (2008) 和 Chong 等人(2022) 未涉及曲线之间的动态依赖，因为他们考虑的是单个时间区间。

所提出的模型具有全面性：它通过潜在自回归刻画曲线之间的依赖关系，通过关于布朗运动的随机积分刻画样本路径的粗糙性，并通过乘积$g_i\sigma(\cdot)$刻画日内波动率，其中 g_i 呈现日与日之间的依赖关系。我们的主要目标是为模型方程解的存在性确立条件，并对模型参数进行推断；这些参数包括自回归参数和函数 $\sigma(\cdot)$。因此，这是一个参数—非参数估计问题，涉及以往研究中未曾遇到的挑战，详见第3节。估计时必须考虑到每日轨迹是在一天内的离散时点观测到的这一事实。按 i （天）索引的重复观测表明，可以从函数数据分析的角度处理这一问题。然而，轨迹的粗糙性使得假设轨迹光滑的成熟函数数据分析方法不那么适用。

关于粗糙轨迹已有大量研究，典型模型假设观测到的是光滑轨迹，并伴有独立同分布、随机散布的测量误差，参见 Yao 等（2005）、Hall 等（2006）以及 Li 和 Hsing（2010）等众多文献。这些方法适用于生物医学数据。然而，对于连续时间价格数据，粗糙性是一种基本属性，由扩散过程建模，而非由完全随机的误差造成。我们的策略是对（潜在的）二次变差过程进行近似，该过程通常满足某种所需的正则性。利用近似的二次变差过程替代隐藏曲线，为采用函数型数据分析技术铺平了道路。在步长 Δ 减小（例如）且样本量 N增大的条件下，我们研究了已实现二次变差过程的一致性，以及相应估计对象的一致性。Galbraith等（2015）研究了 GARCH 模型，并提出一种基于已实现二次变差过程的论证。由于 GARCH 模型的性质，Galbraith等（2015）不要求已实现二次变差过程具有一致性，而是将由此产生的偏差视为噪声项。这使他们的方法与本研究有了显著区别。

本文其余部分安排如下。第2节为了便于参考并统一符号和术语，介绍了与随机积分相关的信息。第3节专门解释所提出的模型及其估计方法，重点讨论最简单的一阶潜在自回归情形，该情形已包含模型和估计方法的关键特征，使我们能够集中研究这些特征。第4节将其扩展至 AR(p) 潜在自回归。第5节介绍了该模型在美国日内股票价格中的应用以及一项模拟研究。第6节通过简要总结并讨论未来研究方向作出结论。在线补充材料包含第3节和第4节中各项结果的证明，以及与第5节实证分析相关的其他信息。

2 预备知识

为便于参考，本节汇总与 Itˆo 扩散过程相关的有用事实。更多详细信息可参见 Øksendal（2003）、A¨ıt-Sahalia 和 Jacod（2014年）以及 Karatzas 和 Shreve（1991）等专著。设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为基础概率空间。我们将 $\mathbb{R}$–值 Itˆo 扩散（简称扩散过程）定义为

$$\begin{aligned} dX(t) =& \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \qquad 0 < t, \\ X(t) =& X(0), \qquad t = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，W 表示标准布朗运动。关于 W 的积分应理解为随机 Itˆo 积分。我们假设初始分布与由 $\{W(t)\}_{t\geq 0}$生成的 σ-代数 $\mathcal{F}_\infty$ 相互独立。函数 $\mu(\cdot,\cdot)$（即所谓的漂移（黏性））以及函数 $\sigma(\cdot,\cdot)$（即所谓的扩散过程（波动率））均为博雷尔可测。以下定理是 Øksendal（2003）中定理 5.2.1 的推论，它给出了保证满足随机微分方程（2.1）的过程 X 存在且唯一的充分条件。

THEOREM 2.1 (EXISTENCE AND UNIQUENESS) 设 T 为正数，函数 $\mu(\cdot,\cdot)$: $[0,T]\times\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ 和 $\sigma(\cdot,\cdot)$: $[0,T]\times\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ 为满足线性增长条件的可测函数

$$|\mu(t,x)|+|\sigma(t,x)|\leq L(1+|x|),\quad x\in\mathbb{R},\ t\in[0,T], \tag{2.2}$$

以及空间变量上的利普希茨连续性，即。

$$|\mu(t,x)|-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq L|x-y|,\quad x,y\in\mathbb{R},\ t\in[0,T], \tag{2.3}$$

对某个常数 $L>0$。此外，设 $X(0)$ 为一个与由 $\{W(t)\}_{t\geq0}$ 生成的σ代数 $\mathcal{F}_\infty$ 独立的随机变量，且满足 $\mathbb{E}\left[X(0)^2\right]<\infty$。那么，随机微分方程 (2.1) 存在唯一的解，其轨迹关于时间连续，并且适应于由 $X(0)$ 和标准布朗运动$\{W(s)\}_{s\leq t}$生成的滤过 $\left\{\mathcal{F}_t^{X_0}\right\}$ 。此外，

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T|X(t)|^2dt\right]<\infty.$$

现在，我们介绍 Itˆo 等距公式，这是随机微积分中最有用的结果之一。定义 $\mathcal{V}=\mathcal{V}(S,T)$ 为函数类。

$$f:[0,\infty)\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R},$$

满足

(i) $(t,\omega)\ \mapsto f(t,\omega)$ 是 $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$可测的，其中 $\mathcal{B}$表示 $[0,\infty$ 上的博雷尔 σ–代数),

(ii) $f(t,\ \cdot)$ 是 $\mathcal{F}_t$适应的，其中 $\mathcal{F}_t$是由 $\{W(s)\}_{s\leq t}$ 生成的 σ–代数,

(iii) $\mathbb{E}\left[\int_S^T|f(t,\omega)|^2dt\right]<\infty.$

若 $f\in\mathcal{V}$，则根据 Øksendal（2003）中的推论 3.1.7,

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)dW(t)\right]^2=\mathbb{E}\left[\int_S^T|f(t,\omega)|^2dt\right].$$

二次变差过程及其经验对应物（又称实现二次变差过程）在 Itˆo 半鞅研究中发挥着基础性作用。我们的推断程序以及由此得到的一致性结果，在很大程度上依赖于已实现二次变差的计算及其向真实过程的收敛。设 $X(\cdot)$ 满足模型 (2.1)，且 $\{t_k\}$ 是单位区间上步长为 Δ 的等距分割。在点 t 处的实现二次变差过程定义为以下增量平方之和:

$$\sum_k|X(t_k)-X(t_{k-1})|^2\mathbb{I}\{t_k\leq t\},\quad t\in[0,1]. \tag{2.4}$$

上述求和与二次变差过程密切相关，后者记为 $\langle X, X\rangle_t$, $t \in [0,1]$。根据 Karatzas 和 Shreve（1991）中的命题 3.2.17，在定理 2.1 的条件下，过程 $\langle X, X\rangle_t$ 可定义为

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \sigma^2(u, X(u))du, \quad t \in [0,1]. \tag{2.5}$$

现在我们可以给出定理 2.2，该定理考察已实现二次变差向其理论对应量的收敛 $\langle X, X\rangle_t$；关于更一般的表述，参见 A¨ıt-Sahaliaand Jacod (2014) 中的定理 1.14 和关系式 (3.23)。

THEOREM 2.2 假设定理 *2.1* 的条件成立，并设 $\Pi_N = \{t_{N,k}\}$ 为单位区间的一列划分，其步长为 $\Delta(N)$，且随着 N 增大趋于零。那么，实现二次变差过程依概率一致收敛于二次变差过程，即当 $\Delta(N) \longrightarrow 0$

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\sum_k |X(t_{N,k}) - X(t_{N,k-1})|^2 \mathbb{I}\{t_{N,k} \le t\} - \int_0^t \sigma^2(u, X(u))du\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \tag{2.6}$$

其中 $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ 表示依概率收敛。

我们以陈述一个时间变换结果来结束本节，该结果是 Dambis–Dubins–Schwarz 定理的推论。该定理将任意 连续局部鞅表示为布朗运动的时间变换，参见 Le Gall (2016) 第 5.3.2 节。

COROLLARY 2.1 假设定理 *2.1* 中的设定，并令漂移函数等于零，$\mu(\cdot,\cdot) = 0$。则 $X(t)$ 与 $W(\langle X, X\rangle_t)$同分布，即

$$\left\{\int_0^t \sigma(u, X(u))dW(u),\ t \in [0,1]\right\} \overset{d}{=} \left\{W\left(\int_0^t \sigma^2(u, X(u))du\right),\ t \in [0,1]\right\},$$

其中，分布相等关系成立于 $C([0,1])$ 连续函数空间中。

3 一阶模型的开发与估计

本节重点讨论引言中由方程 (1.2) 定义的模型。该模型已包含所提出框架中最核心的要素，因此更容易阐释其性质和估计相关的重要问题。第 4 节将介绍向高阶潜在自回归的扩展。为便于参考，我们将方程 (1.2) 列示如下：

$$R_i(t) = g_i \int_0^t \sigma(u)dW_i(u), \quad t \in [0,1], \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

$$\log g_i = \varphi \log g_{i-1} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \text{ iid } \mathcal{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2), \tag{3.2}$$

其中，$\mathcal{WN}(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$ 表示均值为零且具有有限二阶矩 σ_ε^2 的非确定性白噪声。

我们将采用以下假设。如下文所述，并非每个结果都需要所有这些假设；但只要满足下列所有条件，所有结果均成立。

1. 函数 $\sigma(\cdot)$ 非负且为确定性函数，并且 $\sup_{0\le t\le 1}\sigma(t) = \|\sigma\|_\infty < \infty$,

2. 标量系数 g_i 以概率 1 非负。该假设等价于令 $g_i = \exp(x_i)$，其中 $\{x_i\}$ 是实值随机序列，并以 $\{x_i\}$ 表述 AR(1) 模型 (3.2),

3. 随机过程 $W_i(\cdot)$ 是相互独立的标准布朗运动（维纳过程），

4. 序列 $\{W_i\}$ 和 $\{g_i\}$ 相互独立,

5. (3.2) 中的自回归系数 φ 满足 $|\varphi| < 1$,

6. 函数 $\sigma(t)$, $t \in [0,1]$ 相对于勒贝格测度几乎处处非零，即 $\mathcal{L}eb\{t:\ \sigma(t) = 0\} = 0$, 其中 $\mathcal{L}eb$ 表示限制在单位区间 $[0,1]$ 上的勒贝格测度。

7. $\mathbb{E}(\varepsilon_0^4) = \eta\sigma_\varepsilon^2 < \infty$。

Remark 3.1 假设 1 和 6 共同意味着，在 $[0,1]$ 上不存在任何子区间使得波动率 $\sigma(\cdot)$ 为无穷大或零。假设 6 还意味着，对于任意固定的 $\alpha \in (0,\ 1)$，函数 $G(t) = \int_0^t \sigma^2(u)\,du$ 在受限定义域 $t \in [\alpha,1]$ 上远离零:

$$\inf_{\alpha\le t\le 1}\int_0^t \sigma^2(u)du \ge \int_0^\alpha \sigma^2(u)du > 0. \tag{3.3}$$

我们将在证明中使用关系 (3.3)。关于这一点，我们会在备注 3.2 中进一步说明。

所提出的模型 (3.1)–(3.2) 将曲线 R_i的完整随机行为分解为由 g_i 量化的曲线间动态，以及由随机积分 $\int_0^t \sigma(u)dW_i(u)$, $t \in [0,1]$描述的曲线内动态。曲线间动态由 g_i之间的相关性调节，这取代了前人研究（见引言）中采用的曲线独立性假设。曲线内动态则通过扩散过程 $\int_0^t \sigma(u)dW_i(u)$来表示，用以刻画轨迹的粗糙性。

我们的第一个定理确立了满足 (3.1)–(3.2) 的严格平稳函数序列 R_i 的存在唯一性，以及模型组成部分的可识别性。这里给出证明，因为证明很简短，而且下文会用到其中的

关系。为简洁起见，从现在起，我们用 $Q_i(t)$ 表示 $\langle R_i, R_i\rangle_t$ 。根据 (2.5)，

$$Q_i(t) := \langle R_i, R_i\rangle_t = g_i^2 \int_0^t \sigma^2(u)du = g_i^2 \exp\{H(t)\}, \quad t \in (0,1], \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.4}$$

其中

$$H(t) = \log \int_0^t \sigma^2(u)du = \log G(t), \qquad t \in (0,1]. \tag{3.5}$$

THEOREM 3.1 假设条件 *1–5* 均成立。则存在唯一的严格平稳函数序列 R_i ，满足 (3.1)–(3.2)。此外，标量 g_i 与函数 σ 在(3.2)中可区分。

PROOF: 首先注意，条件 5，即 ε_i 的二阶矩有限且它们具有独立同分布性质，意味着序列 $\{\log g_i\}$ 的存在唯一性及严格平稳性，该序列满足 (3.2)，因而序列 $\{g_i\}$也具有相同性质，参见条件 2。

现在我们说明，条件 1 意味着对每个 i，Itˆo 积分$\int_0^t \sigma(u)dW_i(u)$都存在且唯一。这是由定理 2.1 得出的，因为条件 (2.2) 和 (2.3) 均成立。因此，方程 (3.1) 直接定义了函数序列 $\{R_i\}$ 。

注意，(3.4) 中出现的积分波动率 $\int_0^t \sigma^2(u)du$ 可从g_i^2中识别，当且仅当项 $\log \int_0^t \sigma^2(u)du$ 在总和中可识别

$$\log Q_i(t) = 2\log g_i + \log \int_0^t \sigma^2(u)du = 2\log g_i + H(t). \tag{3.6}$$

由于假设 $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ which implies $\mathbb{E}(\log g_i) = 0$，因此，(3.6) 中出现的加项是可识别的。因此， $H(t)$ 可通过

$$\mathbb{E}\log Q_i(t) = H(t). \tag{3.7}$$

■

现在我们转向估计。我们假设可以获得离散观测值 $R_i(t_{i,k}), i = 1, 2, \ldots, N$, $k = 0, 1, \ldots, m$。我们假设设计点 $t_{i,k}$ 是规则的，并且对所有曲线都相同，即 $t_{i,k} = t_k = \Delta k$，其中 Δ 为某个趋于零的正数。我们还假设 $t_0 = 0$ 和 $t_m = 1$。我们的目标是对该向量建立推断。

$$\boldsymbol{\theta} = [G(\cdot), \varphi, \sigma_\varepsilon^2], \tag{3.8}$$

其中

$$G(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du, \quad t \in [0,1],$$

是累积波动率。我们重点关注函数 G，因为它足够光滑；而在我们的一般假设下，σ 基本上可以是任意可测函数。要从 G 中恢复 σ，我们需要假设 σ 连续。随后可以通过对 G 进行数值微分来计算它。

观测值的密集（高频）采样机制表明，可以考虑二次变差过程 $Q_i(t)$、$t \in [0,1]$，并且在这种框架下可以对它们进行估计。表示式 (3.6) 为阐释我们推断程序背后的思路奠定了基础。假设我们可以获取潜在二次变差过程 $\{Q_i(t)\ t \in (0,\ 1]\}$，对于$i = 1,\ 2,$ ……，N。方程 (3.6) 与 (3.2) 一起导出一族按时间 t 索引的 AR(1) 模型，

$$\log Q_i(t) - H(t) = \varphi\left[\log Q_{i-1}(t) - H(t)\right] + 2\varepsilon_i. \tag{3.9}$$

每个 AR(1) 模型由时间索引 i 定义，我们有一族由连续时间 t 索引的此类模型。然而，根据 (3.2)，这些模型共享相同的创新项 ε_i，这使它们彼此关联，而这种关联将在我们的估计程序中加以利用。现在，可以采用任何一种广为人知的估计方法，例如参见 Brockwell and Davis (1991) 的第8章，从而获得预言估计量（之所以称为预言估计量，仅仅是因为 $Q_i(t)$ 不可观测）。为聚焦于一种具体且简单的方法，我们参照 (3.7) 设定，

$$\widetilde{H}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log Q_i(t), \qquad t \in (0,1], \tag{3.10}$$

或等价地

$$\widetilde{G}(t) = \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log Q_i(t)\right), \qquad t \in (0,1].$$

接下来，我们分别定义滞后零阶和滞后一阶预言经验自协方差。

$$\begin{aligned}\gamma_{0,N} =& \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N}\left(\log Q_i(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)\right)^2 \\ =& \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\log g_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log g_i\right)^2.\end{aligned} \tag{3.11}$$

and

$$\begin{aligned}\gamma_{1,N} =& \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\log Q_i(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)\right)\left(\log Q_{i+1}(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)\right) \\ =& \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\log g_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log g_i\right)\left(\log g_{i+1} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log g_i\right).\end{aligned} \tag{3.12}$$

现在定义预言机尤尔-沃克估计量

$$\tilde{\varphi} = \gamma_{0,N}^{-1}\gamma_{1,N}, \qquad \tilde{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \gamma_{0,N} - \tilde{\varphi}\gamma_{1,N}.$$

综上，我们提出以下预言机估计量向量

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \left[\widetilde{G}(t), t \in [0,1], \quad \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\sigma}_{\varepsilon}^2\right]. \tag{3.13}$$

