arXiv:2305.04153v1 [math.GT] 7 May 2023

¨Teichmüller空间的等距嵌入是覆盖构造

FREDERIK BENIRSCHKE 和 CARLOS A. SERV´AN

ABSTRACT. 设 $h : \Sigma' \to \Sigma$ 是拓扑曲面的分歧覆盖。通过拉回复结构， h 诱导出 Teichm¨uller 空间$\mathcal{T}(\Sigma) \hookrightarrow \mathcal{T}(\Sigma')$之间的全纯等距嵌入。我们证明，当 $\dim \mathcal{T}(\Sigma) \geq 2$时，所有等距嵌入都来自分歧覆盖。这推广了 Royden [Roy71] 的一个定理。由此可得， $\mathcal{T}(\Sigma)$ 中与某个 Teichm¨uller 空间等距的全测地子流形，都是覆盖构造。另一个推论是对黎曼曲面模空间的局部等距嵌入进行分类。

1. INTRODUCTION

设 $\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\Sigma)$ 是亏格为 g 的 n-标记拓扑曲面 Σ 的 Teichm¨üller 空间，其中假设 $3g-3+n>0$。Royden 的著名定理 [Roy71], 结合 Earle-Kra [EK74], 的结果表明，对于 $2g+n \geq 5$ 映射类群， $\mathcal{T}_{g,n}$ 的双全纯自同构群与 Teichm¨üller 度量的（保定向）等距变换群同构。特别地，Teichm¨üller 度量的所有等距变换均由拓扑曲面之间的微分同胚诱导。本文通过将等距变换放宽为等距嵌入（即保持 Teichm¨üller 度量下距离的映射），研究 Royden 定理的推广。等距嵌入的一种来源是覆盖构造，可描述如下。$(X,\phi) \in \mathcal{T}(\Sigma)$ 中的一个点由一个标记黎曼曲面 $\phi : \Sigma \to X$ 定义，其中 ϕ 是从一个固定拓扑曲面 Σ 到一个黎曼曲面 X 的同胚。假设

$$h : \Sigma' \to \Sigma$$

是拓扑曲面之间的分歧覆盖。因此，存在唯一的标记黎曼曲面 $\phi_h : \Sigma' \to X_h$ ，使得复合

$$\phi \circ h \circ (\phi_h)^{-1} : X_h \to X$$

是全纯的。我们称映射

$$f : \mathcal{T}(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma')$$

为覆盖构造，如果存在一个分歧覆盖 $h : \Sigma' \to \Sigma$ ，使得对于所有 $(X,\phi) \in \mathcal{T}(\Sigma)$，都有

$$f(X, \phi : \Sigma \to X) = (X_h, \phi_h : \Sigma' \to X_h).$$

We 我们将在第 2 节和附录 A 中更详细地讨论覆盖构造 .

我们的主要结果是，除去有限多个关于 g 和 n 的例外，覆盖构造是等距嵌入的唯一实例。

定理 1.1（等距嵌入是几何的）。设$\mathcal{T}_{g,n}$ 和 $\mathcal{T}_{g',n'}$ 为 Teichm¨uller 空间，且假设 $2g+n \geq 5$。那么，任意等距嵌入 $f : \mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g',n'}$ ，在与反向定向映射类进行前复合或后复合后，都是覆盖构造。

在 [Ant17], Antonakoudis 的研究中，他证明了等距嵌入要么是全纯的，要么是反全纯的。因此，我们可以通过可能与一个反向定向映射类复合，将重点放在全纯等距嵌入上。我们也对例外情形 $2g + n \leq 4$ 有分类，不过该分类更为微妙。对于 g 和 n，仅有四种可能：$(g, n) = (0, 4)$、$(1, 1)$、$(1, 2)$、$(2, 0)$。前两者是一维 Teichm¨uller 空间，后两者的维数分别为 2 和 3。

推论 1.2（低复杂度情形）。设 $f : \mathcal{T}_{g,\ n} \to \mathcal{T}_{g',\ n'}$ 是 Teichm¨uller 空间之间的全纯等距嵌入。假设 $2g + n \leq 4$。

(1) 若 $\dim \mathcal{T}_{g,\ n} = 1$，则 f 是一个 Teichm¨uller 圆盘。(2) 若 $(g, n) = (1, 2)$，则 $\iota : \mathcal{T}_{1,\ 2} \simeq \mathcal{T}_{0,\ 5}$ 通过双曲 involution 和

$$f = h \circ \iota$$

对于某个覆盖构造 $h : \mathcal{T}_{0,\ 5} \to \mathcal{T}_{g',\ n'}$。

(3) 若 $(g, n) = (2,0)$，则 $\iota : \mathcal{T}_{2,\ 0} \simeq \mathcal{T}_{0,\ 6}$ 通过双曲 involution 和

$$f = h \circ \iota$$

对于某个覆盖构造 $h : \mathcal{T}_{0,\ 6} \to \mathcal{T}_{g',\ n'}$。

证明。1 维 Teichmüller 空间的情形已由 Antonakoudis 在 Ant17, Thm 1. 中研究过。对于其余 Teichmüller 空间，我们可以将任意等距嵌入与一个同构复合，使其映入 $\mathcal{T}_{0,5}$ 或 $\mathcal{T}_{0,6}$；这两个空间都满足定理 1.1 的假设。□

特别地，定理 1.1 和推论 1.2 对模空间 $\mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g',n'}$ 的所有局部等距嵌入进行了分类，因为任意局部等距嵌入都可以提升为 Teichmüller 空间之间的等距嵌入。

1.1. 通过 Teichmüller 动力系统阐述动机。等距嵌入的像是全测地复子流形的一个例子，即满足以下条件的复子流形 $M \subseteq \mathcal{T}_{g,n}$：任意两点 x、$y \in M$ 之间的唯一测地线均包含在 M 中。Wright 在 Wri 中证明，Teichmüller 空间中维数至少为 2 的全测地子流形投影到 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 后成为子簇；并且对于固定的 g、n，$\mathcal{M}_{g,n}$ 中维数至少为 2 的全测地子簇只有有限多个。Mirzakhani 最初猜想，Teichmüller 空间中的每个全测地子流形都是某个覆盖构造的像；但最近，[MMW17 中的 McMullen、Mukamel、Wright 和 Eskin 发现了一些全测地子流形的例子，它们与任何 Teichmüller 空间都不同构。关于等距嵌入的结果，在这一背景下可改述如下。

推论 1.3. 设 $M \subseteq \mathcal{T}_{g',n'}$ 是一个维数为 ≥ 2 的全测地子流形。如果 M 与某个配备 Teich m¨üller 度量的 Teichm¨üller 空间（作为度量空间）等距，那么 M 是某个 Teichm¨üller 空间 $\mathcal{T}_{g,n}$ 到 $\mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g',n'}$ 的全纯覆盖构造 f 的像。

证明. 设 $\mathcal{T}_{g,n}$ 是一个与 M 等距的 Teichm¨uller 空间。将 $\mathcal{T}_{g,n}$ 与 M 之间的等距变换同 M 到 $\mathcal{T}_{g',n'}$ 的嵌入复合，得到等距嵌入$f : \mathcal{T}_{g,n} \hookrightarrow \mathcal{T}_{g',n'}$，且满足 $f(\mathcal{T}_{g,n}) = M$。必要时改变定向后，可假设f 是全纯的。若 $2g + n \geq 5$，则由定理 1.1 可知 f 是一个覆盖构造。在剩余情形 $2g + n \leq 4$，由 $\dim \mathcal{T}_{g,n} = \dim M \geq 2$，我们得出 $(g, n) = (1, 2)$

或 $(g,n) = (2,0)$。我们按照推论 1.2 的证明，利用等距变换 $\mathcal{T}_{1,2} \simeq \mathcal{T}_{0,5}$ 和 $\mathcal{T}_{2,0} \simeq \mathcal{T}_{0,6}$，将问题化归为前一种情形 $2g+n \geq 5$。□

1.2. 等距嵌入的刚性。覆盖构造可下降为曲线模空间有限覆盖之间的代数映射，因此我们从定理 1.1 得到关于等距嵌入的刚性结果。

推论 1.4. 设 $f : \mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g',n'}$ 为等距嵌入，并假设 $\dim \mathcal{T}_{g,n} \geq 2$.

