对称三值逻辑及其系统化逻辑组合方法

Ichiro Kawashima，IEEE 会员
ichiro.kawashima@ieee.org

arXiv:2305.04115v1 [cs.LO] 6 May 2023

摘要—与传统二元逻辑相比，三值逻辑具有更强的表达能力，预计能够提高超大规模集成电路的面积利用效率。本文提出了一种新的对称三值逻辑及一种系统化逻辑组合方法，使我们能够设计任意三值逻辑电路。通过采用所提出的对称三值运算符实现三值反相器、三进制与非、三进制或非和三进制半加器算子，展示了该方法的有效性。

索引词—三值逻辑、多值逻辑、三值算术电路

I. 引言

基于二元逻辑的数字电路发展推动了信息技术取得重大进步。数字电路设计的系统化方法已经建立并不断发展。该系统化方法使得利用两个数值（即 0 和 1）在数字电路上表示任意数据并进行计算成为可能。然而，众所周知，遵循摩尔定律的半导体微细加工正逐渐走向终点。摩尔定律的终结导致基于数字硬件的信息技术发展停滞。

三值逻辑通过使用三个数值（即 0、1 和 2）而非两个数值，有望在摩尔定律终结后推动信息技术的发展。与二值逻辑相比，三值逻辑具有更强的表达能力。例如，二元逻辑有 4 ($=2^2$) 个一元算子和 16 ($=2^4$) 个二元算子，而三值逻辑则有 27 ($=3^3$) 个可能的一元算子和 19,683 ($=3^9$) 个可能的二元算子。这些具有强大表达能力的算子能够减少超大规模集成电路（VLSI）中的大量连接。

关于三值逻辑的研究已经相当丰富。大多数关于三值逻辑实现的研究都基于克里普克逻辑。在他的逻辑体系中，由真、假、逻辑合取和逻辑析取构成的二元逻辑得到了扩展，并将第三个值视为介于真与假之间的中间值（未知值）[1]。真与假之间的对称关系继承自二元逻辑，但在这一逻辑体系中，第三个值并未得到与前两个值同等的处理。

基于克里普克逻辑的三值逻辑已应用于物理器件中，例如互补金属氧化物半导体（CMOS）电路 [2], [3] 和碳纳米管场效应晶体管（CNFET） [4], [5], [6]。在这些研究中，人们引入了许多用于计算三值的三值算子，例如标准三值反相器（STI）、负三值反相器（NTI）、正三值反相器（PTI）、三值与非（TNAND）、三值或非（TNOR）、三值译码器（TDecoder）和三进制半加器（THA） [6]。

本文提出了一种关注三个值对称性的新型三值逻辑。研究发现，只需一个一元算子和三个二元运算符即可表示任意三值计算。此外，本文还介绍了一种系统化的逻辑组合方法，使我们能够设计任意所需的三值逻辑电路。

II. 方法

本文提出了四种用于三值运算的算子，包括一个一元算子和三个二元运算符。本文将二元代数扩展到三值，同时保留其对称结构。本节回顾传统二元逻辑，并介绍一种新的三值逻辑。

A. 传统二元逻辑

表 I
的真值表
非运算符

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

表 II
与和或的真值表
算子

X	Y	$X \times Y$	$X + Y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

一元算子的真值表和二元运算符的真值表分别如表 I 和表 II 所示。NOT（X）算子将 0 转换为 1，将 1 转换为 0。该算子可解释为 0 和 1 之间的对称变换，其中 0 和 1 彼此连续。AND （ $X \times Y$ ）算子优先输出 0，只有当两个输入均为 1 时才输出 1。同样，OR（$X + Y$）算子优先输出 1，只有当两个输入均为 0 时才输出 0。

表 III 展示了二元逻辑满足的定律。对合律指出，任意二元值（即 0 和 1）经过两次 NOT 运算后都能还原：第一次 NOT 运算会使这两个值对称地转换为另一个值，第二次则将其转换回原值。有界律说明，0 是 OR 运算符的界，1 是 AND 运算符的界；任意值都会被限制在界内。恒等律描述了 AND 运算符与 1 运算时可以抵消，OR 运算符与 0 运算时也可以抵消；同一数值作用于二元运算符两次也具有同样的性质（幂等律）。互补律