然而请注意，log g_i 以及二次变差过程 $\{Q_i(t)\ t \in [0,1]\}$（对于 $i = 1, 2, \ldots, N$）是不可观测的。受（2.6）的启发，我们用其实现对应量替代 $\{Q_i(t)\ t \in [0,1]\}$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_i(t) =& \sum_{k=1}^{m} |R_i(t_k) - R_i(t_{k-1})|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\} \\ =& g_i^2 \sum_k \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(u) dW_i(u) \right|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\}, \qquad t \in [0,1], \quad i = 1, 2, \ldots N. \end{aligned} \tag{3.14}$$

我们可以计算

$$\widehat{H}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log \widehat{Q}_i(t), \qquad t \in (0,1], \tag{3.15}$$

或者等价地

$$\widehat{G}(t) = \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log \widehat{Q}_i(t)\right), \qquad t \in (0,1]. \tag{3.16}$$

类似于（3.11）和（3.12），我们定义

$$\Gamma_{0,N}(t) = \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N}\left(\log \widehat{Q}_i(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right)^2, \tag{3.17}$$

and

$$\Gamma_{1,N}(t) = \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\log \widehat{Q}_i(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right)\left(\log \widehat{Q}_{i+1}(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right). \tag{3.18}$$

请注意，与 $\gamma_{0,N}$ 和 $\gamma_{1,N}$ 不同，$\Gamma_{0,N}(t)$ 和 $\Gamma_{1,N}(t)$ 不一定独立于 t。将它们代入尤尔-沃克方程，可得到一族以时间 t 为索引、用于估计标量 φ 和 σ_{ε}^2 的估计量。为了解决这个问题并消除对 t的依赖，我们提出以下三种估计程序。程序

B 和 C 涉及对区间 $[\alpha,1]\subset[0,1]$ 求平均，其中 $0<\alpha<1$ 为某个值。我们的理论说明，无法在整个区间 $[0,1]$ 上求平均。这是由模型结构所致，备注 3.2 对此作了进一步阐述。事实证明，参见第 5 节，在实际中也无法对 $[0,1]$ 求平均。本节末尾陈述的定理表明，这三种程序都能得到具有 $N^{-1/2}$ 收敛速率的相合估计量（渐近正态性）。在第 5 节中，我们将考察哪种方法在有限样本下表现最佳，以及截断参数 α 的影响。

程序 A：我们定义

$$\check{\boldsymbol{\theta}}=\left[\widehat{G}(t),t\in(0,1],\quad \check{\varphi},\quad \check{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\right], \tag{3.19}$$

其中

$$\check{\varphi}=\Gamma_{0,N}^{-1}(1)\Gamma_{1,N}(1),\qquad \check{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\Gamma_{0,N}(1)-\check{\varphi}\Gamma_{1,N}(1). \tag{3.20}$$

估计量 (3.20) 的依据是，在随机 $\widehat{}$波动率模型中，总 变异性在点 $t=1$ 处累积。曲线 G 由 (3.16) 定义。

程序 B：在第二个程序中，我们首先对 $t\in[\alpha,1]$ 取平均，计算自协方差函数 $\Gamma_{0,N}(t)$ 和 $\Gamma_{1,N}(t)$，也就是说，对于固定的 $\alpha\in(0,1)$，我们定义

$$\bar{\Gamma}_{0,N}:=\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\Gamma_{0,N}(t)dt,\qquad \bar{\Gamma}_{1,N}:=\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\Gamma_{1,N}(t)dt.$$

然后，我们将积分自协方差代入尤尔-沃克方程，并提出了方程。

$$\bar{\varphi}=\bar{\Gamma}_{0,N}^{-1}\bar{\Gamma}_{1,N},\qquad \bar{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\bar{\Gamma}_{0,N}-\bar{\varphi}\bar{\Gamma}_{1,N}. \tag{3.21}$$

上述结果与（3.16）一起给出了估计向量。

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}=\left[\widehat{G}(t),t\in(0,1],\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\right]. \tag{3.22}$$

程序 C：本程序的思路源自 Yao 等（2005），他们在不同的背景下得到一组估计量，$\{\hat{}\sigma^2(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$，记作“say”，用于标量参数 σ^2，并提出 $\hat{}\sigma^2=\frac{1}{|\mathcal{T}|}\int_{\mathcal{T}}\hat{}\sigma^2(t)dt$。这里，我们首先将自协方差函数 $\Gamma_{0,N}(t)$ 和 $\Gamma_{1,N}(t)$ 代入尤尔–沃克估计量，然后对 t 取平均，即定义积分估计量

$$\hat{\varphi}=\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\Gamma_{0,N}^{-1}(t)\Gamma_{1,N}(t)dt,\qquad \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\left(\Gamma_{0,N}(t)-\hat{\varphi}\Gamma_{1,N}(t)\right)dt, \tag{3.23}$$

其中，α 是任意固定的正数。上述结果与 (3.16) 一起给出最终估计向量

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left[\widehat{G}(t),t\in(0,1],\quad \hat{\varphi},\quad \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\right]. \tag{3.24}$$

REMARK 3.2 模型 (3.1)–(3.2) 仅将参数 φ 和 σ_ε^2 与过程 $\{g_i\}$ 联系起来，而观测方案在离散时刻提供乘积 $g_i \int_0^t \sigma(u) dW_i(u)$，无法区分 g_i 和 $\int_0^t \sigma(u) dW_i(u)$。在预言机恒等式 (3.4) 中，这一点表现得更为明显。为了进行推断，我们对 $\widehat{}$过程 $Q_i(\cdot)$ 应用对数函数 log(·)（实际中则对实现过程 Q_i (·) 应用该函数），并施加条件$\mathbb{E}\log\ g_i = 0$。为证明该方法的一致性，我们要求函数 $\underline{G}(t)$ $\int_0^t \sigma^2\ u\ du$ $[0, \alpha$ ( ) 有严格正的下界。因此，当我们想要对 $G(\cdot)$ 或 $H(\cdot)$ 进行推断，或应用程序 B 或 C 时，必须将子区间) 排除在分析之外，详见定理 3.2、3.4 和 3.5 的证明。程序 A 仅使用$t = 1$，由于 $G(1) = \int_0^1 \sigma^2(u) du > 0$，其严格正下界条件成立。

在样本量 N（曲线数量）增长和步长 Δ 衰减的假设下，讨论了估计量 (3.19)、(3.22) 和 (3.24) 的渐近性质，见定理 3.2– 3 5 $\{Q_i\ t \quad t \in [0,1]\}$。值得一提的是，在 AR(1) 模型 (3.9)$\widehat{}$ 中，用经验对应项 $Q_i(t)$ 替换 ( ) 会引入一个额外的误差项，例如 $u_i(t) = \log\ Q_i(t) - \log Q_i(t)$。也就是说

$$\begin{aligned} \log \widehat{Q}_i(t) - H(t) =& \varphi \log \widehat{Q}_{i-1}(t) - \varphi H(t) + 2\varepsilon_i + u_i(t) - \varphi u_i(t) \\ =:& \varphi \log \widehat{Q}_{i-1}(t) - \varphi H(t) + \delta_i(t). \end{aligned} \tag{3.25}$$

经过仔细检查，我们推断误差项 $\delta_i(t)$、 $i = 1$、2、.....、 N 不一定相互独立。此外，误差项 $\delta_i(t)$ 包含三个不同的项，这使得 σ_ε^2 不可识别。为解决这一问题，我们证明了 $\widehat{}$ $\log Q_i(t)$ 的一致一致性。粗略地说，应用引理 A.1 的结果，我们得出结论：误差项 $u_i(t)$ 以足够快的速度趋于零，因此 (3.25) 是模型 (3.9) 的一个足够好的近似。Galbraith 等人（2015）在分析 GARCH 模型时也遇到了类似问题。与本研究不同的是，他们问题的本质使他们能够将这一效应造成的不精确性解释为误差项。因此，他们的方法不要求 $u_i(t)$s 趋于零。

现在我们转而论证上述方法的大样本性质。回顾未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 给定的随机波动率模型 (3.1)–(3.2)，其中参数向量见 (3.8)。我们研究分别在 (3.19)、(3.22)$\widehat{}$ 和 (3.24) 中提出的估计量 $\check{}\boldsymbol{\theta}$、 $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\hat{}\boldsymbol{\theta}$ 的极限行为。特别地，定理 3.2 讨论了 $H(\cdot) - H(\cdot)$ 在 L^1 意义下的一致收敛。定理 3.3 建立了 $\check{}\varphi$ 和 $\check{}\sigma_\varepsilon^2$ 的收敛性及其收敛速率。定理 3.4 和 3.5 分别研究 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\sigma}_\varepsilon^2$ 以及 $\hat{}\varphi$ 和 $\hat{}\sigma_\varepsilon^2$。证明见附录A。证明主要依赖于以实现变差过程替代二次变差过程所引起的误差衰减。命题 A.3、A.5和A.6 对此进行了量化。这些结果与命题 A.2和A.4 中讨论的预言估计量 H 和 ($\gamma_{0,\ N}$, $\gamma_{1,\ N}$) 的一致性共同推出本节的主要结果。回顾一下， $H(t) = \log \int_0^t \sigma^2(u) du$ 和$\frown$ $\frown H(t)$ 以及 $G(t)$ 分别由 (3.15) 和 (3.16) 给出。

THEOREM 3.2 假设随机波动率模型由(3.1)–(3.2) 以及条件 *1–6* 定义，并回顾(3.15) 和 (3.16)。那么，对任意固定的 $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[\alpha,1]} \left|\widehat{H}(t) - H(t)\right| = O\left(N^{-\frac{1}{2}} + \Delta^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3.26}$$

$$\sup_{t\in[\alpha,1]} \left|\widehat{G}(t) - G(t)\right| = O_P\left(N^{-\frac{1}{2}} + \Delta^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.27}$$

在陈述下一个结果之前，我们需要定义滞后-h 自协方差:

$$\kappa_h := \mathbb{E}[\log g_0 \log g_h] = \frac{1}{4}\mathbb{E}\left[\left(\log Q_0(t) - H(t)\right)\left(\log Q_h(t) - H(t)\right)\right], \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{3.28}$$

在以下定理中，无需对 N 与Δ之间的相互作用作任何假设。

THEOREM 3.3 假设由(3.1)–(3.2) 定义的随机波动率模型满足条件*1–7*，并回顾(3.20)。则，

$$N^{1/2}\left(\check{\varphi} - \varphi\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \nu\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

and

$$N^{1/2}\left(\check{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \tau\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

其中

(3.29)

$$\nu = \left(-\kappa_0^{-2}\kappa_1, \kappa_0^{-1}\right) V \left(-\kappa_0^{-2}\kappa_1, \kappa_0^{-1}\right)^\top \quad \text{and} \quad \tau = \left(1 + \kappa_0^{-2}\kappa_1^2, -\kappa_0^{-1}\right) V \left(1 + \kappa_0^{-2}\kappa_1^2, -\kappa_0^{-1}\right)^\top,$$

且 V 是一个2 ×2矩阵，其元素为

$$V_{k,l} = (\eta - 3)\kappa_k\kappa_l + \sum_{h=-\infty}^{\infty}\left(\kappa_h\kappa_{h-k+l} + \kappa_{h-k}\kappa_{h+l}\right), \quad k, l = 0,\ 1. \tag{3.30}$$

THEOREM 3.4 假设由(3.1)–(3.2) 定义的随机波动率模型满足条件*1–7*，并回顾(3.21)。则，定理*3.3*的极限结果对$\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\sigma}^2$ 同样成立，即对任意 $0 < \alpha < 1$,

$$N^{1/2}\left(\bar{\varphi} - \varphi\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \nu\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

and

$$N^{1/2}\left(\bar{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \tau\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

其中 ν 和 τ 由 (3.29)-(3.30) 定义。

THEOREM 3.5 假设随机波动率模型由(3.1)–(3.2) 及条件 *1–7* 定义，并回顾(3.23)。则对于任意 $0 < \alpha < 1$,

$$N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\varphi} - \varphi\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \pi\right) \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0, \tag{3.31}$$

and

$$N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} - \sigma_{\varepsilon}^{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \rho\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

其中

$$\pi = \left(0, \kappa_0^{-1}\right) V \left(0, \kappa_0^{-1}\right)^{\top} \quad \text{and} \quad \rho = (1, -\varphi)\, V\, (1, -\varphi)^{\top},$$

矩阵 V 在 (3.30) 中给出。

本节所述所有结果的证明均见补充材料的附录A。这里简要说明需要采用新方法应对的主要难点。从启发式角度看，所提出的方法涉及不可观测的二次变差过程 $Q_i(\cdot)$，因此难以实施。将 $Q_i(\cdot)$ 替换为离散观测到的 $\widehat{\ }$曲线 $\widehat{Q}_i(\cdot)$，并研究这种近似所导致误差的衰减情况，可将问题定位于函数数据分析与随机微分方程的交界处。命题 A.5 和推论 A.2 和 A.3 建立了代理过程 $\widehat{\ }Q_i(\cdot)$ 的经验自协方差的一致性。这些关键结果为应用德尔塔方法、获得定理 3.3 和 3.4 中所述的一致性结果铺平了道路。然而，定理 3.5 的要求更高，$\widehat{\ }$依赖于代理过程 $Q_i(\cdot)$ 的经验自协方差以及 $Q_i(\cdot)$ 的经验方差倒数的一致一致性。这些结果由命题 A.6 和引理 A.2 证明。值得一提的是，必须舍弃一个任意窄的区间 $[0, \alpha)$，才能将问题转化到 $\log Q_i(\cdot)$ 的层面，在该层面上表述了曲线间依赖。这一洞见并非从模型表述中显而易见，并在引理 A.1、推论 A.1 和定理 3.2 的证明中得到了应用。

4 扩展至阶数为 p 的潜在自回归

本节将第3节中构建的模型扩展为：用 AR(p) 模型替代（3.2）中的一阶自回归。这提高了模型的灵活性。模型的基本性质和估计方法保持不变，但必须仔细推导其极限协方差结构。扩展到更一般的 ARMA 结构则更具挑战性，本文不作探讨。众所周知，加入移动平均项在概念上虽然简单，但往往需要在理论和实践上进行不小的调整。Wilms 等人（2023）在高维情境下对这一问题作了详尽阐述，并给出了许多相关参考文献。

为完整起见，我们先给出模型方程，并指出方程 (4.1) 与 (3.1) 相同：

$$R_i(t) = g_i \int_0^t \sigma(u) dW_i(u), \quad t \in [0,1], \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

(4.2) $\log g_i = \varphi_1 \log g_{i-1} + \varphi_2 \log g_{i-2} + \ldots + \varphi_p \log g_{i-p} + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim$独立同分布 $\mathcal{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$,

该 a 自回归多项式在闭复单位圆盘内没有零点，即 .

$$1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \ldots - \varphi_p z^p \neq 0, \ \varphi_p \neq 0, \quad \text{for} \quad |z| \leq 1. \tag{4.3}$$

众所周知，(4.3) 等价于存在一个满足 (4.2) 的平稳因果解，参见 Brockwell and Davis (1991) 中的定理 3.1.1。再次注意，我们也可以通过将 $\log g_i$ 替换为 x_i、将 g_i 替换为 $\exp(x_i)$，来等价地表述该模型。

我们先陈述定理 3.1 的一个扩展。证明类似，因此略去。

THEOREM 4.1 在(4.1)-(4.2)下，若满足第*3*节的条件*1–4*以及(4.3)，则存在唯一的严格平稳函数序列 R_i 满足(3.1)–(3.2)。此外，标量 g_i 与(4.1)中的函数 σ 可区分。

转向估计，定义自回归系数向量：

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)^\top.$$

回顾 (3.28)，并定义向量 $\boldsymbol{\kappa}_p$ 和矩阵 $\boldsymbol{\Xi}_p$：

$$\boldsymbol{\kappa}_p = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_p)^\top, \qquad \boldsymbol{\Xi}_p = (\kappa_{i-j})_{i,j=1}^p.$$

另作定义。

$$\boldsymbol{\gamma}_{p,N} = (\gamma_{1,N}, \gamma_{2,N}, \ldots, \gamma_{p,N})^\top, \qquad \boldsymbol{\Psi}_{p,N} = (\gamma_{i-j,N})_{i,j=1}^p, \tag{4.4}$$

其中 $\gamma_{h,N} = \gamma_{-h,N}$并且，对于 $h = 0, 1, \ldots, p$，

$$\begin{aligned}\gamma_{h,N} =& \frac{1}{4N} \sum_{i=1}^{N-h} \left(\log Q_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log Q_i(t) \right) \left(\log Q_{i+h}(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log Q_i(t) \right) \\ =& \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-h} \left(\log g_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log g_i \right) \left(\log g_{i+h} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log g_i \right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

上述定义使我们能够定义预言机尤尔-沃克估计：

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\Psi}_{p,N}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{p,N}, \qquad \tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = \gamma_{0,N} - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^\top \boldsymbol{\gamma}_{p,N}.$$

对于每个 $t \in [0,1]$，(4.4) 的实现形式可写为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(t) = (\Gamma_{1,N}(t), \Gamma_{2,N}(t), \ldots, \Gamma_{p,N}(t))^\top, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{p,N}(t) = (\Gamma_{i-j,N}(t))_{i,j=1}^p, \quad t \in [0,1],$$

