无名稿件编号（将由编辑插入）

离散八元数分析中的柯西公式与哈代空间

Rolf S¨oren Kraußhar · Dmitrii Legatiuk

本文谨献给 John Ryan，以纪念他荣休。

arXiv:2305.04121v1 [math.CV] 6 May 2023

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要 本文继续推进离散八元数分析的基础理论，该理论与作用于八元数上的离散一阶柯西–黎曼算子相关。具体而言，我们建立了离散八元数版本的Borel-Pompeiu公式和柯西积分公式。随后，我们利用后者引入离散单整八元数柯西变换。借助这一工具，我们进一步引入上半空间和下半空间的离散八元数 Hardy 空间，并给出普莱梅利投影公式。

关键词 八元数 · 离散狄拉克算子 · 离散单整函数 · 离散八元数函数论 · 离散柯西变换 ·哈代空间

数学主题分类（2010） 39A12 · 42A38 · 44A15

1 引言

复分析工具及其相关的离散化方法构成了一个非常强大的工具箱，可用于数值求解，某些情况下甚至可以解析求解许多具有给定边界数据、且出现在调和分析背景中的偏微分方程。这里的重点.....

Rolf S¨oren Kraußhar 埃尔福特大学 数学教席 Nordh¨auser 街 63 号，99089 埃尔福特，德国 电子邮箱：soeren.krausshar@uni-erfurt.de

Dmitrii Legatiuk 埃尔福特大学 数学教席 Nordh¨auser Str. 63, 99089 Erfurt，德国 电子邮箱：dmitrii.legatiuk@uni-erfurt.de

是柯西-黎曼算子的离散版本的零解，并满足柯西积分和 Borel-Pompeiu公式的离散版本。这些积分公式为我们提供了解的表示所需的关键要素。

如今，有多种方法可以将复函数理论及其离散化推广到更高维的情形。许多工程领域尤其关注三维推广。为处理三维情形，与结合克利福德代数相关的函数论已被证明是一种非常有效的工具。在此背景下，人们考虑由 $D := \sum \partial_{x_i} \mathbf{e}_i$ 定义的三维柯西-黎曼算子，其中 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是生成克利福德代数 $\mathcal{C}\ell_{0,\,2}$ 的两个不同虚单位。该代数以基元素 $1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ 为基构成一个 $\mathbb{R}$-向量空间。实际上，特殊情形 $\mathcal{C}\ell_{0,\,2}$ 表示哈密顿四元数，它构成一个非交换斜域。

利用克利福德代数的乘法结构，广义一阶柯西-黎曼算子可将 $\mathbb{R}^3$ 中的二阶拉普拉斯算子因式分解。事实上，这种方法可以很容易地推广到所有结合克利福德代数。如今，其函数论通常被称为克利福德分析，而广义柯西-黎曼算子核中的函数则常称为单生成函数、超全纯函数或克利福德全纯函数。经典参考文献包括著作 [2,19]，以及 J. Ryan 编辑的文集，其中收录了具有里程碑意义的贡献 [25] 等；这些著作为该函数论的发展（包括其在卡尔德龙-齐格蒙德型算子中的应用）提供了推动。特别是，[19]展示了相关积分算子，尤其是与柯西变换相关的普列梅利-索霍茨基型公式，如何成功地用于处理边值问题。此外，J. Ryan 及其合作者也在 [18] 中运用这一函数论工具研究了无界区域。

在过去二十年里，人们对离散化连续克利福德分析的兴趣日益增长，以便为更高维的结合框架开发数值算法，例如参见 [3,5,6,8,9,13,14,17] 等。不过，除了将向量空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 嵌入结合克利福德代数 $\mathcal{C}\ell_{0,n}$（当 $n > 2$ 时其中含有零因子）之外，还有许多其他方法可以将复分析推广到高维。如果对复数应用凯莱-迪克森倍增过程，我们首先会得到四维的哈密顿四元数，正如前面提到的，它们仍是克利福德代数的一种特殊情形。然而，如果接下来对四元数应用凯莱-迪克森倍增过程，就会得到另一类代数，即八元数或凯莱数，后文均记作 $\mathbb{O}$，例如参见 [1] 等。八元数是非结合的。因此，它们不属于克利福德代数，也无法用矩阵表示。不过，与八维克利福德代数 $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ 不同，八元数仍构成一个赋范除代数（广义而言，即非结合且没有零因子）。因此，每个非零元素都有一个乘法逆元。根据.....

根据著名的赫尔维茨定理，它们构成了 $\mathbb{R}$上最大的实赋范无零因子代数。

令人惊讶的是，尽管八元数并不具有结合性，但根据近期发表的粒子物理学研究成果，参见例如 [4,16,26]，八元数似乎为统一描述粒子物理学（包括引力）提供了更为恰当的模型。这一观点也已由 F. G¨ursey 和 H. Tze 在1996年出版的著作中提出，参见 [20]。这进一步促使人们在八元数这一非结合背景下，发展解析工具和离散化的函数论工具。至少在连续情形下，八元数函数理论的基础已经相当成熟，参见例如 [12,27,32,33]。文献 [34] 尤其介绍了柯西变换的推广，以及普勒梅利投影公式，并给出了一些在卡尔德龙-齐格蒙德型算子中的基本应用。近期，研究人员还成功地在连续情形下引入了有意义的八元数版 Bergman 空间和哈代空间，参见例如 [30,31,11,10], ；此外，论文 [15,28] 则从更一般的层面探讨了八元数希尔伯特空间。

然而，如果我们希望以数值方式求解实际的八元数边值问题，就需要这些八元数算子的离散版本。据我们所知，离散八元数函数论的发展仍然是一个相当开放的研究领域。在我们最近的论文 [23], 中，我们为这一方向的研究奠定了基础，即以厄米意义下适当的前向和后向算子为基础，引入了八元数柯西-黎曼算子的离散版本，并为该算子建立了离散斯托克斯公式。

在本文中，我们从离散斯托克斯公式出发，进一步加以利用，从而得到布雷洛特–庞皮厄公式的离散八元数版本。后者在特殊情形下又产生离散柯西公式。下一步，我们建立了八元数柯西变换的离散版本，该变换已在连续层面于[34]中引入。相关的普勒梅利–索霍茨基投影公式进而促成了离散八元数单生哈代空间这一推广概念的定义。具体而言，本文重点考察上半八元数空间（分别地，其相关的上半格），其中最后一个分量满足 $x_7 > 0$。在此情形下，我们可以对这里所需使用的内积给出简单的几何描述。引入离散八元数单生哈代空间的另一种方式，是利用复化八元数上的傅里叶变换及其相关的傅里叶符号来定义适当的延拓算子；在我们的框架中，这些傅里叶符号同样是复化八元数。本文也将仔细发展这一方法，因为它具有完全显式的优点。

由于非结合性，离散八元数 Borel-Pompeiu 公式和柯西公式中的符号与离散克利福德分析中的结果不同。令人惊讶的是，我们在此构建的连续八元数分析的离散化产生了一个有趣的效果：连续情形的斯托克斯公式中固有的结合子表达式（见[34]）在我们的离散化构造中消失了。这种效果也会出现

