无名稿件编号（由编辑稍后填写）

用于计算非线性微分方程多重解的基于伴随的多层有限元方法

Wenrui Hao[1], **Sun Lee**[1], **Young Ju Lee**[2]

arXiv:2305.04162v1 [math.NA] 7 May 2023

收稿和录用日期待后续填写

摘要 非线性偏微分方程的应用推动了物理学、生物学、生态学和量子力学等多个领域的显著进步。然而，求解非线性偏微分方程的多重解可能颇具挑战，尤其是在难以获得合适的初始猜测时。本文提出一种名为基于伴随的多层有限元方法（CBMFEM）的新方法，该方法利用协调元有限元方法，能够高效、准确地生成初始猜测，以求解具有多项式非线性项的非线性椭圆半线性方程。针对具有多重解的非线性椭圆方程，我们基于恰当的孤立解概念，对有限元方法的误差估计进行理论分析，并给出采用 CBMFEM 获得的数值结果；这些结果与理论分析一致。

关键词 椭圆半线性偏微分方程 · 有限元方法 · 多重解

数学学科分类（2020年） 49M37 · 65N30 · 90C99

1 引言

非线性偏微分方程（PDE）广泛应用于各个领域，且有多种形式。其中一个例子是反应扩散方程，应用于物理学、种群动力学、生态学和生物学。在物理学中，应用实例包括简单动力学、别洛乌索夫–扎博廷斯基反应和低温波模型。在种群动力学和生态学中，捕食者-猎物模型与环境污染问题都与之相关。在生物学中，反应扩散方程用于研究细胞动力学和肿瘤生长 [34]。薛定谔方程 [24,

1 数学系，宾夕法尼亚州立大学，美国宾夕法尼亚州州立学院 16802 · 2 数学系，德州州立大学，美国德克萨斯州圣马科斯 78666

35] 和哈密顿系统 [23,33] 也是量子力学领域的重要课题。非线性偏微分方程领域的另一个重要方向是图案形成，其应用十分广泛，例如施纳肯伯格模型 [10], 、Swift-Hohenberg 方程 [25], 、格雷-斯科特模型 [38], 、FitzHugh-Nagumo 方程 [22], 以及 Monge–Amp`ere [13,15] 方程等。

本文重点研究如何计算非线性项表示为多项式的椭圆型半线性方程的多重解。尽管我们将非线性项限定为多项式，但这仍然是上述应用中一个尚未得到充分探索的有趣情形。

为求解这些非线性偏微分方程，人们已经发展出各种数值方法，例如牛顿法及其变体、极小极大方法、分岔方法 [44], 多重网格方法 [20,42] 或子空间校正方法 [7] 或一类特殊的双网格方法 [5,21,41,42,43], 去膨胀方法 [12], 山路方法 [4,9], 同伦方法 [8,16,17,18,36], 以及谱方法 [14]。然而，寻找多重解可能是一项具有挑战性的任务，主要原因在于难以获得多个解的合适初始猜测。通常无法确定是否存在针对每个解的良好数值初始猜测，使得计算过程能够收敛到相应的解。即使存在这样的初始猜测，找到它们也可能是一项具有挑战性的任务。

为应对这一挑战，我们提出了一种新颖的方法，称为伴随矩阵多层有限元方法（CBMFEM），该方法采用协调单元的有限元方法求解非线性偏微分方程。我们的方法基于为一般非线性椭圆系统设计的全多重网格方案 [2] 的结构。给定一个粗网格层级，我们利用结构化的伴随矩阵计算一个解，然后将其传递到细网格层级，作为细网格层级的初始条件。对于每一个初始猜测，我们采用牛顿法求得细网格层级上的解，并重复这一过程，直至获得一组收敛到该偏微分方程稳态解的解集。我们的方法不同于文献中已有的方法，例如 [4] 或 [28], 中提出的方法，后者试图基于先前找到的解来寻找更多解。

我们方法的主要优势在于能够高效且准确地生成多个初始猜测，这对于求解非线性偏微分方程的多个解至关重要。此外，我们的方法具有鲁棒性，并且能够轻松应用于具有多项式非线性项的广泛椭圆半线性方程。

本文还给出了具有多重解的椭圆型半线性偏微分方程中孤立解的数学定义，由此得到离散解的适定性，并利用 [41] 和 [42] 中引入的框架，为有限元解提供先验误差估计。

本文组织如下：在 §2 中，我们介绍控制方程和基本假设。在 §3 中，我们给出使用有限元方法求解非线性椭圆方程的误差估计。在 §4 中，我们介绍 CBMFEM，包括伴随矩阵的构造和滤波条件。最后，在 §5 中，我们展示使用 CBMFEM 得到的数值结果，这些结果

与理论分析一致。在本文中，我们使用 Sobolev空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 及其范数 $\|\cdot\|_{k,p}$ 的标准记号。如果 $k=0$，则 $\|\cdot\|_{0,p}$ 表示 L^p 范数。符号 $C^k(\Omega)$ 表示一阶 $k\geq 0$ 导数在 Ω 上连续的函数空间。此外，我们用 v 表示向量，用 v 表示矩阵。~ ~~

2 控制方程

在本节中，我们介绍将要求解的控制方程。具体而言，我们关注求解拟线性方程，其中假设多边形（多面体）区域 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有界区域，且 $d=1$，2，或 3。

$$-\Delta u + f(x,u) = 0, \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

满足以下一般混合边界条件：

$$\alpha u - \beta \nabla u \cdot \mathbf{n} = \gamma g, \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{n}$ 是指向 $\partial\Omega$的单位外法向量，α、β 和 γ 是可在 $\partial\Omega$上施加 u条件的函数，例如狄利克雷边界 Γ_D、纯诺伊曼边界 Γ_N、狄利克雷与诺伊曼混合边界或罗宾边界 Γ_R，即，

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N \quad \text{or} \quad \partial\Omega = \overline{\Gamma}_R, \tag{3}$$

其中，$\overline{\Gamma}_D$、$\overline{\Gamma}_N$ 和 $\overline{\Gamma}_R$ 分别是 Γ_D、Γ_N 和 Γ_R 的闭包。具体而言，

$$\beta|_{\Gamma_D} = 0, \quad \alpha|_{\Gamma_N} = 0, \quad \text{and} \quad (\alpha\beta)|_{\Gamma_R} > 0. \tag{4}$$

我们将假设 g 是光滑的，特别是在 $\Gamma_N = \partial\Omega$时，将对函数 f 和 g 假设相容性条件（如有必要），[26]。为方便起见，记 $\Gamma_1 = \Gamma_R$ 或 Γ_N 贯穿全文，并假设对于某个 $c>0$（一个通用常数），以下条件成立：

$$\beta = \gamma \quad \text{and} \quad 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq c \quad \text{on} \quad \Gamma_1. \tag{5}$$

我们还为函数 f 提供了一些条件，该函数通常是关于 x 和 u 的非线性多项式函数。我们假设 $f(x,u):\Omega\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 关于第二个变量是光滑的。我们用 $f^{(k)}$ 表示 f 关于 u 的 k 阶导数，即 $f^{(k)}=\frac{\partial^k f}{\partial u^k}$。并且存在正常数 C_1 和 C_2，使得

$$|f(x,u)| \leq C_1 + C_2|u|^q, \tag{6}$$

其中 q 是某个实数，使得 $1\leq q\leq\infty$ 对于 $d=1$，$1\leq q<\infty$ 对于 $d=2$且 $1\leq q<5$ 对于 $d=3$。这足以定义弱形式（见（8））。为应用有限元方法，我们考虑弱形式

方程(1)，其满足完全椭圆正则性（参见 [31] 及其中引用的参考文献），即解足够光滑。我们引入空间 V定义如下：

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}. \tag{7}$$

因此，主要问题可表述如下：求满足下式的 $u \in V$

$$\mathcal{F}(u, v) = a(u, v) + b(u, v) = 0, \quad \forall v \in V, \tag{8}$$

其中， $a(\cdot, \cdot)$ $b(\cdot, \cdot)$: $V \times V \mapsto \mathrm{IR}$ 分别是如下定义的映射：

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\alpha}{\beta} uv \, ds, \quad \forall u, v \in V \tag{9a}$$

$$b(u, v) = \int_\Omega f(x, u)v \, dx - \int_{\Gamma_1} gv \, ds, \quad \forall u, v \in V. \tag{9b}$$