其中 $\Gamma_{h,N}(t) = \Gamma_{-h,N}(t)$，且对于 $h = 0, 1, \ldots, p$，

$$\Gamma_{h,N}(t) = \frac{1}{4N} \sum_{i=1}^{N-h} \left(\log \widehat{Q}_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log \widehat{Q}_i(t) \right) \left(\log \widehat{Q}_{i+h}(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log \widehat{Q}_i(t) \right). \tag{4.6}$$

与序列 $\gamma_{h,N}$ 不同，上述经验自协方差可能依赖于 t。如果直接将它们代入尤尔-沃克方程，我们将得到一族由 t 索引的估计量，用于估计常数参数 $\boldsymbol{\varphi}$ 和 σ_ε^2。为了解决这一问题，与第3节类似，我们提出以下三种方法，其渐近性质将在下文的定理4.2–4.5中得到确立。

程序 A：我们定义

$$\check{\boldsymbol{\theta}} = \left[\widehat{G}(t), t \in [0,1], \quad \check{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \check{\sigma}_\varepsilon^2\right],$$

其中，$\widehat{G}(t)$与式（3.16）相同，而$\check{}\varphi$ 和$\check{}\sigma_\varepsilon^2$ 则通过在终端时刻$t = 1$处使用.....得到：

$$\check{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\Sigma}_{p,N}^{-1}(1)\boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(1), \qquad \check{\sigma}_\varepsilon^2 = \Gamma_{0,N}(1) - \check{\boldsymbol{\varphi}}^\top \boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(1). \tag{4.7}$$

程序 B：我们定义

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = \left[\widehat{G}(t), t \in [0,1], \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \bar{\sigma}_\varepsilon^2\right],$$

其中 $\widehat{G}(t)$ 与 (3.16) 相同，$\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ 和 $\bar{\sigma}_\varepsilon^2$ 定义为

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_{p,N}^{-1}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{p,N}, \qquad \bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \bar{\Gamma}_{0,N} - \bar{\boldsymbol{\varphi}}^\top \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{p,N}, \tag{4.8}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{p,N} = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(t)dt, \quad \bar{\Gamma}_{0,N} = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \Gamma_{0,N}(t)dt, \quad \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_{p,N} = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \boldsymbol{\Sigma}_{p,N}(t)dt,$$

其中 α 是区间 (0,1) 中任意固定的数。

程序 C：我们定义

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\widehat{G}(t), t \in [0,1], \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2\right].$$

其中，$\widehat{G}(t)$ 与 (3.16) 相同，而 $\hat{}\boldsymbol{\varphi}$ 和 $\hat{}\sigma_\varepsilon^2$ 为

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \boldsymbol{\Sigma}_{p,N}^{-1}(t)\boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(t)dt, \qquad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\Gamma_{0,N}(t) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}^\top \boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(t)\right)dt, \tag{4.9}$$

其中，α 是区间 (0，1) 内的任意固定数。

THEOREM 4.2 假设随机波动率模型由(4.1)–(4.2) 定义，并满足条件 *1–6*，但将条件 *5* 替换为(4.3)。分别由(3.15) 和(3.16)定义 $H(t)$ 和 $G(t)$ 。那么，对于任意固定的 $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{H}(t) - H(t)\right| = O\left(N^{-\frac{1}{2}} + \Delta^{\frac{1}{2}}\right), \tag{4.10}$$

$$\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{G}(t) - G(t)\right| = O_P\left(N^{-\frac{1}{2}} + \Delta^{\frac{1}{2}}\right). \tag{4.11}$$

在研究程序A和程序B的渐近性质之前，我们需要引入以下记号。考虑由 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$ 定义的定义域。

$$\mathcal{D} = \left\{ (x_0, \ldots, x_{p-1}) \mid X = [x_{i-j}]_{i,j=1}^{p} \text{ is positive definite} \right\},$$

以及这些函数

$$f : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p,\ f(x_0, \ldots, x_p) = X^{-1}a,$$
$$g : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x_0, \ldots, x_p) = x_0 - \left(X^{-1}a\right)^T a,$$

其中 $X = [x_{i-j}]_{i,\ j=1}^{p}$，$a = (x_1, \ldots\ldots, x_p)^\top$。上述函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 都是连续可微的。

在定理4.3、4.4和4.5中，我们假设随机波动率模型 (4.1)–(4.2) 以及第3节的条件 1–7，但若 $p > 1$，则将条件 5 替换为 (4.3)。我们不假设 $N \to \infty$ 与 $\Delta \to 0$之间存在任何相互作用。在定理4.4和4.5中，对于任意 $\alpha \in (0,\ 1)$，渐近分布均相同。

THEOREM 4.3 对于(4.7)（程序 A）定义的估计量，

$$N^{1/2}\left(\check{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\nu}_p\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

and

$$N^{1/2}\left(\check{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \tau_p\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

其中

$$\boldsymbol{\nu}_p = \left(\nabla f\left(\kappa_0, \boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)^\top V \nabla f\left(\kappa_0, \boldsymbol{\kappa}_p\right), \quad \tau_p = \left(\nabla g\left(\kappa_0, \boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)^\top V \nabla g\left(\kappa_0, \boldsymbol{\kappa}_p\right) \tag{4.12}$$

且 V 是一个$(p+1) \times (p+1)$ 矩阵，其元素

$$V_{k,l} = (\eta - 3)\kappa_k\kappa_l + \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left(\kappa_h\kappa_{h-k+l} + \kappa_{h-k}\kappa_{h+l}\right), \quad k, l = 0, \ldots, p. \tag{4.13}$$

THEOREM 4.4 由(4.8)（程序 B）定义的估计量与(4.7)（程序 A）中的估计量具有相同的渐近分布，即

$$N^{1/2}\left(\bar{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\nu}_p\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

and

$$N^{1/2}\left(\bar{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \tau_p\right), \quad as\ N \to \infty\ and\ \Delta \to 0,$$

其中 $\boldsymbol{\nu}_p$ 和 τ_p 通过 (4.12)-(4.13) 定义。

THEOREM 4.5 对于估计量 (4.9)（程序 C），

$$N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi}\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(0,\boldsymbol{\pi}_p\right)\quad as\ N\to\infty\ and\ \Delta\to 0, \tag{4.14}$$

and

$$N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\sigma}_\varepsilon^2-\sigma_\varepsilon^2\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(0,\rho_p\right),\quad as\ N\to\infty\ and\ \Delta\to 0,$$

其中

$$\boldsymbol{\pi}_p=\boldsymbol{\Xi}_p^{-1}WVW^\top\boldsymbol{\Xi}_p^{-1},\quad \rho_p=\left(1,-\boldsymbol{\varphi}^\top\right)V\begin{pmatrix}1\\-\boldsymbol{\varphi}\end{pmatrix},$$

其中 W 是 $p\times(p+1)$ 矩阵的形式为：

$$W=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&\dots&0\\0&0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

矩阵 V 在 (4.13) 中给出。

5 实证分析

我们首先在第 5.1 节中介绍如何对大量美国股票的日内价格曲线进行模型估计，这些曲线经过适当变换后具有平稳性。此类分析将阐明前文各节引入的模型元素的含义，并为第 5.2 节所介绍的模拟研究提供相关的参数设置建议。

5.1 美国股票应用

作为引言，我们首先分析根据苹果公司（Permno：14593）的价格数据得到的曲线。样本期为 2016 年 1 月 3 日至 2021 年 12 月 31 日，对应 $N=4021$ 个交易日。每个交易日 i，我们记录开盘价$P_i(t_0)$以及随后 78 个盘中 5 分钟价格观测值 $P_i(t_k)$ $k=1$，.....，78，即每隔 5 分钟记录的最后一笔交易价格。也可以采用不同的时间分辨率，但 5 分钟的分辨率使我们能够分析在美国交易的大多数股票，因为并非所有股票的交易频率都像苹果公司那么高。此外，5 分钟频率的盘中价格数据在提供有用信号与受到市场微观结构误差影响之间取得了良好平衡，参见例如 Barndorff-Nielsen 和 Shephard（2002）。因此，步长为 $\Delta=1/78$，设计点为 $t_k=k\times\Delta$，$k=0$，1，.....，m，其中 $m=78$。

我们计算累积日内收益率（CIDR）曲线，定义为

$$R_i(t_k)=\log(P_i(t_k))-\log(P_i(t_0)),\qquad k=0,1,...,m,\ i=1,2,...,N.$$

根据定义，CIDR 曲线总是从零开始，即 $R_i(t_0) = 0$，并且具有尺度不变性。这通常会产生平稳的曲线序列，正如 Horv´ath等人（2014年）所研究的那样。我们计算二次变差的实现版本如下

$$\widehat{Q}_i(t) = \sum_{k=1}^{K} |R_i(t_k) - R_i(t_{k-1})|^2 \mathbb{I}\{t_k \leq t\}, \qquad t \in [0,1], \qquad i = 1,2,...,N.$$

图1展示了苹果公司日内价格 $P_i(t_0)$（上面板）、CIDR $R_i(t_k)$（中间^面板）以及已实现二次变差 $Q_i(t)$（下面板）。请注意，在交易日开始时的几个 5 分钟区间内，可能会出现 $\backsim Q_i(t) = 0$ 。这是因为开盘后的一段时间内，如果没有任何交易，价格可能维持在开盘价不变。在这种情况下，无法计算 $\log Q_i(t)$。这意味着，理论要求在 $\alpha > 0$ 处进行截断在实践中往往是必要的。在以下^定义中，我们假设 α 满足 $\log Q_i(t)$ 可对 $t > \alpha$ 进行计算。对于我们考察的股票，通常 $\alpha = \Delta = 1/78$ 就足够了。考虑到这一点，我们可以计算 $H_i(t)$ 和 $G_i(t)$，它们分别由式（3.15）和（3.16）给出。图2展示了苹果公司的这两条曲线。

表1：使用 $\alpha = \Delta$对苹果进行的估计结果

	Proc. A	Proc. B	Proc. C
φ	0.537	0.512	0.535
σ^2	0.262	0.281	0.276

计算协方差 $\Gamma_{0,N}(t)$ 和 $\Gamma_{1,N}(t)$ 后，这些协方差分别由 (3.17) 和 (3.18) 给出，我们便可以计算第 3 节中介绍的程序 A、B 和 C 的所有估计量。表 1 展示了这三种程序在 $\alpha = \Delta$ 下的估计结果。可以看到，它们得出的估计量相似。这令人鼓舞，因为这表明它们都可能接近这些参数的真实值。我们将在第 5 节第 2 小节对此进行考察，但在此之前，我们需要更全面地了解参数可能的取值范围。为此，我们对美国股市中的 7293 只股票重复进行相同的分析。原始数据集包括 2006 年至 2021 年的所有美国股票。为确保数据质量，我们根据补充材料第 C 节中说明的规则清理了日内价格数据。表 2 展示了估计量的汇总统计量。可以看到，这三种程序得出的估计量范围相似。

我们以考察截断参数 $\alpha \in (0, 1)$ 的影响作为本节的结尾。程序 A 中没有这个参数，但我们将其纳入以便比较。我们使用 $\alpha \in \{5\Delta, 20\Delta, 40\Delta\}$ 重复了全面分析。由于 $\Delta = 1/78$，我们有 $\alpha = \{0.0641, 0.2564, 0.5128\}$。表 3 列出了基于不同 α 值的一些最具信息量的汇总统计量。结果显示，较大的 α 会带来较大的 φ 估计量和较小的 σ 估计量，但所有这些估计量都很相似。

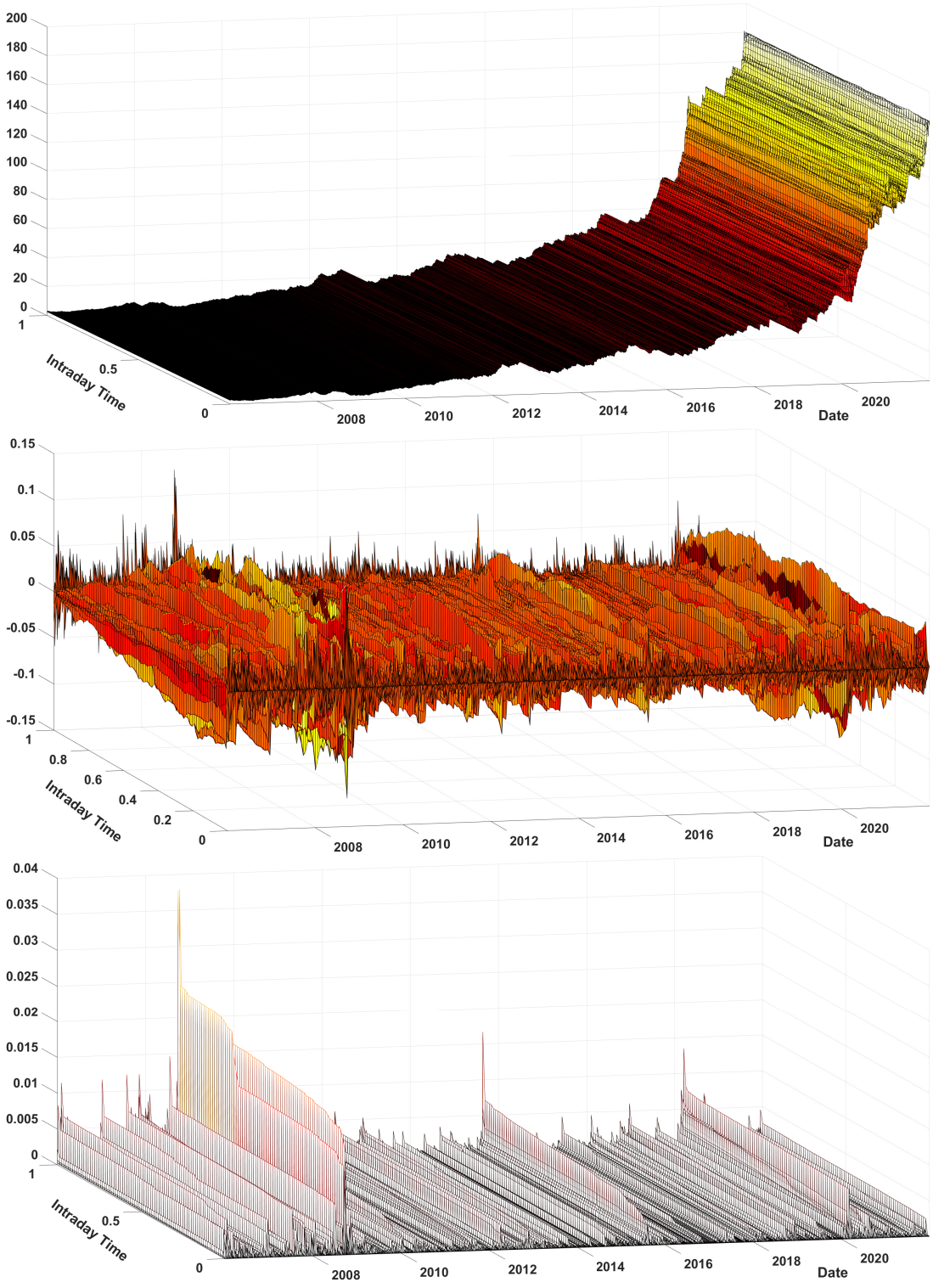


图1：由苹果公司日内价格构建的函数对象时间序列。上面板：日内价格 $P_i(t_k)$；中面板：CIDR $R_i(t_k)$；下面板：实现的$\widehat{}$二次变差 $Q_i(t)$。

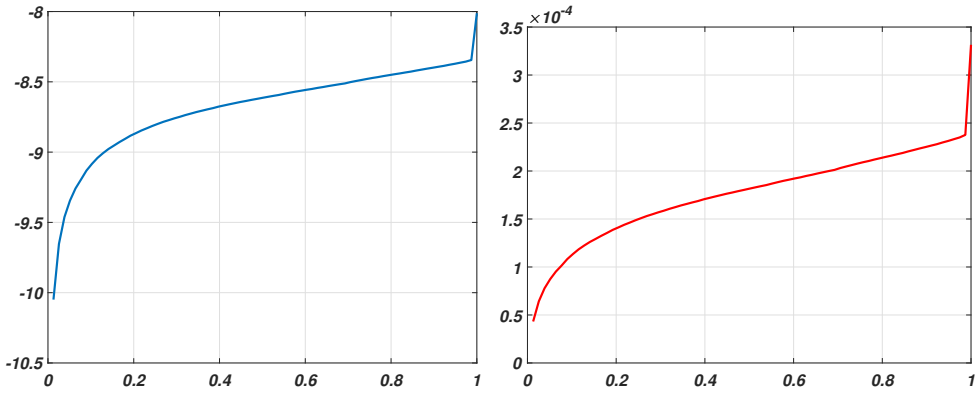


图 2：苹果的日内累计波动率曲线；左：$\widehat{H}$；右：$\widehat{G}$。

表 2：基于 7293 只股票的三种估计量的汇总统计量

	φ			σ^2		
	Proc. A	Proc. B	Proc. C	Proc. A	Proc. B	Proc. C
Mean	0.557	0.504	0.529	0.234	0.292	0.287
SD	0.123	0.121	0.117	0.060	0.072	0.072
偏度	0.119	0.257	0.158	4.453	3.340	3.434
峰度	2.857	2.967	2.967	39.421	22.813	23.662
Min	0.119	0.093	0.112	0.059	0.133	0.131
第25百分位数	0.470	0.419	0.447	0.205	0.250	0.246
中位数	0.551	0.495	0.522	0.227	0.278	0.272
第75百分位数	0.642	0.584	0.608	0.252	0.314	0.308
Max	0.961	0.941	0.943	0.955	1.020	1.019

