arXiv:2305.04167v1 [math.OA] 7 May 2023

与拟格序群胚上的乘积系统相关的 Cuntz-Nica-Pimsner 代数

FEIFEI MIAO、LIGUANG WANG、WEI YUAN

摘要。我们刻画了拟格序群胚上紧对齐乘积系统的 Cuntz-Nica-Pimsner代数。我们证明，在某些条件下，由 Morita等价双模构成的 Fell丛的全截面 C^* 代数与相关的 Cuntz-Nica-Pimsner代数同构。

1. 引言

一类C^*代数后来被称为 Cuntz-Krieger代数，由 Cuntz 和 Krieger 在 [2] 和 [3]中引入。此后，Cuntz-Krieger代数出现了许多推广。在 [17],中，Pimsner 研究了一类与 C*-对应相关的C^*代数，这类代数也推广了 Cuntz-Krieger代数。Katsura [10]进一步完善了 Pimsner 的工作。Katsura 构造的 C*代数后来被称为 Cuntz-Pimsner代数。

从另一个角度看，Fowler 推广了 Pimsner 的工作，研究了定向拟格序群 [7] 上正则乘积系统的 C*- 对应所关联的 C^*- 代数。基于 Nica [16] 以及 Laca 和 Raeburn [12], 的工作，Fowler 引入了乘积系统的 Nica 协变 Toeplitz 表示，以及紧对齐乘积系统的 Cuntz-Pimsner 协变 Toeplitz 表示的概念。此外，他还描述了分别作为 Nica 协变 Toeplitz 表示的普适代数的 Nica-Toeplitz 代数，以及作为 Cuntz-Pimsner 协变 Toeplitz 表示的普适代数的 Cuntz-Pimsner代数。然而，对于非单射 C^*-对应的乘积系统，何种代数应当是 Cuntz 代数的恰当类比尚不明确，这个问题长期悬而未决。最终，Sims 和 Yeend 在某些条件下，描述了拟格序群上的一些乘积系统所对应的 Cuntz-Nica-Pimsner代数 [20]。Cuntz-Nica-Pimsner代数是 Cuntz-Nica-Pimsner协变表示的普适代数；这些表示在 Fowler 意义下是 Nica 协变的，并满足 Cuntz-Pimsner 协变条件，而这些条件是 Fowler 的 Cuntz-Pimsner 协变条件的推广。

此外，还有另一类余泛的 Cuntz-Pimsner代数。这类 C*代数由 Carlsen、Larsen、Sims 和 Vittadello 在 [1] 中引入，并且在某些

2010 数学学科分类。46L05。关键词和短语。Cuntz-Nica-Pimsner代数；乘积系统；拟格序群胚。Wang部分获得中国国家自然科学基金（编号：11871303、11971463、11671133）和山东省自然科学基金（编号：ZR2019MA039、ZR2020MA008）的资助。Yuan部分获得中国国家自然科学基金（编号：11871303、11871127、11971463）的资助。

条件下，对于乘积系统的单射、Nica 协变、规范相容表示，它们具有余泛性。 [1] 中证明，某些乘积系统的余泛 Cuntz-Pimsner代数和 Cuntz-Nica-Pimsner 代数，分别是群作用下约化交叉积和满交叉积的推广。在后续工作中，Dor-On、Kakariadis、Katsoulis、Laca 和 Li[5] 推广了 Dor-On 和 Katsoulis 的结果 [4]，并证明紧对齐乘积系统在可嵌入群的右 LCM 半群上存在余泛代数。受上述结果启发，我们在 [14]中引入了拟格序群胚上的乘积系统这一概念，并证明拟格序群胚上的紧对齐乘积系统的余泛代数确实存在。

本文将描述拟格序群胚上某些紧对齐乘积系统的 Cuntz-Nica-Pimsner代数，这些代数是单射 Cuntz-Nica-Pimsner协变表示的泛代数。

本文组织如下。第 2 节回顾后文将用到的术语和基本结果。第 3 节为 Toeplitz 表示引入 Cuntz-Pimsner 条件，并研究拟格序群胚上紧对齐乘积系统的 Cuntz-Nica-Pimsner表示。第 4 节证明，当拟格序群胚上 Fell丛的各纤维均为 Morita 等价双模时，该 Fell丛的全截面 C^* 代数与相应乘积系统的 Cuntz-Nica-Pimsner代数同构。

2. 预备知识

2.1. C^*-对应。 设 $\mathcal{B}$ 为一个 C*-代数，且X 为右 Hilbert $\mathcal{B}$-模（见 [13]）。我们用 $\mathcal{L}(X)$（分别用 $\mathcal{K}(X)$）表示X上所有可伴随（分别为紧）算子构成的 C*-代数。

定义 2.1. 对于 C^* 代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ C^* 对应是一个右 *Hilbert* $\mathcal{B}$-模 X，并配有由非退化的 $*$-同态 $\phi:\ \mathcal{A}\ \to\ \mathcal{L}(X)$ 所诱导的左 $\mathcal{A}$-作用，即 $\mathcal{A}\cdot X:=\text{span}\{\phi(a)\xi:a\ \in\mathcal{A},\xi\in X\}=X$。

为简化记号，下文将 $\phi(a)\xi$ 记作 $a\xi$。

定义 2.2。 两个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ C^*-对应 X 和 Y 之间的双模映射 $F:X\ \to Y$ 称为 C^*-对应映射，如果

$$\langle\xi,\beta\rangle_{\mathcal{B}}=\langle F(\xi),F(\beta)\rangle_{\mathcal{B}}$$

对于所有 $\xi,\beta\in X$。C^*-对应映射如果是酉算子，则称为 C^*-对应同构。

注 2.1。 两个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ C^*-对应 X 和 Y 之间的 C^*-对应映射通常不是可伴随的。例如，设 Ω 是一个紧豪斯多夫空间，Ω_0 是 Ω 的一个非空闭子集，且其补集在 Ω中稠密。那么

$$X:=\{f\in C(\Omega):f(\Omega_0)=0\}$$

是 C^* 的一个非含幺子代数，且包含于 $C(\Omega)$ 中。显然，X 和 $C(\Omega)$ 均为 $C(\Omega)$-$C(\Omega)$ C^*-对应，具有典范结构。并且包含映射 $F: X \to Y$ 是一个 C^*-对应映射。但 F 不是可伴随的，因为若 F^* 存在，则必须将 $1_{C(\Omega)}$ 映射到 X 的单位元。

设X 是一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ C*-对应，且Y 是一个 $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$ C*-对应，其中 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 是 C*-代数。 $\mathcal{B}$-平衡张量积 $X \odot_{\mathcal{B}} Y$ 连同右 $\mathcal{C}$作用

$$(\xi \odot \eta) \cdot c = \xi \odot \eta \cdot c$$

以及 $\mathcal{C}$值内积

$$\langle \xi_1 \odot \eta_1, \xi_2 \odot \eta_2 \rangle_{\mathcal{C}} := \langle \eta_1, \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{B}} \eta_2 \rangle_{\mathcal{C}}$$

对于 ξ、 ξ_1、 $\xi_2 \in X$， η、 η_1、 $\eta_2 \in Y$，构成一个预希尔伯特右 $\mathcal{C}$模。我们用 $X \otimes_{\mathcal{B}} Y$ 表示 $X \odot_{\mathcal{B}} Y$的完备化。那么， $X \otimes_{\mathcal{B}} Y$ 是一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$ C*-对应。

定义 2.3。 若一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ C^*-对应 X 配备左$\mathcal{A}$值内积 ${}_{\mathcal{A}}\langle \cdot, \cdot \rangle$ ，使得左 $\mathcal{A}$模 X 连同 ${}_{\mathcal{A}}\langle \cdot, \cdot \rangle$ 构成左希尔伯特 $\mathcal{A}$模，则称其为希尔伯特 C^* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-双模，并且

$${}_{\mathcal{A}}\langle \xi, \eta \rangle \zeta = \xi \langle \eta, \zeta \rangle_{\mathcal{B}}, \quad \forall \xi, \eta, \zeta \in X.$$

此外，若 ${}_{\mathcal{A}}\langle X, X \rangle$ 和 $\langle X, X \rangle_{\mathcal{B}}$ 分别在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中稠密，则称 X 为 *Morita*等价双模。