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$。那么存在一个有限覆盖 $\mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}$，以及粗模空间之间的代数局部等距映射 $f : \mathcal{M}_{g,n} \to \sim \sim \mathcal{M}_{g',n'}$。反过来，假设 $f : \mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g',n'}$ 是一个局部$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$等距嵌入，其中 $\mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}$, $\mathcal{M}_{g',n'} \to \mathcal{M}_{g',n'}$ 是有限轨形覆盖映射$\widetilde{\quad}$，且 $\dim \mathcal{M}_{g,n} \geq 2$.。那么 f 是由覆盖构造 $f : \mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g',n'}$ 诱导的，

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$此外，局部等距嵌入 $f : \mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g',n'}$ 的集合是有限的。

我们将在定理 1.1 的证明之后给出推论 1.4 的证明。

相关工作。从另一个方向来看，可以通过考虑等距浸没来推广Royden定理。等距浸没是一个全纯映射 $f : \mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g',n'}$，使得其诱导映射 $df : T\mathcal{T}_{g,n} \to T\mathcal{T}_{g',n'}$ 在切空间上将单位球映射到单位球。在 [GG22] Gekhtman 和 Greenfield 的研究中，他们证明，当 $g' \geq 1$, $2g'+n' \geq 5$ 时，对于 Teichmüller 度量，任意全纯等距浸没 $f : \mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g,',n'}$ 都是遗忘映射 $\mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g,m}, n \geq m$，即遗忘某些标记点的映射。

我们还注意到，存在一些模空间的全纯映射，它们既不是等距嵌入，也不是等距下沉。例如，在 [ALS08] Aramayona、Leininger 和 Souto 的研究中，他们给出了一个由覆盖构造与遗忘映射复合而成的例子，即先进行等距嵌入，再进行等距浸没。

1.3. 定理 1.1 证明概要。根据 [Ant17]，每个保定向的等距嵌入 $f : \mathcal{T}(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma')$ 都是全纯的。因此，以下我们假设 f 是全纯的。要证明 f 是覆盖构造，需要找到一种从 f 构造分歧覆盖的方法。在每个点 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$ 处，我们可以将余切空间 $T^*_X\mathcal{T}(\Sigma)$ 识别为可积二次微分空间 $Q(X)$; 映射 f 在余切空间之间诱导出映射 $f^* : Q(X) \to Q(Y)$，其中 $Y = f(X)$。如果 f 是双全纯映射，就像 Royden定理的情形那样，那么 $f^* : Q(Y) \to Q(X)$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性等距映射。Royden [Roy71] 随后证明，每个 $\mathbb{C}$-线性等距映射 $Q(Y) \to Q(X)$ 都源自一个同构 $X \to Y$。在 [Mar03]，Markovic 给出了 Royden定理 的新证明，并进一步证明，二次微分空间之间的每个 $\mathbb{C}$-线性等距嵌入 $Q(Y) \to Q(X)$ 都由一个分歧覆盖 $X \to Y$ 诱导。因此，每个全纯映射 $f : \mathcal{T}(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma')$，只要 f^* 是等距嵌入，就是一个遗忘映射，见 [GG22]。

在 f 是全纯等距嵌入的情况下，诱导映射 $f^* : Q(Y) \to Q(X)$ 是满射而非单射，因此我们无法直接应用 Markovic 的结果。我们的解决办法是定义一个 umkehr（反向）映射

$$f_! : Q(X) \to Q(Y)$$

朝另一个方向进行。从定义可知，$f_!$ 是连续且保持范数的。主要的技术难点在于证明 $f_!$ 实际上是 $\mathbb{C}$-线性的，这将在第 4 节完成。之后我们可以应用 Markovic 定理，证明的大致思路则遵循 [Mar03]中给出的 Royden 定理的证明。我们将在第 4 节详细定义反向映射，但其思路如下。余切空间中的一个二次微分 $q \in Q\mathcal{T}(X)$ 在

中定义了一条测地线 g_q，位于 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 中。等距嵌入 f 将$\mathcal{T}(\Sigma)$ 中的测地线映射为 $\mathcal{T}(\Sigma')$ 中的测地线。特别地，像 $f(g_q)$ 是一条测地线，由一个二次微分 q'生成。反向映射 $f_!$ 将 q 映射到 q'。

1.4. 致谢。我们感谢 Benson Farb 就早期稿件进行了许多有益的讨论并提出了意见。我们也感谢 Howard Masur、Alex Wright 和 Dan Margalit 的有益讨论。

2. Preliminaries

等距嵌入与下沉。设 $(V, ||\cdot||_V)$、$(W, ||\cdot||_W)$ 是两个有限维赋范向量空间，且 $T\colon V \to W$ 是一个线性映射。若对所有 $v \in V$ 都有 $||v||_V = ||Tv||_W$，则称 T 是等距嵌入。

若 V中的闭单位球在 W中的像是闭单位球，则称 T 是等距浸没。

等距嵌入的对偶是等距浸没，反之，等距浸没的对偶也是等距嵌入。等距浸没也可以通过以下性质来刻画：

$$||v'||_W = \inf_{v \in V : Tv = v'} ||v||_V.$$

类似地，也可以为赋范向量丛定义等距嵌入和下沉。这里回顾一下，赋范向量丛是复流形上的一个全纯向量丛，配有一个函数，该函数在 C^1 零截面之外取值，并且在每个纤维上的限制都是一个范数。

Teichm¨uller 度量。我们首先回顾 Teichm¨uller 度量的一些基本事实。固定 g, n，使得 $3g - 3 + n > 0$，并令 $\mathcal{T}_{g,n}$ 表示亏格为 g、带有 n 个标记点的曲面的 Teichm¨uller 空间。如果需要指定基点，我们记作 $\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\Sigma, z)$，其中 Σ 是紧致拓扑曲面，$z \subset \Sigma$ 是有限点集。$\mathcal{T}_{g,n}$ 中的一个点由带有标记 ϕ 的紧致黎曼曲面 X 确定：$\Sigma \to X$。X 上的标记点由 $\phi(z)$ 给出。如果上下文清楚，我们会省略标记 ϕ 和标记点$\phi(z)$，并不严格地区分地记作 $X \in \mathcal{T}_{g,n}$。我们始终讨论带有标记点的紧致曲面，而非穿孔曲面。

令 d 为 $\mathcal{T}_{g,n}$ 上的 Teichm¨uller 度量。赋予 Teichm¨uller 空间度量 d 后，它成为一个完备度量空间，且任意两点之间都存在唯一的测地线。