3 有限元公式与先验误差分析

我们将采用有限元方法求解（8），具体而言，采用次数为 $r \geq 1$ 的协调有限元。区域 Ω 的三角剖分记为 $\mathcal{T}_h = \{T\}_{i=1, \cdots, N_e}$。按照惯例，我们定义

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \mathrm{diam}(T). \tag{10}$$

设 V_h 为 V 的子空间，由次数为 $r \geq 1$ 的分片全局连续多项式组成。我们用 $\mathcal{V}_h$ 表示 $\mathcal{T}_h$ 的顶点集。接着， V_h 的维数记为 N_h，内点总数以及空间 V_h 可表示如下：

$$V_h = \mathrm{span}\{\phi_h^i : i = 1, \cdots, N_h\}, \tag{11}$$

其中 ϕ_h^i 是三角剖分 $\mathcal{T}_h$上的节点基，即

$$\phi_h^i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall x_j \in \mathcal{V}_h. \tag{12}$$

(8)的离散弱形式如下：求 $u_h \in V_h$ 使得

$$\mathcal{F}(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + b(u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{13}$$

注意，对于任意 $u_h \in V_h$，存在唯一的$\underset{\sim}{u}_h = (u_h^1, \cdots, u_h^{N_h})^T \in \mathrm{IR}^{N_h}$，使得

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \phi_h^i. \tag{14}$$

为了获得满足 u_h 的 (13)的解，我们需要求解以下非线性方程组：

$$\underset{\sim}{F}_h(\underset{\sim}{u}_h) = \begin{pmatrix} F_h^1(\underset{\sim}{u}_h) \\ \vdots \\ F_h^{N_h}(\underset{\sim}{u}_h) \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0}, \tag{15}$$

其中

$$F_h^i(\underset{\sim}{u}_h) := a(u_h, \phi_h^i) + b(u_h, \phi_h^i) = 0, \quad \forall i = 1, \cdots, N_h. \tag{16}$$

3.1 先验误差分析

本节将讨论求解（8）时有限元解的收敛阶。在本节中，我们为固定的 $\delta > 0$引入记号:

$$N_\delta = \{v \in V : \|u - v\|_{1,2} < \delta\}, \tag{17}$$

其中 u 是方程（8）的解。我们作如下假设:

假设31问题(8) 存在一个解 $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$，且存在常数 Γ，使得 $\|u\|_{0,\infty} \leq \Gamma$ 并且足够光滑。此外，特别地， u 在以下意义下是孤立的：存在 $\delta = \delta_u > 0$，使得对于所有满足 $0 \neq \|w\|_{1,2} < \delta$ 的 $w \in V$，均存在 $\eta_u > 0$ 和 $v_w \in V$，使得

$$|\mathcal{F}(u + w, v_w)| \geq \eta_u \|w\|_{1,2} \|v_w\|_{1,2} > 0. \tag{18}$$

注*1* 据我们所知，这是文献中首次引入隔离这一概念。 [6], 中给出了一个类似的定义，但其中允许 v 是 V中的任意函数，不一定依赖于 w （18）。这可能会导致一些问题。为说明其中一个问题，我们考虑求解以下方程:

$$-u'' - u^p = 0 \quad \text{in} \quad \left(0, \frac{2\pi}{\sqrt{p}}\right) \quad \text{and} \quad u(0) = u\left(\frac{2\pi}{\sqrt{p}}\right) = 0. \tag{19}$$

弱形式为 $\mathcal{F}(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega u^p v dx = 0$ 且 $u = 0$是意义下的孤立解（18），即对于任意 $w \in V$，我们取$v_w = w$，从而得到

$$|\mathcal{F}(u + \varepsilon w, w)| = \left| \int_\Omega \nabla(\varepsilon w) \nabla w - \varepsilon^p \int_\Omega w^{p+1} \right| \geq \eta_u \|\varepsilon w\|_{1,2} \|w\|_{1,2}, \tag{20}$$

对于某个 η_u，无论 ε 多么小，由于 Poincar´e 不等式和 Sobolev嵌入，即（$\|w\|_{0,p+1} \lesssim \|w\|_{1,2}$ 在一维中）。另一方面，若我们取$w = \cos(\sqrt{p}x) - 1$、 $0 < \varepsilon \ll 1$ 和 $v = \sin(\sqrt{p}x)$，则有

$$\mathcal{F}(u + \varepsilon w, v) = \varepsilon \int_\Omega \nabla w \nabla v dx - \varepsilon^p \int_\Omega w^p v dx = -\varepsilon^p \int_\Omega w^p v dx = 0, \tag{21}$$

这意味着 $0 = |\mathcal{F}(u + \varepsilon w, v)| \geq \eta_u \varepsilon \|w\|_{1,2} \|v\|_{1,2} = O(\varepsilon)$。这没有意义。

我们首先根据所作假设给出以下引理:

引理1 在假设 $\|u_h\|_{0,\infty}, \|u\|_{0,\infty} \leq \Gamma$ 成立的条件下，我们有

$$\|f^{(1)}\|_{0,\infty}, \|f^{(2)}\|_{0,\infty} < C(\Gamma), \tag{22}$$

其中， C 是一个取决于 Γ的常数。

现在，我们将考虑方程（ u 的线性化问题（8）：对于 $q \in V^*$，求 $w \in V$ 使得

$$A(u; w, v) := a(w, v) + \int_\Omega f^{(1)}(u)wv\, dx = (q, v), \quad \forall v \in V. \tag{23}$$

这对应于以下偏微分方程：求满足以下条件的 w

$$-\Delta w + f^{(1)}(u)w = q \quad \text{in } \Omega, \tag{24}$$

满足与方程（8）相同类型的边界条件，但将g 替换为（2）中的零函数。我们假设方程（23）的解满足完全椭圆正则性 [32], 即,

$$\|w\|_{2,2} \lesssim \|q\|_{0,2}. \tag{25}$$

现在，我们将按如下方式证明线性化问题的适定性。

引理 2 $A(u; \cdot, \cdot)$，在式（*23*）中定义，满足 ***inf-sup***条件，即

$$\inf_{w\in V} \sup_{v\in V} \frac{A(u; v, w)}{\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2}} = \inf_{v\in V} \sup_{w\in V} \frac{A(u; v, w)}{\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2}} \gtrsim 1. \tag{26}$$

证明 根据 [1],我们需要证明

(i) 对所有 $v \in V$，存在唯一的零解 $w = 0$，满足 $A(u; w, v) = 0$；(ii) $A(u; \cdot, \cdot)$ 满足 Gårding型不等式，即存在 $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ 使得

$$|A(u; v, v)| \geq \gamma_0\|v\|^2_{1,2} - \gamma_1\|v\|^2_{0,2}, \quad \forall v \in V,$$

对于第二个条件，由于 Poincaré不等式 [11]，Gårding型不等式成立。其次，我们将使用反证法证明第一个条件。假设存在一个非零解 $w \in V$，使得

$$A(u; w, v) = 0, \quad \forall v \in V. \tag{27}$$

然后，对于 ϵ 充分小的情形，我们定义 $u_\epsilon = u + \epsilon w \in N_\delta(u)$。接着，根据假设 31，我们可以选取 $v_w \in V$，使不等式（18）成立，并注意到

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u + \epsilon w, v_w) &= a(u + \epsilon w, v_w) + b(u + \epsilon w, v_w) = a(u + \epsilon w, v_w) \\
&\quad + \int_\Omega \left[f(u) + f^{(1)}(u)(\epsilon w) + \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi)(\epsilon w)^2 \right] v_w\, dx - \int_{\Gamma_{D_c}} g v_w\, ds \\
&= a(u, v_w) + b(u, v_w) + A(u, \epsilon w, v_w) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \int_\Omega f^{(2)}(\xi) w^2 v_w\, dx \\
&\leq \frac{\epsilon^2}{2} \|f^{(2)}\|_{0,p_1} \|w\|^2_{0,2p_2} \|v_w\|_{0,p_3},
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式使用了广义 Hölder 不等式，其中满足 p_i 对于$i = 1, 2, 3$，并满足恒等式 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$. 由于我们可以选择$\epsilon$ 任意小，这与假设 31矛盾。因此，证明完毕。

在连续层面建立了线性化方程的inf-sup条件后，我们可以使用标准技术建立离散inf-sup条件，例如 $W^{1,2}$ 稳定性和 L^2 对足够小的 h 的范数误差估计和Ritz投影（参见 [3,26]）。