2.2. 拟格序群胚上的乘积系统。设 G 是一个小范畴。我们用 Ob(G) 表示 G 中对象的集合，并用 G(x, y) 表示 G 中源为 x、目标为 y 的态射集合。令 G(–, –) 表示 G 中态射的集合。对于每个 x, y $\in$ Ob(G)，我们用 G(x, –)（分别用 G(–, y)）表示 G 中源为 x（分别为目标为 y）的态射集合。对于 f $\in$ G(–, –)，我们用 s(f)（分别用 t(f)）表示 f 的源（分别为目标）。对于 x $\in$ Ob(G)，我们用 1_x 表示 x 的恒等态射。离散群胚是指其中每个态射都可逆的范畴（关于范畴论的基本介绍，请读者参阅 [18] ）。

定义 2.4 ([14]). 拟格序群胚是一个二元组(G,P)，其中 G 是离散群胚，P 是 G 的宽子范畴，即 $\mathrm{Ob}(P) = \mathrm{Ob}(G)$，并且满足

(1) 对每个 $x,y \in \mathrm{Ob}(P)$,

$$P(x,y) \cap P^{-1}(x,y) = \begin{cases} \emptyset, & \text{if } x \neq y; \\ 1_x, & \text{if } x = y, \end{cases}$$

其中 $P^{-1}(x,y) := \{f^{-1} : f \in P(y,x)\}$; *(2)* 在偏序 $f \leq g \iff f^{-1}g \in P$ 下，对于 $G, g \in G(-,-)$ 中任何有 P 中上界的有限态射集，都在 P 中有一个最小上界。

例 2.2 ([14]). 设(G',P') 是一个拟格序群。

(1) 注意，G' 是一个仅有一个对象的群胚，而（G'， P'）是一个拟格序群胚。

（2）设 X 是一个 G'-集，G' 作用于 X。变换群胚 G 是一个范畴，其对象（G）$=X$，且 G（x，y）$=\{g \in G' : g \cdot x = y\}$（见 [19]中的例 *8.1.15*）。设 P 是 G 的宽子范畴，满足 P（x，y）$=\{g \in P' : g \cdot x = y\}$。回顾一下，$P' \cap P'^{-1} = \{e\}$，其中 e 是 G'的单位元。于是（G，P）是一个拟格序群胚。

本文余下部分中，我们假设(G, P) 是一个拟格序群胚。对于f、$g \in G(-,-)$，若它们在P中有共同上界，则用$f \vee g$或 $\vee\{f, g\}$ 表示它们的最小上界。否则，记作$f \vee g = \infty$。

定义 2.5. *(G, P)*上的乘积系统是一个三元组

$$(\{\mathcal{A}_x\}_{x\in Ob(P)}, \{X_f\}_{f\in P(-,-)}, \{m_{g,f}\}_{\{(g,f)\in P(-,-):t(f)=s(g)\}}),$$

其中 $\mathcal{A}_x$是一个C^*代数，X_f是一个$\mathcal{A}_{t(f)}$-$\mathcal{A}_{s(f)}$ C^*对应，并且$m_{g,f}$是从$X_g \otimes_{\mathcal{A}_{t(f)}} X_f$到$X_{gf}$的$C^*$对应同构，满足以下公理：

(1) 对每个$x \in \mathrm{Ob}(P)$，$X_{1_x} = \mathcal{A}_x$；*(2)* 对于$f \in P(w,x)$，$a \in \mathcal{A}_x$、$b \in \mathcal{A}_w$, $\xi \in X_f$，$m_{1_x, f}(a \otimes_{\mathcal{A}_x} \xi) = a\xi$，且$m_{f,1_w}(\xi \otimes_{\mathcal{A}_w} b) = \xi b$；*(3)* 对每个$f \in P(w,x)$、$g \in P(x,y)$、$h \in P(y,z)$，下图

$$\begin{array}{ccc} X_h \otimes_{\mathcal{A}_y} X_g \otimes_{\mathcal{A}_x} X_f & \xrightarrow{m_{h,g}\otimes_{\mathcal{A}_x} I_{X_f}} & X_{hg} \otimes_{\mathcal{A}_x} X_f \\ \downarrow{\scriptstyle I_{X_h}\otimes_{\mathcal{A}_y} m_{g,f}} & & \downarrow{\scriptstyle m_{hg,f}} \\ X_h \otimes_{\mathcal{A}_y} X_{gf} & \xrightarrow{m_{h,gf}} & X_{hgf} \end{array}$$

可交换。

下文将$(\{\mathcal{A}_x\}_{x\in Ob(P)}, \{X_f\}_{f\in P(-,-)}, \{m_{g,f}\})$记作$(\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$，并将$m_{g,f}(\xi_g \otimes_{\mathcal{A}_{s(f)}} \eta_f)$记作 $\xi_g\eta_f$。

对于$f, g \in P(-,-)$，存在一个 $*$-同态l^g_f: $\mathcal{L}(X_f) \to \mathcal{L}(X_g)$，定义如下：

$$l^g_f(A) := \begin{cases} m_{f,f^{-1}g}(A \otimes_{\mathcal{A}_{s(f)}} I)m^*_{f,f^{-1}g}, & \text{if } f \le g; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $A \in \mathcal{L}(X_f)$。通过将 $\mathcal{K}(X_{1_{t(g)}})$ 与 $\mathcal{A}_{t(g)}$ 等同，我们由定义 2.5 中的条件 (2) 得到 $l^g_{1_{t(g)}}(a)(\xi_g) = a\xi_g$，对 $\xi_g \in X_g, a \in \mathcal{A}_{t(g)}$成立。

定义 *2.6.* 若乘积系统 $X = (\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 在 *(G, P)* 上满足：对于每个 $S \in \mathcal{K}(X_f)$、$T \in \mathcal{K}(X_g)$ 以及满足 $f \vee g < \infty$ 的 $f, g \in P(-,-)$，$S \vee T := l^f_{f\vee g}(S) l^g_{f\vee g}(T)$ 都是紧算子，即 $S \vee T \in \mathcal{K}(X_{f\vee g})$，则称其为紧对齐。

2.3. **拟格序群胚上的乘积系统的表示。**

定义 2.7。 设 $(\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$是定义在$(G,P)$上的乘积系统。$\{\mathcal{A}_x\}(\{\mathcal{A}_x\}, \{Xf\})$的 *Toeplitz*表示是一族线性映射 $\{\psi_f : X_f \to \mathcal{B}\}f \in P(-,-)$，其中 $\mathcal{B}$ 是一个 C^*代数，并且满足

(1) ψ_{1_x}： $\mathcal{A}_x \to \mathcal{B}$ 对于每个 $x \in \mathrm{Ob}(P)$，都是一个 $*$-同态；4

(2) $\psi_g(\beta)\psi_f(\xi) = \psi_{gf}(\beta\xi)$ 对每个 $\beta \in X_g, \xi \in X_f, g, f \in P(-,-)$ 均成立，且 $s(g) = t(f)$；*(3)* $\psi_f(\eta)^*\psi_f(\xi) = \psi_{1_{s(f)}}(\langle \eta, \xi\rangle_{\mathcal{A}_{s(f)}})$ 对于 $\xi, \eta \in X_f, f \in P(-,-)$。

设 $\psi = \{\psi_f : X_f \to \mathcal{B}\}_{f\in P(-,-)}$ 是 $(\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 的 Toeplitz表示。定义 2.7 中的条件 (3) 表明，对于每个 $f \in P(-,-)$， ψ_f 都是一个压缩算子。若 $\psi_{1_{s(f)}}$ 是单射，则 ψ_f 是等距的。若对于所有 $x \in \mathrm{Ob}(P)$， ψ_{1_x} 都是单射，则称 ψ 是单射。

除非另有说明，以下始终假设 $X = (\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 是 (G, P) 上的紧密对齐乘积系统。对于 X 的 Toeplitz表示 $\psi = \{\psi_f : X_f \to \mathcal{B}\}_{f\in P(-,-)}$，存在 $*$-同态 $\psi^{(1)} : \mathcal{K}(X_f) \to \mathcal{B}$，使得 $\psi^{(1)}(\theta_{\xi,\eta}) = \psi_f(\xi)\psi_f(\eta)^*$，其中 $\theta_{\xi,\eta}$ 是 $\mathcal{K}(X_f)$ 中的秩一算子 $\xi\langle\eta, -\rangle_{\mathcal{A}_{s(f)}}$（参见 [17, 第 202], [9, 页、引理 2.2] 和注 1.7]）。在下文中，我们采用约定 $\psi^\infty \equiv 0$。