在不采用前向和后向算子、而改用其中心化版本时。本文也特别关注这一版本，以便更全面地了解这一特定现象。

因此，离散八元数情形不仅与克利福德分析中的结合版本截然不同，也不同于连续八元数单值函数理论。它揭示了新的内在特性，必须予以充分重视。

2 预备知识与符号

2.1 连续八元数分析

本节简要回顾连续八元数分析的基本概念和最基本的结果。基本背景是8维欧几里得向量空间 $\mathbb{R}^8$，其中标准向量记为 $\mathbf{e}_k, k = 0, 1, \ldots, 7$。来自 $\mathbb{R}^8$ 的向量通常可用其实坐标表示为 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_7)$。此外，$\mathbb{R}^8$-向量也可以描述为八元数

$$x = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4 + x_5\mathbf{e}_5 + x_6\mathbf{e}_6 + x_7\mathbf{e}_7,$$

其中我们现在还进一步规定 $\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_6 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ and $\mathbf{e}_7 = \mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3$。此外，对于所有$i = 1, \ldots, 7$，我们有 $\mathbf{e}_i^2 = -1$ and $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_0$；对于任意互不相同的 $i, j \in \{1, \ldots, 7\}$，我们也有 $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$；并且 $\mathbf{e}_0$ 是单位元，因此通常会省略。此定义还赋予 $\mathbb{R}^8$ 一种乘法封闭结构。

表 1 完整描述了实八元数的乘法规则。该表特别清楚地表明，八元数乘法实际上具有封闭性，但不满足结合律，例如，我们有 $(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)$。

表 1 实八元数的乘法表 $\mathbb{O}$

$\cdot$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_0$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_4$	-1	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	-1	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_7$	-1	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	-1	$-\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	-1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

这里，我们采用与 [1] 中相同的基元素标记。此外，我们还需要考虑八元数共轭，其定义为

$$\overline{x} = x_0\mathbf{e}_0 - x_1\mathbf{e}_1 - x_2\mathbf{e}_2 - x_3\mathbf{e}_3 - x_4\mathbf{e}_4 - x_5\mathbf{e}_5 - x_6\mathbf{e}_6 - x_7\mathbf{e}_7.$$

于是， $\mathbb{R}^8$ 中的欧几里得范数可由 $x \cdot \overline{x} = \sum_{j=0}^{7} x_i^2 = |x|^2$ 重现，因此每个非零八元数 x 都可通过 $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}$ 求逆。

尽管将经典函数理论推广到八元数存在多种可能的途径，但这里我们回顾黎曼方法意义下的定义，遵循 P. Dentoni 和 M. Sce [12],K. Nono [27], Xingmin-Li 和 Zhong Peng 学派的经典发展脉络，参见例如 [32]及其他相关文献。在这一意义下，我们回顾如下：

定义 1（八元数单生成性）设 $U \subseteq \mathbb{O}$ 为一个开集。实可微函数 $f : U \to \mathbb{O}$ 称为左（右）八元数单生成函数，如果 $\mathcal{D}f = 0$（特别是 $f\mathcal{D} = 0$）。这里， $\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{7} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 是八元数一阶柯西-黎曼算子。如果 f 满足 $\overline{\mathcal{D}} f = 0$ （分别为 $f\overline{\mathcal{D}} = 0$），则称 f 为左（右）八元数反单生成函数。

八元数分析与经典克利福德分析有两个关键区别：

（i）八元数分析研究从 $\mathbb{R}^8$ 到 $\mathbb{R}^8$的函数，而克利福德分析研究定义在副向量空间 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$ 上的柯西-黎曼算子的零解，其值属于克利福德代数 $\mathcal{C}\ell_7$。 $\mathcal{C}\ell_7$然而是一个与 $\mathbb{R}^{128}$同构的实向量空间。

（ii）左（右）八元数单生成函数既不构成右 $\mathbb{O}$-模，也不构成左 $\mathbb{O}$-模。例如，参见 J. Kauhanen 和 H. Orelma 在 [22] 中给出的具体例子。这一事实使八元数环境中一致函数论以及广义希尔伯特函数空间理论的发展变得更加复杂，另见 [10,11,28]。

此外，非结合性导致经典积分公式需要进行修改，例如斯托克斯公式 [34]:

$$\int_{\partial G} g(x)\,(d\sigma(x) f(x)) = \int_{G} \left(g(x)(\mathcal{D}f(x)) + (g(x)\mathcal{D})f(x) - \sum_{j=0}^{7} [e_j, \mathcal{D}g_j(x), f(x)] \right) dV, \tag{1}$$

这里出现了表达式 $[a,b,c] := (ab)c - a(bc)$，称为结合子。这是一个内在特征，在满足结合律的情况下会被消除。需要指出的是，尽管结合子出现在大多数八元数构造中，但仍然可以引入特定结构，使结合子消失。例如， [32], 指出，若考虑两个既为八元数单生成函数又为 Stein-Weiss共轭调和函数的函数，即对所有 $0 \le i < j \le 7$均有 $\frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$，则结合子将消失。

此外，八元数环境中的柯西积分公式推广已有介绍，参见例如 [27,33]:

命题 1（柯西积分公式）设 $U \subseteq \mathbb{O}$ 为开集，且 $G \subseteq U$ 为具有强利普希茨边界 ∂G的八维紧致定向流形。若 $f\colon U \to \mathbb{O}$ 是左八元数单生成，则对所有 $x \in G$

$$f(x) = \frac{3}{\pi^4} \int\limits_{\partial G} q_{\mathbf{0}}(y-x)\Big(d\sigma(y) f(y)\Big).$$

然而，如果括号采用不同的设置，就会得到不同的公式

$$\frac{3}{\pi^4} \int\limits_{\partial G} \Big(q_{\mathbf{0}}(y-x) d\sigma(y)\Big) f(y) = f(x) + \int\limits_{G} \sum_{i=0}^{7} \Big[q_{\mathbf{0}}(y-x), \mathcal{D} f_i(y), \mathbf{e}_i\Big] dy_0 \cdots dy_7,$$

其中再次涉及结合子。

2.2 八元数分析的离散化

考虑无界均匀格点 $h\mathbb{Z}^8$ ，其格点常数为$h > 0$，按经典方式定义如下

$$h\mathbb{Z}^8 := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^8 \,|\, \mathbf{x} = (m_0 h, m_1 h, \ldots, m_7 h), m_j \in \mathbb{Z}, j = 0, 1, \ldots, 7 \right\}.$$

接下来，我们定义经典的前向差分与后向差分 $\partial_h^{\pm j}$ 如下

$$\begin{array}{l} \partial_h^{+j} f(mh) := h^{-1}(f(mh + \mathbf{e}_j h) - f(mh)), \\ \partial_h^{-j} f(mh) := h^{-1}(f(mh) - f(mh - \mathbf{e}_j h)), \end{array} \tag{2}$$

对于满足 $mh \in h\mathbb{Z}^8$ 的离散函数 $f(mh)$。接下来，我们考虑定义在 $\Omega_h \subset h\mathbb{Z}^8$ 上且取值为八元数 $\mathbb{O}$ 的函数。通常，所有重要性质（例如 l^p 可求和性（$1 \leq p < \infty$））均按分量定义。