表 3：不同 α 的估计结果。

	φ			σ^2		
	Proc. A	Proc. B	Proc. C	Proc. A	Proc. B	Proc. C
$\alpha = 5\Delta$						
Mean	0.557	0.532	0.542	0.234	0.263	0.261
SD	0.123	0.120	0.119	0.060	0.071	0.071
第25百分位数	0.470	0.447	0.459	0.205	0.224	0.222
中位数	0.551	0.526	0.537	0.227	0.249	0.247
第75百分位数	0.642	0.613	0.622	0.252	0.283	0.281
$\alpha = 20\Delta$						
Mean	0.557	0.565	0.567	0.234	0.232	0.231
SD	0.123	0.119	0.119	0.060	0.067	0.067
第25百分位数	0.470	0.482	0.485	0.205	0.196	0.196
中位数	0.551	0.561	0.564	0.227	0.219	0.218
第75百分位数	0.642	0.647	0.649	0.252	0.248	0.248
$\alpha = 40\Delta$						
Mean	0.557	0.586	0.587	0.234	0.213	0.213
SD	0.123	0.118	0.118	0.060	0.065	0.065
第25百分位数	0.470	0.505	0.505	0.205	0.180	0.180
中位数	0.551	0.584	0.585	0.227	0.201	0.201
第75百分位数	0.642	0.668	0.669	0.252	0.228	0.228

5.2 一项模拟研究

本节旨在更详细地了解所提出估计量在有限样本中的表现，并对它们进行比较。函数型时间序列按照 (1.2) 生成，但其中 $i = 1, \ldots, N$。我们使用 $\epsilon_i \sim i.i.d.\ \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$。根据第 5.1 节的结果，我们使用 $\varphi = 0.55$ 和 $\sigma_\varepsilon^2 = 0.25$。

我们使用四个日内波动率函数：

- 平坦：$\sigma(u) = 0.2$，全天的日内波动率保持不变。
- 斜率：$\sigma(u) = 0.1 + 0.2u$，日内波动率呈线性增长。
- 正弦：$\sigma(u) = 0.1\sin(2\pi u) + 0.2$，上午波动率较高，但下午波动率较低。
- U形：$\sigma(u) = (u - 0.5)^2 + 0.1145299$。这种选择最为相关，因为它反映了一个典型事实：波动率通常在交易日开始和结束时最高。

四个 σ 函数的系数经过设定，以确保日均波动率水平相同。补充材料 D 节中的图 3 展示了四种 σ 函数选择及其对应的（理论） H 和 G 函数。U形 σ 函数下的 H 和 G函数总体上呈现出与图1所示相似的模式，仅在交易日最后一个 5 分钟区间略有不同。

为了模拟积分 $\int_0^t \sigma(u)dW(u)$，我们使用第 2 节中说明的时间变换公式，参见推论 2.1，即设定

$$\int_0^t \sigma(u)dW(u) = W\left(\int_0^t \sigma^2(u)du\right). \tag{5.1}$$

与第 5.1 节中的分析相对应，将 $[0, 1]$ 中的连续时间 t 离散化为 $[t_0, t_1, ..., t_K]$，其中 $t_k = k\Delta$，$k = 1, ..., K$。步长取为 $\Delta = 1/78$，对应于 5 分钟频率。利用 (5.1)，我们生成

$$\int_0^{t_k} \sigma(u)dW(u) = \sum_{s=1}^{k} d(t_k), \quad k = 1, ..., K,$$

其中 $d(t_k) \sim \mathcal{N}(0,\ G(t_k) - G(t_{k-1}))$ 是相互独立的随机变量 .

我们考虑样本量为 $N = 100$，500，1000，2000 的情形，其中较大的样本量最具相关性（我们在第 5.1 节使用了超过 4,000 个交易日）。

为比较不同程序，我们采用以下评价指标。对于 φ 和 σ_ε^2 的估计量，我们计算经验偏差 (B) 和经验均方根误差 (RMSE)。对于程序 A，它们定义为

$$\mathrm{B}(\breve{\varphi}) = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} \breve{\varphi}_r - \varphi, \qquad \mathrm{RMSE}(\breve{\varphi}) = \left\{\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}(\breve{\varphi}_r - \varphi)^2\right\}^{1/2},$$

and

$$\mathrm{B}(\check{\sigma}_\varepsilon^2) = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\check{\sigma}_{\varepsilon,r}^2 - \sigma_\varepsilon^2, \qquad \mathrm{RMSE}(\check{\sigma}_\varepsilon^2) = \left\{\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}(\check{\sigma}_{\varepsilon,r}^2 - \sigma_\varepsilon^2)^2\right\}^{1/2},$$

其中，下标 r 表示第 r 次模拟重复。对于程序 B 和 C，上述指标的定义类似。

对于评估 $G(t)$ 的估计，由于我们模拟了数据，因此已知 $\sigma(u)$，从而可以计算其解析值

$$G(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du.$$

然后，我们可以计算函数型经验偏差（fB）和函数型经验均方根误差（fRMSE），

$$\mathrm{fB}(\widehat{G}) = \left(\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\int_0^1 (\widehat{G}_r(t) - G(t))dt\right),$$

and

$$\mathrm{fRMSE}(\widehat{G}) = \left(\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\int_0^1 (\widehat{G}_r(t) - G(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

即使对于 $N = 100$，上述两个指标也都非常接近于零，并且随着 N 增大而进一步降低。因此，我们仅报告函数型相对误差

$$\mathrm{fRE}(\widehat{G}) = \left(\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\frac{\int_0^1 (\widehat{G}_r(t) - G(t))^2 dt}{\int_0^1 G^2(t)dt}\right)^{1/2}.$$

表 4 展示了在四种不同的 σ 函数下，$\alpha = \Delta$ 时 φ 和 σ_ε^2 的估计误差。总体而言，模拟结果充分支持这三种用于估计 φ 和 σ_ε^2 的程序具有一致性，因为均方根误差随样本量增加而降低。比较这三种程序，程序 A 的偏差和均方根误差最低，表现优于另外两种程序。考察 σ 函数的四种形状时，φ 和 σ_ε^2 的估计结果没有明显差异，不过U形的偏差和均方根误差略高于其他形状。最后，我们的估计程序存在一些轻微偏差（低估 φ，高估 σ_ε^2），这与标量 AR(1) 过程的 Yule-Walker 估计量一致，正如 Shaman 和 Stine（1988）所指出的。我们在补充材料的 E 节中提供了这三种程序的偏差校正版本。它们能提高小样本量下的准确性，但对较大 N 的影响不大。

表 5 展示了 G函数的估计误差。由于三种方法对 G 采用相同的估计，因此无需对它们进行比较。可以观察到，随着样本量增大，函数型相对误差会降低。具体而言，函数型相对误差从

表 4: φ 和 σ_ε^2 的估计误差（使用 $\alpha = \Delta$）

		φ			σ_ε^2		
		Proc. A	Proc. B	Proc. C	Proc. A	Proc. B	Proc. C
Flat							
B	$N = 100$	-0.040	-0.083	-0.069	0.006	0.045	0.043
	$N = 500$	-0.016	-0.060	-0.046	0.008	0.048	0.045
	$N = 1000$	-0.014	-0.057	-0.043	0.008	0.049	0.046
	$N = 2000$	-0.011	-0.055	-0.041	0.008	0.049	0.046
RMSE	$N = 100$	0.095	0.120	0.110	0.038	0.060	0.058
	$N = 500$	0.042	0.071	0.060	0.018	0.051	0.049
	$N = 1000$	0.030	0.063	0.051	0.014	0.050	0.047
	$N = 2000$	0.022	0.058	0.045	0.012	0.050	0.047
斜率							
B	$N = 100$	-0.045	-0.087	-0.073	0.008	0.047	0.045
	$N = 500$	-0.019	-0.062	-0.048	0.010	0.050	0.047
	$N = 1000$	-0.015	-0.058	-0.044	0.011	0.051	0.048
	$N = 2000$	-0.014	-0.057	-0.043	0.011	0.051	0.048
RMSE	$N = 100$	0.097	0.121	0.112	0.038	0.060	0.058
	$N = 500$	0.042	0.072	0.060	0.019	0.053	0.050
	$N = 1000$	0.031	0.064	0.051	0.015	0.052	0.049
	$N = 2000$	0.024	0.060	0.047	0.014	0.051	0.049
Sine							
B	$N = 100$	-0.046	-0.087	-0.073	0.008	0.046	0.044
	$N = 500$	-0.020	-0.061	-0.047	0.011	0.049	0.047
	$N = 1000$	-0.017	-0.058	-0.044	0.012	0.051	0.048
	$N = 2000$	-0.016	-0.057	-0.043	0.012	0.051	0.048
RMSE	$N = 100$	0.098	0.122	0.112	0.038	0.060	0.058
	$N = 500$	0.044	0.072	0.061	0.020	0.052	0.050
	$N = 1000$	0.032	0.064	0.052	0.017	0.052	0.050
	$N = 2000$	0.025	0.060	0.047	0.014	0.051	0.049
U形							
B	$N = 100$	-0.047	-0.091	-0.077	0.010	0.051	0.048
	$N = 500$	-0.021	-0.065	-0.052	0.012	0.054	0.051
	$N = 1000$	-0.018	-0.062	-0.048	0.013	0.054	0.052
	$N = 2000$	-0.017	-0.061	-0.047	0.013	0.054	0.052
RMSE	$N = 100$	0.098	0.125	0.116	0.038	0.064	0.062
	$N = 500$	0.044	0.076	0.065	0.021	0.057	0.054
	$N = 1000$	0.032	0.068	0.055	0.017	0.056	0.053
	$N = 2000$	0.025	0.064	0.051	0.015	0.055	0.053

样本量从 100 增至 2000 时，误差从约 22% 降至近 5%。这为我们对 G 函数的估计具有一致性提供了证据。同样，对于 G 函数的估计结果，四种形状的 σ 函数之间没有明显的不同模式。

表 5： $G(t)$ 估计的函数型相对误差（fRE）

	$N = 100$	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 2000$
Flat	22.5%	10.1%	7.3%	5.3%
斜率	22.1%	10.0%	7.1%	5.3%
Sine	22.5%	9.9%	7.4%	5.5%
U形	22.1%	10.5%	7.9%	6.2%

在程序 B 和 C 中， α 的选择会影响 ε 和 σ_ε 的估计，但影响不大。表 6 展示了在具有$\alpha \in \{5\Delta, 20\Delta, 40\Delta\}$的 U形 σ（u）下， φ 和 σ_ε^2 的估计误差的偏差和均方根误差。我们可以观察到，采用较大的 α 值时，偏差和均方根误差略有降低。最后，即使设定 $\alpha = 40\Delta$，程序 B 和 C 的表现仍然不如程序 A。

表 6：对 α的敏感性

		φ		σ^2	
		Proc. B	Proc. C	Proc. B	Proc. C
$\alpha = 5\Delta$					
B	$N = 100$	-0.068	-0.066	0.028	0.028
	$N = 500$	-0.041	-0.040	0.031	0.031
	$N = 1000$	-0.039	-0.038	0.032	0.032
	$N = 2000$	-0.038	-0.036	0.032	0.032
RMSE	$N = 100$	0.112	0.111	0.048	0.048
	$N = 500$	0.057	0.056	0.036	0.036
	$N = 1000$	0.048	0.047	0.034	0.034
	$N = 2000$	0.042	0.041	0.033	0.033
$\alpha = 20\Delta$					
B	$N = 100$	-0.058	-0.058	0.019	0.019
	$N = 500$	-0.032	-0.032	0.022	0.022
	$N = 1000$	-0.029	-0.029	0.022	0.022
	$N = 2000$	-0.027	-0.027	0.022	0.022
RMSE	$N = 100$	0.106	0.106	0.044	0.044
	$N = 500$	0.051	0.051	0.028	0.028
	$N = 1000$	0.040	0.040	0.025	0.025
	$N = 2000$	0.033	0.033	0.024	0.024
$\alpha = 40\Delta$					
B	$N = 100$	-0.051	-0.051	0.014	0.014
	$N = 500$	-0.027	-0.027	0.018	0.018
	$N = 1000$	-0.024	-0.024	0.018	0.018
	$N = 2000$	-0.023	-0.023	0.018	0.018
RMSE	$N = 100$	0.102	0.102	0.040	0.040
	$N = 500$	0.047	0.047	0.024	0.024
	$N = 1000$	0.037	0.037	0.022	0.022
	$N = 2000$	0.030	0.030	0.020	0.020

6 总结与后续工作

我们提出了一种用于描述标准化日内资产价格曲线序列的模型。这些曲线是点对点日收益率的函数类比。该模型将广泛使用的随机波动率范式扩展到函数型时间序列情境中。它不仅包括量化每日曲线之间依赖关系的逐日动态，还包括描述曲线在每个交易日内演变的扩散过程模型。我们为该模型开发了估计方法，并通过理论论证、数据应用和具有参考价值的模拟研究验证了该方法。

模型框架的构建及有效估计方法的提出，为进一步发展开辟了道路。尤其是，模型阶数的选择（即第 4 节中的 p ）在实践中可能具有重要意义。与此相关，针对我们所提出模型族中任一模型的适用性进行检验的拟合优度检验，也是一个重要问题。还应探究该模型预测未来曲线的能力。所有这些工作都需要新的理论推导和大量数值研究。希望本文能够推动这些及其他类似方向的研究，包括更广泛的应用。

致谢 感谢陈健博士协助收集和清理美国股票数据。本研究部分得到了美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号为 DMS–2123761。

参考文献

A¨ıt-Sahalia, Y. 和 Jacod, J.（2014）。高频金融计量经济学，插图版。普林斯顿大学出版社，普林斯顿。Asai, M.、McAleer, M. 和 Yu, J.（2006）。多元随机波动率：综述。计量经济学评论，**25,** 145–175。Aue, A.、Horv´ath, L. 和 F. Pellatt, D.（2017）。函数型广义自回归条件异方差。时间序列分析杂志，**38,** 3–21。Bachelier, L.（1900）。投机理论。高等师范学校科学年鉴´*I*，**II-17,** 21–86；译载于股票市场价格的随机特征，P.H. Cootner 编，17–78 页，剑桥：MIT 出版社，1964 年。Barndorff-Nielsen, O. 和 Shephard, N.（2002）。已实现波动率的计量经济分析及其在随机波动率模型估计中的应用。英国皇家统计学会会刊 *B* 辑，**64,** 253–280。Bauwens, L.、Laurent, S. 和 Rombouts, J. V. K.（2006）。多元 GARCH 模型：综述。应用计量经济学杂志，**21,** 79–109。Berkes, I. 和 Horv´ath, L.（2006）。随机过程积分泛函的收敛。计量经济学理论，**22,** 304–322。

Bollerslev, T.（1986）。广义自回归条件异方差。计量经济学杂志，**31,** 307–327。Bollerslev, T.（1990）。短期名义汇率相关性的建模：多元广义 ARCH 模型。经济学与统计学评论，**72,** 498–505。Bollerslev, T.、Engle, R. F. 和 Wooldridge, J. M.（1988）。具有时变协方差的资本资产定价模型。政治经济学杂志，**96,** 116–131。Brockwell, P. J. 和 Davis, R. A.（1991）。时间序列：理论与方法。Springer。Chong, C.、Hoffmann, M.、Liu, Y.、Rosenbaum, M. 和 Szymanski, G.（2022）。粗糙波动率的统计推断：极小极大理论。*arXiv:2210.01214 [math.ST]*。Danielsson, J.（1998）。多元随机波动率模型：估计及与 VGARCH 模型的比较。实证金融杂志，**5,** 155–173。DasGupta, A.（2011）。统计学与机器学习中的概率：基础与高级专题。统计学 Springer 文本。Springer。Engle, R.（2002）。动态条件相关性：一类简单的多元广义自回归条件异方差模型。商业与经济统计学杂志，**20,** 339–350。Engle, R. F.（1982）。带有英国通胀方差估计量的自回归条件异方差。计量经济学，**50,** 987–1007。Engle, R. F. 和 Kroner, K. F.（1995）。多元同时广义 ARCH。计量经济学理论，**11,** 122–150。Galbraith, J. W.、Zinde-Walsh, V. 和 Zhu, J.（2015）。使用估计二次变差进行 GARCH 模型估计。计量经济学评论，**3**4。Ghysels, E.、Harvey, A. 和 Renault, E.（1996）。随机波动率。研究报告。˜定量经济学跨大学研究中心，CIREQ。Hall, P.、M¨uller, H.-G. 和 Wang, J.-L.（2006）。函数型与纵向数据分析中主成分方法的性质。统计学年鉴，**34,** 1493–1517。Harvey, A.、Ruiz, E. 和 Shephard, N.（1994）。多元随机方差模型。经济研究评论，**61,** 247–264。H¨ormann, S.、Horv´ath, L. 和 Reeder, R.（2013）。ARCH 模型的函数型版本。计量经济学理论，**29,** 267–288。Horv´ath, L.、Kokoszka, P. 和 Rice, G.（2014年）。函数型时间序列平稳性的检验。计量经济学杂志，**179,** 66–82。Jang, P. A.、Jauch, M. 和 Matteson, D. S.（2022）。金融期权曲面中的函数型随机波动率。科学中的数据科学，**1,** 6–19。Karatzas, I. 和 Shreve, S.（1991）。布朗运动与随机微积分，第 2 版。Springer，纽约。Le Gall, J-F.（2016）。布朗运动、鞅与随机微积分。Springer。