引理3 在假设*31*成立的条件下，若 $h < h_0$ 充分小 h_0，则以下离散*inf-sup*条件成立。具体而言，存在 α_0，其与 h无关，使得

$$\inf_{w_h \in V_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{A(u; v_h, w_h)}{\|v_h\|_{1,2}\|w_h\|_{1,2}} = \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{A(u; v_h, w_h)}{\|v_h\|_{1,2}\|w_h\|_{1,2}} = \alpha_0 > 0. \quad (28)$$

这一发现对用于求解解的牛顿法的适定性具有重要意义。关于使用牛顿法求多重解的深入讨论，请参见 [29,30,37] 及其中引用的文献。现在我们考虑 $A(u; \cdot, \cdot)$的解算子及误差估计。首先，我们将投影算子 $\pi_h : V \mapsto V_h$ 定义如下

$$A(u; \pi_h w, v_h) = A(u; w, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (29)$$

引理4 对于投影算子，在 $r \geq 1$下有，

$$\|w - \pi_h w\|_{0,2} \lesssim h^{r+1}\|w\|_{r+1,2} \quad and \quad \|w - \pi_h w\|_{1,2} \lesssim h^r\|w\|_{r+1,2}. \quad (30)$$

以下不等式将用于离散解的适定性和误差分析；众所周知，对于狄利克雷边界条件情形，该不等式成立， [3]。

$$\|\pi_h w\|_{0,\infty} \lesssim \|w\|_{0,\infty}, \quad \forall w \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^1(\Omega). \quad (31)$$

我们注意到，对于混合边界条件，也可以证明该结论在二维的特殊情形下成立 [26], ；而三维情形下的结果似乎尚未得到证明，不过，最近已有研究证明该结论对于三维纯诺伊曼边界情形成立，见 [27]。现在，利用13中采用的论证，我们可以证明离散问题（13）存在唯一解，并且该解能够以所需的收敛阶逼近固定的孤立解u ，在 L^2 和 $W^{1,2}$中均如此 范数，参见 [42]。

定理1 假设条件 *31* 和 (31)成立。那么，对于 $h < h_0$，当h_0 充分小时，有限元方程 (13) 存在一个解 u_h满足

$$\|u - u_h\|_{k,2} \lesssim h^{r+1-k}, \quad for\ k = 0, 1. \quad (32)$$

此外，对于某个 $\delta > 0$， u_h 是 N_δ 中唯一的解。

4 基于伴随的多层有限元方法 (CBMFEM)

本节介绍一种基于伴随的多层有限元方法，用于求解非线性方程组（15）。由于存在多重解，直接求解该方程组具有挑战性。因此，我们从 [2] 中讨论的多重网格法汲取灵感，该方法旨在求得单个解。我们通过引入局部非线性求解器来改进多层有限元方法，该求解器可计算伴随矩阵的特征值。这样便能为牛顿法生成一组初始猜测，用于在细化网格上求解非线性方程组。

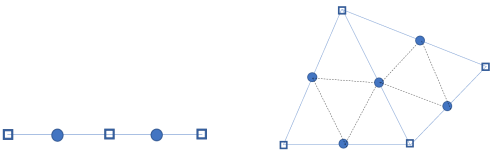


图 1 CBMFEM 在一维（左）和具有边的二维情形（右）中的网格细化。方形点表示粗网格节点，实心圆表示新引入的细网格节点。

我们首先引入一系列嵌套三角剖分，即，

$$\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \cdots, \mathcal{T}_N, \tag{33}$$

其中， $\mathcal{T}_0$ 和 $\mathcal{T}_N$ 分别是 Ω的最粗和最细三角剖分。由此可构造一系列嵌套协调有限元空间 $\{V_\ell\}_{\ell=0}^N \subset V$，如下所示:

$$V_0 \subset \cdots \subset V_N. \tag{34}$$

一维和二维情形下的细化策略如图1 所示，其中我们基于粗网格节点（方形点）引入新节点（实心圆）。具体而言，对于给定的粗网格 $\mathcal{T}_H$，通过在 $\mathcal{T}_h$ 上引入一个新节点，我们得到细化网格 $\mathcal{V}_H$。CBMFEM 的整体流程图总结于图2。

假设粗网格 $\mathcal{T}_H$ 上的解 $u_H \in V_H$ 已得到良好近似，即 $\underset{\sim}{F}_H(\underset{\sim}{u}_H) = \underset{\sim}{0}$，我们可以细化三角剖分 $\mathcal{T}_H$，得到更精细的三角剖分 $\mathcal{T}_h$。由于 $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}_h$，我们可以在 $\mathcal{V}_h$ 中找到一个函数 $\widetilde{u}_h(x)$，从而将 $u_H(x)$ 表示为 $\mathcal{V}_h$ 的基函数的线性组合:

$$u_H(x) = \widetilde{u}_h(x) = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{V}_h} \widetilde{u}_h^i \phi_h^i(x), \tag{35}$$

其中，$\dim \mathcal{V}_h$ 是 $\mathcal{V}_h$ 的维数， $\phi_h^i(x)$是$\mathcal{V}_h$的基函数。特别地，对于任意点 $x_i \in \mathcal{V}_H$，有 $\widetilde{u}_h^i = u_H(x_i)$。对于点$x_i \in \mathcal{V}_h \backslash \mathcal{V}_H$，我们可以根据基函数的内在结构计算 $\widetilde{u}_h^i$。换言之，我们可以使用基函数将 $u_H(x)$插值到 $u_h(x)$

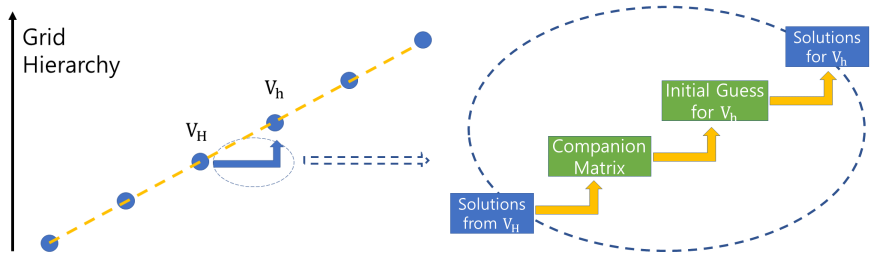


图 2 用于求解非线性微分方程的 CBMFEM 流程图。左侧展示了 CBMFEM 的层次结构；对于每个层级，我们都在粗网格上得到一个解，V_H。随后，我们通过构造伴随矩阵来求解局部非线性方程，并在右侧更细的层级上为牛顿法生成初始猜测值 V_h。

在两个层级上的函数。具体来说，考虑一维情形，并有如下关系 $\phi_H^{i/2} = \phi_{2h}^{i/2} = \frac{\phi_h^{i-1}}{2} + \phi_h^i + \frac{\phi_h^{i+1}}{2}$，这使我们能够计算（35）中的系数。更准确地说，我们可以将 $u_H(x)$写成 $u_h(x)$，如下所示：

$$u_H(x) = \sum_{x_i \in V_H} u_H^{i/2} \phi_H^{i/2}(x) = \sum_{x_i \in V_H} u_H^{i/2} \left(\frac{\phi_h^{i-1}}{2} + \phi_h^i + \frac{\phi_h^{i+1}}{2} \right) = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{V}_h} \widetilde{u}_h^i \phi_h^i(x). \tag{36}$$

接下来，我们更新细网格上 $x_i \in \mathcal{V}_h \backslash \mathcal{V}_H$ 的 u_h^i 值。为此，我们固定其他节点的值为 $\widetilde{u}_h$，并针对 u_h^i 求解 $F_h^i(u_h^i; (u_h^j = \widetilde{u}_h^j)_{j \neq i}) = 0$。由于 $f(x, u)$ 是多项式，因此我们可以将 F_h^i 重写为一个单独的多项式方程，即：

$$F_h^i(u_h^i; (u_h^j = \widetilde{u}_h^j)_{j \neq i}) = P_h^i(\widehat{u}_h^i) = 0, \tag{37}$$

其中 $P_h^i(\alpha) = \sum_{n=0}^{m} c_n \alpha^n$。$P_h^i(\alpha)$ 的伴随矩阵定义为

$$C(P_h^i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0/c_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1/c_m \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2/c_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{m-1}/c_m \end{bmatrix}, \tag{38}$$

其中，除 c_0外，系数 c_n 仅取决于 $\{\widetilde{u}_h^j\}$ 中靠近点 $x_i \in \mathcal{V}_h \backslash \mathcal{V}_H$ 的值，因此其计算具有局部性。将方程（37）的根记为 $\widehat{u}_h^i$，则 V_h 上的解的初始猜测值设为

$$\widehat{u}_h = \sum \widehat{u}_h^i \phi_h^i \text{ where } \widehat{u}_h^i = \begin{cases} u_H^i & x_i \in \mathcal{V}_H, \\ \widehat{u}_h^i \text{ by solving (37)} & x_i \in \mathcal{V}_h \backslash \mathcal{V}_H. \end{cases} \tag{39}$$