定义 2.8。 *A Toeplitz*表示 $\psi = \{\psi_f\}_{f\in P(-,-)}$ 若满足以下条件，则称为 $(\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 的 *Nica* 协变表示：

$$\psi^{(f)}(S)\psi^{(g)}(T) = \psi^{(f\vee g)}(S \vee T),$$

对每个 $f, g \in P(-,-)$、$S \in \mathcal{K}(X_f)$ 和 $T \in \mathcal{K}(X_g)$ 均成立。

注记 2.3 (见 [14])。 设 ψ 是 $(\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 的 *Nica*协变*Toeplitz*表示。对 $f, g \in P(-,-)$，$\xi_f \in X_f$，$\eta_g \in X_g$，

(1) if $s(f) \neq t(g)$, *then* $\psi_f(\xi_f)\psi_g(\eta_g) = 0$;

(2) if $f \vee g < \infty$, *then* $\psi_f(\xi_f)^*\psi_g(\eta_g) \in \overline{\mathrm{span}}\{\psi_{f^{-1}(f\vee g)}(\xi')\psi_{g^{-1}(f\vee g)}(\eta')^* : \xi' \in X_{f^{-1}(f\vee g)}, \eta' \in X_{g^{-1}(f\vee g)}\}$. *Otherwise,* $\psi_f(\xi_f)^*\psi_g(\eta_g) = 0$.

设 $\psi = \{\psi_f\}_{f\in P(-,-)}$ 是 X 的 Nica 协变Toeplitz表示。下文中，我们用 $C^*(\psi)$ 表示由 ψ 的像生成的 C^*-代数。由注记 2.3 可知

$$C^*(\psi) = \overline{\mathrm{span}}\{\psi_f(\xi_f)\psi_g(\eta_g)^* : f, g \in P(-,-), \xi_f \in X_f, \eta_g \in X_g\}. \tag{1}$$

例2.4 (Fock表示)。 设 $X = (\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 是定义在 (G,P) 上的紧密对齐乘积系统。我们用 $C_c(X)$ 表示映射的集合

$$\xi : P(-,-) \to \cup_{f\in P(-,-)} X_f$$

具有有限支撑，使得 $\xi(f) \in X_f$。类似地，$C_c(\{\mathcal{A}_x\}_{x\in \mathrm{Ob}(P)})$ 是映射 $\beta : Ob(P) \to \cup_{x\in \mathrm{Ob}(P)}\mathcal{A}_x$ 的集合，具有有限支撑，使得 $\beta(x) \in \mathcal{A}_x$。令 $C_0(\{\mathcal{A}_x\})$ 表示 $C_c(\{\mathcal{A}_x\})$ 关于上确界范数的完备化。注意，$C_0(\{\mathcal{A}_x\})$ 是一个 C^*-代数，而 $C_c(X)$ 连同右侧的 $C_0(\{\mathcal{A}_x\})$-作用及 $C_0(\{\mathcal{A}_x\})$-值内积

$$[\xi\cdot\beta](f) := \xi(f)\cdot\beta(s(f)), \quad \langle\xi,\eta\rangle_{C_0(\{\mathcal{A}_x\})}(x) := \sum_{f\in P(x,-)}\langle\xi(f), \eta(f)\rangle_{\mathcal{A}_x},$$

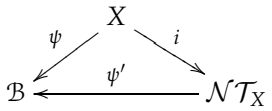
是 C_0（$\{\mathcal{A}_x\}$）上的预希尔伯特右模。*Fock*空间 $\mathscr{F}$（X）是 C_c（X）的完备化。X 的 *Fock*表示 $\{\eta_g \mapsto L^{\eta_g} : X_g \to \mathcal{L}(\mathscr{F}(X))\}_{g\in P(-,-)}$ 定义为

$$(L_{\eta_g}\xi)(f) = \begin{cases} \eta_g\xi(g^{-1}f), & g \le f; \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

*Fock*表示是 X 的 *Nica*协变*Toeplitz*表示。*Fock*代数 $\mathcal{T}_X^r$ 是由 X 的 *Fock*表示的像生成的 C^*-代数（更多详情请参见 [14]）。

X 的 Nica-Toeplitz 代数是一个 C*-代数 $\mathcal{NT}_X$，配备了一个 Nica协变Toeplitz表示 $i = \{i_f : X_f \to \mathcal{NT}_X\}_{f\in P(-,-)}$，满足

(1) $\mathcal{NT}_X = C^*(i)$；(2) i 是普适的，意即对于任意其他 Nica 协变Toeplitz表示 $\psi : X \to \mathcal{B}$，存在唯一的 $*$-同态 $\psi' : \mathcal{NT}_X \to \mathcal{B}$，使下图表交换



交换的。

2.4. **Fell丛的全截面 C**C^***-代数** $C^*(\mathfrak{B})$ $\mathfrak{B}$。

设 $\{\mathfrak{B}_f\}_{f\in G(-,-)}$ 是离散群胚 G 上的一个 Banach 丛（参见 [6,定义 13.4]）。为方便起见，我们将 $\mathfrak{B}_{1_x}$ 记作 $\mathfrak{B}_x$。$\{\mathfrak{B}_f\}_{f\in G(-,-)}$ 上的一个乘法是由连续双线性映射构成的一个族。

$$\{\mathfrak{B}_f \times \mathfrak{B}_g \to \mathfrak{B}_{fg}\}_{(f,g)\in G(-,-)^2, s(f)=t(g)}$$

使得

(1) $(\xi_f\eta_g)\zeta_h = \xi_f(\eta_g\zeta_h)$ 只要乘法有定义；

(2) 对所有 $\xi_f \in \mathfrak{B}_f, \eta_g \in \mathfrak{B}_g, f, g \in G(-,-)$，$s(f) = t(g)$。

An $\{\mathfrak{B}_f\}$ 上的反演映射$_{f\in G(-,-)}$是由连续的对合共轭线性映射组成的一个族 ma ps

$$\xi_f \mapsto \xi_f^* : \mathfrak{B}_f \to \mathfrak{B}_{f^{-1}}, \quad f \in G(-,-), \xi_f \in \mathfrak{B}_f.$$

定义 2.9 ([11])。 离散群胚 G 上的 *Fell*丛是一个 *Banach* 丛 $\{\mathfrak{B}_g\}_{g\in G(-,-)}$，配备了乘法和对合，使得对于 f，$g \in G(-,-)$，$\xi f \in \mathfrak{B}_f$，$\eta_g \in \mathfrak{B}_g$ 满足 $s(f) = t(g)$，

$$(\xi_f\eta_g)^* = \eta_g^*\xi_f^*, \quad \|\xi_f^*\xi_f\| = \|\xi_f\|^2,$$

且 $\xi^* f \xi f$ 是 C^*-代数 $\mathfrak{B}_{s(f)}$ 的正元。

在本小节余下部分，我们假设 $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_f\}_{f\in G(-,-)}$ 是离散群胚 G 上的 Fell丛。

注 2.5. 对于每个 $f \in G(-,-)$，$\mathfrak{B}_f$ 连同内积

$$\langle \xi_f, \eta_f\rangle_{\mathfrak{B}_{s(f)}} := \xi_f^*\eta_f, \quad {}_{\mathfrak{B}_{t(f)}}\langle \xi_f, \eta_f\rangle := \xi_f\eta_f^*$$

是一个 *Hilbert* C^* $\mathfrak{B}_{t(f)}$-$\mathfrak{B}_{s(f)}$-双模。并且 $\mathfrak{B}^* f = \mathfrak{B}_{f^{-1}}$。

定义 2.10 ([14])。 $\mathfrak{B}$ 在 C^*-代数 $\mathcal{C}$ 中的表示是一组线性映射 $\pi = \{\pi_g : \mathfrak{B}_g \to \mathcal{C}\}_{g\in G(-,-)}$，使得

(1)$\pi_f(\xi_f)\ \pi_g(\eta_g)=\delta_{s(f),t(g)}\pi_{fg}(\xi_f\,\eta_g)$;
(2) $\pi_g(\eta_g)^* = \pi_{g^{-1}}(\eta^* g)$,