Li, Y. 和 Hsing, T.（2010）。函数型/纵向数据中非参数回归与主成分分析的一致收敛速率。统计年刊，**38,** 3321–3351。M¨uller, H-G., Sen, R. 和 Stadtm¨uller, U.（2011）。波动率的函数型数据分析。计量经济学杂志，**165,** 233–245。Øksendal, B.（2003）。随机微分方程。Universitext。Springer Berlin Heidelberg。Rosenbaum, M.（2008）。离散观测扩散模型中波动率持久性的估计。随机过程及其应用，**118,** 1434–1462。Shaman, P. 和 Stine, R.（1988）。自回归系数估计量的偏差。美国统计学会杂志，**83,** 842–848。Shephard, N.（1996）。ARCH 与随机波动率的统计学方面。载于时间序列模型。Chapman and Hall/CRC。Silvennoinen, A. 和 Ter¨asvirta, T.（2009）。多变量 GARCH 模型。载于金融时间序列手册，柏林，海德堡 （编者：T. Mikosch、J-P. Kreiß、R. A. Davis 和 T. G. Andersen），第 201–229 页。Springer。Taylor, S. J.（1982）。由两个随机过程乘积建模的金融收益：对 1961–79 年每日糖价的研究。时间序列分析：理论与实践，1。Taylor, S. J.（1994）。随机波动率建模：综述与比较研究。数-学金融，**4,** 183–204。Taylor, S. J.（2008）。金融时间序列建模。World Scientific。Vrontos, I. D.、Dellaportas, P. 和 Politis, D. N.（2003）。全因子多变量 GARCH 模型。计量经济学杂志，**6,** 312–334。Wilms, I.、Basu, S.、Bien, J. 和 Matteson, D.（2023）。大型向量自回归移动平均模型的稀疏识别与估计。美国统计学会杂志，**118,** 571–582。Yao, F.、M¨uller, H-G. 和 Wang, J-L.（2005）。稀疏纵向数据的函数型数据分析。美国统计学会杂志，**100,** 577–590。Yu, J. 和 Meyer, R.（2006）。多变量随机波动率模型：贝叶斯估计与模型比较。计量经济学评论，**25,** 361–384。

补充材料

A 第3节结果的证明

A.1 基本结果

在本小节中，我们陈述引理 A.1、命题 A.1 及由此得到的推论 A.1；它们是证明本文主要结果的基石。本小节的结果涉及以 i 为索引的各条随机曲线内部的动态特性。我们建立了关于 Δ 的界，这些界不依赖于 i，也不依赖于样本量 N。

LEMMA A.1 考虑式$(u)dW_i(u)$ 中的波动率过程。假设条件 *1–6*，并定义相应的预言机经验二次变差过程

$$V_i(t) := \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(u) dW_i(u) \right|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\}, \quad t \in [0,1], \quad i = 1, 2, \dots N. \tag{A.1}$$

另定义

(A.2)

$$X_i(t) := \log V_i(t) = \log \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(u) dW_i(u) \right|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\}, \quad t \in (0,1], \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

那么，对于任意固定的 $0 < \alpha < 1$,

$$\sup_{t \in [\alpha, 1]} \mathbb{E}\left[X_i(t) - H(t)\right]^2 = O(\Delta), \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{A.3}$$

and

$$\sup_{t \in [\alpha, 1]} \mathbb{E}\left|X_i(t) - H(t)\right| = O\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{A.4}$$

PROOF OF LEMMA A.1. 固定 $0 < \alpha < 1$。注意，对于任意 $t \ge \alpha$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_i(t) - H(t)\right]^2 =& \mathbb{E}\left[\log\left(\frac{V_i(t)}{G(t)}\right)\right]^2 \\
\le& \mathbb{E}\left[\frac{V_i(t)}{G(t)} - 1\right]^2 \\
=& \mathbb{E}\left[\frac{V_i(t) - G(t)}{G(t)}\right]^2 \\
=& \frac{1}{G^2(t)} \mathbb{E}\left[V_i(t) - G(t)\right]^2.
\end{aligned}$$

假设 6 保证函数 $G(t)$ 在定义域$[\alpha, 1]$上远离零时有界，见注 3.1。因此，只需对 $\mathbb{E}\left[V_i(t) - G(t)\right]^2$ 得到所需结果。为此，注意到

(A.5)
$$\mathbb{E}\left[V_i(t) - G(t)\right]^2 = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW_i(u)\right|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\} - G(t)\right]^2$$

(A.6)
$$\le 2\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW_i(u)\right|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\} - G(t_k)\right]^2 + 2\left[G(t_k) - G(t)\right]^2$$

根据假设 1，第二项 $\left[G(t_k) - G(t)\right]^2$ 被 $\|\sigma^2\|_\infty^2\Delta^2$ 控制。现在来看 (A.6) 中的第一项:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW_i(u)\right|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\} - G(t_k)\right]^2 = \mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW_i(u)\right|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\}\right]$$

(A.7)
$$= \sum_{k=1}^{m}\mathrm{Var}\left[\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW_i(u)\right|^2 \mathbb{I}\{t_k \le t\}\right]$$
$$\le \sum_{k=1}^{m}\mathrm{Var}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW_i(u)\right|^2$$

(A.8)
$$= \sum_{k=1}^{m}\mathrm{Var}\left[W_1\left(\int_{t_k-1}^{t_k}\sigma^2(u)du\right)\right]^2$$
$$\le \sum_{k=1}^{m}\mathbb{E}\left[W_1\left(\int_{t_k-1}^{t_k}\sigma^2(u)du\right)\right]^4$$
$$\le 3\sum_{k=1}^{m}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma^2(u)du\right)^2$$
$$\le 3\|\sigma^2\|_\infty^2 m\Delta^2$$

(A.9)
$$= 3\|\sigma^2\|_\infty^2\Delta.$$

方程 (A.7) 是 Wiener 过程不重叠增量相互独立的结果。方程 (A.8) 是推论 2.1 的结果。至此，(A.3) 的证明完成。结合 (A.3) 和 Lyapunov 不等式，我们得到 (A.4)。

∎

PROPOSITION A.1 考虑式$(u)dW_i(u)$ 中出现的波动率过程(3.1)。假

设条件 *1–5* 成立，并回顾(A.1)。那么，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|V_i(t)-G(t)|\right]^2=O(\Delta). \tag{A.10}$$

Proof of Proposition A.1 我们省略下标 i，并以一般形式证明该结果。首先，将时间域限制为离散点 $t_0=0<t_1<\ldots<t_m=1$，通过对离散时间序列 $V(t_j)-G(t_j)$，$j=0,1,\ldots,m$应用 Doob 极大不等式，得到所需的一致结果 (A.10)。例如，参见 DasGupta (2011) 定理 14.7。为此，注意到随机变量

$$\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW(u)\right|^2-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma^2(u)du,\quad k=1,2,\ldots m,$$

构成一个 均值为零的独立随机变量序列。因此，序列

$$\begin{aligned}V(t_j)-G(t_j)=&\sum_{k=1}^{j}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW(u)\right|^2-\int_0^{t_j}\sigma^2(u)du\\=&\sum_{k=1}^{j}\left(\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW(u)\right|^2-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma^2(u)du\right),\quad j=1,2,\ldots m,\end{aligned}$$

构成一个鞅。应用 Doob 极大不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{j\in\{1,2,\ldots,m\}}|V(t_j)-G(t_j)|\right]^2\leq&4\mathbb{E}\left|V(t_m)-G(t_m)\right|^2\\=&4\mathbb{E}\left|V(1)-G(1)\right|^2.\end{aligned}$$

沿用 (A.5)–(A.9) 的推导，并取 $t=1$，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{j\in\{1,2,\ldots,m\}}|V(t_j)-G(t_j)|\right]^2=O(\Delta). \tag{A.11}$$

对于任意 $t\in[0,1]$，我们有

$$|V(t)-G(t)|^2\leq 2\left|V(t)-G(t)-V(t_j)+G(t_j)\right|^2+2\left|V(t_j)-G(t_j)\right|^2, \tag{A.12}$$

其中 $t_j\leq t<t_{j+1}$ 这意味着 $|t_j-t|<\Delta$。因此，定义 (A.1) 给出 $V(t_j)=V(t)$。由此可得

$$|V(t)-G(t)|^2\leq 2\left|G(t)-G(t_j)\right|^2+2\left|V(t_j)-G(t_j)\right|^2.$$

假设 1 意味着

$$\sup_{t\in[0,1]}|V(t)-G(t)|^2 \leq 2\Delta^2\|\sigma\|_\infty^2 + 2\sup_{j\in\{1,2,\ldots,m\}}|V(t_j)-G(t_j)|^2.$$

现在，应用 (A.11)，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|V(t)-G(t)|\right]^2 = O(\Delta), \tag{A.13}$$

如所需。

∎

Corollary A.1 假设命题 *A.1* 的条件成立，且假设 *6* 成立。那么，对于任意固定的 $0<\alpha<1$,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}|X_i(t)-H(t)|^2 = O(\Delta), \quad i=1,2,\ldots,N. \tag{A.14}$$

and

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}|X_i(t)-H(t)| = O\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right), \quad i=1,2,\ldots,N. \tag{A.15}$$

Proof of Corollary A.1 固定 $\alpha\in(0,1)$。沿用引理 A.1 的证明思路，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}|X_i(t)-H(t)|^2 =& \mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}|\log V_i(t)-\log G(t)|^2\\
=& \mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\log\left(\frac{V_i(t)}{G(t)}\right)\right|^2\\
\leq& \mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\frac{V_i(t)}{G(t)}-1\right|^2\\
=& \mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\frac{V_i(t)-G(t)}{G(t)}\right|^2\\
\leq& \frac{1}{\inf_{t\in[\alpha,1]}G^2(t)}\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}|V_i(t)-G(t)|^2.
\end{aligned}$$

假设 6 保证 $G^2(t)$ 对于 $t\in[\alpha,1]$ 有正的下界。命题 A.1 推出 (A.14)，而应用 Lyapunov 不等式可得 (A.15)。

∎

A.2 定理 3.2 的证明

我们将定理 3.2 的证明分为两步。第一步，假设潜在过程 $Q_i(t)$、 $i = 1$、2、.....、N 可观测，因此我们应用函数型（或单变量）时间序列技术，得到关于 N 的渐近结果和收敛速率，见下文命题 A.2。事实上，命题 A.2 推出 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)$ 在均方意义下以参数速率 $\sqrt{N}$ 一致收敛。第二步，我们研究序列相关的经验二次变差过程的均值 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)$ 与其预言机对应项 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)$ 之间的差异。这给出关于 Δ 的收敛速率，见下文命题 A.3。结合这些结果，我们得到定理 3.2。回顾 (3.5) 和 (3.10)。

Proposition A.2 假设随机波动率模型由 (3.1)–(3.2) 及条件 *1–5* 定义，则

$$\mathbb{E}\sup_{t\in(0,1]}\left|\widetilde{H}(t)-H(t)\right|^2=O(N^{-1}).$$

Proof of Proposition A.2 注意到

$$\begin{aligned}
N\mathbb{E}\sup_{t\in(0,1]}\left|\widetilde{H}(t)-H(t)\right|^2 =& N\mathbb{E}\sup_{t\in(0,1]}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)-H(t)\right|^2\\
=& N\mathbb{E}\sup_{t\in(0,1]}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\left(g_i^2\int_0^t\sigma^2(u)du\right)-\log\int_0^t\sigma^2(u)du\right|^2 \qquad \text{(A.16)}\\
=& N\mathbb{E}\left|\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\log g_i\right|^2\\
=& \frac{4}{N}\sum_{|h|\le N-1}\mathrm{Cov}\left(\log g_{|h|+1},\log g_1\right)(N-|h|) \qquad \text{(A.17)}\\
=& 4\sum_{|h|\le N-1}\mathrm{Cov}\left(\log g_{|h|+1},\log g_1\right)\left(1-\frac{|h|}{N}\right)\\
\le& \frac{4}{1-|\varphi|^2}\mathrm{Var}\left(\varepsilon_1\right)\sum_{|h|}|\varphi|^{|h|}\\
<& \infty.
\end{aligned}$$

其中，等式 (A.16) 由 (3.4) 得出，而 (A.17) 则是过程 $\{\log g_i\}_i$ 平稳性的推论。证毕。

■

Proposition A.3 假设由(3.1)–(3.2)定义的随机波动率模型满足条件 *1–6*，并考虑 (3.14)中的 $Q_i(t)$ 。那么，对任意固定的 $0<\alpha<1$,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{H}(t)-\widetilde{H}(t)\right|=O\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right).$$

Proof of Proposition A.3. 利用定义 (3.14) 和方程 (3.6)，可写为

$$\begin{aligned}(\text{A.18}) \qquad \widehat{H}(t)-\widetilde{H}(t) =& \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\widehat{Q}_i(t)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)\\ =& \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2\log g_i+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW_i(u)\right|^2\mathbb{I}\{t_k\le t\}\\ &-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2\log g_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}H(t)\\ =& \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma(u)dW_i(u)\right|^2\mathbb{I}\{t_k\le t\}-H(t)\end{aligned}$$

回顾 (A.2)，(A.18) 中的差可改写为：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[X_i(t)-H(t)\right].$$

应用推论 A.1，并结合过程 $\{X_i(t)\}_t, i=1, 2, \ldots, N$ 关于指标 i 构成独立序列这一事实，我们得到

$$(\text{A.19}) \qquad \mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i(t)-H(t)\right|=O\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right),$$

正如所需。

∎

Proof of Theorem 3.2. 命题 A.2 和 A.3 推出极限结果 (3.26)。现在我们考察 (3.27)。注意，指数函数 exp(·) 的一阶泰勒展开为

$$\begin{aligned}\left|\widehat{G}(t)-G(t)\right| &= \left|\exp\widehat{H}(t)-\exp H(t)\right|\\ &= \left|\widehat{H}(t)-H(t)\right|\exp(\xi(t)),\quad t\in[\alpha,1],\end{aligned}$$

其中 $\xi(t)$ 介于 $H(t)$ 和 $\widehat{H}(t)$ 之间。因此，

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{G}(t)-G(t)\right| &\le \sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{H}(t)-H(t)\right|\sup_{t\in[\alpha,1]}\exp(\xi(t))\\ &\le \sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{H}(t)-H(t)\right|\sup_{t\in[\alpha,1]}\exp|\xi(t)-H(t)|\sup_{t\in[\alpha,1]}\exp|H(t)| \qquad (\text{A.20})\end{aligned}$$

结果 (3.26) 推出 $\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{H}(t)-H(t)\right| = O_P\left(N^{-\frac{1}{2}}+\Delta^{\frac{1}{2}}\right)$。结合连续映射定理可得 $\sup_{t\in[\alpha,1]}\exp\left|\widehat{H}(t)-H(t)\right|$ 依概率收敛于 1。特别地，$\sup_{t\in[\alpha,1]}\exp\left|\widehat{H}(t)-H(t)\right|$ 依概率有界。不等式 (3.3) 推出确定性项 $\exp|H(t)|$ 有界。具体而言：

$$0<\int_0^{\alpha}\sigma^2(u)du\le G(t)\le\|\sigma\|_{\infty}^2<\infty,\qquad t\in[\alpha,1].$$

因此，

$$-\infty<\log\int_0^{\alpha}\sigma^2(u)du\le H(t)\le\log\|\sigma\|_{\infty}^2<\infty,\qquad t\in[\alpha,1].$$

因此，

$$|H(t)|\le\max\left\{\left|\log\|\sigma\|_{\infty}^2\right|,\left|\log\int_0^{\alpha}\sigma^2(u)du\right|\right\}<\infty,\qquad t\in[\alpha,1].$$

由此可得，(A.20) 的上界如下：

$$O_P\left(N^{-\frac{1}{2}}+\Delta^{\frac{1}{2}}\right)O_P(1)O_P(1)=O_P\left(N^{-\frac{1}{2}}+\Delta^{\frac{1}{2}}\right),$$

正如所需。

■

A.3 定理 3.3 的证明

定理 3.3 的证明依赖于命题 A.4 和 A.5，这两个命题依次考察了差值 $(\gamma_{0,N}-\kappa_0,\ \gamma_{1,N}-\kappa_1)^{\top}$ 和 $(\Gamma_{0,N}(t)-\gamma_{0,N},\ \Gamma_{1,N}(t)-\gamma_{1,N})^{\top}$。

Proposition A.4 假设由(3.1)–(3.2)定义的随机波动率模型满足条件*1–7*，并回顾(3.11)和(3.12)。则

$$N^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\gamma_{0,N}-\kappa_0\\ \gamma_{1,N}-\kappa_1\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},V\right),\tag{A.21}$$