表 III 二元逻辑中的定律

对合律	$\overline{\overline{x}} = x$。
有界律	$x \times 0 = 0$ $x + 1 = 1$
恒等律	$x \times 1 = x$ $x + 0 = x$
互补律	$x \times \overline{x} = 0$ $x + \overline{x} = 1$
幂等律	$x \times x = x$ $x + x = x$
交换律	$x \times y = y \times x$ $x + y = y + x$
结合律	$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$
分配律	$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ $x + (y \times z) = (x + y) \times (x + z)$
德摩根	$\overline{x \times y} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{x + y} = \overline{x} \times \overline{y}$

表明，任意二元值及其取反值共同作用于二元运算符时，可以得到一个常量值。此外，交换两个输入，或改变二元运算符的运算顺序，都不会改变计算结果（交换律和结合律）。分配律则描述了 AND 和 OR 运算符的运算顺序可以互换。德摩根对偶性指出，一个逻辑表达式与其变换后的表达式相等；后者将 0 与 1 互换，并将 AND 与 OR 运算符互换。

二元逻辑的一元运算符的常规公式定义如下：

$$f(a_0, a_1) = \overline{x} \times a_0 + x \times a_1 \tag{1}$$

将 0 或 1 代入公式中的 a_0 和 a_1，即可定义 4 ($= 2^2$) 个可能的一元运算符。例如，当 (a_0，a_1) 分别为 (0，1) 和 (1，0) 时，该公式分别表示恒等律和 NOT。由于 0 和 OR 的有界律，当 (a_0，a_1) 为 (0，0) 时，该公式表示常量 0；而当其为 (1，1) 时，得益于 1 和 AND 的恒等律，以及 1 与 OR 算子的互补律，该公式表示常量 1。

二元逻辑的二元运算符的常规公式如下：

$$f(a_0, \cdots, a_3) = \overline{x} \times \overline{y} \times a_0 + \overline{x} \times y \times a_1 + x \times \overline{y} \times a_2 + x \times y \times a_3 \tag{2}$$

该公式通过为 a_0 to a_3 赋值 0 或 1，描述了 16（$= 2^{2\times2}$）种可能的二元运算符。正如一元运算符中所述，将 a_0 to a_3 组合起来，可使该公式成为二元运算符。例如，当（a_0，a_1，a_2，a_3）分别设为（0，0，0，1）、（0，1，1，1）、（0，1，1，0）、（1，1，1，0）、（1，0，0，0）时，可分别得到与、或、异或、与非和或非算子。

这些正规公式使得我们能够如表 IV 和表 V 所示，根据真值表构造算子。二元运算符可以通过在真值表中为每个输入值设定所需的输出值，并将$a_0, \cdots, a_3$ 替换为输出值来设计。

表 IV
二元真值表
一元算子

X	A
0	a_0
1	a_1

表 V
二元真值表
二元运算符

X	Y	A
0	0	a_0
0	1	a_1
1	0	a_2
1	1	a_3

表 VI
旋转算子的真值表

X	$\overline{X}$
0	2
1	0
2	1

表 VII 阿尔法、贝塔和伽马算子的真值表

X	Y	$X \times Y$	$X + Y$	$X \diamond Y$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	2	0	2	2
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1
1	2	1	1	2
2	0	0	2	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

B. 提出的三值逻辑

一元算子和二元运算符的真值表分别见表 VI 和表 VII。如表中所示，旋转（X）算子将 0 变为 2、将 1 变为 0、将 2 变为 1，并对三进制值进行对称变换，类似于二元逻辑中的 NOT 运算符。二元逻辑中的 AND 和 OR 运算符分别以 0 和 1 为优先值，因此，我提出的阿尔法（$X \times Y$）、贝塔（$X + Y$）和伽马（$X \diamond Y$）算子分别以 0、1 和 2 为优先值。如果运算中没有出现优先值，算子则以次优先值为优先值。例如，若输入为 1 或 2，阿尔法运算符以 1 为优先值；若输入为 2 或 0，贝塔运算符以 2 为优先值；若算子的输入为 0 和 1，伽马运算符以 0 为优先值。请注意，当输入不包含 2 时，阿尔法和贝塔运算符的作用分别与传统二元逻辑中的 AND 和 OR 运算符相同。本文在省略括号时，三进制运算的计算优先级依次为旋转、阿尔法、贝塔和伽马运算符。