$\mathcal{T}_{g,\,n}$ 在 $X \in \mathcal{T}_{g,\,n}$ 处的切空间可识别为所有 Beltrami形式的空间，即定义在 X 上且满足 $||\mu||_\infty < \infty$ 的 $(1,-1)$-形式 μ，模去无穷小平凡的 Beltrami形式。对偶地，余切空间 $(T^*\mathcal{T}_{g,\,n})_X$ 在 X 处可识别为穿孔曲面 $X - \phi(z)$ 上的可积二次微分空间 $Q(X)$；等价地，它是 X 上的亚纯二次微分，在标记点 $\phi(z)$ 至多有简单极点，并在其他地方全纯。如果标记点存在歧义，我们则写作 $Q(X, z)$。令 $Q\mathcal{T}_{g,\,n}$为 $\mathcal{T}_{g,\,n}$· 上的可积二次微分丛。对于 $q \in Q(X)$，面积范数$||q||_{Q\mathcal{T}_{g,\,n}}$ 定义为

$$||q||_{Q\mathcal{T}_{g,n}} := \int_X |q|$$

并使 $Q\mathcal{T}_{g,\ n}$ 成为赋范向量丛 $(Q\mathcal{T}_{g,\ n}, ||\cdot||_{Q\mathcal{T}_{g,\ n}})$。$T\mathcal{T}_{g,\ n}$ 与 $T^*\mathcal{T}_{g,\ n}$ 之间的配对由下式给出：

$$\langle \mu, q\rangle \mapsto \int_X \mu q$$

在 Beltrami形式与二次微分之间。无穷小平凡的 Beltrami形式μ 由以下条件刻画

$$\langle \mu, q\rangle = 0 \text{ for all } q \in Q(X).$$

面积范数的对偶定义了一个范数 $||\cdot||_{T\mathcal{T}_{g,n}}$ 于 $\mathcal{T}_{g,n}$ 的切空间上，定义如下

$$||\mu||_{T\mathcal{T}_{g,n}} = \sup_{\{\phi : ||\phi||_{Q\mathcal{T}_{g,n}}=1\}} \left|\int_X \mu\phi\right|.$$

范数 $||\mu||_{T\mathcal{T}_{g,n}}$ 也可以按如下方式计算

$$||\mu||_{T\mathcal{T}_{g,n}} = \inf_{\mu'} ||\mu + \mu'||_\infty,$$

其中 μ' 遍历所有无穷小平凡的 Beltrami形式，$||\cdot||_\infty$ 是本质上确界。证明参见 [Hub16, Cor. 6.6.4.1]。

Teichm¨uller度量 d通过积分$||\cdot||_{T\mathcal{T}_{g,\ n}}$得到，即若 $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{T}_{g,\ n}$是一条连接 $x,y \in \mathcal{T}_{g,\ n}$ 的 Teichm¨uller测地线，那么

$$d(x, y) = \int_0^1 ||\gamma'(t)||_{\mathcal{T}_{g,n}} dt.$$

范数$||\cdot||_{T\mathcal{T}_{g,\ n}}$称为无穷小Teichm ¨uller度量。两个范数$||\cdot||_{T\mathcal{T}_{g,\ n}}$和$||\cdot||_{Q\mathcal{T}_{g,\ n}}$ 在零截面之外 C^1 且严格凸，参见 [Gar87, 9.3 Thm. 3 +Lemma 3]。每个范数为1的Beltrami形式 μ 都可以唯一表示为 $\mu = \frac{\overline{q}}{|q|}$，其中二次微分 q 的面积为1。由于范数$||\cdot||_{Q\mathcal{T}_{g,\ n}}$严格凸，微分$q$ 可刻画为唯一满足以下条件的范数为1的二次微分：

$$\langle \mu, q\rangle = 1.$$

Teichm¨uller圆盘。设$(X, q) \in Q\mathcal{T}_{g,\ n}$. 由 q生成的Teichm ¨uller圆盘是全纯映射g_q : $\Delta \to \mathcal{T}_{g,\ n}$，定义为$t \mapsto X_{\mu_t}$，其中 $\mu_t = t\frac{\overline{q}}{|q|}$，而$X_{\mu_t}$ 则通过求解 μ_t的Beltrami方程得到。

Antonakoudis和Earle-Kra-Krushkal [Ant17, EKK94]的结果表明，对于Kobayashi度量，任何保距离映射$\Delta \hookrightarrow \mathcal{T}_{g,\ n}$ （至复共轭）都是一条Te-ichm¨uller圆盘。g_q 在原点处的复切向量为$(g_{q,\ 0})_*\partial_z = \frac{\overline{q}}{|q|}$。我们称$g_q$ 为复测地线。将g_q 限制在任意一条径向直线上，得到一条关于Teichm¨uller度量的实测地线。

全测地子流形。若对子流形 $M \subseteq \mathcal{T}_{g,n}$ 中的任意 $x, y \in M$，连接 x与 y的唯一 Teich m¨üller 测地线都包含在 M 中，则称 $M \subseteq \mathcal{T}_g$ 为全测地子流形。M 的 Teichm ¨üller 度量 d_M 是 $\mathcal{T}_{g,n}$ 的 Teichm¨üller 度量在 M 上的限制。更一般地，若 $M, N \subseteq \mathcal{T}_{g,n}$ 是全测地子流形且 $M \subseteq N$，则称 M 为 N 的全测地子流形。Teichm¨üller 度量的每条测地线都是全纯 Teichm¨üller 圆盘的限制，因此任何全测地子流形都是复子流形。

定义 2.1. 设 $M \subseteq \mathcal{T}_{g,n}$、$N \subseteq \mathcal{T}_{g',n'}$ 是 Teichm¨uller 空间的全测地子流形。若映射 $f\colon M \to N$ 对 Teichm¨uller 度量 d_M 和 d_N 保持距离，即，则称其为等距嵌入。

$$d_M(x,y) = d_N(f(x),f(y)) \text{ for all } x,y \in M.$$

特别地，等距嵌入 f 将测地线映为测地线。根据 [Ant17, 定理 4.3]，任一等距嵌入 f 要么是全纯的，要么是反全纯的。本文余下部分中，我们假设所有等距嵌入都是全纯的。

命题 2.2. 设 $f\colon M \to N$ 是 Teichm¨uller 空间中全测地子流形之间的全纯等距嵌入。则 f 是浸入，且 $f(M) \subseteq N$是全测地子流形。

证明。对于切向量 $v \in T_X M$，在 $X \in M$ 处的切空间中存在一条唯一的测地线 g_v，它经过 X 且切向量为 v。等距嵌入 f 将 g_v 映为 N中的一条测地线，而其切向量必定非零。因此，f 是浸入，且$f(M)$是一个子流形。接下来只需证明 $f(M)$是全测地的。设 x，$y \in f(M)$，并选取原像 a、$b \in M$，使得 $f(a) = x$，$f(b) = y$。由于 M是全测地的，经过 a和 b的唯一测地线 $g_{a,\,b}$包含于 M中。像 $f(g_{a,\,b})$ 是经过 x 和 y的唯一测地线。此处我们再次用到了 f 将测地线映为测地线这一点。□

覆盖构造。设 Σ、Σ' 分别为亏格为 g 和 g' 的拓扑曲面，且 $h\colon \Sigma' \to \Sigma$ 为分歧覆盖。设 $z \subseteq \Sigma$ 为包含 h 的所有分支点的一组标记点，并令 $z' = h^{-1}(z)$。存在一个全纯映射

$$H : \mathcal{T}(\Sigma, z) \to \mathcal{T}(\Sigma', z'),$$
$$(X, \phi : \Sigma \to X, \phi(z)) \mapsto (X', \phi' : \Sigma' \to X', \phi'(z')),$$

其中，X' 是通过在分歧覆盖 h下拉回复结构获得的。

由于 Teichm¨uller 映射的拉回仍是 Teichm¨uller 映射，H 是一个全纯等距嵌入。我们将 H 称为全标记覆盖构造。一般的覆盖构造是通过遗忘标记点从全标记覆盖构造得到的。

定义 2.3. 覆盖构造是一个全纯映射 $G\colon \mathcal{T}(\Sigma, u) \to \mathcal{T}(\Sigma', v')$，它适合于一个交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(\Sigma, z) & \xrightarrow{H} & \mathcal{T}(\Sigma', z') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}(\Sigma, u) & \xrightarrow[G]{} & \mathcal{T}(\Sigma', v) \end{array} \tag{1}$$