由于 $C(P_h^i)$ 的所有特征值都满足方程 $P_h^i(y_i) = 0$，因此最多可能有 $m^{|\mathcal{V}_h \backslash \mathcal{V}_H|}$ 个初始猜测，其中 $|\mathcal{V}_h \backslash \mathcal{V}_H|$ 表示

新引入的细网格节点位于 $\mathcal{V}_h$ 和 m 是多项式的次数(37)。然而，计算所有这些可能性在计算上代价高昂，因此我们应用以下滤波条件来减少初始猜测的数量并加快该方法：

– 局部性条件：我们假设初始猜测在 $\tilde{u}_h$ 的~残差意义下足够接近，即

$$\|\underset{\sim}{F}_h(\underset{\sim}{\widehat{u}_h})\|_{0,2} < C_1\|\underset{\sim}{F}_h(\underset{\sim}{\tilde{u}_h})\|_{0,2}; \tag{40}$$

– 收敛条件：我们将收敛估计应用于初始猜测，即

$$\|\underset{\sim}{F}_h(\underset{\sim}{\widehat{u}_h})\|_{0,2} < C_2h^2; \tag{41}$$

– 有界性条件：我们假设初始猜测有界，即

$$\|\underset{\sim}{\widehat{u}_h}\|_{0,\infty} < C_3. \tag{42}$$

最后，我们在**算法1**中总结 CBMFEM 算法。

算法 1 用于计算多重解的 CBMFEM。给定 V_h，V_H，以及定义在 u_H 上的解 V_H。对 $u_H = \sum \widetilde{u}_h^i \phi_h^i$ 进行插值并计算系数 $\widetilde{u}_h^i$。**对于** $i \in V_h \backslash V_H$，**执行** 构造多项式方程 $P_h^i(\underset{\sim}{\widehat{u}_h^i})$ 计算伴随矩阵的特征值，$C(P_h^i)$**结束循环**在39中获取 V_h 上的初始猜测并应用滤波条件。利用所得初始猜测，在 V_h 上应用牛顿法求解$\underset{\sim}{F}_h(\underset{\sim}{u}_h) = 0$

5 数值示例

本节将通过若干一维和二维示例，展示 CBMFEM 的有效性和鲁棒性。为简洁起见，我们令 $r = 1$，其中 u_h 和 u_H 分别表示网格步长为 h 和 H 时的数值解，而 u 表示解析解。对于误差分析，由于我们考虑的大多数示例都没有解析解，因此采用渐近误差分析来计算收敛率。

5.1 一维示例

5.1.1 示例 *1*

首先，我们考虑以下边值问题

$$\begin{cases} -u'' = (1+u^4) \quad \text{on} \quad [0,1], \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{43}$$

其具有解析解 [16]。更具体地说，两边乘以 u' 并对 x积分，可得

$$\frac{(u'(x))^2}{2} + F(u(x)) - F(u_0) = 0, \tag{44}$$

其中 $F(u) = u + \frac{u^5}{5}$ 且 $u_0 = u(0)$。由于 $u'(0) = 0$ 且 $u''(x) < 0$，因此对于所有 $x > 0$，我们有 $u' < 0$。此外，$u(x) > u_0$意味着对于所有$x > 0$，$F(u_0) > F(x)$。因此

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{F(u_0) - F(u(x))}} = -\sqrt{2}. \tag{45}$$

通过将 x 从 s 积分到 1，我们得到

$$\int_s^1 \frac{u'(x)}{\sqrt{F(u_0) - F(u(x))}} dx = -\sqrt{2}(1-s). \tag{46}$$

由于边界条件 $u(1) = 0$，我们有

$$\int_0^{u(s)} \frac{dx}{\sqrt{F(u_0) - F(u(x))}} = \sqrt{2}(1-s). \tag{47}$$

通过选择 $s = 0$，我们得到关于 u_0 的以下方程，

$$\int_0^{u_0} \frac{dx}{\sqrt{F(u_0) - F(u(x))}} = \sqrt{2} \tag{48}$$

然后，对于任意给定的 u_0，方程（43）的解由初值问题唯一确定

$$\begin{cases} -v' = (1+u^4) \\ u' = v \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} v(0) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} . \tag{49}$$

通过牛顿法求解（48），我们得到两个解 $u_0 \approx 0.5227$ 和$u_0 \approx 1.3084$。采用牛顿非线性求解器的 CBMEFM 数值误差见表 1 。

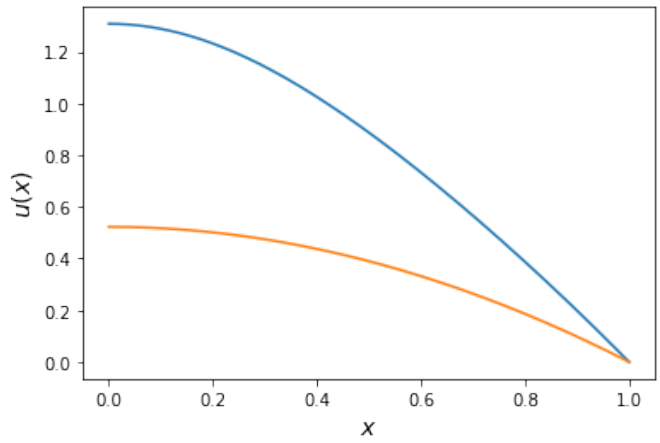


图3 方程（43）的数值解，使用 $N = 1025$ 个网格点。

h	# 第一个解				# 第二个解				CPU（秒）
	$\|e_h\|_{0,2}$	阶	$\|e_h\|_{1,2}$	阶	$\|e_h\|_{0,2}$	阶	$\|e_h\|_{1,2}$	阶	牛顿
2^{-2}	2.6E-04	x	1.7E-01	x	8.3E-03	x	7.0E-02	x	0.10
2^{-3}	6.4E-05	2.01	8.0E-02	1.00	2.0E-03	2.04	4.0E-02	1.01	0.10
2^{-4}	1.6E-05	2.00	4.0E-02	1.00	5.0E-04	2.01	2.0E-02	1.00	0.15
2^{-5}	4.0E-06	2.00	2.0E-02	1.00	1.3E-04	2.00	9.3E-03	1.00	0.16
2^{-6}	1.0E-06	2.00	1.0E-02	1.00	3.1E-05	2.00	4.7E-03	1.00	0.11
2^{-7}	2.5E-07	2.00	5.2E-03	1.00	7.8E-06	2.00	2.3E-03	1.00	0.16
2^{-8}	6.2E-08	2.00	2.6E-03	1.01	1.9E-06	2.00	1.2E-03	1.01	.25
2^{-9}	1.6E-08	2.00	1.3E-03	1.03	4.9E-07	2.00	0.6E-03	1.04	0.64
2^{-10}	3.9E-09	2.00	5.6E-04	1.16	1.2E-07	2.00	0.3E-03	1.16	3.55

表1 CBMEFM 使用牛顿非线性求解器求解方程（43）时的数值误差和计算时间。

5.1.2 例2

接下来，我们考虑以下边值问题

$$\begin{cases} -u'' = -u^2 \quad \text{on} \quad [0,1], \\ u(0) = 0 \text{ and } u(1) = 1, \end{cases} \tag{50}$$

其有两个解，如图所示。4。我们从 $N = 3$ 开始，通过使用非线性求解器实现 CBMEFM，将解计算至 $N = 1025$。我们使用 $\|e_H^h\|_{0,\ 2}$ 计算数值误差，并在表 2 中汇总收敛性测试和计算时间。

5.1.3 例3

第三，我们考虑以下非线性参数微分方程。

$$\begin{cases} -u'' = u^2(p - u^2) \quad \text{on} \quad [0,1], \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{51}$$