表 VIII 展示了三值逻辑满足的定律。所提出的三值运算旨在满足这些作为二元算子的定律。旋转算子可以对输入进行对称变换，连续应用三次旋转算子即可还原输入值。阿尔法和贝塔算子的界为 0 和 1，与传统二元逻辑中的 AND 和 OR 算子相同，而伽马算子的界为 2。本研究中的三值逻辑也具有幺元律。互补律包含三个项，每个项都经过旋转算子变换；将这些项应用于同一个二元算子，即可得到一个常数三值。若两个输入值相同，二元三值算子不会改变输入值（幂等律）。此外，我提出的方法也满足交换律和结合律。如果贝塔 马会.....

表 VIII 三值逻辑中的成立定律

对合律	$\overline{\overline{\overline{x}}} = x$
有界律	$x \times 0 = 0$ $x + 1 = 1$ $x \diamond 2 = 2$
恒等律	$x \times 2 = x$ $x + 0 = x$ $x \diamond 1 = x$
互补律	$x \times \overline{x} \times \overline{\overline{x}} = 0$ $x + \overline{x} + \overline{\overline{x}} = 1$ $x \diamond \overline{x} \diamond \overline{\overline{x}} = 2$
幂等律	$x \times x = x$ $x + x = x$ $x \diamond x = x$
交换律	$x \times y = y \times x$ $x + y = y + x$ $x \diamond y = y \diamond x$
结合律	$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$
分配律	$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ $x + (y \diamond z) = (x + y) \diamond (x + z)$ $x \diamond (y \times z) = (x \diamond y) \times (x \diamond z)$
德摩根	$\overline{x \times y} = \overline{x} \diamond \overline{y}$ $\overline{x + y} = \overline{x} \times \overline{y}$ $\overline{x \diamond y} = \overline{x} + \overline{y}$

算子首先计算；如果 GAMMA 运算符首先计算，则为 BETA 和 GAMMA 运算符；如果 ALPHA 运算符首先计算，则为 GAMMA 和 ALPHA 运算符。然而，当计算顺序颠倒时，分配律不适用于该运算（例如 $x + (y \times z) \neq (x + y) \times (x + z)$）。最后，我对三值运算符的对称设计使我们能够按照表中所示，通过德摩根定律转换三值逻辑表达式。

三值逻辑一元运算符的常规公式定义如下：

$$f(a_0, a_1, a_2) = x \times 1 + a_0 \diamond \overline{x} \times 1 + a_1 \diamond \overline{\overline{x}} \times 1 + a_2 \quad (3)$$

与（1）类似，将 0、1 或 2 代入 a_0，$\cdots$，a_8，可使该公式表现为 27（$= 3^3$）种可能的一元运算符。在该公式中，与二元逻辑中的常规公式不同，出现了一个常数三值 1。部分 $\times 1$ 起到滤波器的作用，它保留 0 和 1，并将 2 合并为 1；因此，对于 x 的任意三值，$x \times 1$ 只会变为 0 或 1。由于算子 $+$ 的幺元律，当 $x \times 1 = 0$ 时，部分 $x \times 1 + a_0$ 变为 a_0。由于 1 是算子 $+$ 的界，当 $x \times 1 = 1$ 时，对于 a_0 的任意取值，部分 $x \times 1 + a_0$ 都变为 1。$1\diamond$ 起到恒等函数的作用；因此，当 $x \times 1 = 1$ 时，项 $x \times 1 + a_0$ 消失。简而言之，由于 $+$ 的有界律和 $\diamond$ 的恒等律，对于 x 的任意输入，（3）中的三个项有两个会消失，剩余的项则由于 $+$ 的恒等律而变为 a_0、a_1 或 a_2。公式中的输入 x 会从 a_0、a_1 和 a_2 中选出一个，这与公式（1）中的输入 x 会从 a_0 或 a_1 中选出一个的情况类似。

