arXiv:2305.04148v1 [quant-ph] 6 May 2023

通过经典影子从泡利噪声中高效恢复信息

Yifei Chen, [1] Zhan Yu, [1] Chenghong Zhu, [1] 和 Xin Wang[1], *

[1]量子计算研究所，百度研究院，北京 *100193*，中国（日期：2023年5月9日）

量子计算的快速发展使得从量子系统中提取经典信息的有效技术需求日益增长，尤其是在量子机器学习和量子化学等领域。然而，量子系统天生容易受到噪声影响，从而严重破坏其中编码的信息。在本工作中，我们提出了一种能够从泡利噪声下的量子态中恢复信息的高效算法。其核心思想是通过对信道的经典影子进行后处理，学习未知泡利信道所需的信息。对于局部有界次数可观测量，无需掌握信道的完整经典描述，只需了解信道的部分信息即可恢复理想信息，从而得到一种多项式时间算法。这不同于概率误差抵消等传统方法，后者要求掌握信道的全部信息，并且其计算规模会随量子比特数呈指数增长。我们还证明了这种可扩展方法在样本复杂度方面是最优的，并将该算法推广到权重收缩通道。此外，我们通过数值模拟展示了该算法在一维各向异性海森堡型模型中的有效性。作为一项重要应用，我们的方法可以作为 Clifford 电路中具有高样本效率的误差缓解方案。

一、引言

研究表明，量子计算机能够以显著快于经典计算机的速度解决某些问题 [1]。然而，当前量子设备容易受到来自环境、串扰和量子退相干等多种来源的噪声影响，这为量子计算的时间和规模设定了上限。因此，量子计算的近期发展阶段被称为含噪声中型量子（NISQ）时代 [2]。要释放近期量子计算机的潜力，一项重大挑战是降低噪声对量子系统的影响。

量子计算中最重要的环节之一，是通过测量量子态从量子系统中提取信息；量子态由某个感兴趣的可观测量的期望值描述 O。所选可观测量的期望值揭示了量子系统的诸多特性，广泛应用于许多量子算法中，包括变分量子本征求解器 [3], 、量子近似优化算法 [4],以及量子机器学习 [5]。

对于理想的量子态 σ，我们希望获取的信息是 tr($O\sigma$)。然而，由于量子计算机中存在噪声，实际应用中的状态实际上是某种含噪态 $\tilde{\sigma}$。在量子纠错与缓解研究中，量子噪声最标准的理论模型之一是泡利噪声。一方面，泡利噪声提供了一种简单的模型，用于描述比特翻转、退极化和退相位等常见的非相干噪声。另一方面，通过随机编译技术 [6, 7]，可以将一般的量子噪声映射为泡利噪声，而不会造成保真度损失。

从泡利噪声中恢复信息的问题是：给定对未知泡利噪声 $\mathcal{P}$ 的访问权限以及含噪态 $\tilde{\sigma} = \mathcal{P}(\sigma)$ 的副本，恢复某个 ob-的信息 tr($O\sigma$)。

* wangxin73@baidu.com

可观测量 O。要从噪声 $\mathcal{P}$中恢复信息，一种自然的方法是构造映射 $\mathcal{Q}$，使得复合映射 $\mathcal{Q} \circ \mathcal{P}$ 是恒等映射 [8], ，能够将含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$转换为理想态 σ。如果我们只关注目标期望值 tr($O\sigma$)，而不是理想态 σ，那么实际上并不需要这样的映射。Zhao 等 [9] 证明了从含噪量子态中提取目标信息的充要条件，并利用半定规划确定了构造映射 $\mathcal{D}$ 的最优协议，使其满足 $\mathrm{tr}(\mathcal{D} \circ \mathcal{P}(\sigma)O) = \mathrm{tr}(O\sigma)$。尽管该方法不限于泡利信道这一类信道，但它需要量子噪声的完整信息。获取未知泡利信道的完整经典描述通常会使用量子过程层析 [10–12], 等技术，这些技术通常需要数量随量子比特数呈指数增长的信道副本，因而消耗资源且效率低下。此外，文献 [9]中提出的映射 $\mathcal{D}$需要通过概率抽样进行模拟，这需要额外的资源。如何在没有先验信息的情况下高效地从泡利信道中恢复信息，仍然是一个悬而未决且具有挑战性的问题。

为了推动解决这一悬而未决的问题，我们只考虑获取未知泡利信道的部分信息，而非其完整的经典描述；这些部分信息足以用于求取特定可观测量的期望值。随后我们注意到，存在一些高效方法，例如影子层析 [13], 经典影子 [14]，以及近期提出的量子估计算法 [15–18], 能够仅使用极少的量子资源来估计量子系统的这些性质。这让我们意识到，经典影子层析技术有望成为一种高效获取泡利噪声信息的方法。

在本文中，我们提出了一种高效算法，可从未知泡利噪声 $\mathcal{P}$ 中恢复任意 n 量子比特含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$ 的信息 tr($O\sigma$), 以及 有界次数 k-局域可观测量 O。其主要思想是，当所关注的可观测量具有局域性且次数有界时，只需信道的部分本征值即可恢复理想的

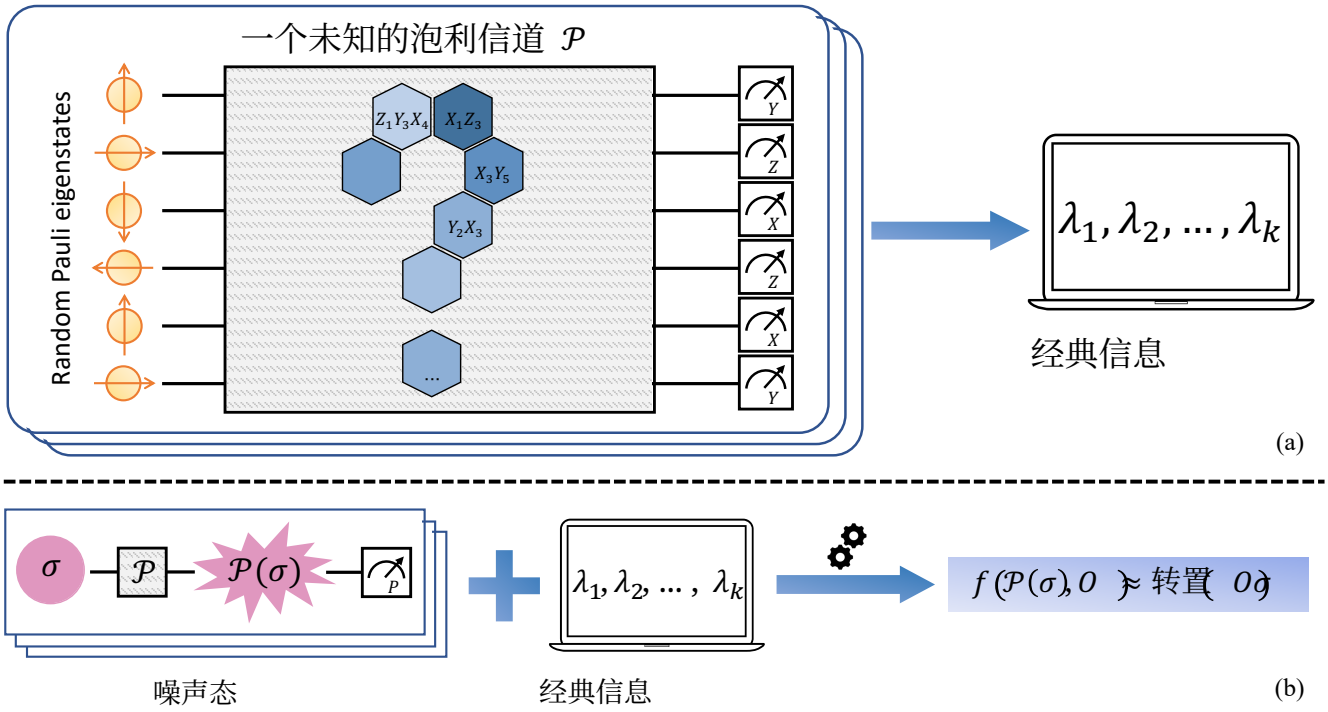


图 1. **利用经典影子从泡利噪声中恢复信息的算法示意图**。 (a) 经典信息包含第 IIA 节定义的泡利信道的特征值。首先通过信道的经典影子对其进行估计：制备随机泡利本征态作为输入，并在随机泡利基下测量输出态，即可获得信道的经典影子。(b) 随后，对于任意受到此泡利噪声影响的量子态 $\mathcal{P}(\sigma)$，可通过对含噪态的测量结果以及我们已获知的经典信息进行后处理，估计 迹$(O\sigma)$。需要指出的是，同一份经典信息可重复使用，以恢复不同含噪态的信息。

信息。该算法包含两个步骤：学习未知泡利信道的必要信息，并利用这些信息在经典后处理中估计期望值$\mathrm{tr}(O\sigma)$。主要方案如图1所示。在学习过程中，我们利用经典影子层析技术 [14, 15] ，以精度 ϵ 和概率$1-\delta$估计泡利信道的本征值，这只需要 $\mathcal{O}(\log(n^k/\delta)/\epsilon^2)$ 份泡利信道副本。此外，我们利用信息论技术 [17, 19] 证明样本复杂度的下界，从而说明我们学习算法的最优性。我们可以对含噪态 $\tilde{\sigma}$ 应用经典影子层析，以获取有界次数可观测量所需的经典信息，其样本复杂度同样是最优的 [15]。通过对这两个步骤获得的信息进行后处理，我们可以在计算时间$\mathrm{tr}(O\sigma)$ 内恢复目标期望值，所需计算时间为 $\mathcal{O}(n^k \log(n^k))$。作为一个重要应用，我们将该方法用于缓解 Clifford 电路中的泡利错误，从而得到一种比概率误差消除等以往方法更高效的泡利错误缓解方案 [20]。

我们首先在第 II 节介绍一些背景知识，并引入经典影子的概念；随后在第 III 节介绍从泡利噪声中恢复信息的算法。在第 IV 节，我们分析所提算法的样本复杂度和计算复杂度，这表明该算法高效且最优。我们在第 V 节通过数值实验展示算法的正确性。该算法的一项应用，即 Clifford 电路的误差缓解，将在第 VII 节介绍。我们在第 VIII 节讨论与先前工作的比较，并在第 IX 节展望未来。

II. 预备知识

A. 量子信道与可观测量

在量子信息理论中，量子系统的噪声 [21–23], 由量子信道建模；量子信道是作用于算符空间之间的完全正且保迹（CPTP）映射。 n 量子比特泡利信道定义为

$$\mathcal{P}(\sigma) := \sum_{P\in\{I,X,Y,Z\}^{\otimes n}} p(P)\cdot P\sigma P^\dagger, \qquad (1)$$

其中， P 是 $\{I,X,Y,Z\}$ 中泡利算符的 n 重张量积，而 p 是 $\{I,X,Y,Z\}^{\otimes n}$ 上的概率分布。若量子信道将恒等算符映射为恒等算符，则该量子信道是 幺正的。 n 量子比特量子信道 $\mathcal{N}$ 的伴随映射是唯一的映射 $\mathcal{N}^\dagger$ ， 其

满足

$$\mathrm{tr}(X\mathcal{N}(Y)) = \mathrm{tr}(\mathcal{N}^\dagger(X)Y) \tag{2}$$

对于所有线性算子 $X, Y \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^{2^n}}$，且 $\mathcal{N}^\dagger$ 是一个完全正的幺正映射。特别地，$\mathcal{N}^\dagger$ 将厄米算子映射为厄米算子。

泡利信道 $\mathcal{P}$ 实际上是自伴的，即 $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$。这一点可由定义直接验证，因此在本文中，我们省略 $\dagger$ 在 $\mathcal{P}^\dagger$上的记号。另一个观察是，每个 n量子比特泡利算符 P都是 $\mathcal{P}$ 的特征算符，因为

$$\mathcal{P}(P) = \sum_{Q\in\{I,X,Y,Z\}^{\otimes n}} p(Q)QPQ \tag{3}$$

$$= \sum_{Q\in\{I,X,Y,Z\}^{\otimes n}} (-1)^{\langle P,Q\rangle} p(Q)Q^2P \tag{4}$$

$$= \sum_{Q\in\{I,X,Y,Z\}^{\otimes n}} (-1)^{\langle P,Q\rangle} p(Q)P, \tag{5}$$

$$\text{where } \langle P,Q\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } P \text{ and } Q \text{ commute,} \\ 1 & \text{if } P \text{ and } Q \text{ anti-commute.} \end{cases} \tag{6}$$