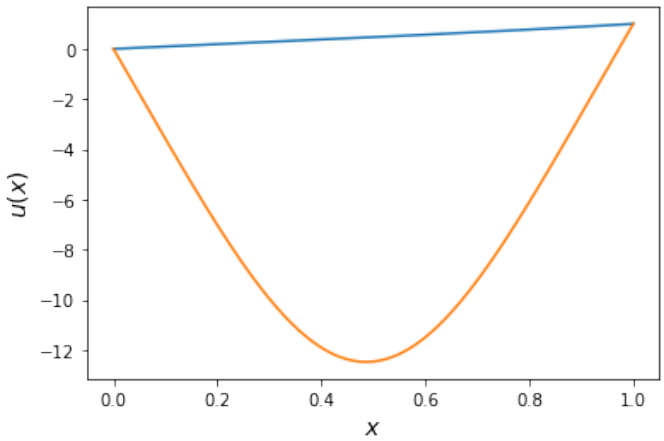


图4 方程（50）的数值解，使用 $N = 1025$ 个网格点。

h	# 第一个解				# 第二个解				CPUs
	$\|e_H^h\|_{0,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,\ 2}$	阶	$\|e_H^h\|_{0,\ 2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,\ 2}$	阶	牛顿
2^{-2}	2.6E-3	x	2.3E-2	x	7.9E-1	x	5.8E-0	x	0.09
2^{-3}	6.8E-4	1.96	1.2E-2	0.90	2.0E-1	2.01	2.9E-0	1.03	0.09
2^{-4}	1.7E-4	1.99	6.3E-3	0.94	4.9E-2	2.00	1.4E-0	1.00	0.09
2^{-5}	4.3E-5	2.00	3.2E-3	0.97	1.2E-2	2.00	7.12E-1	1.00	0.10
2^{-6}	1.1E-5	2.00	1.6E-3	0.98	3.1E-3	2.00	3.6E-1	1.00	0.11
2^{-7}	2.7E-6	2.00	8.2E-4	0.99	7.7E-4	2.00	1.8E-1	1.00	0.14
2^{-8}	6.7E-7	2.00	4.1E-4	1.00	1.9E-4	2.00	8.9E-2	1.00	0.24
2^{-9}	1.7E-7	2.00	2.1E-4	1.00	4.8E-5	2.00	4.5E-2	1.00	0.49
2^{-10}	4.2E-8	2.00	1.0E-4	1.00	1.2E-5	2.00	2.2E-2	1.00	3.35

表2 采用牛顿求解器求解方程（50）时 CBMEFM 的数值误差和计算时间。

其中 p 是一个参数。解的数量会随着 p增大而增加 [19]。我们使用 CBMEFM 和牛顿求解器计算 $p = 1$、7 和 18 对应的数值解，并在图 5中展示这些解。不同 p 取值和步长下的计算时间及解的数量汇总于表 3中。随着 p 增大，解的数量增加，因此计算时间也会变长。

5.1.4 示例 *4*

我们考虑以下半线性椭圆边值问题

$$\begin{cases} -u''(x) = d^{r-2}|x|^r u^3(x) \quad \text{on} \quad [-1,1], \\ u(-1) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{52}$$

其中 d 是对应于区域的缩放系数。此示例基于 [39,40]中研究的问题。我们将区域从$[-1,1]$ 重新缩放为 $[-d,d]$，并据此构建了问题。

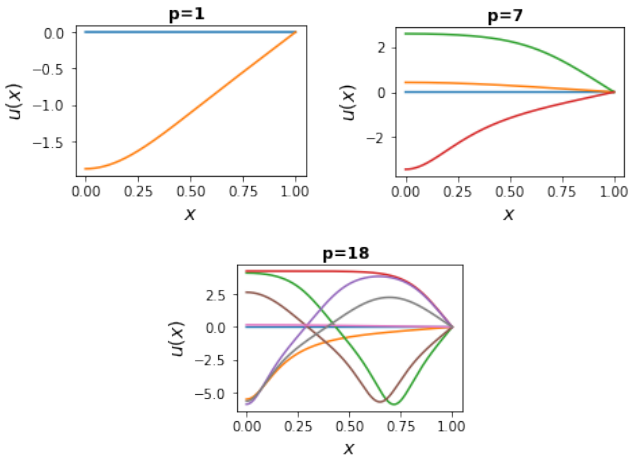


图 5 方程（51）的数值解，采用 1025 个网格点，分别对应 $p=1$， $p=7$ 和 $p=18$。

h	p=1		p=7		p=18	
	CPUs	解的数量	CPUs	解的数量	CPUs	解的数量
2^{-2}	0.17	2	0.15	5	0.29	19
2^{-3}	0.12	2	0.35	9	3.01	37
2^{-4}	0.11	2	0.20	4	28.17	10
2^{-5}	0.11	2	0.11	4	0.38	8
2^{-6}	0.11	2	0.14	4	0.18	8
2^{-7}	0.14	2	0.23	4	0.33	8
2^{-8}	0.26	2	0.35	4	0.66	8
2^{-9}	0.57	2	0.95	4	1.93	8
2^{-10}	3.08	2	5.55	4	11.54	8

表 3 CBMEFM 采用牛顿求解器时，不同 p 下式（51的计算时间（秒）和解的数量。

h	# 第一个解				# 第二个解				# 第三个解			
	$\|e_H^h\|_{0,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{0,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{0,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,2}$	阶
2^{-2}	1.6E-1	x	1.43	x	1.6E-1	x	9.0E-1	x	2.7E-2	x	1.1E-1	x
2^{-3}	2.4E-1	-0.54	1.22	0.23	3.3E-2	2.30	4.7E-1	0.93	6.8E-3	2.00	5.1E-2	1.08
2^{-4}	4.2E-2	2.52	7.4E-1	0.73	7.4E-3	2.13	2.2E-1	1.07	1.7E-3	2.00	2.5E-2	1.06
2^{-5}	8.4E-3	2.31	3.0E-1	1.28	1.9E-3	2.01	1.1E-1	1.01	4.3E-4	2.00	1.2E-2	1.03
2^{-6}	2.1E-3	2.04	1.4E-1	1.08	4.6E-4	2.00	5.5E-2	1.00	1.1E-4	2.00	5.9E-3	1.02
2^{-7}	5.1E-4	2.01	7.0E-2	1.03	1.2E-4	2.00	2.8E-2	1.00	2.7E-5	2.00	3.0E-3	1.01
2^{-8}	1.3E-4	2.00	3.5E-2	1.02	2.9E-5	2.00	1.4E-2	1.00	6.7E-6	2.00	1.5E-3	1.00
2^{-9}	3.2E-5	2.00	1.7E-2	1.01	7.2E-6	2.00	6.9E-3	1.00	1.7E-6	2.00	7.4E-4	1.00
2^{-10}	8.0E-6	2.00	8.6E-3	1.00	1.8E-6	2.00	3.5E-3	1.00	4.2E-7	2.00	3.7E-4	1.00

表 4 方程（51）的非平凡解的数值误差，采用 $p=7$ CBMEFM 的牛顿求解器计算。

我们从 $r=3$ 和 $d=1$ 出发，利用 CBMEFM 找到了 4 个非负解，其中$N=1025$ 。对于r 和 d，我们也使用同伦方法发现了相同数量的解，分别对应于 $r=3$、$d=10$ 和

$r = 12,\ d = 1$。不同参数下的数值解如图6所示。然后，我们还通过选取 r，并使用 $d = 1$ 个网格点，绘制了关于 r 的数值解分岔图，如图7所示。图中仅显示非平凡非负解。当 r 较小时，只有一个非平凡解。随着 r 增大，非平凡解的数量增加，并分岔为三个解。

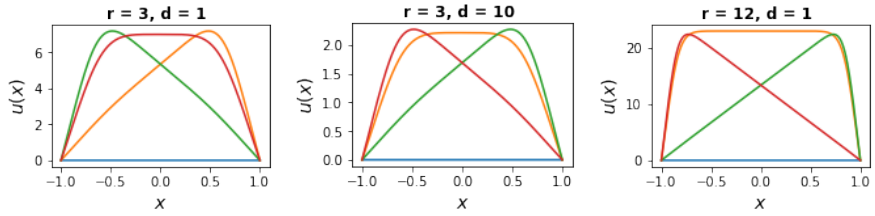


图 6 方程（52）的数值解，采用 $N = 1025$ 个网格点，参数 r 和 d取不同值。解具有对称性，因此我们只关注其中一个。

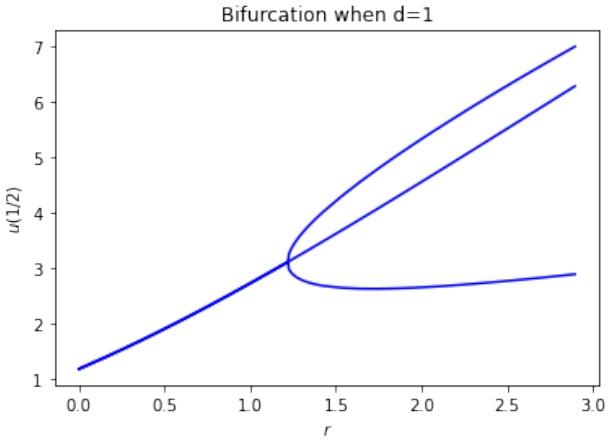


图 7 方程（52）关于 r 的分岔图，使用 $N = 1025$ 个网格点，且$d = 1$。

5.1.5 施纳肯伯格模型

我们考虑具有无通量边界条件的一维施纳肯伯格模型稳态系统

$$\begin{cases} u'' + \eta(a - u + u^2 v) = 0, & \text{on} \quad [0,1] \\ dv'' + \eta(b - u^2 v) = 0, & \text{on} \quad [0,1] \\ u'(0) = u'(1) = v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases} \tag{53}$$