三值逻辑二元运算符的常规公式定义如下：

$$\begin{aligned} f(a_0, \cdots, a_8) = {} & (x + y) \times 1 + a_0 \diamond (x + \overline{y}) \times 1 + a_1 \\ & \diamond (x + \overline{\overline{y}}) \times 1 + a_2 \diamond (\overline{x} + y) \times 1 + a_3 \\ & \diamond (\overline{x} + \overline{y}) \times 1 + a_4 \diamond (\overline{x} + \overline{\overline{y}}) \times 1 + a_5 \\ & \diamond (\overline{\overline{x}} + y) \times 1 + a_6 \diamond (\overline{\overline{x}} + \overline{y}) \times 1 + a_7 \\ & \diamond (\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}}) \times 1 + a_8 \end{aligned} \quad (4)$$

通过组合 a_0、$\cdots$、a_8，常规公式可以表示 19，683 ($= 3^9$) 种可能的二元运算。在该公式中，根据输入值 x 和 y，从 a_0、$\cdots$、a_8 中选择一个；同样地，在（2）中，根据输入值 x 和 y，从 a_0、$\cdots$、a_3 中选择一个。

表 IX
三值一元运算符的真值表
三值一元运算符

X	A
0	a_0
1	a_1
2	a_2

表 X
三值一元运算符的真值表
二元运算符

X	Y	A
0	0	a_0
0	1	a_1
0	2	a_2
1	0	a_3
1	1	a_4
1	2	a_5
2	0	a_6
2	1	a_7
2	2	a_8

正规公式还可以根据表 IX 和表 X 所示的真值表构造算子。此外，正规公式可以轻松扩展到输入数量为 3 或 4 的算子，此时可能的算子数量分别为 3^{27} 或 3^{81}。

然而，与二元逻辑不同，常量值与变量之间的某些运算无法完全简化。例如，$x \diamond 0$ 中的 0 无法消去，因为 0 既不是算子 $\diamond$ 的恒等律，也不是其界。不过，这些值以牺牲简洁性为代价，提升了三元计算的表达能力。如表 XI 所示，27 种可能的一元运算中，有 21 种可以通过算子与常量值的组合表示。表 XII 和表 XIII 展示了其余 6 种可能的运算，它们可按如下方式计算：

$$x = x \times 1 \diamond \overline{\overline{x}} \times 1 + 2 \quad (5)$$

$$\overline{x} = \overline{x} \times 1 \diamond x \times 1 + 2 \quad (6)$$

$$\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} \times 1 \diamond \overline{x} \times 1 + 2, \quad (7)$$

$$\widehat{x} = x \times 1 \diamond \overline{x} \times 1 + 2 \quad (8)$$

$$\widehat{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} \times 1 \diamond x \times 1 + 2 \quad (9)$$

$$\widehat{\overline{\overline{x}}} = \overline{x} \times 1 \diamond \overline{\overline{x}} \times 1 + 2. \quad (10)$$

这些公式使我们能够简化式（3）和式（4）所示的常规公式。下一节将展示简化过程。

常量变量的二元运算真值表 XI

X	$(X\diamond 0)\diamond 0$	$(X\diamond 0)\times 1$	$(X\diamond 0)+2$	$(X\times 1)\diamond 0$	$(X\times 1)\times 1$	$(X\times 1)+2$	$(X+2)\diamond 0$	$(X+2)\times 1$	$(X+2)+2$
0	0	0	2	0	0	2	2	1	2
1	0	0	2	0	1	1	0	1	1
2	2	1	2	0	1	1	2	1	2

X	$(\overline{X}\diamond 0)\diamond 0$	$(\overline{X}\diamond 0)\times 1$	$(\overline{X}\diamond 0)+2$	$(\overline{X}\times 1)\diamond 0$	$(\overline{X}\times 1)\times 1$	$(\overline{X}\times 1)+2$	$(\overline{X}+2)\diamond 0$	$(\overline{X}+2)\times 1$	$(\overline{X}+2)+2$
0	2	1	2	0	1	1	2	1	2
1	0	0	2	0	0	2	2	1	2
2	0	0	2	0	1	1	0	1	1