其中，竖直映射是遗忘映射，而 H 是全标记覆盖构造。特别是，这要求 $u \subseteq z$、$v \subseteq z'$。

备注 2.4。上述定义可能看起来并非最自然的定义，因为根据标记点 $u \subseteq \Sigma, v \subseteq \Sigma'$ 的选择，G 是否定义良好并不明显；即使 G 定义良好，它也未必是等距嵌入。在附录 A 中，我们将讨论关于分歧覆盖和标记点 $u \subseteq \Sigma, v \subseteq \Sigma'$ 的充分必要条件，以确保映射 G 定义良好且为等距嵌入。这些结果并非证明定理 1.1 所必需，初读时可以略过。

3. The geodesic bundle of totally geodesic submanifolds

全测地子流形上的测地线丛 $QM \subseteq Q\mathcal{T}_{g,\ n}$ 是所有满足以下条件的有序对 (X,q) 的集合： $X \in M$，且 q 是生成一条完全包含在 M 中的 Teichm¨üller 测地线的二次微分。

我们首先证明 QM 是一个拓扑子流形。令 $Q_1\mathcal{T}_{g,n}$ 表示范数小于 1 的二次微分丛。映射

$$E:\ Q_1\mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g,n} \times \mathcal{T}_{g,n}$$
$$(X,q) \mapsto (X, X_\mu),$$

其中 $\mu = ||q||\dfrac{\overline{q}}{|q|}$ 和 X_μ 是通过求解 μ 的 Beltrami 方程得到的，它根据 Earle [Ear77] 的一个结果是一个同胚。回想一下，复测地线由 $t \mapsto X_{\mu_t}$ 参数化，其中 X_{μ_t} 是通过求解 $\mu_t = t\dfrac{\overline{q}}{|q|}$ 的 Beltrami 方程得到的曲面。由于 M 是全测地的，我们有

$$E(Q_1M) = M \times M, \tag{2}$$

其中 $Q_1M = Q_1\mathcal{T}_{g,n} \cap QM$。因此， Q_1M 是一个拓扑子流形，故 QM 也同样如此。

Rees 证明了 E 不是 C^1 [Ree04，定理 1.], 因此，先验而言，并不清楚QM 甚至是一个实子流形。本节的目标是证明，事实上 QM 是 $\mathcal{T}_g$ 的余切空间中的全纯子丛，$_n$。

命题 3.1。设 $M \subseteq \mathcal{T}_{g,\ n}$ 是一个维数为 d 的全测地子流形。那么测地线丛 $QM \subseteq Q\mathcal{T}_{g,\ n}$ 是一个秩为 d 的全纯子丛。

证明。首先，我们证明 QM 是 $Q\mathcal{T}_{g,\ n}$ 的解析子簇。令 N 为 M 到模空间 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的投影，并类似地，令 QN 为 QM 到 $Q\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的投影。Wright [Wri20，定理 1.1] 证明了 N 是一个代数子簇，而 QN 是闭且 GL(2,$\mathbb{R}$)-不变的。因此，根据 Filip 关于 GL(2,$\mathbb{R}$)-不变子集代数性的定理[Fil16，定理 1.1], ，可知 QN 与任意层 $Q\mathcal{M}_{g,\ n}(\mu)$ 的交集都是代数簇。由此可得 QN 是闭且可构造的，因而是一个代数簇。现在， QM 是 QN 在 $\mathcal{T}_{g,\ n}$ 中原像的一个不可约分支，因此是一个解析子簇。

剩下要证明的是， QM 是$Q\mathcal{T}_{g,n}$的一个线性子丛。令T^*M 为 M 的余切丛，并

$$\iota : QM \to Q\mathcal{T}_{g,n_{|M}} \to T^*M$$

定义为包含映射与余切丛上的拉回的复合。特别地， ι是全纯的。我们断言， ι 是单射且适当。

为证明这一断言，我们先证明 ι 保范数，其中 T^*M 赋予商范数 $||\cdot||_{T^*M}$。

令 V ==ker($Q\mathcal{T}_{g,n_{|M}} \to T^*M$)。固定 $q \in QM$，并令 $q' = \iota(q)$。根据商范数的定义，我们有

$$||q'||_{T^*M} = \inf_{v \in V} ||q+v||.$$

由于 dim(V) $< \infty$，下确界可以取到；又由于范数$||\cdot||_{Q\mathcal{T}_{g,n}}$ 在 $Q\mathcal{T}_{g,n}$ 上严格凸，因此最小值是唯一的。因此，只需证明 q 是该范数的临界点

限制在 $q+V.$ 上。从现在起，假设 $q \neq 0$。Royden [Roy71] 证明了该范数在 $q+V$ 上可微；若令 $g(t) = ||q+tv||_{Q\mathcal{T}_{g,n}}$，其中 $v \in V$，则

$$g'(0) = \mathrm{Re}\int_X v\frac{\overline{q}}{|q|}.$$

因此，对于所有 $v \in V$，若 $\mathrm{Re}\int_X v\frac{\overline{q}}{|q|}$，则 q 是临界点。由于 V 是复向量空间，这等价于

$$\left\langle \tfrac{\overline{q}}{|q|}, v \right\rangle = \int_X v\tfrac{\overline{q}}{|q|} = 0 \text{ for all } v \in V.$$

因此，当且仅当 $\frac{\overline{q}}{|q|} \in \mathrm{Ann}(V)$ 时，$q \in Q\mathcal{T}_{g,\ n}$ 是 $q+V$ 上范数的临界点，其中 $\mathrm{Ann}(V)$ 是 V 在配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle : T\mathcal{T}_{g,n} \times Q\mathcal{T}_{g,n} \to \mathbb{C}$ 下的湮灭子。

为完成证明 ι 保持范数，只需证明对于所有 $q \in QM$，$\frac{\overline{q}}{|q|} \in \mathrm{Ann}(V)$。令 $q \in QM$，并令 $i : TM \hookrightarrow T\mathcal{T}_{g,n}$ 为切丛的包含映射。那么切向量 $\frac{\overline{q}}{|q|}$ 属于 TM，且 ι 与 i 对偶，因此

$$\langle \tfrac{\overline{q}}{|q|}, v\rangle = \langle i(\tfrac{\overline{q}}{|q|}), v\rangle = \langle \tfrac{\overline{q}}{|q|}, \iota(v)\rangle = 0 \text{ for all } v \in V.$$

一旦知道 ι 保持范数，便可推出 ι 是单射，因为若 $q' = \iota(q)$，那么 q 就是 $q+V$ 中唯一的范数最小元。要证明 ι 也是适当的，取 QM 中任意一个离开所有紧集的序列 (X_n, q_n)。特别是，当 $n \to \infty.$ 时 $||q_n||_{QM} \to \infty$。由于 ι 保持范数，可知 $\iota(X_n, q_n)$ 也离开所有紧集。

因此，映射 $\iota : QM \to T^*M$ 是全纯、单射且适当的。QM 和 T^*M 都是同维的拓扑子流形，因此根据区域不变性定理，ι 是开集。由于 M 是连通的，T^*M 也同样如此。因此，ι 是满射，因而是同胚。

到目前为止，我们已经看到 ι 是一个全纯双射。接下来的目标是证明 ι 确实是一个双全纯同构。如果已知 QM 和 T^*M 是复流形，那么这一结论便可直接得出，因为复流形之间的每一个全纯双射都是双全纯同构。先验地，QM 具有奇点；令 U、$Z \subseteq QM$ 分别表示光滑轨迹和奇异轨迹。那么 $\iota_{|U}$ 是复流形之间的全纯双射，因此是一个双全纯同构。设 $U' = \iota(U)$ $Z' = \iota(Z)$。适当映射定理表明，Z' 是 T^*M 的一个适当解析子簇，并且 $\iota^{-1}_{|U'}$ 是全纯的。因此，根据黎曼可去奇点定理，逆映射 ι^{-1} 在 T^*M 上是全纯的。还需注意，ι^{-1} 是齐次的，因为 ι 也是如此。由此可知，逐纤维地，$\iota_X^{-1} : T^*M_X \to (Q\mathcal{T}_{g,n})_X$ 是齐次的，并且在原点处可微，因此是线性的。□