h	# 第一个解				# 第二个解			
	$\|e_H^h\|_{0,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{0,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,2}$	阶
2^{-3}	1.3E-0	x	7.9E-0	x	1.0E-0	x	9.2E-0	x
2^{-4}	3.2E-1	2.04	4.2E-0	0.90	5.7E-1	0.87	5.4E-0	0.76
2^{-5}	8.0E-2	2.03	2.0E-0	1.06	1.1E-1	2.33	2.3E-0	1.22
2^{-6}	2.0E-2	2.03	1.0E-0	1.01	2.7E-2	2.03	1.2E-0	1.02
2^{-7}	4.9E-3	2.01	5.0E-1	1.00	6.7E-3	2.00	5.7E-1	1.00
2^{-8}	1.2E-3	2.00	2.5E-1	1.00	1.7E-3	2.00	2.9E-1	1.00
2^{-9}	3.1E-4	2.00	1.3E-1	1.00	4.2E-4	2.00	1.4E-1	1.00
2^{-10}	7.6E-5	2.00	6.3E-2	1.00	1.0E-4	2.00	7.2E-2	1.00

表 5 方程（52）的非平凡解的数值误差，其中 $r = 3$，$d = 1$，使用 CBMEFM 和牛顿求解器计算。

对于不同的参数，该模型呈现出复杂的解模式 η，a，b，以及 d [18]。由于只有一个非线性项 u^2v，我们将稳态系统重写如下

$$\begin{cases} u'' + dv'' + \eta(a + b - u) = 0, \\ dv'' + \eta(b - u^2 v) = 0. \end{cases} \tag{54}$$

在这种情况下，系统（54）中只有一个非线性方程。离散化后，我们可以根据第一个方程求出$\underset{\sim}{v}_h$ 关于 $\underset{\sim}{u}_h$ 的表达式，并将其代入第二个方程。由此得到一个关于$\underset{\sim}{u}_h$的多项式方程，因此可以使用伴随矩阵求出其根。然后，我们使用 CBMEFM 求解一维下参数为$a = 1/3$，$b = 2/3$，$d = 50$，$\eta = 50$，且最高至 $h = 2^{-9}$的 Schakenberg 模型。计算得到 3 个解（8），计算时间见表（6）。

h	# 第一个解				CPUs
	$\|e_H^h\|_{0,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,2}$	阶	
2^{-3}	2.9E-2	x	1.9E-1	x	0.58
2^{-4}	6.3E-3	2.20	6.0E-2	1.63	0.42
2^{-5}	1.6E-3	2.02	2.7E-2	1.18	0.55
2^{-6}	3.9E-4	2.00	1.3E-2	1.06	0.84
2^{-7}	9.6E-5	2.00	6.3E-3	1.02	1.96
2^{-8}	2.4E-5	2.00	3.1E-3	1.01	6.14
2^{-9}	6.0E-6	2.00	1.6E-3	1.00	22.14
2^{-10}	1.5E-6	2.00	7.8E-4	1.00	157.88

表 6 使用牛顿求解器求解方程（53）时，CBMEFM 的数值误差和计算时间。由于解具有对称性，我们只关注其中一个。

5.2 二维示例

本节讨论几个二维示例。

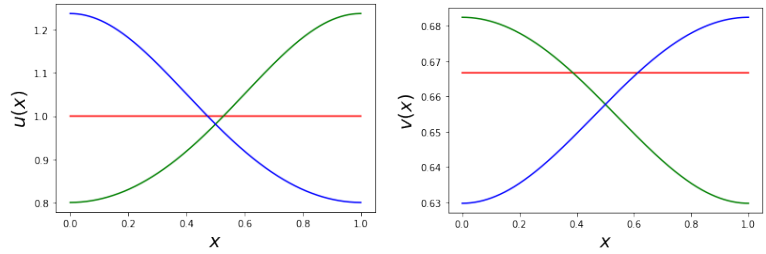


图 8 方程（53）的 3 个不同解，其中 $N = 1025$ 个网格点。相同颜色的解互为配对。

5.2.1 示例 *1*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + u^2(x,y) = s\sin(\pi x)\sin(\pi y) \quad \text{on} \quad \Omega, \\ u(x,y) = 0, \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{55}$$

其中 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ [4]。

在本例中，我们采用边细化生成多层网格，并为下一层提供多个初始猜测，如图 9所示。每一层的节点数和三角形数汇总于表 7。

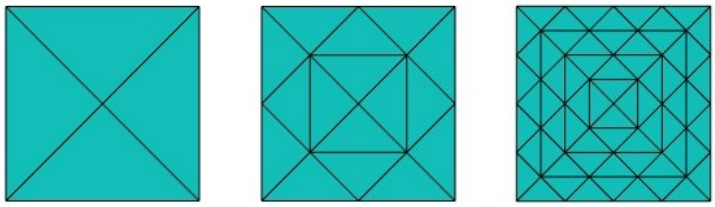


图 9 基于边细化的多层网格，区域为矩形。

步长	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
节点数	5	13	41	145	545	2113	8321	33025
三角形数	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536

表 7 采用边细化的多重网格各层的节点数和三角形数。

首先，我们使用 $s = 1600$计算解。由于更高层级上大量解组合导致计算量过大，我们仅在前三个多层网格上应用了 CBMEFM，直到 $\ell = 2$ 。从 $\ell = 3$开始，我们使用插值初值进行牛顿细化。

来自粗网格的猜测。我们找到了 10 个解，并将它们计算至$h = 2^{-7}$。由于某些解在旋转后是相同的，我们仅在图 11 中绘制了四个解。值得注意的是，即使将 x 替换为 $1-x$，方程 55) 仍保持不变， y同样如此。因此，将图 10 中的解 3 和 4 进行旋转也会得到有效解。因此，尽管总共有 10 个解，我们仅在图 10 中绘制了 4 个解（旋转意义下）。我们还计算了这些解在 L^2 和 H^1 范数下的数值误差和收敛阶，并将其汇总于表 9。

方法	步长	# 解的数量	计算时间
CBMEFM	2^0	2	0.2s
	2^{-1}	10	1.4s
	2^{-2}	10	142.7秒
牛顿的细化-ment	2^{-3}	10	7.1s
	2^{-4}	10	20.6秒
	2^{-5}	10	76.8秒
	2^{-6}	10	540.4秒
	2^{-7}	10	5521.3秒

表 8 使用 55 式求解的数值性能总结，使用 $s = 1600$。在达到级别 $\ell = 2$ 之前，我们使用 CBMEFM，并从 $\ell = 3$ 开始进行牛顿细化。