X	$(\overline{\overline{X}}\diamond 0)\diamond 0$	$(\overline{\overline{X}}\diamond 0)\times 1$	$(\overline{\overline{X}}\diamond 0)+2$	$(\overline{\overline{X}}\times 1)\diamond 0$	$(\overline{\overline{X}}\times 1)\times 1$	$(\overline{\overline{X}}\times 1)+2$	$(\overline{\overline{X}}+2)\diamond 0$	$(\overline{\overline{X}}+2)\times 1$	$(\overline{\overline{X}}+2)+2$
0	0	0	2	0	1	1	0	1	1
1	2	1	2	0	1	1	0	1	2
2	0	0	2	0	0	2	2	1	2

表 XII
真值表
旋转算子

X	X	$\overline{X}$	$\overline{\overline{X}}$
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

表 XIII
真值表
反转算子

X	$\widehat{X}$	$\overline{\widehat{X}}$	$\overline{\overline{\widehat{X}}}$
0	0	2	1
1	2	1	0
2	1	0	2

III. 结果

为说明我所提出方案的完备性，我们使用该方案重新构造了传统的一元运算（如 STI、NTI 和 PTI）以及二元运算（如 TAND、TOR、三进制与非和三进制或非）。此外，我们还使用该方案设计了一个三进制半加器电路。

A. 三进制反相器

表 XIV
STI、NTI 和 PTI 的真值表，NTI 和 PTI

X	STI	NTI	PTI
0	2	2	2
1	1	0	2
2	0	0	0

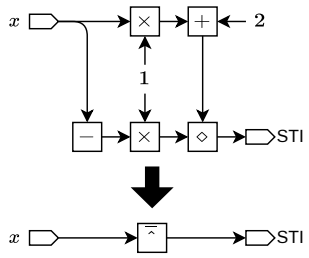

图 1. 标准三进制反相器（STI）电路

根据表 XIV 和表 IX，STI 的逻辑表达式如下：

$$\begin{aligned}\text{STI} &= x\times 1+2\diamond\overline{x}\times 1+1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1+0\\ &= x\times 1+2\diamond 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1=\overline{\overline{x}}\times 1\diamond x\times 1+2=\widehat{\overline{x}}.\end{aligned}\tag{11}$$

在这个方程中，$\overline{x}\times 1+1$ 被替换为 1，因为 1 是 $+$ 的界；整个项被省略，因为 1 同时也是 $\diamond$ 的恒等元。因此，方程与式 (9) 相同。图 1 展示了生成的电路。如图所示，该电路由五个算子组成。

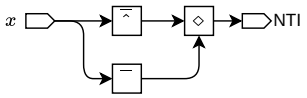

图 2. 负三进制反相器（NTI）电路

NTI 对应的表达式如下：

$$\begin{aligned}\text{NTI} &= x\times 1+2\diamond\overline{x}\times 1+0\diamond\overline{\overline{x}}\times 1+0\\ &= x\times 1+2\diamond x\times 1+2\diamond\overline{x}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1\\ &= (\overline{\overline{x}}\times 1\diamond x\times 1+2)\diamond(\overline{x}\times 1\diamond x\times 1+2)=\widehat{\overline{x}}\diamond\overline{x}.\end{aligned}\tag{12}$$

幂等律允许我们复制一个项 $x\times 1+2$，随后根据结合律得到两个项 $x\overline{=}1\diamond x\times 1+2$和 $x\overline{-}1\diamond x\times 1+2$。替换操作通过式 (9) 和式 (7) 完成。图 2 展示了生成的电路。如图所示，该电路包含三个算子，其中包括一个标准三值反相器。