通过限制来自$Q\mathcal{T}_{g,n}$.的面积范数，测地线丛 QM 自然成为一个复芬斯勒向量丛

推论 3.2。赋范向量丛（QM，$||\cdot||_{QM}$）与带有商范数的余切丛（T^*M，$||\cdot||_{T^*M}$）线性等距，并进一步给出一个分裂

$$QM \oplus \mathcal{N}^*M = Q\mathcal{T}_{g,n|M}$$

作为赋范丛。其中，$\mathcal{N}^*M$是 M的余法丛，即法丛的对偶，并赋予$Q\mathcal{T}_{g,\ n}$上面积范数的限制。

证明。 QM 与 T^*M 之间的同构由复合 ι 给出： $QM \to \mathcal{QT}_{g,\ n|M} \to T^*M$。对于第二个断言，我们需要证明 QM与 $\mathcal{N}^*M$仅在零截面上相交。这由 $\mathcal{N}^*M = \ker(\mathcal{QT}_{g,\ n|M} \to T^*M)$ 的描述可得。□

注 3.3（全测地子流形的双线性）。命题 3.1 的一个出人意料的推论是，全测地子流形的测地线丛 QM 具有两种不同意义下的线性结构。一方面，投影 $QM \to M$ 的纤维是余切丛的线性子空间；另一方面， QM 与某个层的交集在该层的周期坐标中与一个线性子空间重合。研究这种"双线性"是否刻画全测地子流形，似乎颇为有趣。

4. The geodesic umkehr map

设 $f : M \to N$ 是 Teichmüller空间的全测地子流形之间的全纯等距嵌入。 f的导数在切丛 f_*上诱导出一个映射： $TM \to f^*TN$，对偶地，也在余切丛 f^*上诱导出一个映射： $f^*T^*N \to T^*M$。通过将余切丛与测地线丛对应起来，我们得到一个映射 f^*： $f^*QN \to QM$。

定义 4.1. 测地线反向映射

$$f_! : QM \to f^*QN$$

定义如下。设 $(X, q) \in QM$ 是面积为 1 的二次微分。则 q 定义了一条穿过 X 且切向量为 $\frac{\overline{q}}{|q|}$ 的 Teichmüller 测地线 g。由于 f 是等距嵌入$f(g)$ 是一条穿过 $f(X)$且切向量为 $f_*\frac{\overline{q}}{|q|} = \frac{q'}{|q'|}$的测地线，对应于唯一一个面积为单位的二次微分 q'。定义

$$f_!(X, q) = (f(X), q').$$

通过定义，将 $f_!$ 扩展为 QM 上的齐次函数。

$$f_!(X, q) = ||q||_{QM} f_!(X, \frac{\overline{q}}{|q|}).$$

*Rema*注 4.2。在覆盖构造的情形下，反向映射最为自然。

$$f : \mathcal{T}(\Sigma) \to \mathcal{T}(\Sigma')$$

由分歧覆盖产生的

$$h : \Sigma' \to \Sigma$$

次数为 d。对于 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$ $Y = f(X) \in \mathcal{T}(\Sigma')$， f 的导数的对偶诱导出一个拉回 f^*： $Q(Y) \to Q(X)$，其由迹映射给出

$$\mathrm{tr_h} : Q(Y) \to Q(X).$$

回顾一下，迹映射定义为

$$\mathrm{tr}_h(q)(x) = \sum_{y \in h^{-1}(x)} q(y),$$

若 $x \in X$ 不是分歧点，并且连续延拓到分支点。另一方面，反向映射 $f_!$： $Q(\Sigma) \to Q(\Sigma')$ 由微分的拉回 $f_! = \frac{1}{d}h^*$给出。特别要注意， $f_!$ 是线性的，在二次微分的面积范数下是等距的，并且是

f^*的右逆。我们的主要技术定理之一指出，对于 Teichm¨uller 空间中全测地子流形的任意等距嵌入，同样的结论也成立。

回顾一下，存在一个同胚

$$\begin{aligned}\psi_M : QM &\to TM,\\ (X,q) &\mapsto (X,\mu_q),\end{aligned}$$

其中

$$\mu_q = \begin{cases} ||q||\dfrac{\overline{q}}{|q|} & \text{if } q \neq 0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

映射 ψ_N： $QN \to TN$ 的定义类似。两个映射与 $f_!$ 一起构成下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} QM & \xrightarrow{f_!} & f^*QN \\ {\scriptstyle \psi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*\psi_N} \\ TM & \xrightarrow[f_*]{} & f^*TN \end{array} \tag{3}$$

由上面的图表可知

$$f_! = (f^*\psi_N)^{-1} \circ f_* \circ \psi_M$$

是连续映射的复合，因此连续。本节的主要结果是， $f_!$ 的性质确实要好得多。

命题4.3（ $f_!$的正则性）。设$M \subset \mathcal{T}_{g,\ n}$、 $N \subseteq \mathcal{T}_{g',\ n'}$ 为全测地子流形，并设 $f\colon M \to N$ 为全纯等距嵌入。则反向映射

$$f_! : QM \to f^*QN$$

具有以下性质。

（1）映射 $f_!$ 是向量丛的全纯、 $\mathbb{C}$-线性嵌入；（2）关于 QM 和 QN 上的面积范数是等距映射；（3）是 f^*： $f^*QN \to QM$的右逆。

此外，对于全测地子流形的等距嵌入， $f_!$ 的构造具有函子性。

证明。只需处理 $N = f(M)$的情形。注意， $f_!QM = QN$和 f^*： $f^*QN \to QM$是全纯的。我们首先证明 $f^* \circ f_! = \mathrm{id}$，即 $f_!$是 f^*的右逆。

回顾一下， TM 中的 Beltrami形式与 QM中的二次微分之间的配对由 $(\mu, q) = \int_X \mu q$给出。还要回顾，每个 Beltrami形式都可以在其等价类中唯一地表示为 $\mu = ||\mu||_\infty \dfrac{\phi}{|\phi|}$。令 $(X,q) \in QM$且 $k = ||q||_{QM}$。由于 Teichm¨uller 度量与二次微分上的面积范数对偶，我们有

$$k = ||k\frac{\bar{q}}{|q|}||_{TM} = k \sup_{||\phi||=1} \left| \int_X \frac{\bar{q}}{|q|}\phi \right|$$

并且由于范数 $||\cdot||_{TM}$ 是严格凸的，因此存在唯一一个范数为 1 的二次微分 ϕ，使得

$$k = ||k\frac{\bar{q}}{|q|}||_{TM} = \int_X k\frac{\overline{q}}{|q|}\phi.$$

事实上 $\phi = \dfrac{q}{||q||_{QM}}$，由于

$$\int_X k\frac{\overline{q}}{|q|}\cdot\frac{q}{||q||_{QM}} = \frac{k}{||q||_{QM}}\int_X |q| = k$$

首先注意， $f^*f_!q \neq 0$ 除非 $q = 0$。这由

$$\int_X \frac{\bar{q}}{|q|}f^*f_!q = \int_X f_*\left(\frac{\overline{q}}{|q|}\right)f_!q = \int_X \frac{\overline{f_!q}}{|f_!q|}f_!q = ||f_!q||_{QN} = ||q||_{QM}.$$

此外

$$||f^*f_!q||_{QM} = \inf_{\{q':f^*q'=f^*f_!q\}}||q'||_{QN} \leq ||f_!q||_{QN} = ||q||_{QM},$$