对于所有 $f,g \in G(-,-)$, $\xi f \in \mathfrak{B}_f$, $\eta_g \in \mathfrak{B}_g$。

回忆一下，$C_c(\mathfrak{B})$ 是 $\mathfrak{B}$ 的有限支集截面的集合，即由有限支撑的映射 $\xi : G(-,-) \to \cup_{g\in G(-,-)}\mathfrak{B}_g$ 组成的族，满足 $\xi(g)\in\mathfrak{B}_g$。那么，$C_c(\mathfrak{B})$ 连同乘法和对合

$$\xi\eta(h) := \sum_{h=fg} \xi(f)\eta(g), \quad \xi^*(f) := \xi(f^{-1})^*$$

是一个 $*$-代数（更多详情请见 [14] ）。

定义 2.11 ([14])。 $\mathfrak{B}$ 的全截面 C^*-代数 $C^*(\mathfrak{B})$ 是 $C_c(\mathfrak{B})$ 关于范数的完备化

$$\|\xi\|_u := sup_\pi\{\|\pi(\xi)\| : \pi \ \textit{is the } *\textit{-representation of } C_c(\mathfrak{B})\},$$

其中 $\xi \in C_c$（$\mathfrak{B}$）。

$\mathfrak{B}$ 在 C*-代数中的表示与从 $C_c(\mathfrak{B})$ 到 C*-代数的 $*$-同态一一对应。因此，$C^*(\mathfrak{B})$ 是由泛表示 $\pi^u = \{\pi^u_g\}$ （ $\mathfrak{B}$ 在 C*-代数中的表示）像生成的 C*-代数，具体而言，若 $\pi = \{\pi_g\}_{g\in G(-,-)}$ 是 $\mathfrak{B}$ 在 C*-代数 $\mathcal{B}$中的表示，则存在唯一的 $*$-同态 $\hat{\pi} : C^*(\mathfrak{B}) \to \mathcal{B}$，使得对所有 $g \in G(-,-)$ 和 $\xi_g \in \mathfrak{B}_g$，均有$\hat{\pi}\circ\pi^u_g(\xi_g) = \pi_g(\xi_g)$。

3. 拟格序群胚上乘积系统的 Cuntz-Nica-Pimsner代数

设 $X = (\{\mathcal{A}_x\},\{X_f\})$ 是定义在(G,P)上的紧密对齐乘积系统。对于$g \in P(x,y)$，令 t

$$I_g := \begin{cases} \mathcal{A}_y & x = y \text{ and } g = 1_y; \\ \cap_{1_y<f\leqslant g} \operatorname{Ker}\phi_f & x = y \text{ and } g \neq 1_y; \\ 0 & x \neq y, \end{cases}$$

其中， ϕ_f是 $\mathcal{A}_y$ 在Xf上的左作用。我们用$C_c^g(X)$ 表示映射的集合

$$\xi : \{f \in P(x,y) : f \leq g\} \to \cup_{f\in P(x,y), f\leq g} X_f I_{f^{-1}g}$$

其具有有限支撑，且满足 $\xi(f) \in X_f I_{f^{-1}g}$。注意，$C_c^g(X)$ 连同右 $\mathcal{A}_x$-作用和右 $\mathcal{A}_x$-值内积

$$[\xi\cdot a_x](f) := \xi(f)a_x \ \text{ and } \ \langle\xi,\eta\rangle_{\mathcal{A}_x} = \sum_{f\in P(x,y), f\leq g} \langle\xi(f),\eta(f)\rangle_{\mathcal{A}_x},$$

对于所有 $\xi,\eta \in C_c^g(X)$ 以及 $a_x \in \mathcal{A}_x$，这是一个预希尔伯特右 $\mathcal{A}_x$-模。令 $\tilde{}X_g$ 为$C_c^g(X)$的完备化。我们用 $\widetilde{\phi}_g$ 表示由 ϕ_g诱导的 $\mathcal{A}_y$ 在 $\tilde{}X_g$ 上的左作用。若X 是 $\widetilde{\phi}$-单射的，则称其为 $\tilde{}$；每个 ϕ_g 都是单射。

对于f、$g \in P(-、y)$，令 $\tilde{l}^g_f$: $\mathcal{L}(X_f) \to \mathcal{L}(\tilde{X}_g)$ 为由下式定义的 $*$-同态

$$\tilde{l}^g_f(A)(\xi)(h) := l^h_f(A)(\xi(h)),$$

对于 $A \in L\ (X_f)$, $\xi \in \tilde{X}_g, h \in P(s(g), y)$ 且$h \leqslant g$。特别地，$\tilde{l}^g_{1_y}(a)(\xi) = \tilde{\phi}_g(a)\xi$，对所有$a \in \mathcal{A}_y$.

类似于 [20], 中的定义3.8，我们称命题 $\mathcal{P}(g)$ 对足够大的g 成立，若对于每个$f \in P(-,-)$，都存在$h \in P(-,-)$，使得$h \geqslant f$，从而只要$g \geq h$，命题 $\mathcal{P}(g)$ 就成立。

定义3.1。 假设 X 是 $\tilde{\phi}$-单射的。X 的 *Toeplitz*表示 $\psi = \{\psi_f\}_{f \in P(-,-)}$ 若满足以下条件，则称其为 *Cuntz-Pimsner* 协变的：$\sum_{f \in \mathcal{F}} \psi(f)(T_f) = 0$对于每个$y \in \mathrm{Ob}(P)$、$P(-,y)$的每个有限子集 $\mathcal{F}$，以及每一组紧算子 $\{T_f \in \mathcal{K}(X_f) : f \in \mathcal{F}\}$，只要$\sum_{f \in \mathcal{F}} \tilde{l}^g_f(T_f) = 0$对足够大的 g 成立。

如果一个 *Nica*协变*Toeplitz*表示是 *Cuntz-Pimsner* 协变的，则称其为 *Cuntz-Nica-Pimsner*协变（或 *CNP* 协变）表示。

如果存在 $\in P(-, y)$ 中的 g，使得对于每个 $k \in S$都有$k \leqslant g$，则称非空集合 $S \subseteq P(-, y)$ 有界。如果对于每个$h \in S \setminus \{f\}$，都有$f \not\leqslant h$ （分别为$h \not\leq f$），则称元素$f \in S$ 为极大（分别为极小）元素。

接下来我们将在某些条件下证明X 是 ϕ-单射的。

命题3.1。 （*1*）如果对于所有 $f \in P(-, -)$，ϕ_f 都是单射的，则 X 是 $\tilde{\phi}$-单射的。

（*2*）假设 $P(x, y)$ 的每个非空有界子集都包含一个极大元素，并且对于每个 $k \in P(x, y)$，$\{f \in P(x, y) : f \leq k\}$ 都有一个极小元素 f'，使得 $\phi_{f'}$ 是单射的。则 X 是$\sim\phi$-单射的。

证明。(1) 如果 ϕ_g 对于每个$g \in P(-,-)$都是单射，那么我们可以将 $\tilde{X}_g$ 与X_g等同。因此，$\tilde{\phi}_g$ 是单射。

(2) 设$g \in P(x,y)$ 且 $0 \neq a \in \mathcal{A}_y$。只需证明存在某个$f \leqslant g$，$f \in P(x, y)$，使得 $\phi_f(a)|_{X_f \cdot I_{f^{-1}g}} \neq 0$。设

$$S = \{f \in P(x,y) : f \leqslant g, \phi_f(a) \neq 0\}.$$

由于 $\{f \in P(x, y) : f \leqslant g\}$ 有一个极小元 f'，使得 $\phi_{f'}$是单射，因此 S 非空。设 f_0是 S的一个极大元。那么存在一个 $\xi \in X_{f_0}$，使得 $\phi_{f_0}(a)\xi \neq 0$。如果 $1_x < h \leqslant f_0^{-1}g$，则有$\phi_{f_0}(a) = 0$。对于 $\eta \in X_h$，有

$$\langle \eta, \langle \phi_{f_0}(a)\xi, \phi_{f_0}(a)\xi \rangle_{\mathcal{A}_x} \eta \rangle_{\mathcal{A}_{s(h)}} = \langle (\phi_{f_0}(a)\xi)\eta, (\phi_{f_0}(a)\xi)\eta \rangle_{\mathcal{A}_{s(h)}} = 0.$$

因此 $\langle \phi_{f_0}(a)\xi, \phi_{f_0}(a)\xi \rangle_{\mathcal{A}_x} \in \ker \phi_h$。由此可得 $\langle \phi_{f_0}(a)\xi, \phi_{f_0}(a)\xi \rangle_{\mathcal{A}_x} \in I_{f_0^{-1}g}$。回顾一下，若 X是右 Hilbert $\mathcal{A}$-模，且I 是 $\mathcal{A}$ 的一个理想，则

$$X \cdot I = \{\xi \in X : \langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{A}} \in I\}$$