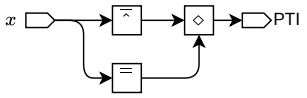

图 3. 正三值反相器（PTI）电路

与 PTI 对应的表达式如下所示：

$$\begin{aligned}\text{PTI} &= x\times 1+2\diamond\overline{x}\times 1+2\diamond\overline{\overline{x}}\times 1+0\\ &= x\times 1+2\diamond\overline{x}\times 1+2\diamond\overline{\overline{x}}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1\\ &= (\overline{\overline{x}}\times 1\diamond x\times 1+2)\diamond(\overline{\overline{x}}\times 1\diamond\overline{x}\times 1+2)=\widehat{\overline{x}}\diamond\overline{\overline{x}}.\end{aligned}\tag{13}$$

其计算过程与 NTI 的情况类似。正三进制反相器电路如图3所示。

表 XV 三进制与非和三进制或非的真值表

X	Y	$TNAND$	$TNOR$
0	0	2	2
0	1	2	1
0	2	2	0
1	0	2	1
1	1	1	1
1	2	1	0
2	0	2	0
2	1	1	0
2	2	0	0

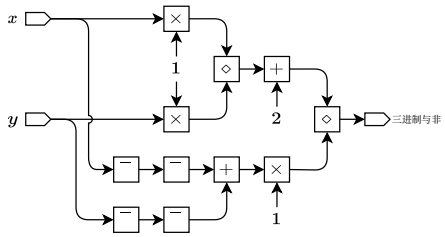

图 4. 三进制与非电路

B. 三进制与非和三进制或非

由表 X 生成的三进制与非的逻辑表达式如下:

$$
\begin{aligned}
\text{TNAND} &= (x+y)\times 1+2\diamond(x+\overline{y})\times 1+2\diamond(x+\overline{\overline{y}})\times 1+2\\
&\diamond(x+y)\times 1+2\diamond(\overline{x}+y)\times 1+2\diamond(\overline{\overline{x}}+y)\times 1+2\\
&\diamond(\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}})\times 1\\
&=(x\times 1+y\times 1\diamond x\times 1+\overline{y}\times 1\diamond x\times 1+\overline{\overline{y}}\times 1)+2\\
&\diamond(x\times 1+y\times 1\diamond\overline{x}\times 1+y\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1+y\times 1)+2\\
&\diamond(\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}})\times 1\\
&=(y\times 1\diamond\overline{y}\times 1\diamond\overline{\overline{y}}\times 1)+x\times 1+2\\
&\diamond(x\times 1\diamond\overline{x}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1)+y\times 1+2\diamond(\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}})\times 1\\
&=x\times 1+2\diamond y\times 1+2\diamond(\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}})\times 1\\
&=(x\times 1\diamond y\times 1)+2\diamond(\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}})\times 1. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

在该方程中，包含 $+1$ 的项已省略，并且已进行项的合并。因此，所有项大致可分为三部分：第一部分包含 x，第二部分包含 y，其余为另一部分。利用分配律展开这些项后，第一类和第二类项可通过 $+2$ 合并；接着， $+2$ 中的第一项和第二项可分别通过 $x\times 1$、 $y\times 1$合并。如下所示， $y\times 1\diamond y\times 1\diamond y\times 1$和 $x\times\underline{1}\diamond x\times 1\diamond x\times 1$计算结果为 0:

$$
\begin{aligned}
x\times 1\diamond\overline{x}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1 &= (x\diamond\overline{x}\diamond\overline{\overline{x}})\\
&\quad\times(x\diamond\overline{x})\times(\overline{x}\diamond\overline{\overline{x}})\times(\overline{\overline{x}}\diamond x)\\
&\quad\times(x\times\overline{x}\times\overline{\overline{x}})\times 1=2\\
&\quad\times(x\diamond\overline{x})\times(\overline{x}\diamond\overline{\overline{x}})\times(\overline{\overline{x}}\diamond x)\times 0\times 1\\
&\quad=0. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