其中第一个等号成立，是因为 f^* 是等距浸没。

对于 $q \neq 0$ ，我们现在计算

$$\begin{aligned}\int_X \frac{\bar{q}}{|q|}\cdot\frac{f^*f_!q}{||f^*f_!q||_{QM}} &= \int_X f_*\left(\frac{\overline{q}}{|q|}\right)\cdot\frac{f_!q}{||f^*f_!q||_{QM}}\\ &= \int_X \frac{\overline{f_!q}}{|f_!q|}\cdot\frac{f_!q}{||f^*f_!q||_{QM}}\\ &= \frac{||f_!q||_{QN}}{||f^*f_!q||_{QM}} \geq 1.\end{aligned}$$

另一方面

$$\left|\int_X \frac{\overline{q}}{|q|}\cdot\frac{f^*f_!q}{||f^*f_!q||_{QM}}\right| \leq ||\frac{\overline{q}}{|q|}||_\infty\int_X \frac{|f^*f_!q|}{||f^*f_!q||_{QM}} = 1$$

我们得出 $f^*f_!q = q$。这就完成了（1）的证明。

根据定义 $f_!:\ QM \to f^*QN$ 保持范数，因此是单射且适当。此外

$$\dim QN = 2\dim N = 2\dim M = \dim QM,$$

这由等式（2）推出。现在， QM 和 QN 都是连通的、维数相同的复流形，因此根据区域不变性定理，$f_!:\ QM \to f^*QN$和 $f^*:\ f^*QN \to QM$是双射，且互为逆映射。由于 f^* 是线性的， $f_!$也同样如此。

最后， $f_!$ 的函子性由等式（3）以及 f_*的函子性推出。

□

注 4.4. 利用等式（3），我们可以更一般地为任意全纯映射 $f:\mathcal{T}_{g,\ n} \to \mathcal{T}_{g',\ n'}$ 定义反向映射；由图表可知， $f_!$ 对全纯映射具有函子性。若 $f:\ M \to N$ 是全测地子流形之间的等距浸没，我们还可以如下给出 $f_!$ 的几何描述。由于 f_* 是等距浸没，拉回映射

$$f^*: f^*QN \to QM$$

是等距浸入，并且我们有如下关系

$$f_!f^*q = q.$$

为此，只需证明

$$f_*\left(\frac{\overline{f^*q}}{|f^*q|}\right) = \frac{\overline{q}}{|q|}.$$

假设 $||q||_{QN} = 1$。那么

$$\int f_* \left(\frac{\overline{f^*q}}{|f^*q|} \right) q = ||f^*q||_{QM} = ||q||_{QN} = 1$$

并且由于 f_* 是等距浸没

$$||f_* \frac{\overline{q}}{|q|}||_{TN} \leq ||\frac{\overline{q}}{|q|}||_{TM} = 1.$$

因此，我们得出 $f_! f^* q = q$.

5. Isometric embeddings are geometric

在本节中，我们运用 Gekhtman 和 Greenfield [GG22 的思想，第 3]，节完成定理 1.1 的证明。测地反向映射的线性 $f_!$ 与覆盖构造之间的联系由以下 [GG22 的定理 1.3]，给出，该定理很大程度上借鉴了 Markovic [Mar03]的一篇论文中的思想。

定理 5.1（[GG22，定理 1.3]）。设 X 和 Y 是紧致标记黎曼曲面。假设 $2g(X)+n(X) \geq 5$，其中 $n(X)$ 是标记点的数量。设 $T\colon Q(X) \to Q(Y)$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性等距嵌入。则存在一个全纯映射 $h\colon Y \to X$，以及一个常数 $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$，使得 $T = c \cdot h^*$ deg(h)。

注 5.2. 事实上，定理 5.1 的证明给出了映射 h 的显式描述如下。设 $\Psi_X\colon X \to \mathbb{P}Q(X)^*$ 和 $\Psi_Y\colon Y \to \mathbb{P}Q(Y)^*$ 分别是 X 和 Y 的双正则嵌入。

那么 h 可嵌入以下图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}Q(Y)^* & \xrightarrow{T^*} & \mathbb{P}Q(X)^* \\ {\scriptstyle \Psi_Y}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Psi_X} \\ Y & \xrightarrow{\quad h \quad} & X \end{array}$$

这里强调，$Q(X)$ 表示在 X 的标记点处至多有简单极点的亚纯二次微分空间，因此 Ψ_X 可能不同于代数几何中通常的双正则嵌入。条件 $2g(X) + n(X) \geq 5$ 保证 Ψ_X 是一个嵌入。

现在我们在 $f : \mathcal{T}_{g,\ n} \to \mathcal{T}_{g',\ n'}$ 是全纯等距嵌入的情形下应用定理 5.1。设 $\mathcal{C}_{g,\ n}$ 和 $\mathcal{C}_{g',\ n'}$ 分别是 $\mathcal{T}_{g,\ n}$ 和 $\mathcal{T}_{g',\ n'}$ 上的万有曲线。将定理 5.1 逐纤维地应用于反向映射 $f_!\colon Q\mathcal{T}_{g,\ n} \to f^*Q\mathcal{T}_{g',\ n'}$，得到映射 $H\colon f^*\mathcal{C}_{g',\ n'} \to \mathcal{C}_{g,\ n}$，它适合于以下交换图，

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathcal{C}_{g',n'} & \xrightarrow{H} & \mathcal{C}_{g,n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(\mathcal{T}_{g,n}) & \xleftarrow{f} & \mathcal{T}_{g,n} \end{array}$$

正如我们将在下文看到的，H 的正则性在定理 1.1 的证明中发挥着关键作用。下面的内容表明，H 是全纯的。

Lem命题 5.3。设 $2g + n \geq 5$。则映射 $H\colon f^*\mathcal{C}_{g',\ n'} \to \mathcal{C}_{g,\ n}$ 是全纯的。

证明。考虑以下交换图，

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_{g,n} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}Q\mathcal{T}^*_{g,n} & \xleftarrow{f_!^*} & f^*\mathbb{P}Q\mathcal{T}^*_{g',n'} & \xleftarrow{\Phi} & f^*\mathcal{C}_{g',n'} \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{T}_{g,n} & \xrightarrow{f} & f(\mathcal{T}_{g,n}) & & \end{array}$$

映射 Ψ 和 Φ 分别是逐纤维双典范嵌入，且双全纯地映到其像上。由于 H 由下式给出

$$H = \Psi^{-1} \circ f_!^* \circ \Phi,$$

结论随即得证。 □

完成定理 1.1 的证明。证明的其余部分中，我们将 $\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\Sigma, u)$ 与其像 $f(\mathcal{T}_{g,n}) \subset \mathcal{T}_{g',n'} = \mathcal{T}(\Sigma', v)$ 等同。根据引理 5.3，存在一个分歧覆盖的全纯族

$$\begin{array}{c} f^*\mathcal{C}_{g',n'} \\ \downarrow H \\ \mathcal{C}_{g,n} \\ \downarrow \\ \mathcal{T}_{g,n}. \end{array}$$

对于带标记曲面 $(X, u, \phi\colon \Sigma \to X) \in \mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\Sigma, u)$，令 $h_X\colon f(X) \to X$ 为将 H 限制到一个纤维所诱导的映射。分歧重数 $(X, x) \to \mathbf{mult}_x h_X$ 是 $f^*\mathcal{C}_{g,n}$ 上的上半连续函数。因此，存在一个稠密开集 $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{g,n}$，在此处 h_X 的分歧剖面（即分歧点的数量及其分歧重数）为常数。此外，沿着 $\mathcal{U}$ 中的路径，分歧点既不会碰撞，也不会分裂。

对于每个 (X, ϕ, u)，令 $z(X)$ 为 u 与 h_X 的所有分支点的并。同样，令 $z'(X)$ 为 $f(X)$ 上的所有标记点 v 与所有分歧点的并。通过移除 z 和 z' 并改变 X，我们得到一个覆盖映射的全纯族

$$f(X) - z'(X) \to X - z(X).$$

通过取 U 的万能覆盖 $\widehat{U}$，我们得到带标记族；此外，根据覆盖空间理论，这个覆盖族可以（光滑地）平凡化。总而言之，存在一个图表（其交换性先验而言并无保证）

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{U} & \longrightarrow & \mathcal{T}(\Sigma, z) & \xrightarrow{g} & \mathcal{T}(\Sigma', z') \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathcal{T}(\Sigma, u) & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{T}(\Sigma', v). \end{array}$$

第一个图表是交换的，第二个图表至少在 $\pi^{-1}(U)$ 上交换，而它在 $\mathcal{T}(\Sigma, z)$ 中稠密。由于涉及的所有映射都是全纯的，我们可以得出整个图表交换。根据构造，g 是一个全标记覆盖构造，因此根据定义，f 是一个覆盖构造。

□

I接下来需要说明推论 1.4：模空间的局部等距嵌入 s.