下一步是引入八元数中的柯西-黎曼算子的离散化。不同于例如在 [3,14], 中介绍的经典离散克利福德分析（其中使用了韦尔演算的基本思想），我们遵循 [13] 中提出的替代方法，该方法利用前向和后向有限差分算子，直接将连续柯西-黎曼（或狄拉克）算子离散化。遵循这一方法，可以保留八元数乘法的非结合性，详见 [23] 。因此，通过使用有限差分算子（2），我们引入如下离散前向柯西-黎曼算子 $D^+\colon\ l^p(\Omega_h, \mathbb{O}) \to l^p(\Omega_h, \mathbb{O})$，以及离散后向柯西–黎曼算子 $D^-\colon\ l^p(\Omega_h, \mathbb{O}) \to l^p(\Omega_h, \mathbb{O})$

$$D_h^+ := \sum_{j=0}^{7} \mathbf{e}_j \partial_h^{+j}, \quad D_h^- := \sum_{j=0}^{7} \mathbf{e}_j \partial_h^{-j}. \tag{3}$$

直接计算表明，在此设定下，星形拉普拉斯算子 Δ_h 表示如下:

$$\Delta_h = \frac{1}{2}\left(D_h^+\overline{D_h^-} + D_h^-\overline{D_h^+}\right) \text{ with } \Delta_h := \sum_{j=0}^{7}\partial_h^{+j}\partial_h^{-j},$$

其中，$\overline{D_h^+}$ 和 $\overline{D_h^-}$分别为离散共轭正向和反向柯西–黎曼算子:

$$\overline{D_h^-} = \partial_h^{-0} - \sum_{j=1}^{7}\mathbf{e}_j\partial_h^{-j}, \quad \overline{D_h^+} = \partial_h^{+0} - \sum_{j=1}^{7}\mathbf{e}_j\partial_h^{+j}.$$

由于我们考虑离散前向和后向柯西-黎曼算子，因此也有必要区分离散前向和后向单生成函数:

定义 2 称函数 $f \in l^p(\Omega_h, \mathbb{O})$ 为离散左前向单值函数，如果 $D_h^+ f = 0$ in Ω_h。相应地，称函数 $f \in l^p(\Omega_h, \mathbb{O})$ 为离散左后向单值函数，如果 $D_h^- f = 0$ in Ω_h。

2.3 离散基本解

为了构造博雷尔-庞培公式和柯西公式的离散版本，必须研究离散柯西-黎曼算子和离散拉普拉斯算子的离散基本解。因此，下面的定义引入了离散柯西-黎曼算子（3）的一个离散基本解:

定义 3 若函数 $E_h^+ : h\mathbb{Z}^8 \to \mathbb{O}$ 满足

$$D_h^+ E_h^+ = \delta_h = \begin{cases} h^{-8}, & \text{for } mh = 0, \\ 0, & \text{for } mh \neq 0, \end{cases}$$

对 $h\mathbb{Z}^8$ 的所有网格点 mh 均成立，则称函数 $E_h^- : h\mathbb{Z}^8 \to \mathbb{O}$ 为 D_h^- 的离散基本解，若它满足

$$D_h^- E_h^- = \delta_h = \begin{cases} h^{-8}, & \text{for } mh = 0, \\ 0, & \text{for } mh \neq 0, \end{cases}$$

对 $h\mathbb{Z}^8$ 的所有网格点 mh 均成立。

一如既往，可以通过对 $u \in l^p\left(h\mathbb{Z}^8, \mathbb{O}\right), 1 \leq p < +\infty$, 进行离散傅里叶变换来构造离散基本解,

$$\xi \mapsto \mathcal{F}_h u(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^8} e^{i\langle mh,\xi\rangle} u(mh)h^8, \quad \xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]^8,$$

8其中 $\langle mh, \xi \rangle = h \sum m_j \xi_j$。值得强调的是，最后一个表达式$j=1$隐含地引入了 $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} := \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$意义下的复化八元数结构，这意味着复虚数单位 i 与所有实八元数均可交换。

逆变换由 $\mathcal{F}_h^{-1} = \mathcal{R}_h \mathcal{F}$ 给出，其中 $\mathcal{F}$ 是经典连续傅里叶变换

$$x \mapsto \mathcal{F}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{\mathbb{R}^8} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi,$$

作用于八元数值函数 $f \in l^p\left(h\mathbb{Z}^8, \mathbb{O}\right)$ 其支集为 $f \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]^8$，而 $\mathcal{R}_h$ 表示其在格点 $h\mathbb{Z}^8$上的限制。再次注意， f是 $\mathbb{O}$值的，因此表达式 $e^{-i\langle x,\, \xi \rangle} f(\xi)$ 在形式上嵌入于 $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ 中。

接下来，我们回顾前向差分与后向差分 $\partial_h^{\pm j}$ 的已知符号，即 $\xi_h^{\pm j} = \mp h^{-1}\left(1 - e^{\mp i h \xi_j}\right)$，以及星形拉普拉斯算子的符号：

$$\mathcal{F}_h(\Delta_h u)(\xi) = d^2 \mathcal{F}_h u(\xi) \text{ with } d^2 = \frac{4}{h^2} \sum_{j=0}^{7} \sin^2\left(\frac{\xi_j h}{2}\right).$$

因此，对前向与后向柯西–黎曼算子应用离散傅里叶变换可得

$$\mathcal{F}_h(D_h^+ u)(\xi) = \left(\sum_{j=0}^{7} \mathbf{e}_j \xi_h^{+j}\right) \mathcal{F}_h u(\xi), \quad \mathcal{F}_h(D_h^- u)(\xi) = \left(\sum_{j=0}^{7} \mathbf{e}_j \xi_h^{-j}\right) \mathcal{F}_h u(\xi),$$

这意味着算子 $D_h^{\pm}$ 分别具有复化八元数符号 $\widetilde{\xi}_{\pm} = \sum^{7} \mathbf{e}_j \xi_h^{\pm j}$。因此，基本解 $E_h^{\pm}$ 可以表示$j=0$为

$$E_h^{\pm} = \mathcal{R}_h \mathcal{F}\left(\frac{\widetilde{\xi}_{\pm}}{d^2}\right) = \sum_{j=0}^{7} \mathbf{e}_j \mathcal{R}_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_h^{\pm j}}{d^2}\right). \tag{4}$$

显然，上文构造的离散基本解 $E_h^{\pm}$ 与离散克利福德分析框架中通常考虑的离散基本解不同，参见例如 [6]。这种差异源于我们采用了柯西–黎曼算子的直接离散化，而没有涉及基单位向量的分裂；在离散克利福德分析中则采用了这种分裂。

接下来，我们将给出离散基本解 $E_h^{\pm}$ 的两个基本性质。为了证明其中一个性质，我们需要先回顾以下定理 [29]:

定理 1 设 n 为欧几里得空间的维数，并假设p_1、 p_2 是满足 $p_2 < p_1 + n$ 的两个正整数。对于正整数 $N > 0$，令 κ_N考虑以下形式的函数集合： $T(\Theta) = T_1(\Theta)\, T_2(\Theta)$， $0 \neq \Theta \in Q_\pi$，其中 $T_j(\Theta)$为三角多项式 ——

$$T_j(\Theta) = \sum_{\mu} t_{j,\mu} e^{i\mu\cdot\Theta}, \quad j = 1, 2,$$

满足以下条件:

(i) 存在次数为 p_j, $j = 1, 2$ 的普通齐次多项式 $P_j(\Theta)$，使得当 $\Theta \to 0$ 时 $T_j(\Theta) = P_j(\Theta) + o(|\Theta|^{p_j})$， (ii) $|T_2(\Theta)| \geq N^{-1}|\Theta|^{p_2}$, $\Theta \in Q_\pi$， (iii) $|t_{j,\mu}| \leq N$, (iv) $t_{j,\mu} = 0$ 对于 $|\mu| > N$。

对于任意满足 (ii)-(iv) 的 $N > 0$ ，存在常数 C ，使得对于所有 μ（分量为整数）和 $T \in \kappa_N$,

$$\left| \int_{Q_\pi} T(\Theta) e^{i\mu\cdot\Theta} d\Theta \right| \leq C(|\mu| + 1)^{-(n+p_1-p_2)}. \tag{5}$$

现在有了这些工具，我们便可以建立如下定理:

定理2 离散前向和后向柯西-黎曼算子的离散基本解 $E_h^{\pm}$ 满足:

(i) $D_h^{\pm} E_h^{\pm}(mh) = \delta_h(mh)$, $m \in \mathbb{Z}^8$;
(ii) 对于 $p > \frac{8}{7}$， $E_h^{\pm} \in l^p(h\mathbb{Z}^8, \mathbb{O})$。

证明 (i) 的性质可通过直接计算得出。为证明 (ii)，我们将使用离散基本解 E_h^{+} 的积分表示:

$$E_h^{+}(mh) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int\limits_{\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^8} \frac{\tilde{\xi}_+}{d^2} e^{-i\langle mh, \xi\rangle} d\xi, \quad m \in \mathbb{Z}^8.$$

˜考虑到 ξ_+ 的定义以及

$$\xi_h^{+j} = -\frac{1}{h}\left(1 - e^{-ih\xi_j}\right) = -\frac{1}{h}\left(1 - \cos(h\xi_j) + i\sin(h\xi_j)\right),$$

并利用已知的三角恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}\left|E_h^+(mh)\right| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^8}\int\limits_{\xi\in[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^8}\frac{\xi_h^{+j}}{d^2}e^{-i\langle mh,\xi\rangle}d\xi\right| \\ &= \left|\frac{1}{(2\pi)^8}\int\limits_{\xi\in[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^8}\frac{2\sin^2\frac{h\xi_j}{2}}{hd^2}e^{-i\langle mh,\xi\rangle}d\xi\right. \\ &\quad \left.+i\frac{1}{(2\pi)^8}\int\limits_{\xi\in[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^8}\frac{\sin(h\xi_j)}{hd^2}e^{-i\langle mh,\xi\rangle}d\xi\right|.\end{aligned}$$

如果 $p_1 = p_2 = 2$，则上述两个积分满足定理 1 的条件：对于第一个积分；如果 $p_1 = 1, p_2 = 2$，则对于第二个积分。详见 [24]。因此，得到以下估计：

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^8}\int\limits_{\xi\in[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^8}\frac{\xi_h^{+j}}{d^2}e^{-i\langle mh,\xi\rangle}d\xi\right| \leq \frac{Ch}{(|mh|+h)^8}+\frac{C}{(|mh|+h)^7} \approx \mathcal{O}\left(\frac{1}{|mh|^7}\right).$$

因此，可以得出基本解 E_h^+ 属于$l^p(h\mathbb{Z}^8,\mathbb{O})$，其中 $p > \frac{8}{7}$。公式E_h^-的证明也可以类似地进行。

3 离散斯托克斯公式与博雷尔-庞培公式

本节首先回顾[23]中的离散八元数斯托克斯公式。同样，为简化记号，论证中省略指标的长串列表 $m_0, m_1, \ldots, m_7$，也就是说，我们将简单地写作 $f(mh)$，而不是$f(m_0h, m_1h, \ldots, m_7h)$。

我们尤其感兴趣的是研究上半空间和下半空间（或半格），其定义如下：

$$\begin{aligned}h\mathbb{Z}_+^8 &:= \left\{(h\underline{m}, hm_7)\colon \underline{m}\in\mathbb{Z}^7, m_7\in\mathbb{Z}_+\right\}, \\ h\mathbb{Z}_-^8 &:= \left\{(h\underline{m}, hm_7)\colon \underline{m}\in\mathbb{Z}^7, m_7\in\mathbb{Z}_-\right\}.\end{aligned}$$

以下两个定理分别给出了上半格和下半格的离散八元数斯托克斯公式 [23]:

定理 3 上半格的离散斯托克斯公式 $h\mathbb{Z}_{+}^{8}$ 为

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{+}^{8}}&\left\{\left[g(mh)D_{h}^{+}\right]f(mh)-g(mh)\left[D_{h}^{-}f(mh)\right]\right\}h^{8}\\&=\sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^{7}}\mathbf{e}_{7}\left(g(\underline{m},1)f_{k}(\underline{m},0)\right)h^{8}\end{aligned}\tag{6}$$

对于所有满足级数收敛条件的离散函数 f 和 g。

定理 4 下半格 $h\mathbb{Z}_{-}^{8}$ 上的离散斯托克斯公式为

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{-}^{8}}&\left\{\left[g(mh)D_{h}^{+}\right]f(mh)-g(mh)\left[D_{h}^{-}f(mh)\right]\right\}h^{8}\\&=-\sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^{7}}\mathbf{e}_{7}\left(g(\underline{m},0)f_{k}(\underline{m},-1)\right)h^{8}\end{aligned}\tag{7}$$

对于所有满足级数收敛条件的离散函数 f 和 g。

注 1 我们想指出，上文引入的离散斯托克斯公式中不含结合子，而结合子在连续情形中作为一个固有项出现。因此，结合子的缺失是离散情形中一种令人惊讶的现象。此外，结合子的消去也与采用前向或后向离散柯西-黎曼算子无关。请注意，如果我们改为考虑例如中心离散柯西-黎曼算子:

$$\tilde{D}_{h}:=\frac{1}{2}\left(D_{h}^{+}+D_{h}^{-}\right),$$

那么，整个空间上的离散八元数公式将具有如下形式

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^{8}}\left\{\left[g(mh)\tilde{D}_{h}\right]f(mh)-g(mh)\left[\tilde{D}_{h}f(mh)\right]\right\}h^{8}=0.$$

为完整起见，我们简要概述这个公式的证明。我们从第一项开始（为简洁起见，省略了 h ）

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^{8}}\left[g(m)\tilde{D}_{h}\right]f(m)h^{8}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^{8}}\sum_{j=0}^{7}\frac{1}{2}\left[\partial_{h}^{+j}g(m)\mathbf{e}_{j}+\partial_{h}^{-j}g(m)\mathbf{e}_{j}\right]f(m)h^{8}$$

$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}^{8}}\sum_{j=0}^{7}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}\left[\partial_{h}^{+j}g_{i}(m)\mathbf{e}_{i}\mathbf{e}_{j}+\partial_{h}^{-j}g_{i}(m)\mathbf{e}_{i}\mathbf{e}_{j}\right]f_{k}(m)\mathbf{e}_{k}h^{8}.$$