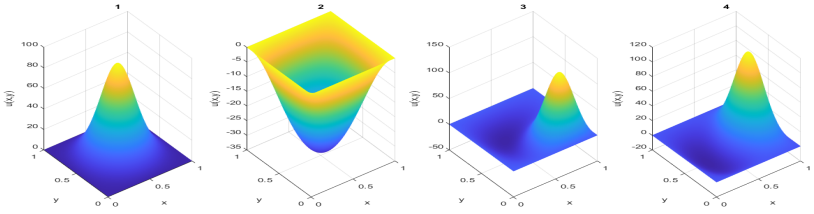


图 10 方程 55 在 $s = 1600$ 下、步长为 2^{-7} 时的多重解。

最后，我们还探究了解结构与.....的关系。对于较小的 s 值，只观察到两个解。然而，随着 s 增大，解的数量也随之增加，如图 11 所示。

5.2.2 二维 Gray–Scott 模型

最后一个例子是稳态格雷-斯科特模型，其形式如下。

$$\begin{cases} D_A \Delta A = -SA^2 + (\mu + \rho)A, & \text{on} \quad \Omega \\ D_S \Delta S = SA^2 - \rho(1 - S), & \text{on} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{56}$$

h	# 第一个解		# 第二个解		# 第三个解		# 第四解	
	$\|e_H^h\|_{0,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{0,\ 2}$	阶	$\|e_H^h\|_{0,\ 2}$	阶	$\|e_H^h\|_{0,\ 2}$	阶
2^{-1}	2.1E-0	x	1.2E-0	x	x	x	x	x
2^{-2}	5.1E-0	-1.26	2.8E-0	-1.26	2.3E+1	x	5.4E-0	x
2^{-3}	3.9E-0	0.37	0.7E-0	1.94	9.5E-0	1.28	6.9E-0	-0.36
2^{-4}	1.6E-0	1.30	0.2E-0	1.98	3.2E-0	1.56	2.3E-0	1.58
2^{-5}	0.5E-0	1.70	0.5E-1	1.99	0.9E-0	1.85	0.7E-0	1.83
2^{-6}	0.1E-0	1.90	0.1E-1	2.00	0.2E-0	1.95	0.2E-0	1.95
2^{-7}	3.3 E-3	1.97	2.9E-03	2.00	0.6E-1	1.99	0.4E-1	1.99
h	$\|e_H^h\|_{1,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,\ 2}$	阶	$\|e_H^h\|_{1,\ 2}$	阶
2^{-1}	2.6E+1	x	1.4E+1	x	x	x	x	x
2^{-2}	6.8E+1	-1.40	2.7E+1	-0.93	1.9E+2	x	7.2E+1	x
2^{-3}	5.6E+1	0.29	1.5E+1	0.91	9.9E+1	0.92	7.9E+1	-0.13
2^{-4}	3.1E+1	0.86	7.4E-0	0.97	5.2E+1	0.92	4.2E+1	0.92
2^{-5}	1.6E+1	0.97	3.7E-0	0.99	2.6E+1	1.02	2.1E+1	1.01
2^{-6}	7.8E-0	1.00	1.9E-0	1.00	1.3E+1	1.01	1.0E+1	1.01
2^{-7}	3.9E-0	1.00	0.9E-0	1.00	6.3E-0	1.00	5.1E-0	1.00

表 9 数值 L^2 和 H^1 方程（55）的多重解误差，$s = 1600$ 见图 10。

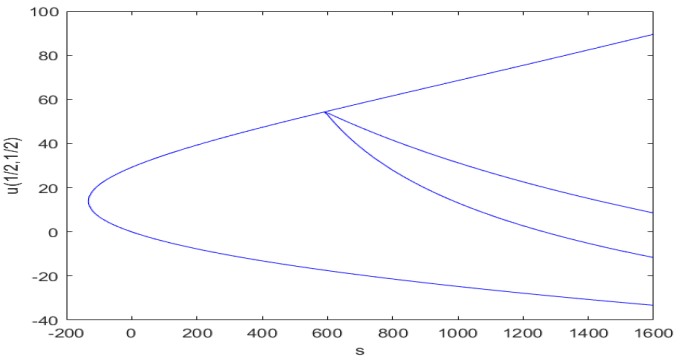


图 11 分　　方程（55）解的岔分图，关于　　s。

$\Omega = (0,\ 1)\times(0,\ 1)$ 且 $\mathbf{n}$ 是法向量 [18]。该模型的解取决于常数 D_A，D_S，μ和 ρ。在此示例中，我们选择 $D_A = 2.5\times10^{-4}$，$D_S = 5\times10^{-5}$，$\rho = 0.04$和 $\mu = 0.065$。与一维施纳肯伯格模型的示例（54）类似，我们可以将系统修改如下：

$$\begin{cases} D_A\Delta A + D_S\Delta S = (\mu+\rho)A - \rho(1-S), \\ D_S\Delta S = SA^2 - \rho(1-S), \end{cases} \tag{57}$$

由于格雷-斯科特模型中的第一个方程是线性的，我们可以求出 A 关于 S 的表达式，并将其代入第二个方程，从而得到一个单一的多项式方程。在最粗网格（$\ell = 0$）上使用伴随矩阵求解该多项式方程时，我们得到 3^5 个复数解，导致在更细网格上出现大量可能的组合。为了解决这一问题，我们采用了两种方法。第一种方法是保留实解。

以及复数解的实部，并使用线性插值和牛顿法在更细网格上细化它们。该方法在步长 2^{-6}下得到 24 个解，如图 12 所示（忽略旋转）。第二种方法仅保留实解，在 $\ell = 0$ 上得到 1 个解，并在 3^{13} 上得到 $\ell = 1$ 个初始猜测。通过插值和牛顿法，我们在步长 2^{-6}下得到了 88 个解，如图 13 所示（忽略旋转）。如果在滤波条件中使用更大的系数，我们可以得到 187 个解。

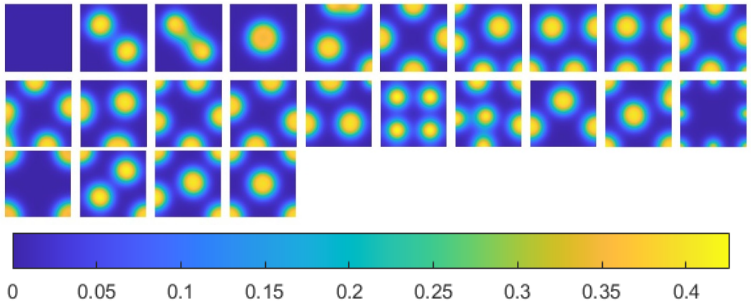


图 12 我们得到 24 个解，但仅绘制 $A(x,\ y)$，这些解来自 57，步长为 2^{-6}。在最粗网格（$\ell = 0$）上，同时考虑实解和复数解的实部，对初始猜测进行了细化。

6 结论

本文提出了一种新颖的方法，即基于伴随的多层有限元方法（CBMFEM），能够高效且准确地生成多个初始猜测，用于求解具有多项式非线性项的非线性椭圆半线性方程。数值结果表明，该方法与理论分析一致，并且对于具有多重解的问题，CBMFEM 的性能优于现有方法。

此外，CBMFEM 有望应用于具有多项式非线性项的更复杂偏微分方程。为了推广我们的方法，还需要进一步研究，以确定更优的筛选条件常数和更优的非线性求解器。在未来的工作中，我们将引入多重网格法，以加快牛顿法的速度，从而进一步提高该方法的效率。总体而言，CBMFEM 是一种很有前景的方法，可用于求解具有多重解的椭圆型偏微分方程，我们将把它应用于科学与工程领域中的广泛问题。

数据可用性由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

声明 WH 和 SL 得到美国国立卫生研究院资助，资助编号为 1R35GM146894。YL 得到美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS 2208499。不存在利益冲突。

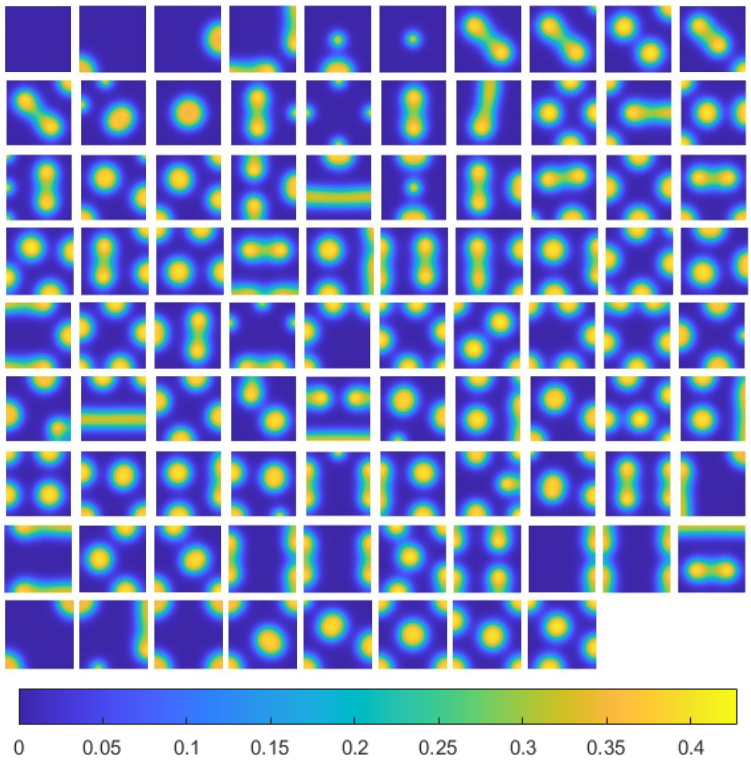


图13 我们有88个解，仅绘制 $A(x,\ y)$（取自（57），步长为 2^{-6}。通过仅考虑 $\ell = 1$ 网格上的实解，对初始猜测进行了细化。

参考文献

1. Ivo Babuska. 关于有限元方法数学基础的综述讲座。 *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applicaions to Partial Differential Equations* 3 359, 1972 ，页码–。2.