（见 [20]）。然后 ϕ_{f_0}（a）$\xi \in X_{f_0} I_{f_0^{-1}g}$。假设 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ 是 $I_{f_0^{-1}g}$ 的递增正近似单位。那么

$$0 \neq \phi_{f_0}(a)\xi = \lim_{i \in \mathcal{J}} \phi_{f_0}(a)\xi \cdot e_i.$$

那么存在i_0，使得 $\phi_{f_0}(a)\xi\cdot e_{i_0}\neq 0$。我们有 $\phi_{f_0}(a)|_{X_{f_0}If_0^{-1}g}\neq 0$，因为 $\xi\cdot e_{i_0}\in X_{f_0}If_0^{-1}g$。这就完成了证明。□

对于乘积系统$X=(\{\mathcal{A}_x\},\{X_f\})$的Nica协变Toeplitz表示$\psi=\{\psi_f\}_{f\in P(-,-)}$，令$I_{C^*(\psi)}\subset C^*(\psi)$为由$\cup_{y\in \mathrm{Ob}(P)}I_{C^*(\psi)},_y$生成的闭理想，其中

$$I_{C^*(\psi),y}=\{\sum_{f\in\mathscr{F}}\psi^{(f)}(T_f):\mathscr{F}\ \textit{is a finite set in}\ P(-,y),\\ T_f\in\mathcal{K}(X_f)\ \text{and}\ \sum_{f\in\mathscr{F}}\widetilde{l}_f^g(T_f)=0\ \text{for large}\ g\in P(-,y)\}.$$

令$q_{C^*(\psi)}$为从$C^*(\psi)$到$C^*(\psi)/I_{C^*(\psi)}$的商映射。

引理3.2。沿用上述记号。

$$q_{C^*(\psi)}\circ\psi:=\{q_{C^*(\psi)}\circ\psi_f:X_f\to C^*(\psi)/I_{C^*(\psi)}\}_{f\in P(-,-)}$$

是一个*CNP*协变*Toeplitz*表示。

证明。由于 ψ 是 X 的Nica协变Toeplitz表示，且 $q_{C^*(\psi)}$ 是一个 $*$-同态，因此$q_{C^*(\psi)}\circ\psi$是 X 的Nica协变Toeplitz表示，从而$q_{C^*(\psi)}\circ\psi$是CNP协变的。□

~**引理3.3**。如果 X 是 ϕ-单射的，那么 $q^{\mathcal{T}_X^r}\circ L$ 是单射的，其中 L 是 X 的 *Fock*表示，而 $\mathcal{T}rX=C^*(L)$（见例*2.4*）。

~证明。只需证明对于每个 $y\in \mathrm{Ob(P)}$，都有 $I_{\mathcal{T}_X^r}\cap L_{\mathcal{A}_y}=\{0\}$。注意，$X_g$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 的子模，并且对于 $a\in\mathcal{A}_y$, $\xi\in\ ^{\sim}X_g$，$g\in P(-,y)$，有 $L_a\xi=\widetilde{\phi}_g(a)\xi$。由于 $\widetilde{\phi}_g$ 是单射的，$\|L^a|_{^{\sim}X_g}\|=\|\widetilde{\phi}_g(a)\|=\|a\|$。

我们用 $I^{\mathcal{T}}rX,z$ 表示 $I_{\mathcal{T}}rX,z$ 的闭包。令 $S\in I^{\mathcal{T}}rX,z$，并令 $\xi f\in X_f$, $\eta_k\in X_k$, $\xi' f,\in X f',\eta' k,\in X_{k'}$。我们声称，对于每个 $\epsilon\geq 0$，以及 $g_0\in P(-,y)$，都存在 $\gamma_0\geqslant g_0$，使得$\|L_{\xi f}L^*_{\eta_k}SL_{\xi' f'}L^*_{\eta' k,}|_{^{\sim}X_h}\|\leq\epsilon$对每个 $h\geqslant\gamma_0$都成立。

若 $k'\vee g_0=\infty$，则对于 $h\geqslant g_0,$，有 $h\not\geqslant k'$。因此 $L^*_{\eta' k,}|_{\widetilde{X}_h}=0$。并且

$$L_{\xi_f}L^*_{\eta_k}SL_{\xi'_{f'}}L^*_{\eta'_{k'}}|_{\widetilde{X}_h}=0,\forall h\geqslant g_0.$$

现在假设 $k'\vee g_0<\infty$。若 $f'\notin P(s(k'),z)$，则对于每个 $h\in P(-,-)$，都有 $L_{\xi f}L^*_{\eta_k}SL_{\xi' f'}L^*_{\eta' k,}|_{^{\sim}X_h}=0$。若 $f'\in P(s(k'),z)$，则存在 $\gamma'\geqslant f'k'^{-1}(k'\vee g_0)$，使得

$$\|S|_{\widetilde{X}_{h'}}\|\leq\epsilon/(\|\xi_f\|\|\eta_k\|\|\xi'_{f'}\|\|\eta'_{k'}\|) \tag{2}$$

对于每个$h'\geqslant\gamma'$，因为$S\in I^{\mathcal{T}}{}_{rX,z}$。令 $\gamma_0:=k'f'^{-1}\gamma'(\geqslant g_0)$。那么对于$h\geqslant\gamma_0$，我们有$f'k'^{-1}h\geqslant\gamma'$。因此，式（2）意味着

$$\|L_{\xi_f}L^*_{\eta_k}SL_{\xi'_{f'}}L^*_{\eta'_{k'}}|_{\widetilde{X}_h}\|\leq\|\xi_f\|\|\eta_k\|\|\xi'_{f'}\|\|\eta'_{k'}\|\|S|_{\widetilde{X}_{f'k'^{-1}h}}\|\leq\epsilon,\quad\forall h\geqslant\gamma_0.$$

由于 L 是Nica协变的（见公式(1)），我们有

$$I_{\mathcal{T}_X^r}=\overline{\mathrm{span}}\{L_{\xi_f}L^*_{\eta_k}SL_{\xi'_{f'}}L^*_{\eta'_{k'}}:S\in\cup_{z\in\mathrm{Ob}(P)}\overline{I}_{\mathcal{T}_X^r,z},\xi_f,\eta_k,\xi'_{f'},\eta'_{k'}\in X\}.$$

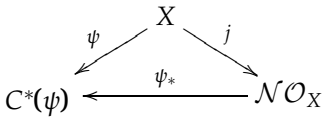
那么上述断言意味着$I_{\mathcal{T}_X^r}\cap L_{\mathcal{A}_y}=\{0\}$。 □

接下来，我们将描述准格序群胚上紧对齐乘积系统的 CNP 协变表示所对应的万有C^*-代数。

定理 3.4. 若 X 是 $\widetilde{\phi}$-单射的，则存在一对 $(\mathcal{NO}_X, j)$ 使得

(1) j 是 X 的单射 *CNP* 协变 *Toeplitz* 表示，且 $C^*(j) = \mathcal{NO}_X$；*(2)* j 是泛的，即，对于 X 的任意 *CNP* 协变表示 $\psi = \{\psi_f\}_{f\in P(-,\,-)}$，存在唯一的

$*$-同态 ψ_*： $\mathcal{NO}X \to C^*(\psi)$，使得下列图表



可交换。

此外，$(\mathcal{NO}_X, j)$ 是满足条件（*1*）和（*2*）的唯一一对（在典范同构意义下）。

证明。设 $(\mathcal{NT}_X, \mathrm{i})$ 是 X 的 Nica-Toeplitz 代数。令 $\mathcal{NO}_X := \mathcal{NT}_X/\mathrm{I}_{\mathcal{NT}_X}$。由引理3.2，$\mathrm{j} := \mathrm{q}_{\mathcal{NT}_X} \circ \mathrm{i}$ 是 X 的 CNP 协变表示，其中 $\mathrm{q}_{\mathcal{NT}_X}$: $\mathcal{NT}_X \to \mathcal{NO}_X$ 是商映射。设 $\psi = \{\psi_f\}$ 是 X 的一个 CNP 协变表示。由 i 的泛性质，存在一个 $*$-同态 ψ': $\mathcal{NT}_X \to \mathrm{C}^*(\psi)$，使得 $\psi = \psi' \circ \mathrm{i}$。由于 ψ 是 Cuntz-Pimsner 协变的，$\mathrm{I}_{\mathcal{NT}_X} \subset \ker(\psi')$。因此，$\psi'$ 诱导出一个 $*$-同态 ψ_*: $\mathcal{NO}_X \to \mathrm{C}^*(\psi)$，使得 $\psi = \psi_* \circ \mathrm{j}$。特别地，由引理3.3可知 j 是单射。由 j 的泛性质，显然 $(\mathcal{NO}_X, \mathrm{j})$ 是满足（1）和（2）的唯一一对（在典范同构意义下）。□