其中，V 是一个具有若干元素的2×2矩阵。

$$V_{k,l}=(\eta-3)\kappa_k\kappa_l+\sum_{h=-\infty}^{\infty}\left(\kappa_h\kappa_{h-k+l}+\kappa_{h-k}\kappa_{h+l}\right),\quad k,l=0,\ 1.\tag{A.22}$$

Proof of Proposition A.4 参见 Brockwell and Davis（1991）中的命题 7.3.4。

■

Remark A.1 请注意，上述结果涉及随机曲线 $\{R_i(t)\}_t$, $i = 1$, 2, ...之间的动态关系，并假设已知每条随机曲线的完整二次变差信息。因此，我们得到的收敛速率仅以 N 表示，而非 Δ，参见注释??。下文的引理 A.2 将适当地建立 N 与 Δ 之间的关系。

Proposition A.5 假设由(3.1)–(3.2)定义的随机波动率模型满足条件 *1–6*，并回顾(3.17) 和 (3.18)。那么，对于任意固定的 $0 < \alpha < 1$,

$$\sup_{t\in[\alpha,1]} \mathbb{E}\left|\gamma_{0,N} - \Gamma_{0,N}(t)\right|^2 + \sup_{t\in[\alpha,1]} \mathbb{E}\left|\gamma_{1,N} - \Gamma_{1,N}(t)\right|^2 = O\left(\frac{\Delta}{N}\right).$$

Proof of Proposition A.5 我们首先考察差值 $\gamma_{1,N} - \Gamma_{1,N}(t)$，其表达式为

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,N} - \Gamma_{1,N}(t) =& \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\log Q_i(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)\right)\left(\log Q_{i+1}(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)\right) \\
& - \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\log \widehat{Q}_i(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right)\left(\log \widehat{Q}_{i+1}(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right) \\
=& \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[\log Q_i(t)\log Q_{i+1}(t) - \log \widehat{Q}_i(t)\log \widehat{Q}_{i+1}(t)\right] \qquad \text{(A.23)} \\
& - \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\log Q_i(t)\ \sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t) - \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\log \widehat{Q}_i(t)\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t) \qquad \text{(A.24)} \\
& - \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\log Q_{i+1}(t)\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t) - \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\log \widehat{Q}_{i+1}(t)\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t) \qquad \text{(A.25)} \\
& + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right)^2. \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}$$

为简便起见，从现在起我们省略系数$1_{\ 4}$。回顾 (3.6) 和 (3.14)，(A.23) 中出现的求和可以改写为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[2H(t)\left(\log g_i + \log g_{i+1}\right) - 2X_{i+1}(t)\log g_i - 2X_i(t)\log g_{i+1} + H^2(t) - X_i(t)X_{i+1}(t)\right] \\
=& \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(H(t) - X_{i+1}(t)\right)\log g_i \qquad \text{(A.27)} \\
& + \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(H(t) - X_i(t)\right)\log g_{i+1} \qquad \text{(A.28)} \\
& + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[H^2(t) - X_i(t)X_{i+1}(t)\right]. \qquad \text{(A.29)}
\end{aligned}$$

现在我们来探讨 (A.27) 的二阶矩衰减率。由于对于每个 t，加项 $(H(t) - X_{i+1}(t)) \log g_i$ 关于指标 i 构成一个中心化平稳过程，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}(H(t)-X_{i+1}(t))\log g_i\right)^2 \\
=&\frac{1}{N^2}\sum_{|h|\le N-2}\operatorname{Cov}\left((H(t)-X_2(t))\log g_1,(H(t)-X_{2+h}(t))\log g_{1+h}\right)(N-1-h) \\
=&\frac{N-1}{N^2}\mathbb{E}\left[\log g_1\right]^2\mathbb{E}\left[H(t)-X_2(t)\right]^2 \qquad \text{(A.30)} \\
&+\frac{2(N-1)}{N^2}\sum_{1\le|h|\le N-2}\left(1-\frac{h}{N-1}\right)\mathbb{E}\left(\log g_1\log g_{1+h}\right)\mathbb{E}^2\left[H(t)-X_2(t)\right], \qquad \text{(A.31)}
\end{aligned}$$

其中我们利用了过程 $\{g_i\}$ 和 $X_k(\cdot)$、$k = 1$、2、.....彼此独立这一事实。将引理 A.1 应用于 (A.30) 和 (A.31)，可得

$$\sup_{t\in[\alpha,1]}\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}(H(t)-X_{i+1}(t))\log g_i\right)^2 = O\left(\frac{\Delta}{N}\right). \qquad \text{(A.32)}$$

同样，对于 (A.28)，我们得到

$$\sup_{t\in[\alpha,1]}\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}(H(t)-X_i(t))\log g_{i+1}\right)^2 = O\left(\frac{\Delta}{N}\right). \qquad \text{(A.33)}$$

现在转向 (A.29)。注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[H^2(t)-X_i(t)X_{i+1}(t)\right] \\
=&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}H(t)\left(H(t)-X_i(t)\right)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}X_i(t)\left(H(t)-X_{i+1}(t)\right)
\end{aligned}$$

第一个求和项 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} H(t)(H(t) - X_i(t))$ 可以用与 (A.28) 类似的方法处理。第二项 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} X_i(t)\,(H(t) - X_{i+1}(t))$ 中出现的加项彼此相同，且

相互独立。由此可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}X_i(t)\left(H(t)-X_{i+1}(t)\right)\right)^2\\
=&\frac{N-1}{N^2}\mathrm{Var}\left[X_1(t)\left(H(t)-X_2(t)\right)\right]\\
&+\frac{N-2}{N^2}\mathrm{Cov}\left(X_1(t)\left(H(t)-X_2(t)\right),X_2(t)\left(H(t)-X_3(t)\right)\right)\\
=&\frac{N-1}{N^2}\mathbb{E}\left[X_1(t)\right]^2\mathbb{E}\left[H(t)-X_2(t)\right]^2-\frac{N-1}{N^2}\mathbb{E}^2\left[X_1(t)\right]\mathbb{E}^2\left[H(t)-X_2(t)\right]\\
&+\frac{N-2}{N^2}\mathbb{E}\left[X_1(t)\right]\mathbb{E}\left[H(t)-X_3(t)\right]\mathbb{E}\left[X_2(t)\left(H(t)-X_2(t)\right)\right]\\
&-\frac{N-2}{N^2}\mathbb{E}\left[X_1(t)\right]\mathbb{E}\left[H(t)-X_3(t)\right]\mathbb{E}\left[H(t)-X_2(t)\right]\mathbb{E}\left[X_2(t)\right].
\end{aligned}
$$

应用引理 A.1，我们得到

$$
\sup_{t\in[\alpha,1]}\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}X_i(t)\left(H(t)-X_{i+1}(t)\right)\right)^2=O\left(\frac{\Delta}{N}\right). \tag{A.34}
$$

结合 (A.32)、(A.33) 和 (A.34)，我们得出 (A.23) 满足

$$
\sup_{t\in[\alpha,1]}\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[\log Q_i(t)\log Q_{i+1}(t)-\log\widehat{Q}_i(t)\log\widehat{Q}_{i+1}(t)\right]\right)^2=O\left(\frac{\Delta}{N}\right). \tag{A.35}
$$

分解 $\gamma_{1,\ N}-\Gamma_{1,\ N}(t)$ 中出现的其他表达式 (A.24)、(A.25) 和 (A.26) 也可用类似方法处理。由此得到

$$
\sup_{t\in[\alpha,1]}\mathbb{E}\left|\gamma_{1,N}-\Gamma_{1,N}(t)\right|^2=O\left(\frac{\Delta}{N}\right). \tag{A.36}
$$

按照上述步骤，我们得到

$$
\sup_{t\in[\alpha,1]}\mathbb{E}\left|\gamma_{0,N}-\Gamma_{0,N}(t)\right|^2=O\left(\frac{\Delta}{N}\right). \tag{A.37}
$$

结果 (A.36) 和 (A.36) 完成了证明。

■

下面的推论是命题 A.4 和命题 A.5 的结果，令$t=1$即可得到。

Corollary A.2 设随机波动率模型由(3.1)–(3.2) 定义，且满足条件*1–7*，并令(3.17)和(3.18)中的 $t=1$ 。那么，无论N 与 Δ之间如何相互作用，

$$
N^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\Gamma_{0,N}(1)-\kappa_0\\ \Gamma_{1,N}(1)-\kappa_1\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},V\right),\quad as\ N\to\infty\ and\ \Delta\to 0, \tag{A.38}
$$

其中， V 定义于(A.22)。

PROOF OF THEOREM 3.3我们对向量 $(\Gamma_{0,\ N}(1)\,\Gamma_{1,\ N}(1))^{\top}$应用二元德尔塔方法。为此，定义函数

$$f,g:(0,\infty)\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(x,y)=x^{-1}y,\qquad\qquad g(x,y)=x-x^{-1}y^{2}.$$

现在我们将德尔塔方法应用于极限结果 (A.38)。由此得到

$$N^{1/2}\left(f\left(\Gamma_{0,N}(1),\Gamma_{1,N}(1)\right)-f\left(\kappa_{0},\kappa_{1}\right)\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(0,\nu\right),$$

也就是说

$$N^{1/2}\left(\check{\varphi}-\varphi\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(0,\nu\right),$$

其中

$$\nu=\left(\nabla f\left(\kappa_{0},\kappa_{1}\right)\right)^{\top}V\nabla f\left(\kappa_{0},\kappa_{1}\right)=\left(-\kappa_{0}^{-2}\kappa_{1},\kappa_{0}^{-1}\right)V\left(-\kappa_{0}^{-2}\kappa_{1},\kappa_{0}^{-1}\right)^{\top}.$$

同理,

$$N^{1/2}\left(g\left(\Gamma_{0,N}(1),\Gamma_{1,N}(1)\right)-g\left(\kappa_{0},\kappa_{1}\right)\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(0,\tau\right),$$

也就是说

$$N^{1/2}\left(\check{\sigma}_{\varepsilon}^{2}-\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(0,\tau\right),$$

其中

$$\tau=\left(\nabla g\left(\kappa_{0},\kappa_{1}\right)\right)^{\top}V\nabla g\left(\kappa_{0},\kappa_{1}\right)=\left(1+\kappa_{0}^{-2}\kappa_{1}^{2},-\kappa_{0}^{-1}\right)V\left(1+\kappa_{0}^{-2}\kappa_{1}^{2},-\kappa_{0}^{-1}\right)^{\top}.$$

证明至此完成。

■

A.4 定理 3.4 的证明

我们先介绍以下推论，它是推论 A.2 的对应结果。

COROLLARY A.3 假设由(3.1)–(3.2) 定义的随机波动率模型满足条件*1–7*。那么，对于任意固定的 $0<\alpha<1$，无论 N 与 Δ 之间有何相互作用，

(A.39)

$$N^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\left(\begin{array}{c}\Gamma_{0,N}(t)-\kappa_{0}\\ \Gamma_{1,N}(t)-\kappa_{1}\end{array}\right)dt\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\left(\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right),V\right),\quad as\ N\to\infty\ and\ \Delta\to0,$$

其中 V 在（A.22）中定义。

Proof of Corollary A.3 由命题 A.4，只需证明

$$N^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{1} \begin{pmatrix} \Gamma_{0,N}(t) - \gamma_{0,N} \\ \Gamma_{1,N}(t) - \gamma_{1,N} \end{pmatrix} dt = o_P(1).$$

为此，注意到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left| \int_{\alpha}^{1} (\Gamma_{1,N}(t) - \gamma_{1,N})\, dt \right|^2 \leq & \mathbb{E} \int_{\alpha}^{1} (\Gamma_{1,N}(t) - \gamma_{1,N})^2\, dt \qquad \text{(A.40)} \\ \leq & \sup_{t\in[\alpha,1]} \mathbb{E}\left|\gamma_{1,N} - \Gamma_{1,N}(t)\right|^2 \\ = & O\left(\frac{\Delta}{N}\right), \qquad \text{(A.41)} \end{aligned}$$

其中，(A.41) 是命题 A.5 的结果。因此，

$$N^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{1} (\Gamma_{1,N}(t) - \gamma_{1,N})\, dt = O_P(\Delta).$$

类似地，我们有

$$N^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{1} (\Gamma_{0,N}(t) - \gamma_{0,N})\, dt = O_P(\Delta).$$

证毕。 ∎

Proof of Theorem 3.4 证明思路与定理 3.3 的证明相同；参见 (A.39) 和 (A.38)。 ∎

A.5 定理 3.5 的证明

我们从下面的命题 A.6 和引理 A.2 开始证明定理 3.5。

Proposition A.6 设由 (3.1)–(3.2) 定义并满足条件 *1–6* 的随机波动率模型，并回顾 (3.17) 和(3.18)。则，对于任意固定的 $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[\alpha,1]} |\gamma_{0,N} - \Gamma_{0,N}(t)|^2\right) + \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[\alpha,1]} |\gamma_{1,N} - \Gamma_{1,N}(t)|^2\right) = O\left(\Delta\right).$$

Proof of Proposition A.6我们证明

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[\alpha,1]} |\gamma_{1,N} - \Gamma_{1,N}(t)|^2\right) = O\left(\Delta\right).$$

滞后 0 自协方差的论证类似。按照（A.23）–（A.26）的推导，距离 $\gamma_{1,N} - \Gamma_{1,N}(t)$ 可分解为

$$\gamma_{1,N} - \Gamma_{1,N}(t) = -\frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\log \widehat{Q}_i(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right)\left(\log \widehat{Q}_{i+1}(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right)$$

$$= \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[\log Q_i(t)\log Q_{i+1}(t) - \log \widehat{Q}_i(t)\log \widehat{Q}_{i+1}(t)\right] \tag{A.42}$$

$$- \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\log Q_i(t)\ \sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t) - \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\log \widehat{Q}_i(t)\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t) \tag{A.43}$$

$$- \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\log Q_{i+1}(t)\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t) - \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\log \widehat{Q}_{i+1}(t)\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t) \tag{A.44}$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log \widehat{Q}_i(t)\right)^2. \tag{A.45}$$

为简便起见，下面省略系数$\frac{1}{4}$。(A.42) 中出现的求和可改写为

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[2H(t)\left(\log g_i + \log g_{i+1}\right) - 2X_{i+1}(t)\log g_i - 2X_i(t)\log g_{i+1} + H^2(t) - X_i(t)X_{i+1}(t)\right] \tag{A.46}$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(H(t) - X_{i+1}(t)\right)\log g_i \tag{A.47}$$

$$+ \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(H(t) - X_i(t)\right)\log g_{i+1} \tag{A.48}$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(H(t)\right)^2 - X_i(t)X_{i+1}(t)\right].$$

现在我们来探究 (A.46) 的二阶矩的统一衰减率：

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(H(t) - X_{i+1}(t)\right)\log g_i\right|^2 \le \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|H(t) - X_{i+1}(t)\right|\left|\log g_i\right|\right)^2$$

$$=: \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} S_{i+1}\left|\log g_i\right|\right)^2.$$

由于序列 $\{S_{i+1}|\log g_i|\}_i$ 是平稳的,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}S_{i+1}\left|\log g_i\right|\right)^2=&\frac{1}{N^2}\sum_{|h|\leq N-2}\mathbb{E}\left(S_2\left|\log g_1\right|S_{2+h}\left|\log g_{1+h}\right|\right)(N-1-h)\\=&\frac{N-1}{N^2}\mathbb{E}\left(S_2\left|\log g_1\right|\right)^2\\&+\frac{1}{N^2}\sum_{1\leq|h|\leq N-2}\mathbb{E}\left(S_2\left|\log g_1\right|S_{2+h}\left|\log g_{1+h}\right|\right)(N-1-h).\end{aligned}$$

S_i、 $i=1$，2，.....， N和 {log g_i} 的独立性给出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}S_{i+1}\left|\log g_i\right|\right)^2=&\frac{N-1}{N^2}\mathbb{E}\left(S_2\right)^2\mathbb{E}\left(\left|\log g_1\right|\right)^2\\&+\frac{N-1}{N^2}\sum_{1\leq|h|\leq N-2}\left(1-\frac{h}{N-1}\right)\mathbb{E}\left(S_2\right)\mathbb{E}\left(S_{2+h}\right)\mathbb{E}\left(\left|\log g_1\right|\left|\log g_{1+h}\right|\right)\\=&O\left(\frac{\Delta}{N}\right)+O\left(\frac{\Delta}{N}\right)\sum_{1\leq|h|\leq N-2}\left(1-\frac{h}{N-1}\right)\mathbb{E}\left(\left|\log g_1\right|\left|\log g_{1+h}\right|\right)\\=&O\left(\Delta\right).\end{aligned}$$

因此，(A.46) 满足

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(H(t)-X_{i+1}(t)\right)\log g_i\right)^2=O\left(\Delta\right). \tag{A.49}$$

同样，对于 (A.47)，我们得到

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left(H(t)-X_i(t)\right)\log g_{i+1}\right)^2=O\left(\Delta\right). \tag{A.50}$$

现在我们转向 (A.48)。注意,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[H^2(t)-X_i(t)X_{i+1}(t)\right]\\=&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}H(t)\left(H(t)-X_i(t)\right)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}X_i(t)\left(H(t)-X_{i+1}(t)\right)\end{aligned} \tag{A.51}$$