利用关系式 $(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)$ 和有限差分的定义，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}^8}\sum_{j=0}^{7}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}\left[-\left(g_i(m+\mathbf{e}_j)-g_i(m)\right)f_k(m)\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)-\right.\\
&\left.-\left(g_i(m)-g_i(m-\mathbf{e}_j)\right)f_k(m)\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)\right]h^8\\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^8}\sum_{j=0}^{7}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}\left[-g_i(m+\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i f_k(m)+g_i(m-\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i f_k(m)\right](\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)h^8.
\end{aligned}$$

对后一个表达式作变量替换，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}^8}\sum_{j=0}^{7}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}\left[-g_i(m)\mathbf{e}_i f_k(m-\mathbf{e}_j)+g_i(m)\mathbf{e}_i f_k(m+\mathbf{e}_j)\right](\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)h^8\\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^8}\sum_{j=0}^{7}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}\left[g_i(m)\mathbf{e}_i\left(f_k(m+\mathbf{e}_j)+f_k(m-\mathbf{e}_j)\right)\right](\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)h^8\\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^8}\sum_{j=0}^{7}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}g_i(m)\mathbf{e}_i\left(\partial_h^{+j}\mathbf{e}_j f_k\mathbf{e}_k+\partial_h^{-j}\mathbf{e}_j f_k\mathbf{e}_k\right)h^8\\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^8}g(m)\left[\tilde{D}_h f(m)\right]h^8.
\end{aligned}$$

我们刚刚证明了在中心离散柯西-黎曼算子的情形下，整个空间上的离散八元数斯托克斯公式。这表明，离散情形中的构造本质上不同于连续情形中的构造；在连续情形中，结合子是一个内在要素。

借助离散八元数斯托克斯公式（6）—（7），可以引入离散八元数博雷尔-庞皮厄公式:

定理5 设 E_h^+ 是离散柯西-黎曼算子 D_h^+ 的离散基本解。那么，上半格 $h\mathbb{Z}_+^8$ 上的离散八元数博雷尔-庞皮厄公式为

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}_+^8}E_h^+(nh-mh)\left[D_h^- f(mh)\right]h^8\\
&+\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^7}\mathbf{e}_7\left(E_h^+(\underline{n}h-\underline{m}h,1)f_k(\underline{m},0)\right)h^8=\begin{cases}0, & m\notin\mathbb{Z}_+^8,\\ f(mh), & m\in\mathbb{Z}_+^8,\end{cases}
\end{aligned}\tag{8}$$

对于任意离散函数 f，只要级数收敛。

证明 为证明上半格上的离散八元数博雷尔-庞皮厄公式，我们首先使用上半格上的离散八元数斯托克斯公式 (6)，并将其中的函数 g 替换为平移后的离散基本解 $E_h^+(\cdot - mh)$，其中 $m \in \mathbb{Z}_+^8$。接下来，根据离散基本解的定义，我们注意到，对于 $n \neq m$，$\left[E_h^+(nh - mh)D_h^+\right] = 0$；对于 $n = m$，$\left[E_h^+(nh - mh)D_h^+\right] = h^{-8}$。由此，公式得证。

利用离散八元数博雷尔-庞皮厄公式 (8)，并要求函数 f 在 hZ_+^8 中是离散左后向单值的，我们立即得到离散八元数柯西公式：

定理6 设 f 是关于算子 D_h^- 的离散左后向单值函数，且 E_h^+ 是算子 D_h^+ 的离散基本解。那么，上半格点 hZ_+^8 的离散八元数柯西公式为

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^7} \mathbf{e}_7 \left(E_h^+(\underline{n}h - \underline{m}h, 1) f_k(\underline{m}, 0)\right) h^8 = \begin{cases} 0, & m \notin \mathbb{Z}_+^8, \\ f(mh), & m \in \mathbb{Z}_+^8, \end{cases} \tag{9}$$

该公式对任意使级数收敛的离散函数 f 均成立。

类似地，我们可以为下半格点 $h\mathbb{Z}^+$ 引入离散八元数博雷尔-庞皮厄公式和柯西公式：_

推论1 设 f 是关于算子 D_h^- 的离散左后向单值函数，且 E_h^+ 是算子 D_h^+ 的离散基本解。那么，下半格点 $h\mathbb{Z}_-^8$ 的离散八元数博雷尔-庞皮厄公式为

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in\mathbb{Z}_-^8} E_h^+(nh - mh)\left[D_h^- f(mh)\right] h^8 \\ -&\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^7} \mathbf{e}_7 \left(E_h^+(\underline{n}h - \underline{m}h, 0) f_k(\underline{m}, -1)\right) h^8 = \begin{cases} 0, & m \notin \mathbb{Z}_-^8, \\ f(mh), & m \in \mathbb{Z}_-^8, \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

对于任意使级数收敛的离散函数 f。当f 是关于算子D_h^- 的离散左后向单值函数时，我们得到下半格$h\mathbb{Z}_-^8$ 上的离散八元数柯西公式，其形式为

$$-\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^7} \mathbf{e}_7 \left(E_h^+(\underline{n}h - \underline{m}h, 0) f_k(\underline{m}, -1)\right) h^8 = \begin{cases} 0, & m \notin \mathbb{Z}_-^8, \\ f(mh), & m \in \mathbb{Z}_-^8. \end{cases} \tag{11}$$

定理6和推论1立即引出了上半格和下半格上的离散八元数柯西变换的定义：

定义 4 对于定义在边界层（$\underline{m}, 0$）和（$\underline{m}, 1$）上的离散 l^p-函数 f, $1 \leq p < +\infty$，上半格 $h\mathbb{Z}^8_+$ 上的离散八元数柯西变换定义为

$$\mathcal{C}^+_{\mathbb{O}}[f](mh) := \sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^7} \mathbf{e}_7 \left(E^+_h(\underline{n}h - \underline{m}h, 1) f_k(\underline{m}, 0)\right) h^8. \tag{12}$$

类似地，对于定义在边界层 $(\underline{m},0)$ 和 $(\underline{m},-1)$ 上的离散 l^p-函数 f, $1 \leq p < +\infty$，下半格 $h\mathbb{Z}^8_-$ 上的离散八元数柯西变换定义为

$$\mathcal{C}^-_{\mathbb{O}}[f](mh) := -\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^7} \mathbf{e}_7 \left(E^+_h(\underline{n}h - \underline{m}h, 0) f_k(\underline{m}, -1)\right) h^8. \tag{13}$$

值得一提的是，与连续情形类似，在离散克利福德分析中，离散八元数柯西公式和柯西变换也表明（离散）单生成函数依赖于其边界值。然而，由于非结合性，离散八元数 Borel-Pompeiu 公式和柯西公式 (8)-(11) 中的符号与离散克利福德分析中的结果不同，例如参见 [6]。此外，与 [23], 中的讨论一致，对连续八元数分析进行离散化产生了一个有趣的效果：结合子从构造中消失了。

现在我们介绍离散八元数柯西变换的一些性质：

定理 7 设离散上半格 $h\mathbb{Z}^8_+$ 和下半格 $h\mathbb{Z}^8_-$。则离散柯西变换 (12)-(13) 满足以下性质：

(i) 内柯西变换和外柯西变换具有以下映射性质：

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}^+_{\mathbb{O}} : l^p(h\mathbb{Z}^8_+, \mathbb{O}) \to l^q(h\mathbb{Z}^8_+, \mathbb{O}),\ 1 \leq p, q \leq \infty, \\ &\mathcal{C}^-_{\mathbb{O}} : l^p(h\mathbb{Z}^8_-, \mathbb{O}) \to l^q(h\mathbb{Z}^8_-, \mathbb{O}),\ 1 \leq p < \infty, \tfrac{8}{7} < q < \infty. \end{aligned}$$