量 $\sum_{Q\in\{I,X,Y,Z\}^{\otimes n}}(-1)^{\langle P,Q\rangle}p(Q)$ 是 P的本征值，我们将其记为 λ_P。我们将 λ_P 称为泡利信道的特征值。

可观测量由厄米算符表示。若可观测量 O 可写为线性组合 k-局部，其中每个 O_j 至多作用于 k 个量子比特，则称其为$O = \sum_j \alpha_j O_j$。若求和中每个量子比特上作用的项 O_j 仅有常数个，则称该可观测量为有界度。n量子比特泡利算符 P的权重（记为 $|P|$）是其中非恒等算符的张量因子数量 I。由于泡利算符构成厄米算符的一组基，任意可观测量 O 都有唯一的 Pauli 分解 $O = \sum_P \alpha_P P$。因此，我们可以将可观测量 O 的权重 定义为展开式中系数 α_P非零的泡利算符的最大权重 O。我们还定义可观测量O的泡利 p-范数，记为 $\|O\|_{\mathrm{Pauli},\,p}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$的 l_p-范数，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是泡利系数向量 α_P。

B. 经典影子层析

在文献 [13], 中，作者指出，对于估计未知量子态的多个测量概率这一任务，只需使用数量对待预测的测量次数和量子态维度呈对数关系的样本。基于这项工作，Huang等人 [14] 研究了在一些较弱条件下预测 $\mathrm{tr}(O\sigma)$ 这一任务，其中 O 同时满足这些条件，并将提出的方法称为经典影子层析。经典影子是指通过对未知量子态进行随机测量而获得的经典数据。具体而言，可以从给定集合中随机选择一个酉算符，将其作用于该量子态，再在计算基下测量输出态。研究表明，如果酉算符集合满足某些条件，我们总能构造出一个无偏估计量来估计态。近年来，已有许多研究探索经典影子的应用与扩展，例如参见文献 [24–35]。

一组常用的测量是泡利测量。其估计量易于计算，并具有以下性能保证：

命题 1（参考文献 [14] 中的定理 1 和命题 3） 采用随机泡利基底原语，其中每个随机幺正算子具有 $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ 的形式，且每个 U_i 都从单量子比特 *Clifford* 群中均匀选取。给定一组 k-局域可观测量 $\{O_1, O_2, \ldots, O_M\}$ 以及精度参数 ϵ、$\delta \in [0,1]$，则

$$N = \mathcal{O}\left(\frac{\log(M/\delta)}{\epsilon^2} \max_i 4^k \|O_i\|_\infty^2\right) \tag{7}$$

需要进行若干次测量，才能以成功概率 $1-\delta$ 同时预测每个 $\mathrm{tr}(O_i\rho)$，且精度达到 ϵ。

这里，采用随机泡利基底原语意味着我们在随机泡利基中测量每个量子比特。具体而言，对每个量子比特施加一个随机单量子比特 Clifford 门，并在计算基下进行测量即可实现。结合参考文献 [14] 中的定理 1 和命题 3，可得此结果。定理 1 指出，样本数 N 属于 $\mathcal{O}(\log(M/\delta)/\epsilon^2)$，再乘以一个取决于随机幺正算子集合的量。命题 3 进一步表明，对于随机泡利测量，该量的上界为 $\max_i 4^k\|O_i\|_\infty^2$。

III. 信息恢复算法

首先，我们正式定义从含噪量子态中恢复信息的问题。给定一个未知的 n 量子比特泡利信道 $\mathcal{P}$ 以及一个含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$，对于一个已知的有界度 k 局域可观测量 O，任务是提供一个函数 $f(\mathcal{P}(\sigma)\ O)$，使其在某个精度 ϵ 范围内近似理想期望值 $\mathrm{tr}(O\sigma)$，即

$$|f(\mathcal{P}(\sigma), O) - \mathrm{tr}(O\sigma)| \le \epsilon. \tag{8}$$

对于目标期望值，信道 $\mathcal{P}$作用于态 σ 的效果，可以视为其伴随映射作用于可观测量 O，

$$\mathrm{tr}(O\mathcal{P}(\sigma)) = \mathrm{tr}(\mathcal{P}(O)\sigma). \tag{9}$$

因此，对于满足 $\mathcal{P}(\overleftarrow{O}) = O$ 的可观测量 $\overleftarrow{O}$，通过计算 $\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\mathcal{P}(\sigma))$ 即可得到 $\mathrm{tr}(O\sigma)$ 的估计。我们知道，任意泡利算符 P 都是 $\mathcal{P}$ 的特征算符，即 $\mathcal{P}(P) = \lambda_P P$。这意味着，如果我们获得了 λ_P 的估计值 $\widehat{\lambda}_P$，就可以通过取 Pauli 分解 $O = \sum_P \alpha_P P$ 并令$\overleftarrow{\alpha}_P = \alpha_P/\widehat{\lambda}_P$，来构造 $\overleftarrow{O} = \sum_P \overleftarrow{\alpha}_P P$，因此

$$\mathcal{P}(\overleftarrow{O}) = \sum_P \frac{\lambda_P}{\widehat{\lambda}_P}\alpha_P P \approx \sum_P \alpha_P P = O. \tag{10}$$

如果 O 是 k-局部的，那么对于权重大于 k 的每个 P，α_P 都为零。因此，我们对 $\mathrm{tr}(O\sigma)$ 的估计为

$$f(\mathcal{P}(\sigma), O) = \mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\mathcal{P}(\sigma)) = \sum_{P:|P|\le k} \overleftarrow{\alpha}_P \,\mathrm{tr}(P\mathcal{P}(\sigma)). \tag{11}$$

现在，我们将这些概念形式化，并提出一种能够从泡利信道中恢复信息的算法。详细步骤见算法1：

算法 1 从泡利噪声中恢复信息 **要求：** 可访问一个未知的 n-量子比特泡利信道 $\mathcal{P}$、一个有界度 k-局域可观测量 $O = \sum_P \alpha_P P$，以及未知含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$ 的副本。 **确保：** 对 $\mathrm{tr}(O\sigma)$ 的估计。1: 制备 N 个随机 n 重乘积泡利本征态 $\{\rho_i = \bigotimes_{j=1}^n |s_{ij}\rangle\langle s_{ij}|\}_{i=1}^N$，其中每个 $|s_{ij}\rangle$ 都是单量子比特泡利算符的六个本征态之一。2: 将未知信道 $\mathcal{P}$ 作用于这 N 个随机态，并对每个量子比特执行随机 Pauli 测量，获得数据 $\{\bigotimes_{j=1}^n |t_{ij}\rangle\langle t_{ij}|\}_{i=1}^N$。3: 对于每个满足 $|P| \le k$ 的 n-量子比特泡利算符 P，通过公式 (12) 和 (13) 计算 λ_P。4: 对于 $O = \sum_{P:\ |P|\le k} \alpha_P P$，令 $\overleftarrow{\alpha}_P = \alpha_P/\widehat{\lambda}_P$，其中 $|P| \le k$。5: 对含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$ 执行 Pauli 测量，对每个满足 $|P| \le k$ 的泡利算符 P 进行测量，并构造估计量如下：

$$f(\mathcal{P}(\sigma), O) = \sum_{P:|P|\le k} \overleftarrow{\alpha}_P \,\mathrm{tr}(P\mathcal{P}(\sigma)).$$

在步骤 1 和 2中，我们将随机泡利本征态输入未知信道 $\mathcal{P}$，并在随机泡利基下测量输出态。前两步获取的数据与量子态的经典影子相似，实际上是量子过程 $\mathcal{P}$的经典影子。接下来，我们使用经典影子来估计$\mathcal{P}$的特征值。具体来说，我们按如下方式计算估计特征值 λ_P。令 $x_P = (1/3)^{|P|}\lambda_P$，那么根据下文的引理 2，我们可以构造一个 x_P 的估计量：

$$\begin{aligned}\widehat{x}_P &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathrm{tr}\left(P\bigotimes_{j=1}^n (3|t_{ij}\rangle\langle t_{ij}| - I)\right)\mathrm{tr}(P\rho_i)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n \mathrm{tr}(P_j(3|t_{ij}\rangle\langle t_{ij}| - I)\,\mathrm{tr}(P_j|s_{ij}\rangle\langle s_{ij}|),\end{aligned} \tag{12}$$

其中，$\bigotimes_{j=1}^n (3|t_{ij}\rangle\langle t_{ij}| - I)$ 是利用参考文献 [14, 15] 中介绍的经典影子得到的 $\mathcal{P}(\rho_i)$ 的无偏估计量。然后，我们得到特征值的一个估计量：

$$\widehat{\lambda}_P = 3^{|P|}\widehat{x}_P, \tag{13}$$

因为 $\lambda_P = 3^{|P|}x_P$。一个特殊情形是 $P = I$，$\mathcal{P}$ 是幺正的这一事实意味着 $\lambda_I = 1$，因此无需估计其值。

该估计量由参考文献 [15]，中引理 16 的一个适配版本得到，其完整陈述见引理S10。原引理旨在提取一般 $O = \sum_P \alpha_P P$ 的某个特定展开系数。我们关注 $O = \mathcal{P}(P) = \lambda_P P$ 的情形，以提取本征值 λ_P。

引理 2 设 $\mathcal{P}$ 是一个 n 量子比特泡利信道，其本征值为 $\{\lambda_P\}_P$，满足 $\mathcal{P}(P) = \lambda_P P$（对于泡利算符 $P \in \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}$），$\mathcal{D}^0$ 是 n 重乘积泡利本征态的均匀分布。我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \mathrm{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\,\mathrm{tr}(P\rho) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|P|}\lambda_P. \tag{14}$$

我们可以看到，$\widehat{x}_P$实际上就是方程（14）左侧期望值的经验估计。该引理是对文献 [15]中引理 16 的适当改写，详细证明见附录 A。

在步骤 4 中，我们将每个系数 α_P 除以相应的估计本征值，以构造可观测量 $\overleftarrow{O}$，使其能够实现 $|\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\mathcal{P}(\sigma)) - \mathrm{tr}(O\sigma)| \le \epsilon$。在步骤 5 中，我们通过对含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$ 进行 Pauli 测量，获得估计值 $\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\mathcal{P}(\sigma))$。请注意，步骤 1 至 3 不需要关于 O 和 σ 的信息，只需保证 O 是 k-局部的，因此可以预先完成。每当我们获得新的可观测量 O 和含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$ 时，只需重新执行步骤 4 和 5。

在算法的第 5 步中，我们需要所有满足 $|P| \le k$ 的泡利算符 P 的 $\mathrm{tr}(P\mathcal{P}(\sigma))$ 值。我们将此类 P 的总数记为 $T(n, k)$，它满足 $T(n, k) = \mathcal{O}(n^k)$。注意，这是一个可以使用量子态的经典影子来求解的问题。根据命题 1，我们可以将每个 $\mathrm{tr}(P\mathcal{P}(\sigma))$ 估计到 $\frac{\epsilon}{2T(n,k)}$ 精度，方法是——

$$\mathcal{O}\left(\frac{T(n,k)^2\log(T(n,k))}{\epsilon^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{n^{2k}\log(n^k)}{\epsilon^2}\right) \tag{15}$$

$\mathcal{P}(\sigma)$ 的副本数。这已被证明是该预测任务 [15] 的最优方案。由于这一任务已得到充分研究，且其复杂度关于 n 为多项式级，为简单起见，我们假设已知 $\mathrm{tr}(P\mathcal{P}(\sigma))$，并且在本文余下部分不考虑获取 $\mathrm{tr}(P\mathcal{P}(\sigma))$ 的样本复杂度。