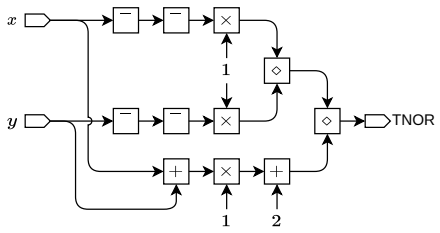

图 5. 三进制或非电路

生成的三进制与非电路如图 4 所示。

由表 X 得出的三进制或非逻辑表达式如下:

$$
\begin{aligned}
\text{TNOR} &= (\overline{\overline{x}}+y)\times 1\diamond(\overline{\overline{x}}+\overline{y})\times 1\diamond(\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}})\times 1\\
&\diamond(x+\overline{\overline{y}})\times 1\diamond(\overline{x}+\overline{\overline{y}})\times 1\diamond(\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}})\times 1\\
&\diamond(x+y)\times 1+2\\
&=\overline{\overline{x}}\times 1+y\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1+\overline{y}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1+\overline{\overline{y}}\times 1\\
&\diamond x\times 1+\overline{\overline{y}}\times 1\diamond\overline{x}\times 1+\overline{\overline{y}}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1+\overline{\overline{y}}\times 1\\
&\diamond(x+y)\times 1+2=(y\times 1\diamond\overline{y}\times 1\diamond\overline{\overline{y}}\times 1)+\overline{\overline{x}}\times 1\\
&\diamond(x\times 1\diamond\overline{x}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1)+\overline{\overline{y}}\times 1\diamond(x+y)\times 1+2\\
&=\overline{\overline{x}}\times 1\diamond\overline{\overline{y}}\times 1\diamond(x+y)\times 1+2. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

The equation results in simple operations by the calculation as TNAND, and its circuit is shown in Fig. 5. The logical expressions of TAND and TOR operation can also be obtained by (4) as this paper demonstrated with TNAND and TOR.

C. Ternary Half-Adder (THA)

TABLE XVI
TRUTH TABLE OF A TERNARY HALF-ADDER

X	Y	$Carry$	Sum
0	0	0	0
0	1	0	1
0	2	0	2
1	0	0	1
1	1	0	2
1	2	1	0
2	0	0	2
2	1	1	0
2	2	1	1

我的方案也可以构建三进制半加器。三进制半加器由两个信号组成：和与进位。进位和和的逻辑表达式如下:

$$
\begin{aligned}
\text{Carry} &= (x+y)\times 1\diamond(x+\overline{y})\times 1\diamond(x+\overline{\overline{y}})\times 1\\
&\diamond(\overline{x}+y)\times 1\diamond(\overline{x}+\overline{y})\times 1\diamond(\overline{\overline{x}}+y)\times 1\\
&=x\times 1+y\times 1\diamond x\times 1+\overline{y}\times 1\diamond x\times 1+\overline{\overline{y}}\times 1\\
&\diamond\overline{x}\times 1+y\times 1\diamond\overline{x}\times 1+\overline{y}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1+y\times 1\\
&=(y\times 1\diamond\overline{y}\times 1\diamond\overline{\overline{y}}\times 1)+x\times 1\\
&\diamond(x\times 1\diamond\overline{x}\times 1\diamond\overline{\overline{x}}\times 1)+y\times 1\diamond(\overline{x}+\overline{y})\times 1\\
&=x\times 1\diamond y\times 1\diamond(\overline{x}+\overline{y})\times 1, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