第一项 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} H(t)\left(H(t)-X_i(t)\right)$ 满足

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}H(t)\left(H(t)-X_i(t)\right)\right)^2\\
\leq&\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)|\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)-X_i(t)|\right)^2\\
\leq&\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)|^2\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)-X_i(t)|^2\right)\\
=&\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)|^2\,\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)-X_i(t)|^2\right)
\end{aligned}$$

$|H(t)|$ 的有界性与推论 A.1 一起表明

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}H(t)\left(H(t)-X_i(t)\right)\right)^2=O\left(\Delta\right). \tag{A.52}$$

(A.51) 中出现的第二个加项满足

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}X_i(t)\left(H(t)-X_{i+1}(t)\right)\right)^2\\
\leq&\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|X_i(t)|\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)-X_{i+1}(t)|\right)^2\\
\leq&\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|X_i(t)|^2\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)-X_{i+1}(t)|^2\right)\\
=&\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|X_i(t)|^2\,\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N-1}\sup_{t\in[\alpha,1]}|H(t)-X_{i+1}(t)|^2.
\end{aligned}$$

应用推论 (A.1) 即完成了.....的证明

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}X_i(t)\left(H(t)-X_{i+1}(t)\right)\right)^2=O\left(\Delta\right). \tag{A.53}$$

结合 (A.49)、(A.50)、(A.52) 和 (A.53)，我们得出 (A.42) 满足的是

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left[\log Q_i(t)\log Q_{i+1}(t)-\log\widehat{Q}_i(t)\log\widehat{Q}_{i+1}(t)\right]\right)^2=O\left(\Delta\right). \tag{A.54}$$

对出现在 $\gamma_{1,N}-\Gamma_{1,N}(t)$ 分解中的表达式 (A.43)、(A.44) 和 (A.45) 应用类似的论证，我们得到

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\gamma_{1,N}-\Gamma_{1,N}(t)\right|^2=O\left(\Delta\right). \tag{A.55}$$

类似的论证可得

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\gamma_{0,N}-\Gamma_{0,N}(t)\right|^2=O\left(\Delta\right). \tag{A.56}$$

证明至此完成。

∎

Lemma A.2 假设随机波动率模型由(3.1)–(3.2)定义，且满足条件*1–7*。那么，

$$\int_\alpha^1\left|\Gamma_{0,N}^{-1}(t)-\kappa_0^{-1}\right|^2dt=o_P(1) \tag{A.57}$$

Proof of Lemma A.2 我们采用 Berkes 和 Horv´ath (2006) 对定理 1.1 的证明中隐含的论证。首先注意，根据命题 A.6 和 A.4，我们得到

$$\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\Gamma_{0,N}(t)-\kappa_0\right|\leq\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\Gamma_{0,N}(t)-\gamma_{0,N}\right|+\left|\gamma_{0,N}-\kappa_0\right|=o_P(1),\text{ as }\Delta\to0\text{ and }N\to\infty. \tag{A.58}$$

现在定义函数 $T(\cdot)$ 和 $T_L(\cdot)$，对于 $L>0$，其形式如下

$$T(x)=x^{-1},\qquad x\in(0,\infty),$$

and

$$T_L(x)=\begin{cases}x^{-1}, & x\in\left[\frac{1}{L},L\right],\\ 0, & x\in(0,\infty)\setminus\left[\frac{1}{L},L\right]\end{cases},\qquad L>0.$$

注意到，对于每个 $L>0$，(A.57) 中出现的积分可作如下分解

$$\begin{aligned}\int_\alpha^1\left|\Gamma_{0,N}^{-1}(t)-\kappa_0^{-1}\right|^2dt=&\int_\alpha^1\left|T\left(\Gamma_{0,N}\right)(t)-T(\kappa_0)\right|^2dt\\ \leq&8\int_\alpha^1\left|T_L(\kappa_0)-T(\kappa_0)\right|^2dt &\text{(A.59)}\\ &+8\int_\alpha^1\left|T\left(\Gamma_{0,N}\right)(t)-T_L\left(\Gamma_{0,N}\right)(t)\right|^2dt &\text{(A.60)}\\ &+8\int_\alpha^1\left|T_L\left(\Gamma_{0,N}\right)(t)-T_L(\kappa_0)\right|^2dt. &\text{(A.61)}\end{aligned}$$

为得出 (A.57)，我们分别研究分解 (A.59)– (A.61) 中出现的各项。由于 κ_0 是一个正的固定参数，因此总存在充分大的 L，使得

$$0 < \frac{1}{L} < \frac{2}{L} < \frac{\kappa_0}{2} < \kappa_0 < \frac{3}{2}\kappa_0 < 2\kappa_0 < L.$$

换言之，存在 $L > 0$ 充分大，使得对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\kappa_0 \geq \frac{L}{2} \quad \text{or} \quad \kappa_0 \leq \frac{2}{L}\right) = 0 \leq \epsilon. \tag{A.62}$$

关系 (A.62) 显然意味着，存在 $L > 0$充分大，使得$T_L(\kappa_0) = T(\kappa_0)$。等价地，存在 L 充分大，使得对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(T(\kappa_0) \neq T_L(\kappa_0)\right) = 0 \leq \epsilon.$$

这表明存在 $L > 0$，使得对于任意 $\epsilon > 0$、任意 $\zeta > 0$、任意步长 Δ 以及任意样本量 N

$$\mathbb{P}\left(\int_\alpha^1 \left|T_L(\kappa_0) - T(\kappa_0)\right|^2 dt > \zeta\right) \leq \mathbb{P}\left(T(\kappa_0) \neq T_L(\kappa_0)\right) = 0 \leq \epsilon. \tag{A.63}$$

这意味着 (A.59) 依概率收敛到零。现在转向项 (A.60)。关系 (A.58) 和 (A.62) 共同意味着，存在上文得到的 $L > 0$，使得对于任意 $\epsilon > 0$，存在步长 Δ_ε 和样本量 N_ϵ，使得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[\alpha,1]} |\Gamma_{0,N}(t)| \geq L \quad \text{or} \quad \inf_{t\in[\alpha,1]} |\Gamma_{0,N}(t)| \leq \frac{1}{L}\right) \\
\leq &\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[\alpha,1]} |\Gamma_{0,N}(t) - \kappa_0| \geq \frac{\kappa_0}{2}\right) \\
\leq &\epsilon, \quad \forall N \geq N_\epsilon,\ \Delta \leq \Delta_\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，存在 $L > 0$，使得对于任意 $\epsilon > 0$，都存在步长 Δ_ε 和样本量 N_ϵ，使得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\exists t \in [\alpha, 1]; \quad T(\Gamma_{0,N}(t)) \neq T_L(\Gamma_{0,N}(t))\right) \\
= &\mathbb{P}\left(\exists t \in [\alpha, 1]; \quad \Gamma_{0,N}(t) \notin \left[\frac{1}{L}, L\right]\right) \\
\leq &\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[\alpha,1]} |\Gamma_{0,N}(t)| > L \quad \text{or} \quad \inf_{t\in[\alpha,1]} |\Gamma_{0,N}(t)| < \frac{1}{L}\right) \\
\leq &\epsilon, \quad \forall N \geq N_\epsilon,\ \Delta \leq \Delta_\varepsilon.
\end{aligned}$$

这意味着存在 $L>0$，使得对于任意 $\epsilon>0$和任意 $\zeta>0$，都存在步长 Δ_ε和样本量 N_ϵ，使得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\int_\alpha^1 \left|T\left(\Gamma_{0,N}\right)(t)-T_L\left(\Gamma_{0,N}\right)(t)\right|^2 dt>\zeta\right)\\
\leq&\mathbb{P}\left(\exists t\in[\alpha,1];\quad T(\Gamma_{0,N}(t))\neq T_L(\Gamma_{0,N}(t))\right)\\
\leq&\epsilon,\quad \forall N\geq N_\epsilon,\ \Delta\leq\Delta_\varepsilon. \qquad \text{(A.64)}
\end{aligned}$$

这意味着 (A.60) 依概率趋于零。由 (A.63) 和 (A.64) 可知，要得出 (A.57)，只需证明对于上文得到的正数 L

$$\int_\alpha^1 \left|T_L(\Gamma_{0,N}(t))-T_L(\kappa_0)\right|^2 dt=o_P(1).$$

为此，定义

$$A_N=\left\{\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\Gamma_{0,N}(t)-\kappa_0\right|>\frac{\kappa_0}{2}\right\}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^1 \left|T_L(\Gamma_{0,N}(t))-T_L(\kappa_0)\right|^2 dt=&\int_\alpha^1 \left|T_L(\Gamma_{0,N}(t))-T_L(\kappa_0)\right|^2\mathbb{I}\{A_N^c\}dt\\
&+\int_\alpha^1 \left|T_L(\Gamma_{0,N}(t))-T_L(\kappa_0)\right|^2\mathbb{I}\{A_N\}dt\\
=&\int_\alpha^1 \left|\Gamma_{0,N}^{-1}(t)-\kappa_0^{-1}\right|^2\mathbb{I}\{A_N^c\}dt\\
&+\int_\alpha^1 \left|T_L(\Gamma_{0,N}(t))-\kappa_0^{-1}\right|^2\mathbb{I}\{A_N\}dt\\
\leq&2^4\int_\alpha^1 \frac{\left|\Gamma_{0,N}(t)-\kappa_0\right|^2}{\kappa_0^4}\mathbb{I}\{A_N^c\}dt\\
&+\int_\alpha^1 \left|T_L(\Gamma_{0,N}(t))-\kappa_0^{-1}\right|^2\mathbb{I}\{A_N\}dt\\
\leq&\frac{2^4}{\kappa_0^4}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\Gamma_{0,N}(t)-\kappa_0\right|^2+4L^2\mathbb{I}\{A_N\}\\
=&o_P(1)+o_P(1),\ \text{as } \Delta\to0 \text{ and } N\to\infty, \qquad \text{(A.65)}
\end{aligned}$$

其中 (A.65) 是由 (A.58) 得出的结论。证明至此完成。 ∎

Proof of Theorem 3.5 我们使用命题 A.4 和命题 A.5 以及引理 A.2。注意

that

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}-\varphi=&\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\hat{\varphi}(t)dt-\varphi\\=&\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\Gamma_{0,N}^{-1}(t)\Gamma_{1,N}(t)dt-\kappa_0^{-1}\kappa_1\\=&\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\kappa_0^{-1}\left(\Gamma_{1,N}(t)-\kappa_1\right)dt+\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\left(\Gamma_{0,N}^{-1}(t)-\kappa_0^{-1}\right)\Gamma_{1,N}(t)dt\\=:&A+D\end{aligned}$$

根据推论 A.3，第一项 A 以速率 $N^{\frac{1}{2}}$ 依分布收敛。更准确地说，只要 N 趋于无穷且 Δ 趋于零，$N^{\frac{1}{2}}A$ 就依分布收敛，而不论 N 与 Δ 之间如何相互作用。第二项 D 由

$$\begin{aligned}|D|\leq&\frac{1}{1-\alpha}\left(\int_{\alpha}^{1}\left|\Gamma_{1,N}(t)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\alpha}^{1}\left|\Gamma_{0,N}^{-1}(t)-\kappa_0^{-1}\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\=:&BC\end{aligned}\tag{A.66}$$

为了获得项 B 的一致性，注意到 B^2 可写为

$$\begin{aligned}B^2=\int_{\alpha}^{1}\left|\Gamma_{1,N}(t)\right|^2dt\leq&16\int_{\alpha}^{1}\left|\Gamma_{1,N}(t)-\gamma_{1,N}\right|^2dt+16\int_{\alpha}^{1}\left|\gamma_{1,N}-\kappa_1\right|^2dt+16\int_{\alpha}^{1}\left|\kappa_1\right|^2dt\\\leq&16\int_{\alpha}^{1}\left|\Gamma_{1,N}(t)-\gamma_{1,N}\right|^2dt+16\left|\gamma_{1,N}-\kappa_1\right|^2+\left|\kappa_1\right|^2\\=:&B_1+B_2+B_3\end{aligned}$$

根据 (A.40) 和 (A.41)，我们有 $B_1=O_P(\frac{\Delta}{N})$。根据命题 A.4，第二项 B_2 以速率 N 依分布收敛。也就是说，NB_2 依分布收敛。最后一项 B_3 是常数。这些共同意味着，项 B^2 以速率 N 依分布收敛。也就是说，只要 N 趋于无穷且 Δ 趋于零，无论 N 和 Δ 之间如何相互作用，$N^{\frac{1}{2}}B$ 都依分布收敛。现在我们转向出现在 (A.66) 中的项 C。引理 A.2 意味着 $C=o_P(1)$。因此，$N^{\frac{1}{2}}(BC)=o_P(1)$。于是，$N^{\frac{1}{2}}D=o_P(1)$。综上，我们有 $N^{\frac{1}{2}}(A+D)$ 依分布收敛。此外，$N^{\frac{1}{2}}(A+D)$ 的极限分布与在推论 A.3 中得到的 $N^{\frac{1}{2}}A$ 的极限分布相同。这就得到 (3.31)。通过 a 建立了 $(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2-\sigma_{\varepsilon}^2)$ 的一致性

类似的论证。注意到

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varepsilon^2-\sigma_\varepsilon^2=&\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1\hat{\sigma}_\varepsilon^2(t)dt-\sigma_\varepsilon^2\\=&\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1\left(\Gamma_{0,N}(t)-\hat{\varphi}\Gamma_{1,N}(t)\right)dt-(\kappa_0-\varphi\kappa_1)\\=&-\frac{(\hat{\varphi}-\varphi)}{1-\alpha}\int_\alpha^1\Gamma_{1,N}(t)dt\\&+\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1\left(\Gamma_{0,N}(t)-\kappa_0\right)dt-\frac{\varphi}{1-\alpha}\int_\alpha^1\left(\Gamma_{1,N}(t)-\kappa_1\right)dt\\=:&E\\&+F\end{aligned}$$

极限结果 (3.31) 和推论 A.3 表明，$N^{\frac{1}{2}}E$是 $o_P(1)$。推论 A.3 表明，只要 N趋于无穷且 Δ趋于零，$N^{\frac{1}{2}}F$就依分布收敛，而不论 N与 Δ之间的相互关系如何。此外，$N^{\frac{1}{2}}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2-\sigma_\varepsilon^2)$ 与 $N^{\frac{1}{2}}F$ 具有相同的极限分布。证明完毕。

∎

B 第 4 节结果的证明

B.1 定理 4.2 的证明

Proof of Theorem 4.2 (4.10) 的左端上界为

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{H}(t)-\widetilde{H}(t)\right|+\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widetilde{H}(t)-H\right|$$

回顾命题 A.3 的结果：

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\widehat{H}(t)-\widetilde{H}(t)\right|=O\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right),$$

其中，$\widetilde{H}(t)$ 和 $\widehat{H}(t)$ 分别定义于 (3.10) 和 (3.15) 中。因此，为验证 (4.10)，只需证明

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,1]}\left|\widetilde{H}(t)-H(t)\right|^2=O(N^{-1}).$$

为此，我们给出一个与命题 A.2 类似的论证。具体而言

$$
\begin{aligned}
N\mathbb{E}\sup_{t\in(0,1]}\left|\widetilde{H}(t)-H(t)\right|^2 =& N\mathbb{E}\sup_{t\in(0,1]}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log Q_i(t)-H(t)\right|^2 \\
=& N\mathbb{E}\sup_{t\in(0,1]}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\left(g_i^2\int_0^t\sigma^2(u)du\right)-\log\int_0^t\sigma^2(u)du\right|^2 \qquad \text{(B.1)} \\
=& N\mathbb{E}\left|\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\log g_i\right|^2 \\
\leq& 4\sum_{|h|\leq N-1}\left|\mathrm{Cov}\left(\log g_{|h|+1},\log g_1\right)\right|\left(1-\frac{|h|}{N}\right) \\
<& \infty, \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}
$$

其中，等式 (B.1) 可由 (3.4) 得出，而 (B.2) 则是条件 (4.3) 的推论；该条件意味着自协方差随滞后 h 指数级快速衰减。由此完成了 (4.10) 的证明。(4.11) 的极限结果是 (4.10) 的推论。参见定理 3.2 的证明

■

B.2 定理 4.3 和定理 4.4 的证明

Proposition B.1 假设由 (4.1)–(4.2) 定义的随机波动率模型满足条件*1–7*，但将条件 *5* 替换为 (4.3)，并回顾 (4.5)。则

$$
N^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\gamma_{0,N}-\kappa_0\\ \vdots \\ \gamma_{p,N}-\kappa_p\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},V\right),
$$

其中 V是一个$(p+1)\times(p+1)$ 矩阵，其元素为

$$
V_{k,l}=(\eta-3)\kappa_k\kappa_l+\sum_{h=-\infty}^{\infty}\left(\kappa_h\kappa_{h-k+l}+\kappa_{h-k}\kappa_{h+l}\right),\quad k,l=0,\ldots,p. \qquad \text{(B.3)}
$$

Proof of Proposition B.1 参见 Brockwell and Davis (1991) 中的命题 7.3.4 .