(ii) $D^+_h \mathcal{C}^+_{\mathbb{O}}[f](mh) = 0, \forall m = (\underline{m}, m_7)$，其中 $m_7 \geq 1$。

(iii) $D^+_h \mathcal{C}^-_{\mathbb{O}}[f](mh) = 0, \forall m = (\underline{m}, m_7)$，其中 $m_7 \leq -1$。

证明 该定理的证明可以沿用[6,9], 中的思路，因此我们仅指出，第一个结论可由直接应用 H¨older 不等式以及离散基本解 E^+_h 的性质得到。(ii) 和 (iii) 的证明则通过直接应用离散前向柯西-黎曼算子 D^+_h 并利用其性质完成。

4 离散八元数 Hardy 空间

本节的目的是构造离散八元数 Hardy 空间。考察离散克利福德分析中与哈代空间相关的结果（例如见 $[6,8,9]$, ），显然，介绍离散 Hardy 空间的一种典型方法是对离散基本解的边界层进行傅里叶变换。由此可以定义离散 Riesz 核，进而引入离散 Plemelj（或 Hardy）投影。或者，也可以沿用定义哈代空间的经典连续方法，并将其改编到离散情形。为更好地理解非结合性的影响，本节将介绍这两种方法。

首先，我们回顾 $[10]$ 中关于八元数希尔伯特空间的以下定义，它可以直接推广到离散情形：

定义 5 八元数希尔伯特空间 H 是一个左 $\mathbb{O}$-模，配备八元数值内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $H\times H\to\mathbb{O}$，使得 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ 是一个实希尔伯特空间，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_0:=\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$。八元数值内积应满足对所有 $f,g,h\in H$ 以及所有 $\alpha\in\mathbb{O}$，以下规则：

(i) 可加性：$\langle f+g,h\rangle=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$；(ii) 厄米性质：$\langle g,f\rangle=\langle f,g\rangle$；(iii) 严格正定性：$\langle f,f\rangle\in\mathbb{R}^{\geq 0}$ 和 $\langle f,f\rangle=0$ 当且仅当 $f=0$；(iv) $\mathbb{R}$-齐次性：对所有 $r\in\mathbb{R}$，$\langle fr,g\rangle=\langle f,g\rangle r$；(v) $\mathbb{O}$-齐次性：$\langle f\alpha,f\rangle=\langle f,f\rangle\alpha$；(vi) $\mathbb{O}$-拟线性：$\langle f\alpha,g\rangle_0=\mathrm{Re}\left(\langle f\alpha,g\rangle\right)=\mathrm{Re}\left(\langle f,g\rangle\alpha\right)$】【。

在引入离散八元数 Hardy 空间的概念之前，我们先固定记号 γ_h，表示 Ω_h 的离散边界（对于半格而言即为 0 层）。现在我们引入以下离散八元数 Hardy 空间的概念，该概念改编自 $[10]$ 中给出的定义：

定义 6 离散八元数 Hardy 空间 $\mathcal{H}_h^2(\Omega_h,\mathbb{O})$ 是满足以下条件的 $l^2(\gamma_h,\mathbb{O})$ 函数集合的闭包：这些函数在 Ω_h 内离散左单生成，并且可延拓至边界 γ_h。

需要指出的是，在此定义中，我们并未区分定义 2 中引入的离散前向单生成函数与离散后向单生成函数。这样做是为了避免引入过多具体定义，因为这通常不会改变离散八元数 Hardy 空间的概念，毕竟两类离散单生成函数都可以使用。此外，定义 6 要求离散单生成函数能够延拓至边界 γ_h，这意味着必须定义一个延拓算子。虽然定义此类算子有多种方式，但最直接的做法或许是利用离散基本解 E_h^+ 的傅里叶变换，离散克利福德分析中正是如此，参见 $[6,8,9]$。因此，我们将基于这一思路引入一个延拓算子，从而明确建立离散克利福德分析方法与“基于连续理论”的方法之间的联系。

接下来，我们需要在离散边界 γ_h 上引入一个八元数值内积:

定义 7 对于离散八元数函数 $f, g \in l^2(\gamma_h)$，我们引入以下取 $\mathbb{O}$ 值的内积:

$$\langle f, g\rangle_{\gamma_h}^{h\mathbb{Z}_+^8} := \sum_{mh\in\gamma_h} \overline{(-\mathbf{e}_7 g(mh))}\,(-\mathbf{e}_7 f(mh))\,h^2, \tag{14}$$

若考虑上半格，则有

$$\langle f, g\rangle_{\gamma_h}^{h\mathbb{Z}_-^8} := \sum_{mh\in\gamma_h} \overline{(\mathbf{e}_7 g(mh))}\,(\mathbf{e}_7 f(mh))\,h^2, \tag{15}$$

若考虑下半格，则有。

接下来很容易验证以下结论:
命题 2 集合 $\left(\mathcal{H}_h^2(\gamma_h,\mathbb{O})\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{\gamma_h}^{h\mathbb{Z}_+^8}\right)$ 和 $\left(\mathcal{H}_h^2(\gamma_h,\mathbb{O})\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{\gamma_h}^{h\mathbb{Z}_-^8}\right)$ 是定义 5 意义下的八元数希尔伯特空间。

下一步是建立离散克利福德分析意义下的离散 Hardy 空间理论。这需要定义离散 Riesz 核（卷积核），这意味着需要研究离散基本解 E_h^+ 在边界层上的行为。我们来回顾一下离散基本解的积分表示

$$E_h^+(mh) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int\limits_{\xi\in[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^8} \frac{\tilde{\xi}_+}{d^2} e^{-i\langle mh,\xi\rangle} d\xi, \quad m \in \mathbb{Z}^8$$

其中 $\widetilde{\xi}_+ = \sum\limits^{7} \mathbf{e}_j \xi_h^{+j}$ 。为了研究边界层上的傅里叶符号，即 $_{j=0}$对于 $m_7 \in \{-1, 0, 1\}$，我们对离散基本解应用 7 维离散傅里叶变换:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_h^{(7)} E_h^+(\underline{\eta}, m_7 h) &= \sum_{\underline{m}h\in h\mathbb{Z}^7} e^{-ih\langle \underline{m},\underline{\eta}\rangle} \left[\frac{1}{(2\pi)^8} \int\limits_{\left[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}\right]^7} e^{-ih\langle m,\xi\rangle} \frac{\widetilde{\xi}_+}{d^2} d\xi\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^7} \int\limits_{\left[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}\right]^7} \sum_{\underline{m}h\in h\mathbb{Z}^7} e^{-ih\langle \underline{m},\underline{\eta}-\underline{\xi}\rangle} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-ihm_7\xi_7} \frac{\widetilde{\xi}_+}{d^2} d\xi_7\right]}_{(I)} d\underline{\xi}.\end{aligned}$$