IV. 样本复杂度分析

接下来，我们分析所提出算法的样本复杂度和计算复杂度。

定理 3 给定一个未知的 n 量子比特泡利信道 $\mathcal{P}$、一个含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$，以及一个 n 量子比特、具有有界度且为 k-局部的可观测量 O，其中 $k = \mathcal{O}(1)$ 且 $\|O\| = 1$。对于 $\epsilon, \delta > 0$，存在一种算法，使用 $N = \mathcal{O}(\log(n^k/\delta)/\epsilon^2)$ 次信道访问，得到一个函数 $f(\mathcal{P}(\sigma)\ O)$，使得

$$|f(\mathcal{P}(\sigma), O) - \mathrm{tr}(O\sigma)| \le \epsilon \tag{16}$$

概率至少为 $1 - \delta$。计算时间为$\mathcal{O}(n^k\log(n^k))$。

该定理有力地保证，随着量子比特数量的增加，样本复杂度和总计算时间都呈多项式增长，这意味着我们的算法适用于大型量子系统，并具有良好的可扩展性。

利用引理中的公式 2 和 Hoeffding 不等式，样本复杂度与我们所需的本征值估计精度直接相关，该精度记为 ϵ'。随后，我们通过一系列界定，建立 ϵ' 与 ϵ 之间的联系，从而得到最终的样本复杂度。详细证明见附录B。

在算法的第一部分中，我们学习信道的特征值，所用的信道数量为 $\mathcal{O}(\log(n^k)/\epsilon^2)$。现在，我们采用参考文献 [17, 19, 36] 中的信息论技术，证明完成这一信道学习任务所需样本复杂度的下界。

命题 4 设 $\mathbb{K}$ 表示权重至多为 k的 n量子比特泡利算符集合，即 $\mathbb{K} := \{P \in \{I,X,Y,Z\}^{\otimes n} : |P| \le k\}$。给定一个未知的泡利信道 $\mathcal{P}$，若某算法能够通过对 $\mathcal{P}$的 N 次访问，将每个 $P \in \mathbb{K}$ 的本征值估计到精度 ϵ 以内，其中每次访问时均可制备任意输入态并将其送入该信道，且可使用任意正算子值测度测量输出态，则 $N = \Omega(\log(n^k)/\epsilon^2)$。

证明见附录C。所得下界与我们的上界相匹配，这表明当每次访问只能使用一次信道时，我们的算法是最优的。另一方面，如果可用的量子资源更多，例如辅助量子比特，甚至可以同时使用多个信道副本，正如参考文献 [17], 所证明的那样，则可能存在效率更高的算法。

备注 1 算法 *1* 涉及收集信道的泡利影子。在附录 *D*中，我们进一步探讨了 *Clifford* 影子的使用，并证明在可观测量的局域性假设 $k = \mathcal{O}(1)$下，*Clifford* 影子无法改善样本复杂度。

V. 数值实验

估计期望值 $\mathrm{tr}(O\sigma)$ 在量子信息处理中有许多应用。例如，变分量子本征求解器 [3] 被提出用于估计基态能量，这需要调节参数，使期望值作为代价函数达到最小。随后，我们通过数值模拟展示了我们的算法可以估计 $\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\mathcal{P}(\sigma)) \approx \mathrm{tr}(O\sigma)$。在我们的模拟中，采用了双量子比特乘积泡利信道。我们还考虑了当前量子设备中的噪声水平，并选取表 I所示的信道噪声参数。表中的每一行对应于各个量子比特相关的噪声参数。我们选择的目标可观测量是具有 n 个格点的一维各向异性海森堡型哈密顿量。当周期边界条件闭合时并且包含磁场时，可观测量可表示为

$$O = \sum_{j=1}^{n-1} (J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + h\sigma_j^z), \quad (17)$$

其中，σ_i^a 表示作用于 i^{th} 量子比特上的泡利-a 算符，J_x、J_y、J_z 为自旋耦合强度，h_z 为沿 z 方向施加的磁场。我们随机选取这些系数为 $J_x = 0.27$、$J_y = 0.42$、$J_z = 0.76$ 和$h_z = 0.6$，然后将其归一化，使其满足 $\|O\|_\infty = 1$。

然后，算法首先收集该信道的经典影子，并选择采样 $[1, 20] \times 10^4$ 个经典影子来估计特征值，再将 α_P 除以估计出的特征值。为评估经典影子数量增加时的精度，我们随机生成 500 个 Haar 随机的 n 量子比特态 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{500}\}$，并直接计算相对于 H 的理想期望值。随后，我们将量子态输入信道 $\mathcal{P}$，并分别计算不进行任何后处理以及采用我们的信息恢复算法时的平均绝对误差（MAE）：

$$\text{MAE with no post-processing} = \frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500} |\mathrm{tr}(O\mathcal{P}(\sigma_i)) - \mathrm{tr}(O\sigma_i)|, \quad (18)$$

$$\text{MAE with post-processing} = \frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500} |f(\mathcal{P}(\sigma_i), O) - \mathrm{tr}(O\sigma_i)|. \quad (19)$$

最后，为了进行比较，我们计算两个 MAE 的比值，

$$r = \frac{\text{MAE with post-processing}}{\text{MAE with no post-processing}}, \quad (20)$$

以展示我们的算法在多大程度上提升了估计精度。对于每 10^4 个经典影子，我们将上述过程重复 10 次，并对 r取平均值。实验结果如图 2所示。可以清楚地看到，比值 r 随着样本数量增加而减小，这表明我们提取的经典信息更加精确。

量子比特编号	p_I	p_X	p_Y	p_Z
1	0.75	0.10	0.10	0.05
2	0.77	0.09	0.09	0.05

表 I. 每个量子比特的噪声参数。

因此，我们证明了该方法能够成功地从噪声态中预测期望值，并表明样本数量越多，精度越高。

VI. 信道类型的扩展

在上一节中，我们已经证明，我们的算法能够从泡利信道中高效恢复信息。自然会有人问，哪些其他类型的信道

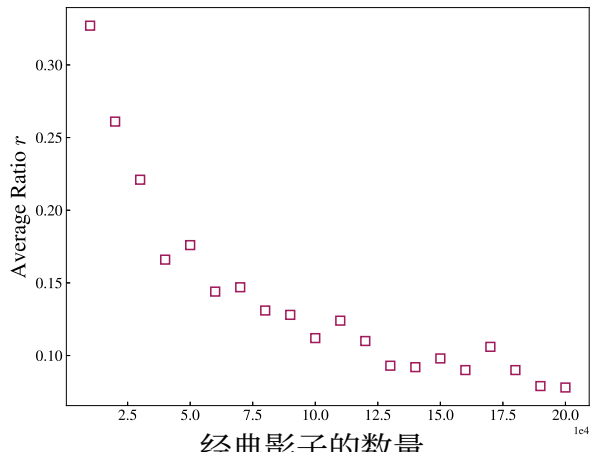


图 2. 在乘积泡利信道下，针对一个 2 量子比特各向异性海森堡型模型的信息恢复。x 轴表示我们使用的经典影子数量，单位为 10^4。y 轴表示执行后处理与不执行后处理时的误差比值。与不进行后处理、直接从含噪态中提取期望值相比，我们的算法适度提高了精度。

也能实现这种效率。一个充分条件是：信道在泡利基下的伴随矩阵呈上三角分块形式，其中每个分块包含权重相同的泡利算符，且各分块按权重递增排列。等价地说，信道是权重收缩的，也就是说，算符的权重在伴随映射的作用下不会增加。乘积信道就是一个例子。在附录E中，我们给出了算法的更新版本，该算法能够从权重收缩信道中恢复信息，并具有以下更新后的性能保证：

命题 5 给定一个未知的 n 量子比特权重收缩通道 $\mathcal{E}$、一个含噪态 $\mathcal{E}(\sigma)$，以及一个 n 量子比特、k 局部且有界度的可观测量 O，满足 $\|O\|_\infty = 1$。对于 ε、$\delta > 0$，存在一种算法，使用对信道的 $N = \mathcal{O}(n^{2k}\log(n^{2k}/\delta)/\epsilon^2)$ 次访问，以获得一个函数 f，使得

$$|f(\mathcal{E}(\sigma)) - \mathrm{tr}(O\sigma)| \le \epsilon \tag{21}$$

概率至少为 $1-\delta$。计算时间为$\mathcal{O}(n^{4k}\log(n^{2k}))$。

该命题表明，由于需要估计信道的更多信息，信道的样本复杂度增加至 $\mathcal{O}(n^{2k}\log(n^{2k}/\delta)/\epsilon^2)$，相应的总计算时间增加至 $\mathcal{O}(n^{4k}\log(n^{2k}))$，但仍然保持高效且可扩展。

VII. Clifford 电路中的误差缓解应用

我们的方法的一个应用是缓解 Clifford 电路中的泡利错误。在这类电路中，我们只考虑由 $\mathcal{C}$、H和受控非门组成的电路。随后，每个量子门后面都会跟随一个泡利噪声信道，并且我们假设同一类型量子门对应的噪声相同。这比文献中通常考虑的门无关、时间平稳的马尔可夫噪声（GTM）更强；GTM 假设每个量子门后的噪声信道都相同。我们将得到的 [17, 37, 38]电路记为$\tilde{}$。对于任意输入态 $\mathcal{C}$，其期望输出为 $\sigma\,\mathcal{C}(\sigma)\tilde{}$，而实际输出为 $\mathcal{C}(\sigma)$。因此，误差缓解的目标是在仅能获得含噪版本时，求得精确的期望值$\mathrm{tr}(O\mathcal{C}(\sigma))$，其中给定可观测量 O。为此，我们首先学习与三种类型量子门相关的噪声信道的特征值。该方法与算法1 的步骤1至3相同，但将含噪信道替换为不同的含噪量子门，并对相应估计量稍作修改。对于单量子比特门，它们变为

$$\widehat{x}_P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{tr}(P(3|t_i\rangle\langle t_i| - I))\,\mathrm{tr}(P(U\rho_i U^\dagger)), \tag{22}$$

$$\widehat{\lambda}_P = 3\widehat{x}_P, \tag{23}$$

其中 $U \in \{H, S\}$。对于 CNOT门，含噪CNOT门的矩阵是一个单项矩阵。若用泡利算符标记矩阵元素，则 ($\pi(P)$ P) 元素取值为 λ_P，其中 $\pi(P)$ 是通过用 CNOT 对 P 进行共轭得到的结果泡利算符。在这种情况下，估计通过以下方式完成：

$$\widehat{x}_P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{tr}(P\bigotimes_{j=1}^{n}(3|t_{ij}\rangle\langle t_{ij}| - I))\,\mathrm{tr}(\pi(P)\rho_i), \tag{24}$$

$$\widehat{\lambda}_P = 3^{|\pi(P)|}\widehat{x}_P. \tag{25}$$

接下来，我们展示如何对由两个量子门组成的 Clifford 电路进行误差缓解；对于包含更多量子门的电路，方法也相同。令

$$\mathcal{C} = \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{U}_1, \tag{26}$$

其中 $\mathcal{U}_i(\rho) = U_i\rho U_i^\dagger$, $U_i \in \{H, S, \mathrm{CNOT}\}$。相应的含噪电路 $\mathcal{C}$ 表示为

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_2} \circ \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1 \tag{27}$$

令 $\lambda_{i,\,P}$表示 P在 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_i}$下的本征值，即 P在与 i^{th} 量子门和 $\pi_i(P)$ 结合的噪声信道下的本征值；$= U_i^\dagger P U_i$表示将 P用 $U_i^\dagger$ 共轭后得到的泡利算符。可以证明

$$\mathrm{tr}(P\tilde{\mathcal{C}}(\rho)) = \lambda_{2,P}\lambda_{1,\pi_2(P)}\,\mathrm{tr}(P\mathcal{C}(\rho)), \tag{28}$$

因此，我们可以构造

$$\overleftarrow{\alpha}_P = \frac{\alpha_P}{\widehat{\lambda}_{2,P}\widehat{\lambda}_{1,\pi_2(P)}}, \tag{29}$$

which would have $\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\tilde{\mathcal{C}}(\rho)) \approx \mathrm{tr}(O\mathcal{C}(\rho))$.