Achi Brandt 和 Oren E Livne. *Multigrid Techniques: 1984 Guide with Applications to Fluid Dynamics Revised Edition* 2011 ，。SIAM，。

3. Susanne C Brenner 和 Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods* 15 2008 ，第 卷。

Springer Science & Business Media，。4. B Breuer、P Joseph McKenna 和 Michael Plum. 半线性边值问题的多重解：计算重数证明。 *Journal of Differential Equations* 195 1 243 269, 2003 ，（）：–。

5. Mingchao Cai、Mo Mu 和 Jinchao Xu. 通过双网格方法求解混合 Navier–Stokes/Darcy 模型。 *SIAM Journal on Numerical Analysis*，47 5 3325（）：–3338，2009年。6. ChuanMiao Chen 和 ZiQing Xie. 求解非线性问题多重解的搜索扩展方法分析。 *Science in China Series A: Mathematics*，51 1 42 54，2008（）：–。7. Long Chen、Xiaozhe Hu 和 Steven Wise. 凸优化问题快速子空间下降方法的收敛性分析。 *Mathematics of Computation*，2020年。8. Xianjin Chen 和 Jianxin Zhou. 关于计算 Henon 方程多重解的同伦延拓方法。 *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal* 24 3 728 748, 2008 ，（）：–。

9. YS Choi、PJ McKenna 和 M Romano。用于半线性波动方程数值解的山路方法。 *Numerische Mathematik*，64(1):487–509，1993年。10. Andreas Deutsch 和 Sabine Dormann。 *Mathematical modeling of biological pattern formation* 2005 。施普林格，。

11. Lawrence C Evans。 *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*，第 74 卷。美国数学会，1990年。12. Patrick E Farrell、A Birkisson 和 Simon W Funke。用于寻找非线性偏微分方程不同解的去膨胀技术。 *SIAM Journal on Scientific Computing* 37 4 2026 2045, 2015 ，( ):A –A。

13. Alessio Figalli。 *The Monge–Ampère equation and its applications*。2017年。14. Philippe Grandcl´ement 和 J´erˆome Novak。用于数值相对论的谱方法。*Living Reviews in Relativity*，12:1–103，2009年。15. Cristian E Guti´errez 和 Haim Brezis。 *The Monge-Ampere equation*，第 44 卷。施普林格，2001年。16. Wenrui Hao、Jonathan D Hauenstein、Bei Hu 和 Andrew J Sommese。用于计算微分方程多重解的自举方法。 *Journal of Computational and Applied Mathematics* 258 181 190, 2014 ，: –。17.

Wenrui Hao、Jan Hesthaven、Guang Lin 和 Bin Zheng。采用自适应基选择的同伦方法，用于计算微分方程的多重解。 *Journal of Scientific Computing* 82 1 17, 2020 ，: –。18.

Wenrui Hao 和 Chuan Xue。反应扩散模型中的空间图案形成：一种计算方法。 *Journal of Mathematical Biology*，80:521–543，2020年。19. Wenrui Hao 和 Chunyue Zheng。用于计算非线性参数系统分岔的自适应同伦方法。 *Journal of Scientific Computing* 82 3 1 19, ，( ): –。20. 2020

Van Henson 等。非线性问题的多重网格方法：综述。 *Computational Imaging* 5016 36 48, 2003 ，: –。21.

Peiqi Huang、Mingchao Cai 和 Feng Wang。基于牛顿型线性化的双网格方法，用于耦合流体流动与多孔介质流动。 *Applied Numerical Mathematics*，106 182: –198，2016年。22. Douglas Samuel Jones、Michael Plank 和 Brian D Sleeman。 *Differential equations and mathematical biology* 2009 。CRC出版社，。

23. Todd Kapitula、Panayotis G Kevrekidis 和 Bj¨orn Sandstede。通过无限维哈密顿系统中的克赖因指标计算特征值。 *Physica D: Nonlinear Phenomena* 195 3 4 263 282, 2004 ，(-): –。24.

Panayotis G Kevrekidis、Dimitri J Frantzeskakis 和 Ricardo Carretero-Gonz´alez。 *The defocusing nonlinear Schrödinger equation: from dark solitons to vortices and vortex rings* 2015 。SIAM，。

25. J Lega、JV Moloney 和 AC Newell。用于激光器的 Swift–Hohenberg 方程。 *Physical review letters* 73 22 2978, 1994 ，( ):。26.

Dmitriy Leykekhman 和 李步扬。混合边界条件下有限元 Ritz 投影的最大范数稳定性。 *Calcolo*，54(2):541–565，2017年。27. 李步扬。在非凸多边形及局部加密网格上，诺伊曼问题有限元方法的最大范数稳定性。 *Mathematics of Computation*，91 336 1533( ): –1585，2022年。28. 李兆祥、Zhi-Qiang Wang 和 Jianxin Zhou。用于寻找更多解的一种新的增广奇异变换及其部分牛顿校正法。 *Journal of Scientific Computing* 71 634 659, 2017 ，: –。29.

John M Neuberger 和 James W Swift。半线性椭圆型偏微分方程的牛顿法与莫尔斯指标。 *International Journal of Bifurcation and Chaos*，11(03):801–820，2001年。30. Paul H Rabinowitz 等。*differential equations* 65 *Minimax methods in critical point theory with applications to* 1986 。编号。

美国数学会，。31. Alfred Schatz 和 王俊平。具有最小正则性假设的 Ritz–Galerkin 方法的一些新误差估计。 *Mathematics of computation*，65(213):19–27，1996年。32. Alfred H Schatz。关于具有不定双线性型的 Ritz–Galerkin 方法的一个观察。 *Mathematics of Computation*，28(128):959–962，1974年。33. Horatiu Simon。一维单组分和双组分反应扩散系统的集中现象。 *Journal of Physics A: Mathematical and General*，28(23):6585，1995年。

Elliptic Partial Differential Equations: Volume 2: Reaction-Diffusion 34. Vitaly Volpert。*Equations* 104 2014 ,

第 卷。施普林格，。35. Changchun Wang 和 Jianxin Zhou。数值求解非线性特征解问题的一种新方法。 *Journal of Scientific Computing*，64(1):109–129，2015年。36. Yingwei Wang、Wenrui Hao 和 Guang Lin。具有多重解的非线性椭圆方程的两层谱方法。 *SIAM Journal on Scientific Computing*，40 4 1180( ): B –B1205，2018年。37. Zhi-Qiang Wang 和 Jianxin Zhou。利用局部极小极大牛顿法寻找具有对称性的多个鞍点。 *SIAM journal on numerical analysis* 42 4 1745 1759, , ( ): –。38. 2004 Juncheng Wei 和 Matthias Winter。 *Mathematical aspects of pattern formation in biological systems* 189 2013 ，第 卷。Springer Science & Business Media，。39. Ziqing Xie、Yongjun Yuan 和 Jianxin Zhou。关于奇异摄动诺伊曼问题多重解的求解。 *SIAM Journal on Scientific Computing* 34 1 395 420, , ( ):A – A。40. Ziqing Xie、Yongjun Yuan 和 Jianxin Zhou。关于求解半线性奇异摄动诺伊曼问题的多重解。 2012 *SIAM Journal on Scientific Computing*，44 1 501( ):A –A523，2022年。41. Jinchao Xu。半线性椭圆方程的一种新型双网格方法。 *SIAM Journal on Scientific Computing* 15 1 231 237, 1994 ，( ): –。42. Jinchao Xu。线性与非线性偏微分方程的双网格离散技术。 *SIAM journal on numerical analysis* 33 5 1759 1777, 1996 ，( ): –。43. Xuefeng Xu 和 Chen-Song Zhang。非精确双网格方法收敛性的一种新分析框架。 *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*，43 1 512( ): –533，2022年。44. Xinyue Evelyn Zhao、Long-Qing Chen、Wenrui Hao 和 Yanxiang Zhao。分岔分析揭示了相场模型的解结构。 *Communications on Applied Mathematics and Computation* 1 26, 2022 ，页码 –。