称数对$(\mathcal{NO}_X, j)$ 为X的 Cuntz-Nica-Pimsner代数。这些代数推广了拟格序群上乘积系统的 Cuntz-Nica-Pimsner代数（见 [20, 命题 3.12]）。

4. CUNTZ-NICA-PIMSNER代数是FELL丛满横截C^*-代数的推广

本节中，我们假设$X = (\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 是拟格序群胚(G,P)上的紧密对齐乘积系统。我们将证明，由 Morita等价双模构成的 Fell丛的满横截C^*-代数与相应的 Cuntz-Nica-Pimsner代数同构。为此，我们首先给出 Cuntz-Pimsner 协变表示的一个刻画。

引理 *4.1.* 设 $\psi = \{\psi_f\}f \in P(-,-)$ 是 $X = (\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 的 *Toeplitz*表示。若对于每个$f \in P(-,-)$，有 $\phi_f(\mathcal{A}_{t(f)}) \subseteq \mathcal{K}(X^f)$ 且 $\psi(f)(\phi_f(-)) = \psi_{1_{t(f)}}(-)$，则 $l^g_f(T_f) \in \mathcal{K}(X^g)$，并且

$$\psi^{(g)}(l^g_f(T_f)) = \psi^{(f)}(T_f),$$

对于 $f \leqslant g \in P(-,-)$，$T_f \in \mathcal{K}(X^f)$。

证明。设 $\mathrm{f} \in \mathrm{P}(-,-)$。由于 $\phi_f(\mathcal{A}_{t(\mathrm{f})}) \subseteq \mathcal{K}(\mathrm{X}f)$，根据 [13, 命题 4.7]，对于所有 $\mathrm{g} \geq \mathrm{f}$ 和 $\mathrm{T}_f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}f)$，我们有 $l^g\mathrm{f}(\mathrm{T}f) \in \mathcal{K}(\mathrm{X}g)$。注意

$$\psi^{(f^{-1}g)}(\phi_{f^{-1}g}(-)) = \psi_{1_{s(f)}}(-)$$

对于 $g \geq f$。对于 $\xi, \eta \in Xf$，a，$b \in \mathcal{A}_{s(f)}$，我们有

$$\begin{aligned}\psi^{(f)}(\theta_{\xi a,\eta b}) &= \psi_f(\xi)\psi_{1_{s(f)}}(ab^*)\psi_f(\eta)^* \\ &= \psi_f(\xi)\psi^{(f^{-1}g)}(\phi_{f^{-1}g}(ab^*))\psi_f(\eta)^*.\end{aligned}$$

由 [17, 推论 3.7], 可知，存在 $\xi_i^n, \eta_i^n \in X_{f^{-1}g}$ 使得

$$\phi_{f^{-1}g}(ab^*) = \lim_n \sum_i \theta_{\xi_i^n,\eta_i^n}, \text{ and } l_f^g(\theta_{\xi a,\eta b}) = \lim_n \sum_i \theta_{\xi\xi_i^n,\eta\eta_i^n}.$$

因此，$\psi(f)(\theta_{\xi a,\eta b}) = \psi(g)(l^g f(\theta_{\xi a,\eta b}))$。由于 $\mathcal{K}(Xf)$ 是由秩一紧算子生成的一个 C^*-代数，且 $X_f\mathcal{A}_{s(f)} = Xf$，我们有

$$\psi^{(g)}(l_f^g(T_f)) = \psi^{(f)}(T_f)$$

对于每个 $T_f \in \mathcal{K}(Xf)$。 □

命题 4.2。设 $\psi: X \to \mathcal{B}$ 是 $X = (\{\mathcal{A}_x\}, \{X_f\})$ 的 *Toeplitz* 表示。假设对于每个 $y \in \mathrm{Ob}(P)$，$P(-, y)$ 中的任意两个元素都有最小上界，并且对于每个 $f \in P(-,-)$，左作用 $\phi_f: \mathcal{A}_{t(f)} \to \mathcal{L}(Xf)$ 是单射。

(1) 如果 ψ 是 *Cuntz-Pimsner* 协变的，则 $\psi(f)(\phi_f(a)) = \psi_{1_{t(f)}}(a)$ 对于一个 $a \in \phi^{-1}f(\mathcal{K}(Xf))$，$f \in P(-,-)$.

(2) 若对每个 $f \in P(\Gamma, \Lambda)$，$\phi_f(\mathcal{A}_{t(f)}) \subseteq \mathcal{K}(Xf)$ 且 $\psi(f)(\phi_f(-)) = \psi_{1_{t(f)}}(-)$，则 ψ 是 *Cuntz-Pimsner* 协变的。

证明。由于 ϕ_f 对 $f \in P(-,-)$ 是单射，因此对所有 $g \in P(-,-)$，有 $\tilde{X}_f = X_f$ 且 $\tilde{l}^g f(-) = l^g f(-)$。

(1) 令 $f \in P(-, y)$ 且 $a \in \phi^{-1}f(\mathcal{K}(Xf))$。对于每个 $h \in P(-, y)$，有

$$l_{1_y}^g(a) - l_f^g(\phi_f(a)) = l_f^g(l_{1_y}^f(a) - \phi_f(a)) = 0$$

对于每个 $g \geqslant f \vee h$，因为 $lf^{1_y}(a) = \phi_f(a)$。因此

$$\psi_{1_y}(a) - \psi^{(f)}(\phi_f(a)) = \psi^{(1_y)}(a) - \psi^{(f)}(\phi_f(a)) = 0,$$

因为 ψ 是 Cuntz-Pimsner 协变的。

(2) 假设 $l^g{}_h(T) = 0$ 对于 $T \in \mathcal{L}(X_h)$，$g \geqslant h \in P(-,-)$。那么对于 $\xi \in X_h, \eta \in X_{h^{-1}g}$，

$$\begin{aligned}0 &= \langle l_h^g(T)(\xi\eta), l_h^g(T)(\xi\eta)\rangle_{\mathcal{A}_{s(g)}} \\ &= \langle (T\xi)\eta, (T\xi)\eta\rangle_{\mathcal{A}_{s(g)}} \\ &= \langle \eta, \langle T\xi, T\xi\rangle_{\mathcal{A}_{s(h)}}\eta\rangle_{\mathcal{A}_{s(g)}}.\end{aligned}$$

于是 $\phi_h(\langle T\xi, T\xi\rangle_{\mathcal{A}_{s(h)}}) = 0$。由于 ϕ_h 是单射，$T = 0$。因此 $l^g{}_h$ 是单射。设 $\mathscr{F}$ 是 $P(-, y)$ 的一个有限子集，并且 $T_f \in \mathcal{K}(Xf)$ 使得

$$\sum_{f\in\mathscr{F}} l_f^g(T_f) = 0$$

对于足够大的 $g \in P(-,y)$。于是

$$l^g_{h_0}(\sum_{f\in\mathscr{F}} l^{h_0}_f(T_f)) = 0$$

对于 $g \geqslant h_0 = \vee\mathscr{F}$。由于 $l^g{}_{h_0}$是单射，因此有 $\sum_{f\in\mathscr{F}} l^{h_0}{}_f(Tf) = 0$。由引理 4.1 可得

$$\sum_{f\in\mathscr{F}} \psi^{(f)}(T_f) = \psi^{(h_0)}(\sum_{f\in\mathscr{F}} l^{h_0}_f(T_f)) = 0.$$

因此， ψ 是 Cuntz-Pimsner 协变的。 □

设 $\psi = \{\psi_f\colon X_f \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\}_{f\in P(-,-)}$是 X的 Toeplitz表示，其中 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上所有有界算子构成的C^*-代数。 [13] 中的命题 2.5 表明，