VIII. 与先前工作的比较

与先前的信息恢复和误差缓解方法比较。现有的信息恢复方法 [9]不仅适用于泡利信道，而且还要求已知信道的完整信息。在应用这种信息恢复方法之前，如果信道未知，就必须通过层析获取信道的完整描述，这需要大量的量子资源。该方法的另一项局限是，信道描述不准确对信息恢复误差的影响尚未得到充分研究，因此，对于近似信道描述下的样本复杂度，理论分析尚不完整。与参考文献 [9], 中的方法相比，我们提出的信息恢复算法无需了解泡利信道的任何信息，其计算复杂度随量子比特数呈多项式增长。此外，要实现参考文献 [9], 中所述的方法，需要实现任意的完全正迹保持映射，而我们的方法只需制备泡利本征态并执行泡利测量，这两项操作在量子设备上都容易得多。

量子误差缓解中还有一些方法，旨在仅使用噪声态的副本来估计无噪声信息 $\mathrm{tr}(O\sigma)$。误差缓解中一种常用的方法是概率误差抵消（PEC） [20], ，它首先将目标过程分解为可实现的含噪过程的线性组合。利用这种分解，通过对含噪过程进行概率采样来实现理想电路。根据定义，该方法适用于任意量子过程，但仍面临类似的问题，即需要全面了解含噪过程。另一个例子是虚拟蒸馏 [39, 40], ，它假设混合含噪态中占主导地位的纯本征向量就是无噪状态。利用多个噪声态副本，我们可以获得无噪声期望值。然而，这些副本需要同时使用，这意味着电路宽度很大。尽管有一些变体可以用电路深度换取电路宽度 [41] ，或与经典影子框架结合 [42] 以减小电路宽度，但总复杂度对于量子比特数量仍呈指数增长。

与学习预测量子过程的区别。我们提出的算法受到文献 [15] 所提方法的启发，该方法旨在通过访问 $\mathcal{P}$ 和 ρ 来预测 $\mathrm{tr}(O\mathcal{P}(\rho))$ 的值，而我们的目标是从含噪 $\mathcal{P}(\rho)$ 中恢复原始信息。作者通过从收集到的经典阴影中估计所得的可观测量 $\mathcal{P}(O)$ 来实现这一目标。我们采用类似的估计技术来学习泡利信道的本征值。最终，他们能够保证在受限状态集合上均方误差达到 ϵ 的精度，但允许预测任意可观测量。相比之下，我们能够对任意含噪态的绝对误差预测达到精度，但只能处理局域可观测量。

与泡利信道学习的比较。 无需完整描述噪声信道，是我们的算法相较于现有方法的主要优势之一。我们指出，许多算法能够估计概率分布 $p(P)$ 或泡利信道的错误率，这类方法通常称为泡利信道学习。 [17, 36, 38, 43, 44]我们与文献 [43]进行了仔细比较，其设定与我们算法中的学习部分最为相似。在文献 [43], 中，他们的主要方法是制备随机乘积泡利本征态，其本征值为 $+1$，将其送入信道，然后在与输入态相同的基下测量每个量子比特。利用收集到的数据，他们将估计错误率的问题转化为一种总体恢复问题，并采用该领域的工具来估计单个泡利错误率。他们针对4^4_ϵ 个估计值大于 $\frac{\epsilon}{2}$ 的泡利算符进行估计，并将其余值设为0 ，以确保算法的效率，同时保证差值的 l_∞范数小于 ϵ。样本复杂度为 $\mathcal{O}(\log(n/\epsilon\delta)/\epsilon^2)$。尽管收集的数据与我们的方法类似，但后处理方式和待估计的量截然不同。首先，我们也在随机泡利基下测量输出态。这使我们能够将框架扩展到更广泛的信道类别，例如乘积信道；我们已在第VI节讨论过。其次，泡利错误率与泡利本征值通过 Hadamard 变换相关联，即

$$\lambda_P = \sum_{Q\in\{I.X.Y.Z\}^{\otimes n}} (-1)^{\langle P,Q\rangle} p(Q) \tag{30}$$

$$\text{where } \langle P,Q\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } P \text{ and } Q \text{ commute} \\ 1 & \text{if } P \text{ and } Q \text{ anti-commute} \end{cases} \tag{31}$$

这意味着，获得单个泡利算符的本征值需要了解所有泡利错误率，反之亦然。此外，将错误率逐元素估计到 ϵ 的精度，并不能保证将本征值逐元素估计到 ϵ 的精度，反之亦然。作者还提出了一种方法，用样本复杂度 $\mathcal{O}(\log(1/\delta)/\epsilon^2)$ 估计给定泡利算符的单个本征值，然后将其视为查询访问，并利用它来估计错误率；这在思想上与我们的方法相似，但他们的估计仅限于所查询的特定泡利算符。

IX. 总结

在本研究中，我们提出了一种高效的量子算法，通过学习信道和含噪态，从未知的泡利噪声中恢复信息；该算法所需的量子资源随量子比特数呈多项式增长。所提算法之所以高效，是因为要恢复局域有界次数可观测量的理想信息，只需掌握信道的部分知识。针对泡利信道部分本征值的学习，我们证明了样本复杂度的下界与信道学习算法的上界相匹配，这意味着该算法是最优的。我们还表明，该方法可直接用于从含噪 Clifford 电路中恢复信息，且效率高于概率误差抵消等以往的误差缓解方法。

我们工作中描述的方法应广泛适用于缓解大规模量子设

备中的泡利噪声。进一步的理论探索可考虑将信息恢复算法扩展至更广泛的量子信道。从实际应用角度来看，值得研究如何整合通用误差缓解方案，这可能为早期容错量子计算机带来一种资源高效的方法 [45, 46]。我们还预计，该方法有助于减轻噪声的影响，并提高近期实验的精度。具体而言，我们希望将其用于提升变分在资源数量有限的含噪设备上运行量子算法，并为探索材料科学 [47]和化学 [48, 49]中具有物理意义的性质作出贡献。

致谢

本研究的部分工作是在 Y.C.、Z. Y. 和 C. Z. 于百度研究院担任研究实习生期间完成的。X. W. 谨向赵轩强致谢，感谢他提供的有益讨论。

[1] A. M. Childs 和 W. van Dam，《代数问题的量子算法》，《现代物理评论》82，1（2010）。[2] J. Preskill，《NISQ时代及之后的量子计算》，《Quantum》2，79（2018）。[3] A. Peruzzo、J. McClean、P. Shadbolt、M.-H. Yung、X.-Q. Zhou、P. J. Love、A. Aspuru-Guzik 和 J. L. O'Brien，《光子量子处理器上的变分本征值求解器》，《自然·通讯》5，4213（2014）。[4] E. Farhi、J. Goldstone 和 S. Gutmann，《量子近似优化算法》（2014），arxiv:arXiv:1411.4028。[5] J. Biamonte、P. Wittek、N. Pancotti、P. Rebentrost、N. Wiebe 和 S. Lloyd，《量子机器学习》，《自然》549，195（2017）。[6] J. J. Wallman 和 J. Emerson，《通过随机化编译实现可扩展量子计算的噪声整形》，《物理评论A辑》94，052325（2016）。[7] A. Hashim、R. K. Naik、A. Morvan、J.-L. Ville、B. Mitchell、J. M. Kreikebaum、M. Davis、E. Smith、C. Iancu、K. P. O'Brien、I. Hincks、J. J. Wallman、J. Emerson 和 I. Siddiqi，《在含噪超导量子处理器上通过随机化编译实现可扩展量子计算》，Physical Review X 11，041039（2021）。[8] J. Jiang、K. Wang 和 X. Wang，《线性映射的物理可实现性及其在误差缓解中的应用》，《Quantum》5，600（2021）。[9] X. Zhao、B. Zhao、Z. Xia 和 X. Wang，《含噪量子态的信息可恢复性》，《Quantum》7，978（2023）。[10] I. L. Chuang 和 M. A. Nielsen，《量子黑箱动力学的实验测定方案》，《现代光学杂志》44，2455（1997）。[11] J. B. Altepeter、D. Branning、E. Jeffrey、T. C. Wei、P. G. Kwiat、R. T. Thew、J. L. O'Brien、M. A. Nielsen 和 A. G. White，《辅助量子过程层析》，《物理评论快报》90，193601（2003）。[12] M. Mohseni、A. T. Rezakhani 和 D. A. Lidar，《量子过程层析：不同策略的资源分析》，《物理评论A辑》77，032322（2008）。[13] S. Aaronson，《量子态的影子层析》，载于第50届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，STOC 2018（计算机协会，纽约，美国纽约州，2018），第325–338页。[14] H.-Y. Huang、R. Kueng 和 J. Preskill，《仅凭极少量测量预测量子系统的多种性质》，《自然·物理》16，1050（2020）。[15] H.-Y. Huang、S. Chen 和 J. Preskill，《学习预测任意量子过程》（2022），arxiv:arXiv:2210.14894。[16] S. T. Flammia 和 R. O'Donnell，《通过总体恢复进行泡利误差估计》，《Quantum》5，549（2021），arxiv:2105.02885 [量子物理学]。[17] S. Chen、A. Seif 和 L. Jiang，《泡利信道估计的量子优势》，《物理评论A辑》105，032435（2022），arxiv:2108.08488 [quant-ph]。[18] M. C. Caro，《通过泡利传输矩阵学习量子过程与哈密顿量》（2022），arxiv:arXiv:2212.04471。[19] H.-Y. Huang、R. Kueng 和 J. Preskill，《机器学习中量子优势的信息论界限》，《物理评论快报》126，190505（2021）。[20] K. Temme、S. Bravyi 和 J. M. Gambetta，《短深度量子电路的误差缓解》，《物理评论快报》119，180509（2017）。[21] M. M. Wilde，《量子信息论》（剑桥大学出版社，剑桥，2017）。[22] J. Watrous，《量子信息理论》（剑桥大学出版社，2018）。[23] M. Hayashi，《量子信息理论》，《物理学研究生教材》（Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2017）。[24] C. Hadfield、S. Bravyi、R. Raymond 和 A. Mezzacapo，《使用局部偏置经典影子测量量子哈密顿量》，《数学物理通讯》391，951（2022），arXiv:2006.15788。[25] B. Wu、J. Sun、Q. Huang 和 X. Yuan，《重叠分组测量：测量量子态的统一框架》，《Quantum》7，896（2023），arXiv:2105.13091。[26] V. Gebhart、R. Santagati、A. A. Gentile、E. M. Gauger、D. Craig、N. Ares、L. Banchi、F. Marquardt、L. Pezzè 和 C. Bonato，《量子系统学习》，Nature Reviews Physics 5，141（2023）。[27] L. Coopmans、Y. Kikuchi 和 M. Benedetti，《利用纯热影子预测吉布斯态期望值》，PRX Quantum 4，010305（2023）。[28] H. C. Nguyen、J. L. Bönsel、J. Steinberg 和 O. Gühne，《利用广义测量优化影子层析》，《物理评论快报》129，220502（2022）。[29] A. Zhao、N. C. Rubin 和 A. Miyake，《通过经典影子进行费米子部分层析》，《物理评论快报》127，110504（2021）。[30] H.-Y. Huang，《从经典影子学习量子态》，Nature Reviews Physics 4，81（2022）。[31] A. Elben、S. T. Flammia、H.-Y. Huang、R. Kueng、J. Preskill、B. Vermersch 和 P. Zoller，《随机测量工具箱》，Nature Reviews Physics 5，9（2022）。[32] G. H. Low，《具有粒子数对称性的费米子经典影子》，arXiv预印本 arXiv:2208.08964（2022），arXiv:2208.08964。[33] K. Bu、D. E. Koh、R. J. Garcia 和 A. Jaffe，《泡利不变酉系综下的经典影子》，arXiv预印本

arXiv:2202.03272（2022），arXiv:2202.03272。[34] K. Wan、W. J. Huggins、J. Lee 和 R. Babbush，《用于费米子量子模拟的匹配门阴影》，arXiv预印本 arXiv:2207.13723（2022），arXiv:2207.13723。[35] S. Becker、N. Datta、L. Lami 和 C. Rouzé，《连续变量量子系统的经典影子层析》，arXiv预印本 arXiv:2211.07578（2022），arXiv:2211.07578。[36] O. Fawzi、A. Oufkir 和 D. S. França，《学习泡利信道的下界》（2023），arxiv:2301.09192 [quant-ph]。[37] S. Chen、W. Yu、P. Zeng 和 S. T. Flammia，《鲁棒阴影估计》，PRX Quantum 2，030348（2021）。[38] S. T. Flammia 和 J. J. Wallman，《泡利信道的高效估计》，ACM量子计算汇刊 1，1（2020）。[39] B. Koczor，《近期量子设备的指数级错误抑制》，Physical Review X 11，031057（2021）。[40] W. J. Huggins、S. McArdle、T. E. O'Brien、J. Lee、N. C. Rubin、S. Boixo、K. B. Whaley、R. Babbush 和 J. R. McClean，《用于量子错误缓解的虚拟蒸馏》，Physical Review X 11，041036（2021）。[41] P. Czarnik、A. Arrasmith、L. Cincio 和 P. J. Coles，《量子比特高效的错误指数级抑制》（2021），arxiv:2102.06056 [quant-ph]。[42] A. Seif、Z.-P. Cian、S. Zhou、S. Chen 和 L. Jiang，《阴影蒸馏：利用经典影子为近期量子处理器进行量子错误缓解》，PRX Quantum 4，010303（2023）。[43] S. T. Flammia 和 R. O'Donnell，《通过总体恢复进行泡利误差估计》，《Quantum》5，549（2021）。[44] R. Harper、S. T. Flammia 和 J. J. Wallman，《量子噪声的高效学习》，Nature Physics 16，1184（2020）。[45] Y. Suzuki、S. Endo、K. Fujii 和 Y. Tokunaga，《量子错误缓解作为一种通用错误降低技术：从含噪声中型量子到容错量子计算时代的应用》，PRX Quantum 3，10.1103/prxquantum.3.010345（2022）。[46] C. Piveteau、D. Sutter、S. Bravyi、J. M. Gambetta 和 K. Temme，《编码量子比特通用门的错误缓解》，《物理评论快报》127，10.1103/phys-revlett.127.200505（2021）。[47] H. Ma、M. Govoni 和 G. Galli，《近期量子计算机上的材料量子模拟》，npj Computational Materials 6，85（2020）。[48] Y. Nam、J.-S. Chen、N. C. Pisenti、K. Wright、C. Delaney、D. Maslov、K. R. Brown、S. Allen、J. M. Amini、J. Apisdorf 等，《在囚禁离子量子计算机上估计水分子的基态能量》，npj Quantum Information 6，33（2020）。[49] Y. Cao、J. Romero、J. P. Olson、M. Degroote、P. D. Johnson、M. Kieferová、I. D. Kivlichan、T. Menke、B. Peropadre 和 N. P. D. Sawaya，《量子计算时代的量子化学》，Chemical Reviews 119，10856（2019）。