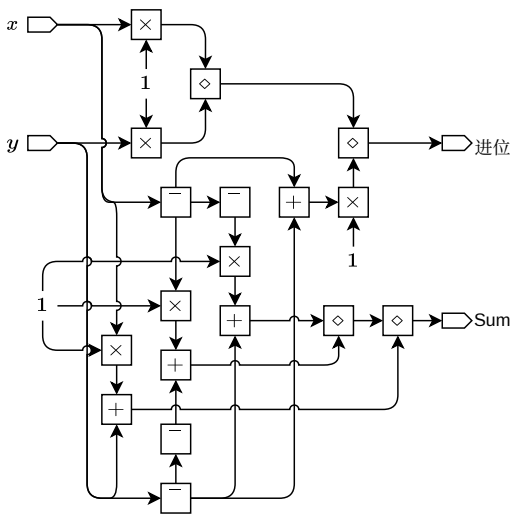

图 6. 三进制半加器（THA）电路

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sum} &= (x+y)\times 1 \diamond (x+\overline{\overline{y}})\times 1+2\\
&\diamond (\overline{x}+\overline{\overline{y}})\times 1 \diamond (\overline{x}+\overline{y})\times 1+2\\
&\diamond (\overline{\overline{x}}+y)\times 1+2 \diamond (\overline{\overline{x}}+\overline{y})\times 1\\
&= x\times 1+y\times 1 \diamond x\times 1+\overline{\overline{y}}\times 1+2\\
&\diamond \overline{x}\times 1+\overline{\overline{y}}\times 1 \diamond \overline{x}\times 1+\overline{y}\times 1+2\\
&\diamond \overline{\overline{x}}\times 1+\overline{y}\times 1 \diamond \overline{\overline{x}}\times 1+y\times 1+2\\
&= x\times 1+(y\times 1 \diamond \overline{\overline{y}}\times 1+2)\\
&\diamond \overline{x}\times 1+(\overline{\overline{y}}\times 1 \diamond \overline{y}\times 1+2)\\
&\diamond \overline{\overline{x}}\times 1+(\overline{y}\times 1 \diamond y\times 1+2)\\
&= x\times 1+y\diamond \overline{x}\times 1+\overline{\overline{y}}\diamond \overline{\overline{x}}\times 1+\overline{y}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

如三进制与非的计算步骤所示，$y\times 1\diamond y\times\overline{1}\diamond y\times\overline{\overline{1}}$ 和 $x\times 1\diamond x\times 1\diamond x\times 1$部分简化为 0。此外，根据式（5）、（6）和（7），$y\times 1\diamond y\times 1+2$、$y\times 1\diamond y\times 1+2$和 $y\times 1\diamond y\times 1+2$ 部分可分别替换为 y、y和 y。三进制半加器的三进制电路如图 6 所示。

IV. 讨论

本文提出了新的对称三值算子以及三值逻辑电路的系统化设计方法。本文的结果表明，任何三值计算电路都可以通过四种基本三值算子——旋转、阿尔法、贝塔和伽马——进行设计。这些三值算子的组合实现了三进制半加器电路的全三值实现，而传统实现则包含二进制逻辑门 [5], [6]。

然而，三进制真值表输入数量的增加会导致巨大的计算成本。由于通用公式包含三种不同的二元运算符，其化简需要复杂的计算。要充分发挥我的方案的潜力，就需要一种系统的化简算法。例如，NTI 和 PTI 也可以表示为 $\overline{X\diamond 0}$ 以及 $\overline{(X+2)}\diamond 0$ 尽管这项工作并未找出这些变换。

此外，还需要一种将传统二元逻辑转换为我所提出的三值逻辑的系统性变换算法。这些变换与化简算法可提升当前超大规模集成电路的性能并缩小其面积。

参考文献

[1] Melvin Fitting。《克里普克逻辑》的推广。逻辑与计算杂志，1(6):797–810，1991。[2] Mohd Ziauddin Jahangir 和 J. Mounika。创新型互补金属氧化物半导体三进制三选一多路复用器的设计与仿真，以及利用三进制三选一多路复用器设计三进制半加器。微电子学杂志，90:82–87，2019。[3] Aloke Saha 和 Narendra Deo Singh。基于双功耗逻辑的三值逻辑电路系统化设计策略。国际纳米颗粒杂志，12(1-2):3–16，2020。[4] Trapti Sharma 和 Laxmi Kumre。使用高效移位文字的基于碳纳米管场效应晶体管的非平衡三进制电路设计。微电子学杂志，104:104869，2020。[5] Sheng Lin、Yong-Bin Kim 和 Fabrizio Lombardi。基于碳纳米管场效应晶体管的三进制逻辑门和算术电路设计。*IEEE* 纳米技术汇刊，10(2):217–225，2009。[6] Ramzi A Jaber、Abdallah Kassem、Ahmad M El-Hajj、Lina A El-Nimri 和 Ali Massoud Haidar。高性能、高能效的基于碳纳米管场效应晶体管的三值逻辑电路设计。*IEEE Access*，7 93886，2019 93871：–。