$*$-同态 $\psi^{(f)}$存在一个严格 SOT 连续扩张 $\psi^{(f)}\colon \mathcal{L}(X_f) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$。显然， $\psi : X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 Nica 协变的，当且仅当

$$\psi^{(f)}(I)\psi^{(g)}(I) = \psi^{(f\vee g)}(I)$$

对f、$g \in P(-,-)$。

推论 4.3。 假设对于所有 $y \in \mathrm{Ob}(P)$， $P(-,y)$ 中的每一对元素都有最小上界，并且左作用$\phi_f\colon \mathcal{A}_{t(f)} \to \mathcal{L}(Xf)$均为单射，其中 $\phi_f(\mathcal{A}_{t(f)}) \subseteq \mathcal{K}(Xf)$，对$f \in P(-,-)$成立。设 $\psi\colon X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$是 X 的一个 *Toeplitz*表示，满足

$$\psi_{1_x}(\mathcal{A}_x)\psi_{1_y}(\mathcal{A}_y) = 0$$

对所有 $x \neq y \in \mathrm{Ob}(P)$。那么，当且仅当 ψ 是 *CNP* 协变时，

$$\psi^{(f)} \circ \phi_f(-) = \psi_{1_{t(f)}}(-).$$

证明。 若 ψ是 CNP 协变，则由命题 4.2 (1)，有 $\psi(f)\circ\phi_f(-) = \psi_{1_{t(f)}}(-)$。假设对所有$f \in P(x、y)$， $\psi(f)\circ\phi_f(-) = \psi_{1_y}(-)$。令

$$\psi_f(X_f)\mathcal{H} := \overline{\mathrm{span}}\{\psi_f(\xi_f)\eta : \xi_f \in X_f, \eta \in \mathcal{H}\}.$$

由于 $\phi_f(\mathcal{A}_y) \subseteq \mathcal{K}(X_f)$，因此根据引理 1.9]，有 $\psi_{1_y}(\mathcal{A}_y)\mathcal{H} \subseteq \psi_f(X_f)\mathcal{H}$。注意 $\mathcal{A}_y \cdot X_f = Xf$。根据定义 2.7 中的条件 (2)，有

$$\psi_f(X_f)\mathcal{H} = \psi_f(\mathcal{A}_y \cdot X_f)\mathcal{H} = \psi_{1_y}(\mathcal{A}_y)\psi_f(X_f)\mathcal{H} \subseteq \psi_{1_y}(\mathcal{A}_y)\mathcal{H}.$$

因此 $\psi_{1_y}(\mathcal{A}_y)\mathcal{H} = \psi_f(\mathrm{X}f)\mathcal{H}$以及 $\psi(\mathrm{f})(\mathrm{I}) = \psi(1_y)(\mathrm{I})$。令 $\mathrm{g} \in \mathrm{P}(-,-)$。注意，当且仅当 $\mathrm{t(g)} = \mathrm{y}$ 时，$\mathrm{f} \vee \mathrm{g} < \infty$。如果 $\mathrm{f} \vee \mathrm{g} < \infty$，则

$$\psi^{(f)}(I)\psi^{(g)}(I) = \psi^{(1_y)}(I) = \psi^{(f\vee g)}(I).$$

若 $t(g) \neq y$，则 $\psi(f)(I)\psi(g)(I) = 0$，因为 $\psi_{1_y}(\mathcal{A}_y)\psi_{1_{t(g)}}(\mathcal{A}_{t(g)}) = 0$。因此 ψ是 Nica 协变的。根据命题 4.2 (2)， ψ 是 CNP 协变的。□

假设(G, P) 是拟格序群胚，并且对于所有$y \in \mathrm{Ob}(P)$， $P(-,y)$ 中的每一对元素都有最小上界，且G 由P生成。令 $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_g\}_{g\in G(-,-)}$ 为一个 Fell 丛 12

在 G 上，其中每个 $\mathfrak{B}_g$ 都是一个 Morita等价双模。注意，对于 g、$k \in G(-,-)$，$s(g)=t(k)$。然后

$$\widehat{\mathfrak{B}} := (\{\mathfrak{B}_x\}, \{\mathfrak{B}_f\}_{f\in P(-,-)})$$

是定义在(G,P)上的乘积系统，其同构为 $\mathfrak{B}_f \otimes_{\mathfrak{B}_{s(f)}} \mathfrak{B}_h \cong \mathfrak{B}_{fh}$，对应于 Fell丛 $\mathfrak{B}$中的乘法 $\widehat{}$。显然，$\mathfrak{B}$ 是一个紧密对齐乘积系统。

定理4.4. 采用上述记号。我们有 $C^*(\{\mathfrak{B}_g\}_{g\in G(-,-)}) \cong \mathcal{NO}_{\widehat{\mathfrak{B}}}$。

证明。令 $\pi^u = \{\pi^u_g\}_{g\in G(-,-)}$ 为 Fell丛 $\mathfrak{B}$的泛表示。根据 Fell丛表示的定义，我们看到 $\{\pi^u_f: \mathfrak{B}_f \to C^*(\{\mathfrak{B}_g\}_{g\in G(-,-)})\}_{f\in P(-,-)}$ 是紧密对齐乘积系统 $\widehat{\mathfrak{B}}$ 在 $C^*(\{\mathfrak{B}_g\}_{g\in G(-,-)})$中的一个Toeplitz表示。

对于每个$f \in P(-,-)$，我们看到 $\phi_f: \mathfrak{B}_{t(f)} \to \mathcal{K}(\mathfrak{B}_f)$ 是一个同构，它将$_{\mathfrak{B}_{t(f)}}\langle \xi_f, \eta_f\rangle$映射到 θ_{ξ_f,η_f}，其中 $\xi_f, \eta_f \in \mathfrak{B}_f$。于是根据 Fell丛表示的定义，我们有

$$\begin{aligned}(\pi^u)^{(f)}(\phi_f(\sum_i {}_{\mathfrak{B}_{t(f)}}\langle \xi_i, \eta_i\rangle)) &= (\pi^u)^{(f)}(\sum_i \theta_{\xi_i,\eta_i}) \\ &= \sum_i \pi^u_f(\xi_i)\pi^u_f(\eta_i)^* \\ &= \sum_i \pi^u_{1_{t(f)}}(\xi_i\eta_i^*) \\ &= \pi^u_{1_{t(f)}}(\sum_i {}_{\mathfrak{B}_{t(f)}}\langle \xi_i, \eta_i\rangle),\end{aligned}$$

其中 $\sum_i {}_{\mathfrak{B}_{t(f)}}\langle \xi_i, \eta_i\rangle$ 是若干个 $\mathfrak{B}_{t(f)}$的有限和，且满足 $\xi_i, \eta_i \in \mathfrak{B}_f$。由于 $_{\mathfrak{B}_{t(f)}}\langle \mathfrak{B}_f, \mathfrak{B}_f\rangle$ 在 $\mathfrak{B}_{t(f)}$中稠密，我们有

$$(\pi^u)^{(f)} \circ \phi_f(-) = \pi^u_{1_{t(f)}}(-).$$

容易看出

$$\pi^u_{1_x}(\mathfrak{B}_x)\pi^u_{1_y}(\mathfrak{B}_y) = 0$$

对于 $x \neq y \in \mathrm{Ob}(P)$。由推论 4.3，$\{\pi^u_f\}_{f\in P(-,-)}$ 是 $\widehat{\mathfrak{B}}$的CNP协变Toeplitz表示。回想一下，$(\mathcal{NO}_{\widehat{\mathfrak{B}}}, j)$ 是 $\widehat{\mathfrak{B}}$ 的 Cuntz-Nica-Pimsner 代数。根据 j 的泛性质，存在一个 $*$- 同态 ϕ_1，使得对$f \in P(-,-)$，$\phi_1 \circ j_f = \pi^u_f$。

由于 G 由 P生成，对于每个 $g \in G(-,-)$，存在f、$h \in P(-,-)$，使得 $\mathfrak{B}_g = \mathfrak{B}_f\mathfrak{B}^*_h$。令 $\pi_g: \mathfrak{B}_g \to \mathcal{NO}_{\widehat{\mathfrak{B}}}$ 为如下定义的线性映射：

$$\pi_g(\xi_f\eta_h^*) := j_f(\xi_f)j_h(\eta_h)^*$$

对于 $\xi_f \in \mathfrak{B}_f$、$\eta_h \in \mathfrak{B}_h$，$f$、$h \in P(-,-)$ 且 $fh^{-1} = g$。我们看到

$$\pi_g(\xi_f\eta_h^*)^* = j_h(\eta_h)j_f(\xi_f)^* = \pi_{g^{-1}}(\eta_h\xi_f^*).$$