附录 A：引理2

引理2 设 $\mathcal{P}$ 是一个 n量子比特泡利信道，其特征值为 $\{\lambda_P\}_P$使得 $\mathcal{P}(P) = \lambda_P P$对于泡利算符 $P \in\{I,X,Y,Z\}^{\otimes n}$， $\mathcal{D}^0$ 为泡利本征态乘积态的均匀分布。我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|P|}\lambda_P. \tag{A.1}$$

证明 我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho) \tag{A.2}$$

$$= \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(\mathcal{P}(P)\rho)\operatorname{tr}(P\rho) \tag{A.3}$$

$$=\lambda_P \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(P\rho)^2. \tag{A.4}$$

写作 $\operatorname{tr}(P\rho) = \prod_i \operatorname{tr}(P_i\rho_i)$，我们可以看到，若 $P_i = I$，则 $\operatorname{tr}(P_i\rho_i) = 1$。若 $P_i \neq I$，则 $\operatorname{tr}(P_i\rho_i)^2 = 1$ 的概率为$1/3$，且 $\operatorname{tr}(P_i\rho_i)^2 = 0$的概率为 $2/3$，因此 $\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(P\rho)^2 = (1/3)^{|P|}$，证明完毕。■

附录 B：定理3

在证明该命题之前，我们首先介绍几个有助于界定误差的引理 r.

引理 S1 两个可观测量期望值估计之差的上界，可由可观测量的 *Pauli* 分解之差给出，

$$|\operatorname{tr}(O_1\rho) - \operatorname{tr}(O_2\rho)| \leq \sum_P |\Delta\alpha_P|, \tag{B.1}$$

其中， $\Delta\alpha_P$ 是 $O_1 - O_2$的 *Pauli* 展开中 P 的系数。

证明

$$|\operatorname{tr}(O_1\rho) - \operatorname{tr}(O_2\rho)| \tag{B.2}$$

$$\leq|\sum_P \Delta\alpha_P \operatorname{tr}(P\rho)| \tag{B.3}$$

$$\leq \sum_P |\Delta\alpha_P|, \tag{B.4}$$

其中，在最后一行中，我们使用了三角不等式以及 $|\operatorname{tr}(P\rho)| \leq 1$这一事实。 ■

定义 S1 有界次数可观测量的次数是求和式中作用于每个量子比特的项数的最大值。

引理 S2（文献中的推论 12 n 参考文献 [15]） 给定一个 n量子比特的 k-局部有界度哈密顿量 O，其度为 d。我们有 *ve*

$$\frac{1}{3}C(k,d)\|O\|_{\text{Pauli},1} \leq \|O\|, \tag{B.5}$$

其中 C（k、 d） $= \sqrt{2(k!)}(2\sqrt{6}+4\sqrt{3})^k$，且 $\|O\|$ 是 O的谱范数。

定理 *3* 给定一个未知的 n量子比特泡利信道 $\mathcal{P}$、一个含噪态 $\mathcal{P}(\sigma)$，以及一个 n量子比特的有界度 k-局部可观测量O，其中 $k = \mathcal{O}(1)$。对于 ϵ、 $\delta > 0$，存在一种算法，只需访问该信道 $N = \mathcal{O}(\log(n^k/\delta)/\epsilon^2)$次，即可获得一个函数 $f(\mathcal{P}(\sigma)\ O)$，使得

$$|f(\mathcal{P}(\sigma), O) - \operatorname{tr}(O\sigma)| \leq \epsilon \tag{B.6}$$

概率至少为 $1-\delta$。计算时间为 $\mathcal{O}(n^k \log(n^k))$。

证明 证明思路如下：我们首先使用 Hoeffding 引理，建立 N（信道使用次数）与 $\tilde{\epsilon}$（我们估计 λ_P所需达到的精度）之间的关系。只要找到$\tilde{\epsilon}$ 与 ϵ之间的关系，证明便告完成。

我们令 $x_P = (1/3)^{|P|}\lambda_P$, $D(n,\ k)$ 表示权重为 k 的 n 量子比特泡利算符的数量，以及 $T(n,\ k) = \sum_{l=0}^{k} D(n,\ l)$。注意，$D(n,\ k) = \binom{n}{k}3^k = \mathcal{O}(n^k)$。
我们令 $\tilde{\epsilon}$，其值将在后文确定，$\tilde{\epsilon}' = \tilde{\epsilon}/3^k$。根据引理 2 和 Hoeffding 不等式，

$$\mathbb{P}(|\widehat{x}_P - x_P| \geq \tilde{\epsilon}') \leq 2e^{-N\tilde{\epsilon}'^2/2\times 3^{2k}} \quad \forall P, |P| \leq k. \tag{B.7}$$

根据并集界，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|\widehat{x}_P - x_P| \leq \tilde{\epsilon}' \quad \forall P, |P| \leq k) && \text{(B.8)}\\
\geq& 1 - \bigcup_P \mathbb{P}(|\widehat{x}_P - x_P| \geq \tilde{\epsilon}') && \text{(B.9)}\\
\geq& 1 - 2\sum_{l=0}^{k} D(n,l) e^{-N\tilde{\epsilon}'^2/2\times 3^{2k}}. && \text{(B.10)}
\end{aligned}$$

令最后一项等于 $1-\delta$，可得我们需要

$$N = \frac{2\times 3^{2k}\log(2T(n,k)/\delta)}{\tilde{\epsilon}'^2}. \tag{B.11}$$

利用 $T(n,\ k) = \mathcal{O}(n^k)$ 这一事实，我们有 $N = \mathcal{O}(\log(n^k/\delta)/\tilde{\epsilon}'^2)$。根据 $\tilde{\epsilon}'$ 的定义，以至少 $1-\delta$ 的概率，

$$|\widehat{\lambda}_P - \lambda_P| \leq \tilde{\epsilon} \quad \forall P, |P| \leq k. \tag{B.12}$$

从现在起，在上述事件成立的条件下。利用引理S1，

$$\begin{aligned}
&|f(\mathcal{P}(\sigma), O) - \mathrm{tr}(O\sigma)| && \text{(B.13)}\\
=&|\mathrm{tr}(\mathcal{P}(\overleftarrow{O})\sigma) - \mathrm{tr}(O\sigma)| && \text{(B.14)}\\
\leq& \sum_{P:|P|\leq k} |\lambda_P \overleftarrow{\alpha}_P - \alpha_P| && \text{(B.15)}\\
=& \sum_{P:|P|\leq k} \left|\frac{\lambda_P}{\widehat{\lambda}_P}\alpha_P - \alpha_P\right|. && \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$我们可以写成 $\lambda_P = \lambda_P + \Delta_P$根据式（B.12），我们有 $|\Delta_P| < \tilde{\epsilon}$。我们还假设 $\tilde{\epsilon} < \lambda_P$，这一点将在稍后确定 $\tilde{\epsilon}$ 的值时得到验证。因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{P:|P|\leq k} \left|\lambda_P \widehat{\lambda}_P^{-1}\alpha_P - \alpha_P\right| && \text{(B.17)}\\
=& \sum_{P:|P|\leq k} \left|\lambda_P\lambda_P^{-1}\left(1+\frac{\Delta_P}{\lambda_P}\right)^{-1}\alpha_P - \alpha_P\right| && \text{(B.18)}\\
=& \sum_{P:|P|\leq k} \left|\left(1 - \frac{\Delta_P}{\lambda_P} + \mathcal{O}(\Delta_P^2)\right)\alpha_P - \alpha_P\right|. && \text{(B.19)}
\end{aligned}$$

假设 $\tilde{\epsilon}^2$可以忽略，并定义 $\lambda^{(k)}_{\text{最小值}} = \min_{P:|P|\leq k}|\lambda_P|$。因此 $|\Delta_P/\lambda_P| \leq |\tilde{\epsilon}/\lambda^{(k)}_{\text{最小值}}|$，

$$\begin{aligned}
&\sum_{P:|P|\leq k} \left|\left(1 - \frac{\Delta_P}{\lambda_P} + \mathcal{O}(\Delta_P^2)\right)\alpha_P - \alpha_P\right| && \text{(B.20)}\\
\leq& \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\lambda^{(k)}_{\min}}\right)\left(\sum_{P:|P|\leq k}|\alpha_P|\right) && \text{(B.21)}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\lambda_{\min}^{(k)}}\right)\left(\|O\|_{\text{Pauli},1}\right) \tag{B.22}$$

$$\leq \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\lambda_{\min}^{(k)}}\right)\left(\frac{3\|O\|}{C(k,d)}\right) \tag{B.23}$$

$$= \frac{3}{\lambda_{\min}^{(k)} C(k,d)}\tilde{\epsilon}, \tag{B.24}$$

w这里我们使用了引理中的泡利-1 范数上界 S2，且 d 是 O的次数。令

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\lambda_{\min}^{(k)} C(k,d)}{3}\epsilon, \tag{B.25}$$

我们有

$$|f(\mathcal{P}(\sigma)) - \text{tr}(O\sigma)| \leq \epsilon. \tag{B.26}$$

总之， $N = \mathcal{O}(\log(n^k/\delta)/\tilde{\epsilon}^2) = \mathcal{O}(\log(n^k/\delta)/\epsilon^2)$。关于总计算复杂度，在假设 $\text{tr}(P\mathcal{P}(\sigma))$ 的值已知的条件下，算法的第 3 步需要$\mathcal{O}(n^k \cdot N \cdot k)$次计算，第 4 步和第 5 步均需要 $\mathcal{O}(n^k)$次计算。因此，总体计算复杂度为 $\mathcal{O}(Nkn^k) = \mathcal{O}(n^k \log(n^k))$。■

附录 C：信道样本复杂度的最优性

首先，我们详细阐述命题 4 中提到的任务：

问题 S1 给定一个泡利信道 $\mathcal{P}$。令 $\lambda^{(k)}$ 表示对于权重至多为 k 的泡利算符，其本征值组成的向量。k 的值不变时，我们省略上标。我们希望有一种算法，能够通过访问信道 N 次，以高概率学习 λ，使得$|\lambda_P - \lambda_P| \leq \epsilon$。更具体地说，对于每次访问，用户可以制备任意输入态，将其发送通过信道，并使用任意正算子值测度测量输出态。用符号表示，在第 t^{th} 次访问中，用户制备态 ρ_t，并获得输出态 $\mathcal{P}(\rho_t)$。最后，用户使用正算子值测度 $\{\lambda_i^t|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\}$ 进行测量，其中 $\sum_i \lambda_i^t|\phi_i\rangle\langle\phi_i| = I$。

算法1 中 确实符合上述描述，并为该问题提供了一个上界。现在我们证明 th at

命题 S3 要解决问题 *S1*，信道使用次数 N 至少为 $\Omega(\log(n^k)/\epsilon^2)$.