■

Proposition B.2 假设由(4.1)–(4.2) 定义的随机波动率模型满足条件 *1–6*，但将条件 *5* 替换为(4.3)，并回顾(4.6)。那么，对于任意固定的 $0<\alpha<1$,

$$
\sup_{t\in[\alpha,1]}\mathbb{E}\left|\gamma_{0,N}-\Gamma_{0,N}(t)\right|^2+\ldots+\sup_{t\in[\alpha,1]}\mathbb{E}\left|\gamma_{p,N}-\Gamma_{p,N}(t)\right|^2=O\left(\frac{\Delta}{N}\right),
$$

and

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\gamma_{0,N}-\Gamma_{0,N}(t)\right|^2\right)+\cdots+\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[\alpha,1]}\left|\gamma_{p,N}-\Gamma_{p,N}(t)\right|^2\right)=O\left(\Delta\right).$$

Proof of Proposition B.2证明思路与命题 A.5 和命题 A.6 相同。

∎

Corollary B.1 假设由(4.1)–(4.2) 定义的随机波动率模型满足条件*1–7*，但将条件 *5* 替换为(4.3)。那么，对于任意固定的 $0<\alpha<1$，无论 N 与 Δ之间如何相互作用，若我们在(4.6)中令 $t=1$，则

$$N^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\Gamma_{0,N}(1)-\kappa_0\\ \vdots\\ \Gamma_{p,N}(1)-\kappa_p\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},V\right),\quad as\ N\to\infty\ and\ \Delta\to 0, \tag{B.4}$$

若对 t取积分，则

(B.5)

$$N^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1\begin{pmatrix}\Gamma_{0,N}(t)-\kappa_0\\ \vdots\\ \Gamma_{p,N}(t)-\kappa_p\end{pmatrix}dt\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},V\right),\quad as\ N\to\infty\ and\ \Delta\to 0,$$

其中 V 由(B.3)定义。

Proof of Corollary B.1 证明思路与推论 A.3 相同。

∎

Proof of Theorems 4.3 and 4.4 将多元 德尔塔方法应用于推论 B.1 中得到的极限结果，即可推出这些定理中的结论。为此，首先回顾定义域 $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^p$:

$$\mathcal{D}=\left\{(x_0,\ldots,x_{p-1})\mid X=(x_{i-j})_{i,j=1}^p\ \text{is positive definite}\right\},$$

以及多元 函数

$$f:\mathcal{D}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^p,\ f(x_0,\ldots,x_p)=X^{-1}a,\quad g:\mathcal{D}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ g(x_0,\ldots,x_p)=x_0-\left(X^{-1}a\right)^T a,$$

其中

$$X=(x_{i-j})_{i,j=1}^p,\qquad a=(x_1,\ldots,x_p)^\top.$$

上述函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 在各自的定义域上连续可微。将这些函数应用于极限结果 **(B.4)**，即可得出定理 **4.3** 的结论:

$$N^{\frac{1}{2}}\left(f\left(\Gamma_{0,N}(1),\boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(1)\right)-f\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\left(\nabla f\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)^\top V\nabla f\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right).$$

同理,

$$N^{\frac{1}{2}}\left(g\left(\Gamma_{0,N}(1),\mathbf{\Gamma}_{p,N}(1)\right)-g\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\left(\nabla g\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)^{\top}V\nabla g\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right).$$

将这些函数作用于极限结果 (B.5)，即可得出定理 4.4 的结论:

$$N^{\frac{1}{2}}\left(f\left(\bar{\Gamma}_{0,N},\bar{\mathbf{\Gamma}}_{p,N}\right)-f\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\left(\nabla f\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)^{\top}V\nabla f\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right).$$

同理,

$$N^{\frac{1}{2}}\left(g\left(\bar{\Gamma}_{0,N},\bar{\mathbf{\Gamma}}_{p,N}\right)-g\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\left(\nabla g\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right)^{\top}V\nabla g\left(\kappa_0,\boldsymbol{\kappa}_p\right)\right).$$

∎

B.3 定理 4.5 的证明

Proof of Theorem 4.5该定理的证明与定理 3.5 的证明类似。因此，我们仅给出证明概要。考虑如下分解:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{\varphi}=&\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\mathbf{\Sigma}_{p,N}^{-1}(t)\mathbf{\Gamma}_{p,N}(t)dt-\boldsymbol{\varphi}\\ =&\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\mathbf{\Sigma}_{p,N}^{-1}(t)\mathbf{\Gamma}_{p,N}(t)dt-\mathbf{\Xi}_{p}^{-1}\boldsymbol{\kappa}_p\\ =&\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\mathbf{\Xi}_{p}^{-1}\left(\mathbf{\Gamma}_{p,N}(t)-\boldsymbol{\kappa}_p\right)dt+\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\left(\mathbf{\Sigma}_{p,N}^{-1}(t)-\mathbf{\Xi}_{p}^{-1}\right)\mathbf{\Gamma}_{p,N}(t)dt\\ =&A+D.\end{aligned}\tag{B.6}$$

根据 (B.5)，对于项 A，我们有

$$N^{\frac{1}{2}}A\xrightarrow{\mathcal{L}aw}\mathcal{N}\left(0,\mathbf{\Xi}_{p}^{-1}WVW^{\top}\mathbf{\Xi}_{p}^{-1}\right),\tag{B.7}$$

其中，W 是式 (4.15) 中定义的 $p\times(p+1)$。式 (B.6) 中出现的第二项 D 有界。

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\int_{\alpha}^{1}\left\|\mathbf{\Gamma}_{p,N}(t)\right\|_{E}^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\alpha}^{1}\left\|\left(\mathbf{\Sigma}_{p,N}^{-1}(t)-\mathbf{\Xi}_{p}^{-1}\right)\right\|_{E}^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}=:BC,$$

其中 $\|\cdot\|_E$ 表示欧几里得范数。命题 B.1 和极限结果 (B.5) 表明 $N^{\frac{1}{2}}B$ 依分布收敛。将引理 A.2 推广到出现在 C 被积函数中的元素，可得 $C = o_P(1)$ 为 。由此得到 $N^{\frac{1}{2}}BC = o_P(1)$。因此， $N^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi})$ 与 $N^{\frac{1}{2}}A$具有相同的极限分布。见 (B.7)。现在我们得到 $N^{1/2}(\bar{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2)$ 的极限分布。

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2 =& \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \hat{\sigma}_\varepsilon^2(t)dt - \sigma_\varepsilon^2 \\
=& \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\Gamma_{0,N}(t) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}^\top \boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(t)\right) dt - \left(\kappa_0 - \boldsymbol{\varphi}^\top \kappa_1\right) \\
=& -\frac{\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}}^\top - \boldsymbol{\varphi}^\top\right)}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(t)dt \\
& + \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\Gamma_{0,N}(t) - \kappa_0\right) dt - \frac{\boldsymbol{\varphi}^\top}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\boldsymbol{\Gamma}_{p,N}(t) - \kappa_1\right) dt \\
=:& E \\
& + F
\end{aligned}
$$

结果 (4.14) 和 (B.5) 表明 $N^{\frac{1}{2}}E = o_P(1)$。结果 (B.5) 还表明

$$
N^{\frac{1}{2}}F \xrightarrow{\mathcal{L}aw} \mathcal{N}\left(0, \rho_p\right), \quad \text{where } \rho_p = \left(1, -\boldsymbol{\varphi}^\top\right) V \begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}.
$$

证明至此完成。

■

C 数据清理

为确保美国股票价格的数据质量，我们根据以下规则清理数据：

1. 价格根据从 CRSP 数据库下载的累计价格调整因子进行调整。2. 缺失数据超过 5 % 的股票将被剔除。否则，缺失价格将由最近可用价格替代。3. 超出区间 $[0.98 \times \text{Low } 1.02 \times \text{High}]$ 的价格将视为缺失值，并由最近可用价格替代，其中 Low 和 High 分别表示从 CRSP 下载的每日最低价和最高价。此类错误占总日期数超过 5% 的股票将被剔除。4. 节假日交易日（开市时间较短）将被剔除。5. 上市不足一年的股票将被剔除。

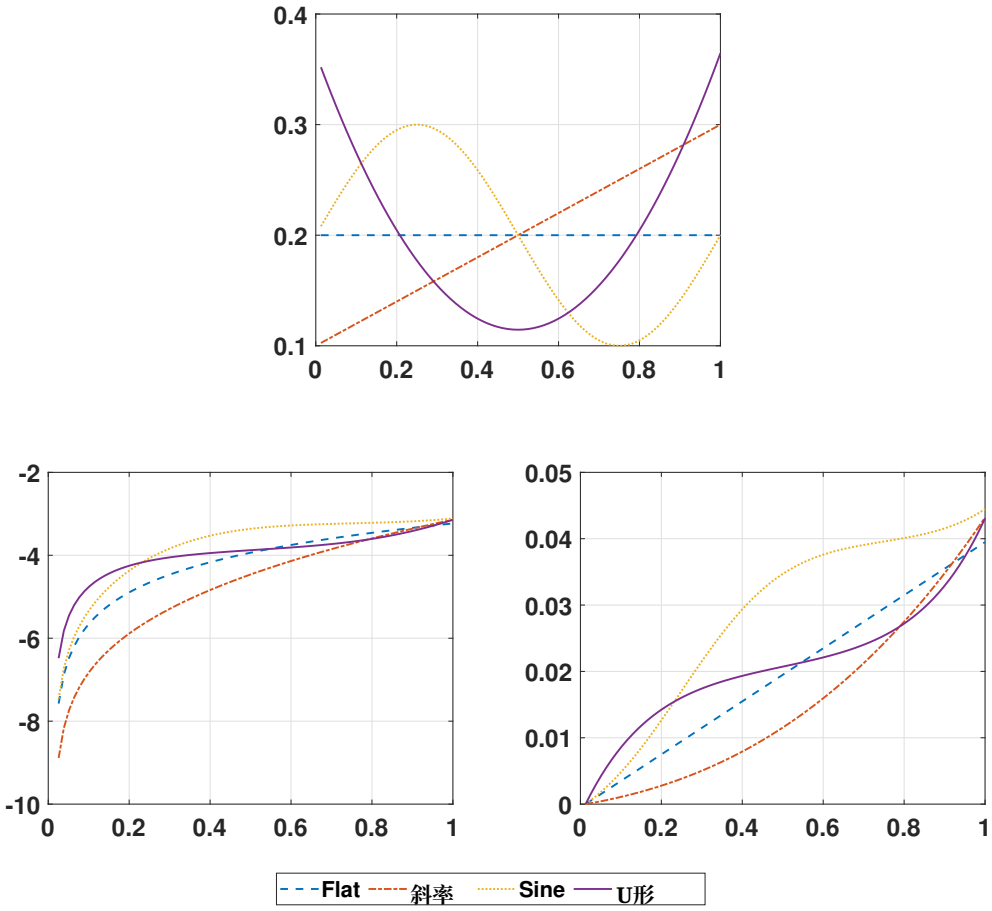


图 3：上：模拟的 σ 函数的四种选择；左下：对应的 H；右下：对应的 G。

D 模拟中使用的波动率函数

图 3 展示了第 5.2 节所述模拟中使用的四个波动率函数 σ，以及相应的函数 H 和 G。

E 偏差校正估计量

受标量 AR(1) 过程中偏差校正的启发，我们提出了针对 φ 和 σ_ε 的偏差校正估计量，具体步骤如下：

- 计算 $\hat{}\varphi(t)$ 和 $\hat{}\sigma_\varepsilon(t)$

$$\hat{\varphi}(t) = \Gamma_{0,N}^{-1}(t)\Gamma_{1,N}(t), \qquad \hat{\sigma}_\varepsilon^2(t) = \Gamma_{0,N}(t) - \hat{\varphi}(t)\Gamma_{1,N}(t),$$

以及它们的偏差校正版本：

$$\hat{\varphi}_{BC}(t) = \hat{\varphi}(t) + \frac{3\hat{\varphi}(t)}{N}, \qquad \hat{\sigma}^2_{\varepsilon,BC}(t) = \Gamma_{0,N}(t) - \hat{\varphi}_{BC}(t)\Gamma_{1,N}(t).$$

- 程序 A：

$$\check{\boldsymbol{\theta}}_{BC} = \left[\widehat{G}(t),\ \check{\varphi}_{BC},\ \check{\sigma}^2_{\varepsilon,BC}\right],$$

其中

$$\check{\varphi}_{BC} = \hat{\varphi}_{BC}(1), \qquad \check{\sigma}^2_{\varepsilon} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon,BC}(1).$$

- 程序 B：首先计算

$$\bar{\Gamma}_{0,N} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\Gamma_{0,N}(t)dt, \qquad \bar{\Gamma}_{1,N} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\Gamma_{1,N}(t)dt.$$

然后计算

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{BC} = \left[\widehat{G}(t),\ \bar{\varphi}_{BC},\ \bar{\sigma}^2_{\varepsilon,BC}\right],$$

其中

$$\bar{\varphi} = \bar{\Gamma}^{-1}_{0,N}\bar{\Gamma}_{1,N}, \qquad \bar{\sigma}^2_{\varepsilon} = \bar{\Gamma}_{0,N} - \bar{\varphi}\bar{\Gamma}_{1,N},$$

及其偏差校正版本：

$$\bar{\varphi}_{BC} = \bar{\varphi} + \frac{3\bar{\varphi}}{N}, \qquad \bar{\sigma}^2_{\varepsilon,BC} = \bar{\Gamma}_{0,N} - \bar{\varphi}_{BC}\bar{\Gamma}_{1,N},$$

- 程序 C：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\widehat{G}(t),\ \hat{\varphi}_{BC},\ \hat{\sigma}^2_{\varepsilon,BC}\right],$$

其中

$$\hat{\varphi}_{BC} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\hat{\varphi}_{BC}(t)dt, \qquad \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}\left[\Gamma_{0,N}(t) - \hat{\varphi}_{BC}\Gamma_{1,N}(t)\right]dt.$$

表 7 展示了我们的偏差校正估计量的结果。正如预期，偏差校正估计量的偏差小于表 4 中的估计量。这一点在小样本量中尤为明显，尽管仍然可以观察到一些偏差。在较大的样本中，偏差校正估计量与原始估计量之间的偏差差异并不明显。这是因为偏差校正基于样本量的倒数。总而言之，偏差校正估计量有助于在一定程度上减小偏差，尤其是在小样本中。

表 7: φ 和 σ_ε^2 在 $\alpha = \Delta$下的偏差校正估计量的估计误差

		φ			σ^2		
		Proc. A	Proc. B	Proc. C	Proc. A	Proc. B	Proc. C
Flat							
EB	$N = 100$	-0.027	-0.072	-0.057	0.003	0.042	0.040
	$N = 500$	-0.014	-0.058	-0.043	0.007	0.047	0.045
	$N = 1000$	-0.012	-0.055	-0.041	0.008	0.048	0.046
	$N = 2000$	-0.011	-0.054	-0.040	0.008	0.049	0.046
ERMSE	$N = 100$	0.093	0.114	0.105	0.036	0.057	0.055
	$N = 500$	0.041	0.069	0.058	0.018	0.050	0.048
	$N = 1000$	0.030	0.062	0.049	0.014	0.050	0.047
	$N = 2000$	0.022	0.057	0.044	0.012	0.049	0.047
斜率							
EB	$N = 100$	-0.029	-0.072	-0.058	0.005	0.044	0.042
	$N = 500$	-0.016	-0.058	-0.044	0.010	0.049	0.047
	$N = 1000$	-0.014	-0.057	-0.043	0.010	0.050	0.047
	$N = 2000$	-0.014	-0.056	-0.042	0.010	0.050	0.048
ERMSE	$N = 100$	0.093	0.113	0.105	0.036	0.058	0.056
	$N = 500$	0.042	0.070	0.059	0.019	0.052	0.050
	$N = 1000$	0.031	0.063	0.051	0.016	0.052	0.049
	$N = 2000$	0.024	0.059	0.046	0.013	0.051	0.048
Sine							
EB	$N = 100$	-0.029	-0.071	-0.057	0.005	0.044	0.041
	$N = 500$	-0.017	-0.059	-0.045	0.010	0.049	0.047
	$N = 1000$	-0.015	-0.057	-0.043	0.011	0.050	0.047
	$N = 2000$	-0.014	-0.056	-0.042	0.011	0.050	0.047
ERMSE	$N = 100$	0.095	0.114	0.106	0.036	0.058	0.056
	$N = 500$	0.041	0.070	0.058	0.020	0.052	0.050
	$N = 1000$	0.031	0.063	0.050	0.016	0.052	0.049
	$N = 2000$	0.024	0.059	0.046	0.014	0.051	0.048
U形							
EB	$N = 100$	-0.033	-0.077	-0.063	0.006	0.047	0.044
	$N = 500$	-0.017	-0.061	-0.048	0.011	0.053	0.050
	$N = 1000$	-0.017	-0.061	-0.048	0.012	0.054	0.051
	$N = 2000$	-0.015	-0.060	-0.046	0.013	0.054	0.052
ERMSE	$N = 100$	0.096	0.119	0.110	0.037	0.061	0.059
	$N = 500$	0.042	0.073	0.062	0.020	0.056	0.053
	$N = 1000$	0.032	0.067	0.055	0.017	0.055	0.053
	$N = 2000$	0.025	0.063	0.050	0.015	0.055	0.052