现在来研究积分（I）：

$$
\begin{aligned}
(I) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-ihm_7\xi_7}\frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{d^2}d\xi_7 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-ihm_7\xi_7}\frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+ + \widetilde{\underline{\xi}}_{+,7}}{\underline{d}^2+\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi_7 h}{2}\right)}d\xi_7\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-ihm_7\xi_7}\frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+ - \mathbf{e}_7\frac{1}{h}\left(1-e^{-ih\xi_7}\right)}{\underline{d}^2+\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi_7 h}{2}\right)}d\xi_7\\
&= \frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \frac{e^{-ihm_7\xi_7}}{\underline{d}^2+\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi_7 h}{2}\right)}d\xi_7 - \frac{\mathbf{e}_7}{2\pi h}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-ihm_7\xi_7}\frac{1-e^{-ih\xi_7}}{\underline{d}^2+\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi_7 h}{2}\right)}d\xi_7\\
&= \frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \frac{e^{-ihm_7\xi_7}}{\underline{d}^2+\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi_7 h}{2}\right)}d\xi_7 - \frac{\mathbf{e}_7}{2\pi h}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \frac{e^{-ihm_7\xi_7}}{\underline{d}^2+\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi_7 h}{2}\right)}d\xi_7\\
&\quad + \frac{\mathbf{e}_7}{2\pi h}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \frac{e^{-ih\xi_7(m_7+1)}}{\underline{d}^2+\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi_7 h}{2}\right)}d\xi_7.
\end{aligned}
$$

上述积分需要针对 $m_7 \in \{-1,0,1\}$ 进行计算，而在基单位元分裂的情况下，这些计算已在 [6] 中给出。因此，层 $m_7=-1$、$m_7=0$ 和 $m_7=1$ 上离散基本解的傅里叶符号为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_h^{(7)}E_h^+(\underline{\xi},0) &= \frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{\underline{d}\sqrt{4+h^2\underline{d}^2}} - \mathbf{e}_7\left(\frac{1}{2}-\frac{h\underline{d}}{2\sqrt{4+h^2\underline{d}^2}}\right),\\
\mathcal{F}_h^{(7)}E_h^+(\underline{\xi},h) &= \frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{\underline{d}}\left(\frac{2+h^2\underline{d}^2}{2\sqrt{4+h^2\underline{d}^2}}-\frac{h\underline{d}}{2}\right) + \mathbf{e}_7\left(-\frac{3h\underline{d}+h^3\underline{d}^3}{2\sqrt{4+h^2\underline{d}^2}}+\frac{h^2\underline{d}^2+1}{2}\right),\\
\mathcal{F}_h^{(7)}E_h^+(\underline{\xi},-h) &= \frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{\underline{d}}\left(\frac{2+h^2\underline{d}^2}{2\sqrt{4+h^2\underline{d}^2}}-\frac{h\underline{d}}{2}\right) - \mathbf{e}_7\left(-\frac{3h\underline{d}+h^3\underline{d}^3}{2\sqrt{4+h^2\underline{d}^2}}+\frac{h^2\underline{d}^2+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

接下来，按照 [6], 中的思路，我们引入算子对：

$$
\begin{aligned}
H_+f &:= \mathcal{F}_h^{-1}\left[\mathbf{e}_7\frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{\underline{d}}\frac{2}{h\underline{d}-\sqrt{4+h^2\underline{d}^2}}\right]\mathcal{F}_h f,\\
H_-f &:= -\mathcal{F}_h^{-1}\left[\mathbf{e}_7\frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{\underline{d}}\frac{h\underline{d}-\sqrt{4+h^2\underline{d}^2}}{2}\right]\mathcal{F}_h f,
\end{aligned}
$$

满足条件 $(H_+)^2=(H_-)^2=I$。借助这些算子，我们可以为函数成为 $h\mathbb{Z}_+^8$ 或 $h\mathbb{Z}_-^8$ 中离散八元数单生成函数的离散边界值制定条件：

$$
\begin{aligned}
f(mh) &= H_+f(mh),\ \text{for } m_7=1,\\
f(mh) &= H_-f(mh),\ \text{for } m_7=-1.
\end{aligned}
$$

这使我们现在能够引入离散八元数 Hardy 空间的另一个定义：

定义 8 满足其离散二维傅里叶变换 $f = H_+ f$ for $m_7 = 1$ 的离散函数 $f \in l^p(h\mathbb{Z}^8_+, \mathbb{O})$ 空间称为上离散八元数 Hardy 空间，记作 $h^+_{p\ ,\ h\mathbb{Z}^8_+}$。类似地，满足其离散二维傅里叶变换$f = H_- f$ for $m_7 = -1$ 的离散函数 $f \in l^p(h\mathbb{Z}^8_-, \mathbb{O})$ 空间称为下离散八元数 Hardy 空间，记作 $h^-_{p\ ,\ h\mathbb{Z}^8_-}$。

借助算子 H_+ 和 H_-，现在可以如下引入离散 Plemelj 投影或 Hardy 投影

$$P_+ = \frac{1}{2}\left(I + H_+\right) \text{ and } P_- = \frac{1}{2}\left(I + H_-\right).$$

此外，将这些投影与前面的定义相结合，我们得到

$$f \in h^+_{p,h\mathbb{Z}^8_+} \Longleftrightarrow P_+ f = f, \text{ and } f \in h^-_{p,h\mathbb{Z}^8_-} \Longleftrightarrow P_- f = f.$$

最后，我们定义两个延拓算子，将离散函数从层 $m_7 = -1$ 和 $m_7 = 1$ 延拓到边界层 $m_7 = 0$，详见 [7]：

定义 9 上延拓算子，记为 $\mathcal{A}_+$，是一个将定义在边界层 $m_7 = 1$ 上的函数延拓到边界层 $m_7 = 0$上的算子，即它是一个映射 $\mathcal{A}_+$: $l^p(h\mathbb{Z}^7) \to l^p(h\mathbb{Z}^7)$，定义如下

$$\mathcal{A}_+ := \mathcal{F}_h^{(n-1)}\left[\frac{\widetilde{\underline{\xi}}_+}{\underline{d}}\left(\frac{2}{\sqrt{4 + h^2\underline{d}^2} - h\underline{d}}\right)\right].$$

类似地，下延拓算子，记为 $\mathcal{A}_-$，是一个将定义在边界层 $m_7 = -1$上的函数延拓到边界层$m_7 = 0$上的算子，即它是一个映射 $\mathcal{A}_-$: $l^p(h\mathbb{Z}^7) \to l^p(h\mathbb{Z}^7)$，定义如下

$$\mathcal{A}_- := \mathcal{F}_h^{(n-1)}\left[\left(\frac{\sqrt{4 + h^2\underline{d}^2} + h\underline{d}}{\sqrt{4 + h^2\underline{d}^2} - h\underline{d}}\right)\right].$$

这一表述完善了我们从定义 6 开始的关于离散八元数 Hardy 空间的讨论。现在，我们可以清楚地解释如何将离散函数延拓至边界层 $m_7 = 0$ 。

5 总结

本文通过引入离散 Borel-Pompeiu 公式和柯西公式，并为半空间定义离散八元数 Hardy 空间，进一步推进了离散八元数分析的发展。此外，我们讨论了构造离散 Hardy 空间的两种方法：（i）通过对连续情形进行直接离散化；（ii）采用离散克利福德分析中使用的方法，通过研究离散柯西-黎曼算子在边界层上的离散基本解的傅里叶符号来构造。这两种方法相辅相成，有助于更深入地理解离散八元数情形。