证明 我们遵循 [17, 19] 和 [36]中概述的思路。首先，我们构造一组由 (P, s) 标记的泡利信道：

$$\mathcal{P}_{(P,s)}(\rho) := \text{tr}(\rho)\frac{I}{2^n} + 2\epsilon s\frac{\text{tr}(P\rho)}{2^n}P, \tag{C.1}$$

对于 P: $P \neq I, |P| \leq k$, $s \in \{\pm 1\}$。我们进一步定义 $T(n,k) = \sum_{l=1}^{k}\binom{n}{l}3^l$，求和中的每一项都表示权重为 l 的泡利算符数量，因此由式 (C.1) 定义的集合包含 $2T(n,k)$ 个元素。每个信道的特征值不是 0 就是 $\pm 2\epsilon$，所以，如果我们能以至少 $1-\delta$ 的概率将 $\lambda^{(k)}$ 中的每个元素学习到精度 ϵ，就能确定给定的是哪个泡利信道。因此，我们可以将这个集合用于理论上的量子通信任务。假设 Alice 和 Bob 已就 $\{\mathcal{P}_{(P,s)}\}_{(P,s)}$ 的顺序达成一致。然后 Alice 从 $[2T(n,k)]$ 中均匀随机地选取一个数，并将对应信道的 N 份副本发送给 Bob。Bob 收到这些副本后，可以使用能够解决问题 S1 的协议，以至少 $1-\delta$ 的概率成功解码 Alice 的消息。如果我们将 (P, s) 上的均匀分布称为 X，将 Bob 的猜测 X的分布称为，那么根据 Fano 不等式，

$$H(X \mid \widehat{X}) \leq \delta \log(2T(n,k) - 1) + h(\delta), \tag{C.2}$$

其中 $h(p)$ 是 $\{p, 1-p\}$ 的二元熵。由此可得

$$I(X : \widehat{X}) = H(X) - H(X \mid \widehat{X}) \geq \log(2T(n,k)) - h(\delta) - \delta \log(2T(n,k) - 1) = \Omega(\log(n^k)). \tag{C.3}$$

回想一下，Bob 的协议包括选择一个输入态 ρ，将其通过信道发送，并使用正算子值测度进行测量。令I_t 表示 Bob 的 t^{th} 测量结果对应的随机变量。由于 $\widehat{X}$ 是 $I_1, \ldots, I_N$的函数，根据数据处理不等式和链式法则，

$$I(X : \widehat{X}) \leq I(X : I_1, \ldots, I_N) \tag{C.4}$$

$$= \sum_{t=1}^{N} I(X : I_t \mid I_1, \ldots, I_{t-1}) \tag{C.5}$$

$$\leq \sum_{t=1}^{N} I(X : I_t). \tag{C.6}$$

在继续之前，我们先进行一些初步计算。令 $\Pr(i_t \mid (P,s))$ 表示在接收到的信道为 (P,s) 时， t^{th} 测量结果为 i_t 的概率，我们有中文日韩

$$\Pr(i_t \mid (P,s)) = \lambda_{i_t} \langle \phi_{i_t}^t | \frac{I}{2^n} + 2\epsilon s \frac{\operatorname{tr}(P\rho_t)}{2^n} P | \phi_{i_t} \rangle \tag{C.7}$$

$$= \frac{\lambda_{i_t}}{2^n} [1 + 2\epsilon s \operatorname{tr}(P\rho_t) \langle \phi_{i_t}^t | P | \phi_{i_t}^t \rangle]. \tag{C.8}$$

由此，我们可以通过求边缘分布来计算 $\Pr(i_t)$：

$$\Pr(i_t) = \mathop{\mathbb{E}}_{P,s} \Pr(i_t \mid (P,s)) = \frac{\lambda_{i_t}}{2^n}. \tag{C.9}$$

此外，我们计算平方量：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{P,s} \Pr(i_t \mid (P,s))^2 = \frac{(\lambda_{i_t}^t)^2}{2^{2n}} [1 + 4\epsilon^2 \mathop{\mathbb{E}}_{P} [\operatorname{tr}(P\rho_t)]^2 \langle \phi_{i_t}^t | P | \phi_{i_t}^t \rangle^2] \leq \frac{(\lambda_{i_t}^t)^2}{2^{2n}} [1 + 4\epsilon^2]. \tag{C.10}$$

现在从公式（C.6）继续，我们想要界定 $I(X : I_t)$。根据互信息的定义，我们有

$$I(X : I_t) = H(I_t) - H(I_t \mid X) \tag{C.11}$$

$$= -\sum_{i_t} \Pr(i_t) \log \Pr(i_t) + \mathop{\mathbb{E}}_{P,s} \sum_{i_t} \Pr(i_t \mid (P,s)) \log \Pr(i_t \mid (P,s)) \tag{C.12}$$

$$\leq -\sum_{i_t} \Pr(i_t) \log \Pr(i_t) + \mathop{\mathbb{E}}_{P,s} \sum_{i_t} \Pr(i_t \mid (P,s)) \left[\log \Pr(i_t) + \frac{\Pr(i_t \mid (P,s)) - \Pr(i_t)}{\Pr(i_t)} \right] \tag{C.13}$$

$$= \sum_{i_t} \frac{\mathop{\mathbb{E}}_{P,s} \Pr(i_t \mid (P,s))^2 - \Pr(i_t)^2}{\Pr(i_t)} \tag{C.14}$$

$$\leq \sum_{i_t} \frac{\lambda_{i_t}^t}{2^n} 4\epsilon^2 \tag{C.15}$$

$$= 4\epsilon^2, \tag{C.16}$$

其中第三行由 $\log x \leq \log y + \frac{x-y}{y}$ 并取 $x = \Pr(i_t \mid (P, s))$， $y = \Pr(i_t)$。倒数第二行来自公式（C.10），最后一行则由以下事实得出：$\sum_{i_t} \lambda_{i_t}^t = 2^n$。结合公式（C.3）和（C.6），我们得到 $N = \Omega(\log(n^k)/\epsilon^2)$。

■

附录 D：Clifford 影子

在算法 1中，我们只考虑收集该信道的泡利算符影子。一个自然的问题是，如果使用高度相关的 Clifford 影子，会发生什么，以及它是否能带来更好的样本复杂度。对于量子态的经典影子，使用 Clifford 影子的复杂度为

命题 S4（[14]） 采用随机 *Clifford* 基底原语，其中每个随机幺正算子均从 n 量子比特 *Clifford* 群中均匀选取。给定一组可观测量 $O_1, O_2, \ldots, O_M$ 以及精度参数 $\epsilon, \delta \in [0,1]$，则

$$N = \mathcal{O}\left(\frac{\log(M/\delta)}{\epsilon^2} \max_i \operatorname{tr}(O_i^2) \right) \tag{D.1}$$

样本数量为 要同时预测每个$\operatorname{tr}(O_i\rho)$，精度达到 ϵ，成功概率为 $1-\delta$.

与命题 1相比，我们可以看到，当可观测量的局域性较低时，Pauli 影子的复杂度更优；但在 $k = n$的情况下，Clifford 影子的复杂度更优。这里，我们将证明一个类似的结果：在可观测量的局域性为 $k = \mathcal{O}(1)$的假设下，Clifford 影子无法降低样本复杂度。首先，我们给出改变输入分布时的以下结果：

命题 S5 给定一个 n 量子比特可观测量 $O = \sum_P \alpha_P P$，并设 $\mathcal{D}$ 是 n 量子比特态的一个分布，该分布在任意 n 量子比特 *Clifford* 门作用下保持不变。那么，对于泡利算符 $P \in \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n} \backslash \{I^{\otimes n}\}$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}} \operatorname{tr}(O\rho)\operatorname{tr}(P\rho) = \frac{2^n \mathbb{E}_{\rho\sim\mathcal{D}} \operatorname{tr}(\rho^2) - 1}{4^n - 1}\alpha_P. \tag{D.2}$$

对于 $P = I^{\otimes n}$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}} \operatorname{tr}(O\rho)\operatorname{tr}(P\rho) = \alpha_I. \tag{D.3}$$

证明 我们沿用 [15] 中引理 16 证明的思路。令 $O = \sum_Q \alpha_Q Q$，则有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}} \operatorname{tr}(O\rho)\operatorname{tr}(P\rho) \tag{D.4}$$

$$= \sum_Q \alpha_Q \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}} \operatorname{tr}(Q\rho)\operatorname{tr}(P\rho) \tag{D.5}$$

$$= \sum_Q \alpha_Q \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}} \operatorname{tr}\big((Q\otimes P)(\rho\otimes\rho)\big). \tag{D.6}$$

由于 $\mathcal{D}$ 在 Clifford 门作用下保持不变，我们可以用任意 Clifford 门对 ρ 进行共轭，而对 ρ 求期望的结果不变。事实上，我们可以用一个随机 Clifford 门对 ρ 进行共轭。令 U 为一个随机 n 量子比特 Clifford 门，则有

$$\sum_Q \alpha_Q \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}} \operatorname{tr}\big((Q\otimes P)(\rho\otimes\rho)\big) \tag{D.7}$$

$$= \sum_Q \alpha_Q \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}} \mathop{\mathbb{E}}_{U} \operatorname{tr}\big((Q\otimes P)(U\otimes U)(\rho\otimes\rho)(U\otimes U)^\dagger\big) \tag{D.8}$$

$$= \sum_Q \alpha_Q \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}} \mathop{\mathbb{E}}_{U} \operatorname{tr}\big((U\otimes U)^\dagger(Q\otimes P)(U\otimes U)(\rho\otimes\rho)\big). \tag{D.9}$$

为计算 $\mathbb{E}_U(U\otimes U)^\dagger(Q\otimes P)(U\otimes U)$，我们利用 Clifford 门构成 2-设计这一性质，这意味着

$$\mathop{\mathbb{E}}_{U}(U\otimes U)^\dagger(Q\otimes P)(U\otimes U) = \int_{\mathcal{U}} (U\otimes U)(Q\otimes P)(U\otimes U)^\dagger d\mathcal{U}, \tag{D.10}$$

其中 $\mathcal{U}$ 是哈尔测度，定义在 n量子比特酉群上。为了计算该积分，我们可以使用以下标准结果：

命题 S6 设 $\mathcal{U}(d)$ 为 $\mathbb{C}^d$的酉群，则对于任意作用于 $\mathbb{C}^d\otimes\mathbb{C}^d$上的线性算子 X，有

$$\int_{\mathcal{U}(d)} (U\otimes U)X(U\otimes U)^\dagger d\mathcal{U} = \left(\frac{\operatorname{tr}(X)}{d^2-1} - \frac{\operatorname{tr}(XF)}{d(d^2-1)}\right) id_{d^2} - \left(\frac{\operatorname{tr}(X)}{d(d^2-1)} - \frac{\operatorname{tr}(XF)}{d^2-1}\right) F, \tag{D.11}$$

其中 F 是交换算子。

公式（D.11）使我们可以计算公式（D.10）中的积分，从而得到

$$\int_{\mathcal{U}} (U\otimes U)(Q\otimes P)(U\otimes U)^\dagger d\mathcal{U} = \begin{cases} \frac{2^n}{4^n-1}F - \frac{1}{4^n-1} id_{d^2} & \text{if } Q = P \neq I^{\otimes n}, \\ id_{d^2} & \text{if } Q = P = I^{\otimes n}, \\ 0 & \text{if } Q \neq P, \end{cases} \tag{D.12}$$

w这里 id表示恒等映射。将其代入公式（D.6），即可得到所需结果 t. ■

这意味着我们的经验估计关于 n 呈指数级小，这使我们的样本复杂度多出一个指数因子。

其次，如果我们使用 Clifford 影子重构 $\mathcal{P}(\rho_i)$，那么在计算 $\widehat{x}_P$ 时，我们会用 $(2^n+1)U^\dagger|b\rangle\langle b|U - I$ 替换 $\bigotimes_j($ $3|t_{ij}\rangle\langle t_{ij}| - I)$。我们的经验估计的期望仍等于 λ_P，但其取值范围扩展至 $[-(2^n+1)\ 2^n+1]$。根据 Hoeffding 不等式，这也会给样本复杂度带来一个指数因子。