推论 1.4 的证明。由于 $\dim \mathcal{T}_{g,n} \geq 2$，定理 1.1 和推论 1.2 表明，等距嵌入 $f : \mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g',n'}$ 是一个覆盖构造。令 $\mathrm{Mod}(g,n) = \mathrm{Mod}(\Sigma, u)$ 表示 n 标记的亏格为 g 的曲面的映射类群。给定一个分歧覆盖 $h : \Sigma' \to \Sigma$，令 $\mathrm{Mod}_h \subseteq \mathrm{Mod}(g,n)$ 表示在分歧覆盖 h 下可提升的映射类所构成的有限指数子群。于是，该覆盖构造下降为一个粗模空间之间的代数映射

$$\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n} / \operatorname{Mod}_h \to \mathcal{M}_{g',n'}$$

。注意，未必存在诱导的群同态 $\mathrm{Mod}_h \to \mathrm{Mod}(g',n')$，因此我们无法保证存在轨形之间的映射。由于 Teichm¨uller 空间之间的映射$\sim f$ 是一个等距嵌入，诱导映射 f 是一个局部等距嵌入。

反之，设

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n}/\Gamma,\ \widetilde{\mathcal{M}}_{g',n'} = \mathcal{T}_{g',n'}/\Gamma'$$

对于某些有限指标子群，它们分别是 $\mathcal{M}_{g、n}$ 和$\mathcal{M}_{g、'n、'}$的有限轨形覆盖

$$\Gamma \subseteq \mathrm{Mod}(g,n),\ \Gamma' \subseteq \mathrm{Mod}(g',n').$$

Let

$$\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} \to \widetilde{\mathcal{M}}_{g',n'}$$

~是一个局部等距嵌入。特别地，f 由 Teichm¨uller 空间之间的一个 ρ-等变局部等距嵌入诱导而来：$\mathcal{T}_{g,\ n} \to \mathcal{T}_{g',\ m'}$，其中 $\rho : \Gamma \to \Gamma'$ 是某个群同态。由于在$\mathcal{T}_{g上n}$，两点之间的距离由一条测地线实现，f 是一个等距嵌入，因此根据定理 1.1，它是一个覆盖构造。于是，f 通过沿拓扑曲面的分歧覆盖 $h : \Sigma \to \Sigma'$ 拉回复结构而得到。与恒等映射同伦的同胚进行前复合和后复合会改变分歧覆盖 h，但不会改变其在 Teichm¨uller 空间上诱导的映射 f。对于固定的（g，g'，n，n'），映射类群 $\mathrm{Mod}(g,\ n)$ 和 $\mathrm{Mod}(g',\ n')$ 作用于

$$\mathrm{Cov} := \{\phi : \mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{T}_{g',n'} \mid \phi \text{ is a covering construction}\}$$

分别通过前复合和后复合。$\mathrm{Mod}(g,n)$ 和 $\mathrm{Mod}(g',n')$ 的作用均不会改变 h 的分歧剖面和单值化表示。若覆盖构造 ϕ下降为一个映射

$$\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} \to \widetilde{\mathcal{M}}_{g',n'},$$

那么 $\gamma'\phi \quad \sim\gamma$ 对于 $\gamma \in \Gamma, \gamma' \in \Gamma'$ 下降为同一个映射 ϕ。尤其是，至多存在 t

$$[\mathrm{Mod}(g',n') : \Gamma'] \cdot [\mathrm{Mod}(g,n) : \Gamma]$$

覆盖构造

$$\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} \to \widetilde{\mathcal{M}}_{g',n'},$$

具有固定的分歧剖面和固定的单值化表示。由于分歧和单值化表示的选择都只有有限种，因此从 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 到 $\mathcal{M}_{g',\ n'}$的覆盖构造只有~ ~有限种。

□

AppendixA. Covering constructions

在定义 2.3 中，覆盖构造

$$G : \mathcal{T}(\Sigma, u) \to \mathcal{T}(\Sigma', v)$$

与分歧覆盖相关的

$$h : \Sigma' \to \Sigma$$

拓扑曲面的覆盖构造已有定义。总可以选择分歧点 $u \subseteq \Sigma, v \subseteq \Sigma'$，使得 G 有定义。例如，若 u 是 h 的分支点集合，且 $v = h^{-1}(u)$，那么 G 有定义，且是一个等距嵌入。但对于 u 和 v 的其他选择，映射G 可能没有定义，或者不是等距嵌入。在本附录余下部分，我们将详细讨论 G 何时有定义，以及若有定义， G何时是等距嵌入。

覆盖构造 G: $\mathcal{T}(\Sigma, u) \to \mathcal{T}(\Sigma', v)$ 由图表等式（1）唯一确定，即由一个分歧元组 (h, z, u, v) 的数据确定，该元组由以下内容组成

- 分歧覆盖 h： $\Sigma' \to \Sigma$,
- 有限集 $u \subseteq z \subseteq \Sigma$，使得 z 包含 h 的所有分支点，并且
- 有限集 $v \subseteq z' = h^{-1}(z) \subseteq \Sigma'$。

定义 A.1。与分歧覆盖 h： $\Sigma' \to \Sigma$相关联的分歧元组（h， z， u， v）是可实现的，当且仅当存在一个全纯映射 G，使其符合图表 (1)，其中 H 是一个全标记覆盖构造。类似地，如果 G 是一个等距嵌入，则分歧元组（h， z， u， v）可由等距覆盖构造实现。

我们首先讨论（h， z， u， v）可实现的情形，并讨论所得覆盖构造 G 成为等距嵌入的充要条件。

命题 A.2。设 G： $\mathcal{T}$（Σ， u）$\to \mathcal{T}$（Σ'， v）是由分歧覆盖 h： $\Sigma' \to \Sigma$ 诱导的覆盖构造，并假设 $\mathcal{T}$（Σ， u）$\ncong \mathcal{T}_{1,\,1}$。则 G 是等距嵌入，当且仅当 u包含 h 的所有分支点，并且

$$h^{-1}(u) \subseteq v \cup R(h),$$

其中 $R(h) \subseteq \Sigma'$ 是 h 的分歧点集合。

证明。假设 G 是一个等距嵌入。特别地， G 可以纳入一个图表。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(\Sigma, z) & \xrightarrow{H} & \mathcal{T}(\Sigma', h^{-1}(z)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}(\Sigma, u) & \xrightarrow[G]{} & \mathcal{T}(\Sigma', v) \end{array} \tag{4}$$