一个非常令人惊讶的结果是，在连续情形中出现的结合子，在离散情形下却并不出现。为了更好地理解这一效应，我们还针对中心离散柯西-黎曼算子证明了整个空间上的离散斯托克斯公式。然而，即使在这种情形下，结合子仍未出现，这凸显了离散情形下这些构造的特殊性。

本文所呈现的结果为进一步发展离散八元数分析提供了一套强大的基础工具。特别是，我们所引入的八元数哈代空间的离散版本，使我们能够研究离散八元数情形下单生成函数的具体边值问题。这也为研究该背景下的卡尔德龙-齐格蒙德型算子打开了大门。此外，这套离散工具还使我们能够开发数值算法，以解决粒子物理学与引力统一过程中出现的某些特定物理问题，正如近期一系列相关工作所展示的那样；另见 $[4, 26]$, ，正如引言中已大致提及的内容。

此外，在了解将半空间情形下的八元数分析离散化过程中所遇到的困难之后，本文的结果随后可以扩展到考虑$\mathbb{R}^8$中有界区域的情形。

数据可用性声明。由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

参考文献

1. Baez, J.：《八元数》。《美国数学会通报》，39，145–205，2002。 2. Brackx, F.、Delanghe, R.、Sommen, F.：《克利福德分析》。《皮特曼数学研究札记》76，波士顿，1982。 3. Brackx, F.、De Schepper, H.、Sommen, F.、Van de Voorde, L.：《离散克利福德分析：函数论的萌芽》。《超复分析》，Birkh¨auser Basel，37–53，2009。 4. Burdik, C.、Catto, S.、G¨urcan, Y.、Khalfan, A.、Kurt, L.、Kato La, V.： SO(9,1) 群及解析函数示例。《物理学杂志：会议系列》，1194，012016，2019。 5. Cerejeiras, P.、Faustino, N.、Vieira, N.：非线性薛定谔问题的数值克利福德分析。《偏微分方程数值方法》，24(4)，1181–1202，2008。

6. Cerejeiras, P., K¨ahler, U., Ku, M., Sommen, F.：离散 Hardy 空间。《傅里叶分析与应用杂志》，20(4)，715-750，2014年。 7. Cerejeiras, P., K¨ahler, U., Ku, M.：半格上的离散希尔伯特边值问题。《差分方程与应用杂志》，21(12)，1277-1304，2015年。 8. Cerejeiras, P., K¨ahler, U., Legatiuk, A., Legatiuk, D.： $\mathbb{R}^3$中有界区域上的离散单生成函数的边界值。载于：D. Alpay, M. Vajiac（编），《线性系统、信号处理与超复分析》。算子理论：进展与应用，第275卷。Birkh¨auser，149-165，2020年。 9. Cerejeiras, P., K¨ahler, U., Legatiuk, A., Legatiuk, D.： $\mathbb{R}^n$中有界区域的离散 Hardy 空间。《复分析与算子理论》，15(4)，2021年。 10. Colombo, F., Kraußhar, R.S., Sabadini, I.：八元数单生成与切片单生成 Hardy 空间和 Bergman 空间，已提交发表，2023年。预印本：https://www.mate.polimi.it/collezioni-digitali-di-dipartimento/?cdd1=Submit&lg=en 11. Constales, D., Kraußhar, R.S.：八元数 Kerzman-Stein 算子。《复分析与算子理论》，15:104，2021年。 12. Dentoni, P., Sce, M.：Cayley 代数中的正则函数。《帕多瓦大学数学研讨会报告》，50，251-267，1973年。 13. Faustino, N., K¨ahler, U.：差分狄拉克算子的 Fischer 分解。《应用 Clifford 代数进展》，17，37–58，2007年。 14. Faustino, N., K¨ahler, U., Sommen, F.：克利福德分析中的离散狄拉克算子。《应用 Clifford 代数进展》，17(3)，451-467，2007年。 15. Frenod, E., Ludkowski, S.V.：基于八元数的积分算子方法及非线性偏微分方程的求解。《远东数学科学杂志》，2017年。 16. Gogberashvili, M.：八元数几何与共形变换。《现代物理学中的国际几何方法杂志》，13(7)，1650092，2016年。 17. G¨urlebeck, K., Hommel, A.：关于有限差分狄拉克算子及其基本解。《应用 Clifford 代数进展》，11，89-106，2001年。 18. G¨urlebeck, K., K¨ahler, U., Ryan, J., Spr¨oßig, W.：无界区域上的克利福德分析。《应用数学进展》，19(2)，216-239，1997年。 19. G¨urlebeck, K., Spr¨oßig, W.：面向物理学家和工程师的四元数与 Clifford 微积分。John Wiley & Sons，奇切斯特-纽约，1997年。 20. G¨ursey, F., Tze, H.：论除代数和 Jordan 代数在粒子物理学中的作用。World Scientific，新加坡，1996年。 21. Kauhanen, J., Orelma, H.：八元数分析中的柯西-黎曼算子。《应用 Clifford 代数进展》，28:1，2018年。 22. Kauhanen, J., Orelma, H.：论八元数正则函数的结构。《应用 Clifford 代数进展》，29:77，2019年。 23. Kraußhar, S., Legatiuk, A., Legatiuk, D.：走向离散八元数分析。载于：V. Vasilyev（编），《微分方程、数学建模与计算算法》，Springer，已接受发表，2022年。 24. Legatiuk, A.：矩形格上的离散势论与函数理论及其应用。博士论文，魏玛，2022年。 25. McIntosh, A.：Lipschitz 区域上的 Clifford 代数、傅里叶理论、奇异积分与调和函数。载于：J. Ryan（编），《分析及相关主题中的 Clifford 代数》，CRC Press，博卡拉顿，33–87，1996年。 26. Najarbashi, G., Seifi, B., Mirzaei, S.：二量子比特与三量子比特几何、四元数与八元数共形映射，以及交织立体投影。《量子信息处理》，15，509-528，2016年。 27. Nôno, K.：关于拉普拉斯算子的八元数线性化与八元数函数理论。《福冈大学教育学部学报》第III辑，37，1-15，1988年。 28. Huo, Q., Ren G.：拟线性作为线性的非结合对应概念。《几何分析杂志》，32:304，2022年。 29. Thom´ee, V.：椭圆差分算子的离散内部 Schauder 估计。《SIAM 数值分析杂志》，5，626-645，1968年。 30. Wang J., Li, X.：单位球的八元数 Bergman 核。《应用 Clifford 代数进展》，28:60，2018年。 31. Wang J., Li, X.：半空间的八元数 Bergman 核。《应用 Clifford 代数进展》，30:57，2020年。

32. Li, X.-M., Peng, L.-Z.：关于Stein-Weiss共轭调和函数与八元数解析函数。《逼近理论及其应用》，16，28-36，2000。33. Li, X.-M., Peng, L.-Z.：八元数上的柯西积分公式。《比利时数学学会通报》，9，47-62，2002。34. Li, X.-M., Peng, L.-Z., Qian, T.：八元数空间中利普希茨曲面上的柯西积分。《数学分析与应用杂志》，343，763–777，2008。