备注 2 对于 $k = n$，使用 *Pauli* 影子会使我们的采样复杂度增加 3^n 倍。这比上面提到的两个因子都大，它们约为 2^n。这与我们的直觉一致：与随机 *Clifford* 相比，只有在处理局域可观测量时，随机 *Pauli* 才更受青睐。

附录 E：扩展到其他信道

对于一般信道 $\mathcal{E}$，信道 $\mathcal{E}^\dagger$ 的伴随映射的作用也是一种线性映射。事实上，它是一个完全正幺映射，并且可以写成一个矩阵。我们将 M 记为泡利基下的矩阵。对于泡利信道，M 是一个对角矩阵。其形式化定义为 $M_{PQ} = \frac{1}{2^n}\operatorname{tr}(P\mathcal{E}^\dagger(Q))$。这与量子信道的泡利传输矩阵非常相似。

定义 S2 量子信道 $\mathcal{N}$ 的泡利传输矩阵 T 定义为 $T_{PQ} = \frac{1}{2^n}\operatorname{tr}(P\mathcal{N}(Q))$。

命题 S7 给定一个量子信道 $\mathcal{N}$，并令 T 和 M 如上定义，则 $M = T$ 是 T 相对于泡利基的转置。

证明 $M_{PQ} = \frac{1}{2^n}\operatorname{tr}(P\mathcal{N}^\dagger(Q)) = \frac{1}{2^n}\operatorname{tr}(\mathcal{N}(P)Q) = T_{QP}$ 第二个等式根据伴随映射的定义得出。 ■

命题 S8 设 A 是一个块大小为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 的 $n \times n$ 上块三角矩阵。设 $s_i = \sum_{j=1}^{m} a_j$，因此 $s_m = n$ 和 A 的 $s_i \times s_i$ 子矩阵均为上块三角矩阵。将每个子矩阵记为 A_i，并假设每个 A_i 都可逆。给定满足 $b_k = 0\ \forall k > s_i$ 的 b，其中某个 i，则存在满足 $x_k = 0\ \forall k > s_i$ 的 x，使得 $Ax = b$。更具体地说，x 由 $\begin{pmatrix} A_i^{-1}b^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix}^\intercal$ 给出，其中 $b^{(i)}$ 表示 b 的子向量 $(b_1, b_2, \ldots, b_{s_i})$。

证明 直接验证。 ■

上述观察表明，若 M 是上块三角矩阵，且块 i 由以下集合构成：i局域泡利算符，那么要在伴随映射下求一个 k 局域可观测量的逆，只需找出 $s_k \times s_k$ 的子矩阵 M，其逆也仍是一个 k 局域可观测量。从现在起，我们所说的“上块三角”是指块 i 由以下集合构成：i局域泡利算符。泡利信道作为对角信道，自然满足上块三角条件。乘积信道是另一类满足该条件的信道。根据命题 S7，该条件也意味着泡利传输矩阵是下块三角矩阵。

命题 S9 若噪声信道 可分解，即 $\mathcal{N} = \bigotimes_i \mathcal{N}_i$，则 $\mathcal{N}^\dagger$ 在泡利基下的矩阵是上块三角矩阵

证明 我们注意到，伴随映射为上三角映射的充要条件是它保持泡利算符的权重。也就是说，$\mathcal{N}^\dagger(P)$的泡利分解不包含权重大于 P的项，即

$$\mathcal{N}^\dagger(P) = \sum_{Q:|Q|\le|P|} \alpha_Q Q. \tag{E.1}$$

我们称 $\mathcal{N}^\dagger$ 是权重收缩的。如果噪声信道 $\mathcal{N}$ 可分解，那么它的伴随映射也可分解，即 $\mathcal{N}^\dagger = \bigotimes_i \mathcal{N}_i^\dagger$。给定一个 Pauli 算符 $P = \bigotimes_i P_i$，$\mathcal{N}^\dagger(P) = \bigotimes_i \mathcal{N}_i^\dagger(P_i)$。如果 $P_i = I$，那么 $\mathcal{N}_i^\dagger(P_i) = I$，因为每个 $\mathcal{N}_i^\dagger$ 本身都是伴随映射，因此是幺正的。因此，$\mathcal{N}^\dagger(P)$ 的权重不会增加，所以 $\mathcal{N}^\dagger$ 是权重收缩的。■

为了扩展前述方法，我们需要计算整个上三角分块矩阵，而不是计算对角元素。然后对所得矩阵求逆，即可得到 $\overleftarrow{O}$ 的估计。因此，我们可以推广第 III 节和第 IV 节中的算法和定理，从而扩展我们能够恢复信息的信道集合。在此之前，我们将展示如何估计 M 的非对角元素。

引理 S10（参考文献 [15]中的引理 16） 给定一个 n 量子比特可观测量 $O = \sum_P \alpha_P P$，并令 $\mathcal{D}^0$ 为泡利本征态乘积态的均匀分布。那么对于泡利算符 $P \in \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(O\rho)\operatorname{tr}(P\rho) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|P|}\alpha_P. \tag{E.2}$$

如果我们取 $O = \mathcal{E}^\dagger(Q)$，其中 Q 是 Pauli 算符，那么上述引理允许我们获得 $\mathcal{E}^\dagger(Q)$ 的系数，它对应于 M 的第 Q 列。具体来说，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|P|} M_{PQ} = \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(\mathcal{E}^\dagger(Q)\rho)\operatorname{tr}(P\rho) = \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(Q\mathcal{E}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho). \tag{E.3}$$

另一个区别在于，我们不再将可观测量的每个系数除以对应的估计本征值，而是需要将估计的 M 的逆矩阵作用于系数向量。这需要对一个维度为 $\mathcal{O}(n^k)$ 的方阵求逆，其计算复杂度为 $\mathcal{O}(n^{3k})$。更新后的算法及其复杂度如下：

算法 2权重收缩通道的改进算法

要求： 未知的权重收缩信道 $\mathcal{E}$, k-局域可观测量 $O = \sum$ $_P \alpha_P P$份未知含噪态 $\mathcal{E}(\sigma)$的副本
保证： 对 tr($O\sigma$) 的估计 1：制备 N 随机乘积泡利本征态 $\{\rho_i = \bigotimes_{j=1}^n |s_{ij}\rangle\langle s_{ij}|\}_{i=1}^N$。将它们通过未知信道 $\mathcal{E}$，并对每个量子比特进行随机 Pauli 测量，获得数据 $\{\bigotimes_{j=1}^n |t_{ij}\rangle\langle t_{ij}|\}_{i=1}^N$。2：对每个满足 $|Q| \le k$ 的 n 量子比特 Pauli 算符 Q，按照下文所述，计算 $\widehat{\lambda}_P(Q)$，其中 P 满足 |P|≤ |Q|。▷ 计算时间为 $\mathcal{O}(n^{2k} \cdot N \cdot k)$ 3：构造矩阵 $\tilde{M}$，使得 $\tilde{M}_{PQ} = \widehat{\lambda}_P(Q)$。$\tilde{M}$ 是一个上块三角矩阵。4：对于 $O = \sum_{P:\ |P|\le k} \alpha_P P$。令 $\overleftarrow{\alpha} = \tilde{M}^{-1}\alpha$。▷ 计算时间为 $\mathcal{O}(n^{3k})$ 5：进行预测时，给定 $\mathcal{E}(\sigma)$，我们计算 $f(\mathcal{E}(\sigma)) = \sum_{P:\ |P|\le k} \overleftarrow{\alpha}_P \mathrm{tr}(P\mathcal{E}(\sigma))$。▷ 计算时间为 $\mathcal{O}(n^k)$

我们按如下方式计算 $\widehat{\alpha}_P(Q)$：首
先令

$$\widehat{x}_P(Q) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathrm{tr}\left(Q\bigotimes_{j=1}^n (3|t_{ij}\rangle\langle t_{ij}| - I)\right)\mathrm{tr}(P\rho_i) \tag{E.4}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n \mathrm{tr}(Q_j(3|t_{ij}\rangle\langle t_{ij}| - I)\,\mathrm{tr}(P_j|s_{ij}\rangle\langle s_{ij}|), \tag{E.5}$$

then

$$\widehat{\lambda}_P(Q) = 3^{|P|}\widehat{x}_P(Q). \tag{E.6}$$

再次，我们有 spe cial case of $\lambda_P(I) = \delta_{PI}$ from $\mathcal{E}^\dagger$ being a 幺正映射，因此无需进行估计 .

命题5 给定一个未知的 n-量子比特权重收缩通道 $\mathcal{E}$、一个含噪态 $\mathcal{E}(\sigma)$以及一个 n-量子比特有界度k-局域可观测量 O，满足 $\|O\|_\infty = 1$。对于 ε，$\delta > 0$，存在一种算法，使用 $N = \mathcal{O}(n^{2k}\log(n^{2k}/\delta)/\epsilon^2)$ 次对该信道的访问，以获得一个函数 f 使得

$$|f(\mathcal{E}(\sigma)) - \mathrm{tr}(O\sigma)| \le \epsilon \tag{E.7}$$

以至少 $1-\delta$ 的概率成立。计算时间为 $\mathcal{O}(n^{4k}\log(n^{2k}))$。

证明 证明的总体结构与之前相同，但我们有更多的系数。为便于与之前的证明进行比较，令 $\lambda_P(Q) = M_{PQ} = \frac{1}{2^n}\mathrm{tr}(P\mathcal{N}^\dagger($ $Q))$，$x_P(Q) = (1/3)^{|P|}\lambda_P(Q)$。$D(n,\ k)$ 表示具有权重 k 的 n 量子比特泡利算符的数量，而 $T(n,\ k) = \sum_{l=0}^k D(n,\ l)$。

令 $\tilde{\epsilon}$，其值稍后确定，$\tilde{\epsilon}' = \tilde{\epsilon}/3^k$。根据 Hoeffding 不等式，我们有

$$\mathbb{P}(|\widehat{x}_P(Q) - x_P(Q)| > \tilde{\epsilon}') \le 2e^{-N\tilde{\epsilon}'^2/2\times 3^{2k}} \quad \forall P, Q, |P| \le |Q| \le k. \tag{E.8}$$

根据并集界，

$$\mathbb{P}(|\widehat{x}_P(Q) - x_P(Q)| \le \tilde{\epsilon}' \quad \forall P, Q, |P| \le |Q| \le k) \tag{E.9}$$

$$\ge 1 - \bigcup_{P,Q}\mathbb{P}(|\widehat{x}_P(Q) - x_P(Q)| > \tilde{\epsilon}) \tag{E.10}$$

$$\ge 1 - 2\sum_{l=0}^k D(n,l)\sum_{m=0}^l D(n,m)e^{-N\tilde{\epsilon}'^2/2\times 3^{2k}} \tag{E.11}$$

$$= 1 - 2\sum_{l=0}^k D(n,l)T(n,l)e^{-N\tilde{\epsilon}'^2/2\times 3^{2k}}. \tag{E.12}$$

$$\tag{E.13}$$

令最后一项等于 $1-\delta$，可得我们需要

$$N = \frac{2\times 3^{2k}\log(2\sum_l D(n,l)T(n,l)/\delta)}{\tilde{\epsilon}'^2}. \tag{E.14}$$

注意到 $\sum_l D(n,\ l)T(n,\ l) < T(n,\ k)^2 = \mathcal{O}(n^{2k})$，因此有 $N = \mathcal{O}(\log(n^{2k}/\delta)/\tilde{\epsilon}'^2)$。根据 $\tilde{\epsilon}'$ 的定义，这 N 也保证以至少 $1-\delta$ 的概率，

$$|\widehat{\lambda}_P(Q) - \lambda_P(Q)| \le \tilde{\epsilon} \quad \forall P, Q, |P| < |Q| \le k. \tag{E.15}$$

以此为条件，按照相同的误差分析，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{tr}(\mathcal{E}^\dagger(\overleftarrow{O})\sigma) - \mathrm{tr}(O\sigma)\right| && \text{(E.16)}\\
=&\sum_{P:|P|\le k} |(M\overleftarrow{\alpha})_P - \alpha_P| && \text{(E.17)}\\
\le&\|M\overleftarrow{\alpha} - \alpha\|_1 && \text{(E.18)}\\
=&\left\|M(\tilde{M})^{-1}\alpha - \alpha\right\|_1. && \text{(E.19)}
\end{aligned}$$