给定 $X \in \mathcal{T}(\Sigma, z)$ 和 $X' = H(X) \in \mathcal{T}(\Sigma', h^{-1}(z))$，我们得到诱导的全纯分歧覆盖。

$$h_X : X' \to X$$

测地反向映射 $H_!$ 由二次微分的拉回给出。

$$h_X^* : Q(X, z) \to Q(X', z').$$

图表 (4) 中的四个映射要么是等距浸入，要么是下沉，因此根据反向映射的函子性，我们看到 $G_!$ 也可表示为拉回 h_X^*。特别地，我们得到一个诱导映射

$$(h_X^*)_{|Q(X,u)} : Q(X, u) \to Q(X', v).$$

设 $p \in u$ 为一个标记点。由于 $(g,n) \neq (1,1)$，我们可以在 X 上选取一个二次微分 q，使其在 q 处有一个简单极点（也可能还有更多简单极点）。拉回微分$h_X^*(q)$在 p 的每个原像处都有一个简单极点，除非该原像是分歧点。由于简单极点必须是标记点，我们得出 v 包含 $h^{-1}(u) \setminus R(h)$。

接下来我们论证， u 包含所有的分支点 b。图表 (4) 延伸为一个图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{T}(\Sigma, z) & \xrightarrow{H} & \mathcal{T}(\Sigma', h^{-1}(z)) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{T}(\Sigma, u \cup b) & \xrightarrow{K} & \mathcal{T}(\Sigma', h^{-1}(u) \cup R(h)) & & \\
\downarrow \pi & & & \searrow^{\pi'} & \\
\mathcal{T}(\Sigma, u) & \xrightarrow[G]{} & \mathcal{T}(\Sigma', v) & \longrightarrow & \mathcal{T}(\Sigma', h^{-1}(u) - R(h))
\end{array}$$

复合 $\pi' \circ K$ 可实现且为等距嵌入。特别地， $\pi \circ K$ 是单射。由于图表可交换，只有当 $b \subseteq u$时这才可能。否则， π 的纤维将具有正维数。这表明该条件是必要的

$$b \subseteq u, \quad h^{-1}(u) \subseteq v \cup R(h).$$

为了解充分性，注意到只要在 u 处具有简单极点的二次微分拉回后在 v 处至多具有简单极点，Teichm¨uller 映射就会提升到分歧覆盖；而由 $h^{-1}(u) \subseteq v \cup R(h)$ 可保证这一点。

□

现在，我们将讨论同一个问题，但不再假设 (h, z, u, v) 已经是可实现的。

命题 A.3。设 (Σ, u)、(Σ', v) 为拓扑曲面，且 $g(\Sigma) \geq 1$ 或 $g(\Sigma') \geq 2$，并且 $(g(\Sigma) \ |u|) \neq (1,1)$。此外，设 (h, z, u, v) 为分歧元组。那么，当且仅当 (h, z, u, v) 可由等距覆盖构造 G 实现： $\mathcal{T}(\Sigma, u) \to \mathcal{T}(\Sigma', v)$、】【

$$h^{-1}(u) = v \cup R(h),$$

其中 $R(h) \subseteq \Sigma'$ 是 h 的分歧点集。

证明。首先假设分歧元组 (h, z, u, v) 满足

$$h^{-1}(u) = v \cup R(h), \tag{5}$$

其中 $B(h)$ 和 $R(h)$ 分别是 h 的分支点和分歧点。特别地， u 包含所有分支点。于是 (h, z, u, v) 可由覆盖构造 G 实现，因为它可以通过遗忘 $h^{-1}(u)$ 中的点，从具有分歧元组 $(h, u, u, h^{-1}(u))$ 的全标记覆盖构造得到。$-v.$因此，我们可以应用命题 A.2 得出 G 是一个等距嵌入。

尚需证明反向结论。假设对于某个分歧元组 (hz, u, v)， G 是一个等距覆盖构造。由命题 A.2 可得

$$B(h) \subseteq u,\ h^{-1}(u) \subseteq v \cup R(h).$$

因此还需要论证 $h(v) \subseteq u$，即 X' 的每个标记点都位于 X的某个标记点之上。 G 的余导映射可以通过查看图表（4）中的迹映射来计算

$$\mathrm{tr}_{h_X} : Q(X', v) \to Q(X, u)$$

通过查看图表（4）中的等式。

如果存在一个二次微分 $q' \in Q(X', v)$，在标记点$p \in X'$ 处有一个简单极点，但在纤维 h_X^{-1} ($h(p)$) 中没有其他极点，那么 $\mathrm{tr}_X(q')$ 在 $h(p)$ 处有一个简单极点，因此 $h(p)$ 也需要被标记。如果 $g(X') \geq 2$ 根据黎曼–罗赫定理，存在一个在 p 处有简单极点且没有其他极点的二次微分。

若 $g(X') = 1$ 且 $g(X) = 1$，则根据黎曼－胡尔维茨公式， h_X 是无分歧的。由于 u 至少有两个点，对于 $h^{-1}(u)$也同样如此。此外， $h^{-1}(u)$与 p不相交，因此存在一个在 p 处有简单极点的二次微分，使其迹在 $h(p)$处有简单极点。

□

References

[Ant14] S. M. Antonakoudis. *The complex geometry of Teichmüller space*。博士论文 [Ant17] S. M. Antonakoudis. *Isometric disks are holomorphic*。《数学发明》207，1289–1299（2017年）。[Ear77] C. J. Earle. *The Teichmüller distance is differentiable.*《杜克数学杂志》第44卷（2），第389–397页，1977年。[EK74] C. Earle 和 I. Kra. *On isometries between Teichmüller space*。《杜克数学杂志》，第 41 3 1974 卷（），EKK C. J. Earle、I. Kra 和 [94] S. L. Krushkal. *Holomorphic motions and Teichmüller spaces*。《美国数学会汇刊》第 343, 2, 1994 卷，第 [20] *Billiards* 343, 2, 1994 期 EMMW A. Eskin、C. McMullen、R. [20] *Billiards* Mukamel、A. Wright.， *quadrilaterals and moduli spaces*。《美国数学会杂志》33，第1039–1086页，2020年。[Fil16] S. Filip, *Splitting mixed Hodge structures over affine invariant manifolds*。《数学年刊》第183卷（ 2 681 713, 2016），[22] 第–页 GG D. Gekhtman 和 M. Greenfield. *Isometric submersions of Teichmüller spaces are forgetful*。《以色列数学杂志》第247卷（2），第499–517页，2022年。[Gar87] F. P. Gardiner. *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*。纽约：约翰·威立父子公司，纽约，1987年。[Hub16] J. Hubbard. *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics*。Matrix Editions，收录于《曲面同胚与有理函数》第 2, 2016 [08] *Injections of mapping class groups* 卷 ALS J. Aramayona、C. Leininger、J. Souto.。《几何与拓扑》（13），2008年，第2523–2541页。[Mar03] V. Markovic. *Biholomorphic maps between Teichmüller spaces* 120, 2, 405 431, 。《杜克数学杂志》，第—期。2003 [75] *On a Class of Geodesics in Teichmüller space* 102 1975, 205 221 Mas H.Masur.。[95] *Teichmüller space is not Gromov hyperbolic* 《数学年刊》（），第–页 MW H. Masur、M. Wolf.。《芬兰科学院年刊》（ 20 1995, 259 267），第–[17] 页 MMW C. McMullen、R. Mukamel、A. Wright. *Cubic curves and totally geodesic subvarieties of moduli space* 185 3 757 990, 2017 。《数学年刊》第[卷（），第–页（）[Ree04] M. Rees. *Teichmüller Distance is not $C^{2+\epsilon}$*。《伦敦数学会会刊》第88卷第1期，第114–134页，2004年。[Roy71] H. L. Royden. *Automorphisms and isometries of Teichmüller space*，载于《黎曼曲面理论进展》，新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1971年，第66卷，第369–383页。[Wri20] A. Wright. *Totally geodesic submanifolds of Teichmüller space*。《微分几何杂志》115.3，第565–575页，2020年。

Department of Mathematics, University of Chicago
Email address: benirschke@uchicago.edu*Email address*: cmarceloservan@uchicago.edu