我们可以写成 $M = M + \Delta$，根据构造，Δ 的每个元素的模至多为 $\tilde{\epsilon}$。因此 $\|\Delta\|_1 \le T(n,\ k)\tilde{\epsilon}$。我们还利用了这样一个事实：$(M+\Delta)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}\Delta M^{-1} + \mathcal{O}(\|\Delta\|^2)$。假设 $\mathcal{O}(\|\Delta\|^2)$ 可忽略不计，

$$\begin{aligned}
&\|M(\tilde{M})^{-1}\alpha - \alpha\|_1 && \text{(E.20)}\\
\le&\|M\|_1\|(M^{-1} - M^{-1}\Delta M^{-1})\alpha - M^{-1}\alpha\|_1 && \text{(E.21)}\\
=&\|M\|_1\|-M^{-1}\Delta M^{-1}\alpha\|_1 && \text{(E.22)}\\
\le&\|M\|_1\|M^{-1}\|_1\|M^{-1}\|_1\|\Delta\|_1\|\alpha\|_1 && \text{(E.23)}\\
\le&B(M)T(n,k)\tilde{\epsilon}\left(\frac{3\|O\|}{C(k,d)}\right), && \text{(E.24)}
\end{aligned}$$

其中我们定义 $B(M) = \|M\|_1\|M^{-1}\|_1^2$，并注意到 $\|\alpha\|_1 = \|O\|_{\text{Pauli},\ 1}$。同样，$d$ 是 O 的次数。令

$$\tilde{\epsilon} = \frac{C(k,d)}{3B(M)T(n,k)}\epsilon, \tag{E.25}$$

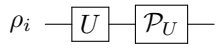
我们有

$$|f(\mathcal{E}(\sigma)) - \mathrm{tr}(O\sigma)| \le \epsilon. \tag{E.26}$$

总之，$N = \mathcal{O}(\log(n^{2k}/\delta)/\tilde{\epsilon}^2) = \mathcal{O}(n^{2k}\log(n^{2k}/\delta)/\epsilon^2)$，相应的总计算时间为$\mathcal{O}(n^{4k}\log(n^{2k}))$。■

附录 F：在 Clifford 电路中应用误差缓解

在误差缓解中，最广泛使用的噪声模型是门无关、时间平稳的马尔可夫噪声（GTM）。对于由 H、S 和 CNOT 门组成的 Clifford 电路，这意味着每次使用一个门后，都会接入相同的噪声信道。我们考虑一种稍强的情况，即噪声依赖于门：假设同类型的门后接入相同的信道，并且每个噪声信道都是泡利信道。因此，给定一个电路 $\mathcal{C}$ 和任意输入态 σ，理想输出态为 $\mathcal{C}(\sigma)$，但实际上，我们得到的是含噪态 $\mathcal{C}(\sigma)$，其中噪声如上所述。随后，使用可观测量 O进行测量时，会产生误差。误差缓解的目标是在只能访问含噪态 $\mathrm{tr}(O\mathcal{C}(\sigma))$ 的情况下，恢复 $\mathcal{C}(\sigma)$的真实值。我们将展示如何调整我们的方法，以便在可观测量为 k-局部时完成这一任务。核心思路仍然是先通过随机泡利本征态作用于各个门，学习泡利信道的特征值；然后利用 Clifford 门是泡利群稳定子的性质，证明我们仍然只需缩放可观测量的系数即可进行估计，这与定理 3中的做法类似。在学习阶段，我们再次将随机泡利本征态输入单个门，然后在随机泡利基下进行测量。该电路可表示为：



其中 $U \in \{H, S, CNOT\}$，$\mathcal{P}_U$是相应的泡利噪声，而 ρ_i是泡利本征态。单量子比特 U作用于 ρ_i 时，只会将其变为另一个泡利本征态。这使其回到了定理3所述的相同情形，因此我们可以估计

的本征值 $\mathcal{P}_U$ 按照算法 1 进行处理，但在公式（12）中例外，我们需要将其改为

$$\widehat{x}_P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{tr}(P(3|t_i\rangle\langle t_i| - I))\,\mathrm{tr}(P(U\rho_i U^\dagger)). \tag{F.1}$$

对于受控非门量子门，其含噪受控非门量子门的矩阵是单项矩阵。若以泡利算符标记矩阵元素，则 $(\pi(P)\ P)$元素取值为 λ_P 其中 $\pi(P)$ 是通过对 P 施加受控非门共轭变换得到的结果泡利算符。在这种情况下，通过修改引理S10，我们可以如下估计 λ_P：

$$\widehat{x}_P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{tr}(P\bigotimes_{j=1}^{2}(3|t_{ij}\rangle\langle t_{ij}| - I))\,\mathrm{tr}(\pi(P)\rho_i), \tag{F.2}$$

$$\widehat{\lambda}_P = 3^{|\pi(P)|}\widehat{x}_P. \tag{F.3}$$

接下来，给定一个 n量子比特的 Clifford 电路 $\mathcal{C}$，它可以写成

$$\mathcal{C} = \mathcal{U}_d \circ \mathcal{U}_{d-1} \circ \cdots \circ \mathcal{U}_1, \tag{F.4}$$

其中 $\mathcal{U}_i(\rho) = U_i\rho U_i^\dagger, U_i \in \{H, S, CNOT\}$。相应的含噪电路 $\tilde{\mathcal{C}}$为

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_d} \circ \mathcal{U}_d \circ \cdots \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1. \tag{F.5}$$

此外，由于每个 U_i 都是 Clifford门，它会置换 n量子比特的泡利群。我们将该置换记为 π_i，即$\pi_i(P) = U_i^\dagger P U_i$。$P$ 在 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_i}$下的本征值记为 $\lambda_{i,\ P}$。我们注意到，学习阶段结束后，π_i和 $\lambda_{i,\ P}$都可以通过经典计算高效求得。（因为我们可以通过与恒等算符作张量积，将每个量子门（及噪声）视为作用于 n 个量子比特上的量子门（及噪声）。）

最后，给定 k-局域可观测量 $O = \sum \alpha_P P$以及 $\mathcal{C}(\sigma)$ 的多个副本，我们希望找到 $\mathrm{tr}(O\mathcal{C}(\sigma))$ 的估计。思路仍然是找到 $\overleftarrow{O} = \sum_P \overleftarrow{\alpha}_P P$，使得 $\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\tilde{\mathcal{C}}(\sigma)) = \mathrm{tr}(O\mathcal{C}(\sigma))$。以 $d = 2$ 为例，通过归纳法可将其推广到任意 d。令

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_2} \circ \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1, \tag{F.6}$$

于是，$\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\tilde{\mathcal{C}}(\sigma))$ 可以写为

$$\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\tilde{\mathcal{C}}(\sigma)) = \sum_P \overleftarrow{\alpha}_P \,\mathrm{tr}(P\,\mathcal{P}_{\mathcal{U}_2} \circ \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1(\sigma)). \tag{F.7}$$

考虑迹项，可将其简化如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(P\mathcal{P}_{\mathcal{U}_2} \circ \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1(\sigma)) &= \mathrm{tr}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}_2}(P)\,\mathcal{U}_2 \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1(\sigma)) && \text{(F.8)}\\
&= \lambda_{2,P}\,\mathrm{tr}(P\,\mathcal{U}_2 \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1(\sigma)) && \text{(F.9)}\\
&= \lambda_{2,P}\,\mathrm{tr}(\mathcal{U}_2^\dagger(P)\,\mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1(\sigma)) && \text{(F.10)}\\
&= \lambda_{2,P}\,\mathrm{tr}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}_1}(\pi_2(P))\,\mathcal{U}_1(\sigma)) && \text{(F.11)}\\
&= \lambda_{2,P}\lambda_{1,\pi_2(P)}\,\mathrm{tr}(\pi_2(P)\,\mathcal{U}_1(\sigma)) && \text{(F.12)}\\
&= \lambda_{2,P}\lambda_{1,\pi_2(P)}\,\mathrm{tr}(\mathcal{U}_2^\dagger(P)\,\mathcal{U}_1(\sigma)) && \text{(F.13)}\\
&= \lambda_{2,P}\lambda_{1,\pi_2(P)}\,\mathrm{tr}(P\,\mathcal{U}_2 \circ \mathcal{U}_1(\sigma)) && \text{(F.14)}\\
&= \lambda_{2,P}\lambda_{1,\pi_2(P)}\,\mathrm{tr}(P\,\mathcal{U}_2 \circ \mathcal{U}_1(\sigma)) && \text{(F.15)}\\
&= \lambda_{2,P}\lambda_{1,\pi_2(P)}\,\mathrm{tr}(P\,\mathcal{C}(\sigma)). && \text{(F.16)}
\end{aligned}$$

因此，令

$$\overleftarrow{\alpha}_P = \frac{\alpha_P}{\lambda_{2,P}\lambda_{1,\pi_2(P)}}, \tag{F.17}$$

我们有的是

$$\mathrm{tr}(\overleftarrow{O}\tilde{\mathcal{C}}(\sigma)) = \sum_P \overleftarrow{\alpha}_P \,\mathrm{tr}(P\mathcal{P}_{\mathcal{U}_2} \circ \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{U}_1(\sigma)) \tag{F.18}$$

$$= \sum_P \alpha_P \operatorname{tr}(P\,\mathcal{C}(\sigma)) \tag{F.19}$$

$$= \operatorname{tr}(P\mathcal{C}(\sigma)). \tag{F.20}$$

制备与测量误差。 随机泡利输入态通过对零态施加单个量子门来制备。假设这些量子门也存在泡利噪声（因此存在态制备误差），这会如何影响我们的估计？泡利噪声对泡利本征态的作用是以与信道参数相关的概率，将其翻转为本征值为负的本征态。例如，$X|0\rangle = |1\rangle$，$Y|0\rangle = |1\rangle$，$Z|0\rangle = |0\rangle$，$I|0\rangle = |0\rangle$。因此，如果泡利信道的概率为 $\{p_I, p_X, p_Y, p_Z\}$，那么它将以 $|0\rangle$ 的概率保持不变，并以 $p_I + p_Z$ 的概率将其翻转为 $|1\rangle$，概率为 $p_X + p_Y$。这同样适用于其他 5 个状态，但概率各不相同。现在，若考虑噪声为概率为 p的退极化信道，则每个泡利本征态被翻转的概率都相同。令 ρ 表示一个泡利本征态，ρ' 表示与其正交的状态，p_0 表示退极化信道保持 ρ 不变的概率，并令 p_1 表示将其翻转为 ρ'的概率。现在，将这些代入引理2的左侧，可得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} \operatorname{tr}(P\mathcal{P}(p_0\rho + p_1\rho'))\operatorname{tr}(P(p_0\rho + p_1\rho')) \tag{F.21}$$

$$= \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} p_0^2 \operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho) + p_0p_1 \operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho') + p_0p_1 \operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho'))\operatorname{tr}(P\rho) + p_1^2 \operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho'))\operatorname{tr}(P\rho') \tag{F.22}$$

$$= \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} p_0(p_0 - p_1)\operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho) - p_1(p_0 - p_1)\operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho'))\operatorname{tr}(P\rho') \tag{F.23}$$

$$= \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} p_0(p_0 - p_1)\operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho) - p_1(p_0 - p_1)\operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho) \tag{F.24}$$

$$= \mathop{\mathbb{E}}_{\rho\sim\mathcal{D}^0} (p_0 - p_1)^2 \operatorname{tr}(P\mathcal{P}(\rho))\operatorname{tr}(P\rho) \tag{F.25}$$

$$= (p_0 - p_1)^2 \frac{1}{3^{|P|}} \lambda_P, \tag{F.26}$$

在第二行中，我们使用了迹的线性性和 $\mathcal{P}$；在第三行中，我们使用了$\operatorname{tr}(P\rho) = -\operatorname{tr}(P\rho')$；在第四行中，我们使用了期望的线性性以及以下事实：ρ' 与 ρ具有相同的分布。最后一行使用了引理2的结果。这意味着，当我们使用公式（12）至公式（13）进行估计时，除恒等算符对应的系数（我们将其直接设为 1）外，所有系数都会多出一个因子$(p_0 - p_1)^2$ 。如果我们仅使用态制备与测量执行整个过程，并用其估计无迹可观测量的已知量，例如估计 $|+\rangle\langle+|$ 相对于 X的期望值，就可以得到该因子。二者之比就是我们对前因子的估计值；将我们的估计值除以该比值，即可消除态制备误差的影响。