那么 $\pi_g(\xi)^* = \pi_{g^{-1}}(\xi^*)$ 对于 $\xi \in \mathfrak{B}_g$。

如果$f \leq h \in P(-,-)$，由于j是$\widehat{\mathfrak{B}}$的Toeplitz表示，我们有

$$\begin{aligned} j_f(\xi_f)^* j_h(\eta_f \zeta_{f^{-1}h}) &= j_f(\xi_f)^* j_f(\eta_f) j_{f^{-1}h}(\zeta_{f^{-1}h}) \\ &= j_{1_{s(f)}}(\langle \xi_f, \eta_f \rangle_{\mathfrak{B}_{s(f)}}) j_{f^{-1}h}(\zeta_{f^{-1}h}) \\ &= j_{f^{-1}h}(\xi_f^* \eta_f \zeta_{f^{-1}h}) \end{aligned}$$

对所有的$\xi f、\eta f \in \mathfrak{B} f、\zeta f^{-1} h \in \mathfrak{B}_{f^{-1}} h$。由此可得$j f(\xi f)^* j_h(\eta_h) = j_{f^{-1}} h(\xi^* f \eta_h)$，其中$\eta_h \in \mathfrak{B}_h$。对于满足$s(g) = t(k)$的$g,k \in G(-,-)$，我们有

$$\begin{aligned} &\pi_g(\xi_{f_1} \eta_{h_1}^*) \pi_k({}_{\mathfrak{B}_{t(k)}}\langle \beta_{h_1 \vee f_2}, \zeta_{h_1 \vee f_2} \rangle \xi'_{f_2} \eta'^*_{h_2}) \\ &= j_{f_1}(\xi_{f_1}) j_{h_1}(\eta_{h_1})^* j_{1_{t(k)}}({}_{t(k)}\langle \beta_{h_1 \vee f_2}, \zeta_{h_1 \vee f_2} \rangle) j_{f_2}(\xi'_{f_2}) j_{h_2}(\eta'_{h_2})^* \\ &= j_{f_1}(\xi_{f_1}) j_{h_1}(\eta_{h_1})^* j_{h_1 \vee f_2}(\beta_{h_1 \vee f_2}) j_{h_1 \vee f_2}(\zeta_{h_1 \vee f_2})^* j_{f_2}(\xi'_{f_2}) j_{h_2}(\eta'_{h_2})^* \\ &= j_{f_1 h_1^{-1}(h_1 \vee f_2)}(\xi_{f_1} \eta_{h_1}^* \beta_{h_1 \vee f_2}) j_{h_2 f_2^{-1}(h_1 \vee f_2)}((\eta'_{h_2} \xi'^*_{f_2} \zeta_{h_1 \vee f_2})^* \\ &= \pi_{gk}(\xi_{f_1} \eta_{h_1}^* \beta_{h_1 \vee f_2} \zeta_{h_1 \vee f_2}^* \xi'_{f_2} \eta'^*_{h_2}) \end{aligned}$$

其中$f_1, h_1, f_2, h_2 \in P(-,-)$，且$f_1 h_1^{-1} = g、f_2 h_2^{-1} = k、\xi f_1 \in \mathfrak{B}_{f_1}, \eta_{h_1} \in \mathfrak{B}_{h_1}, \beta_{h_1 \vee} f2, \zeta_{h_1 \vee} f_2 \in \mathfrak{B}_{h_1 \vee} f2, \xi' f_2 \in \mathfrak{B}_{f_2}, \eta' h_2 \in \mathfrak{B}_{h_2}$。由于${}_{\mathfrak{B}_{t(k)}}\langle \mathfrak{B}_{h_1 \vee} f2, \mathfrak{B}_{h_1 \vee} f_2 \rangle \mathfrak{B}_k$在$\mathfrak{B}_k$中稠密，因此我们有$\pi_g(-)\pi_k(-) = \pi_{gk}(-)$。若$s(g) \neq t(k)$，根据备注 2.3 中的条件 (1)，我们有$\pi_g(-)\pi_k(-) = 0$，因为$j$是$\widehat{\mathfrak{B}}$的Nica协变Toeplitz表示。因此，$\pi = \{\pi_g\}_{g \in G(-,-)}$是Fell丛$\mathfrak{B}$的表示。于是存在一个$*$-同态

$$\phi_2 : C^*(\{\mathfrak{B}_g\}_{g \in G(-,-)}) \to \mathcal{NO}_{\widehat{\mathfrak{B}}}$$

使得$\phi_2 \circ \pi_g^u(-) = \pi_g(-)$。显然，$\phi_1$和$\phi_2$互为逆运算。然后

$$C^*(\{\mathfrak{B}_g\}_{g \in G(-,-)}) \cong \mathcal{NO}_{\widehat{\mathfrak{B}}}.$$

证明至此完成。 □

参考文献

1. T. M. Carlsen、N. S. Larsen、A. Sims 和 S. T. Vittadello，《与乘积系统相关的余泛代数及规范不变唯一性定理》，《伦敦数学学会会刊》(第3辑) 103 (2011)，第4期，563–600。2. J. Cuntz，《由等距算子生成的简单 C*代数》，《数学物理通讯》57 (1977)，第2期，173–185。3. J. Cuntz 和 W. Krieger，《一类 C*代数与拓扑马尔可夫链》，《数学发明》56 (1980)，第3期，251–268。4. A. Dor-On 和 E. Katsoulis，《乘积系统的张量代数及其 C

* **278** 2020 7, 108416, 包

32

络》，《泛函分析杂志》( )，第 pp. 期。5. A. Dor-On、E. T. A. Kakariadis、E. Katsoulis、M. Laca 和 X. Li，《具有余作用的算子代数的 C*包络及乘积系统的余泛 C*代数》，《数学进展》400 (2022)，论文编号 108286，共40页。6. J. M. G. Fell 和 R. S. Doran，《 *代数、局部紧群及 Banach *代数丛的表示》，第1卷，《纯粹与应用数学》，第125卷，Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1988。7. N. J. Fowler，《Hilbert双模的离散乘积系统》，《太平洋数学杂志》204 (2002)，第2期，335–375。8. N. J. Fowler 和 I. Raeburn，《Hilbert双模的 Toeplitz代数》，《印第安纳大学数学杂志》48 (1999)，第1期，155–181。9. T. Kajiwara、C. Pinzari 和 Y. Watatani，《由 Hilbert双模生成的 C*代数的理想结构与单纯性》，《泛函分析杂志》159 (1998)，第2期，295–322。10. T. Katsura，《关于与 C*对应相关的 C*代数》，《泛函分析杂志》217 (2004)，第2期，366–401。11. A. Kumjian，《群胚上的 Fell丛》，《美国数学会会刊》126 (1998)，第4期，1115–1125。12. M. Laca 和 I. Raeburn，《半群交叉积与非阿贝尔群的 Toeplitz代数》，《泛函分析杂志》139 (1996)，第2期，415–440。13. E. C. Lance，《Hilbert C*模：算子代数学家的工具箱》，《伦敦数学学会讲义丛书》，第210卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995。

14. Feifei Miao、Liguang Wang 和 Wei Yuan，乘积系统的余泛 C^*代数：拟格序群胚上的情形，arXiv: 2201.08198。15. I. Raeburn N. J. Fowler，P. S. Muhly，*Cuntz-Pimsner*代数的表示，《印第安纳大学数学杂志》**52** 3，569 2003 605 ( )，第 – 期。16. A. Nica，C^* 由等距算子和 *Wiener-Hopf* 算子生成的代数，《算子理论杂志》 **27** (1992)，第 1 期，17–52。17. M. V. Pimsner，一类同时推广 *Cuntz-Krieger*代数与由 $\mathbb{Z}$交叉积的 C^*代数，自由概率论（滑铁卢，安大略省，1995），Fields研究所通信丛书，第12卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997，第189–212页。18. S. Roman，范畴论语言导论。《数学精要教材》。Birkh¨auser/Springer，沙姆，2017。xii+169 页。19. A. Sims、G. Szab´o 和 D. P. Williams，算子代数与动力学：群胚、交叉积和 *Rokhlin*维数，《数学高级课程》。巴塞罗那CRM，Birkhäuser/Springer，沙姆，2020。20. A. Sims 和 T. Yeend，C^* **64** 2010 2, 与 349 376

*Hilbert*双模乘积系统相关的代数，《算子理论杂志》( )，第 – 期。数学科学学院，曲阜师范大学，中国山东曲阜，273165电子邮箱：mff100511@163.com 数学科学学院，曲阜师范大学，中国山东曲阜，273165电子邮箱：wangliguang0510@163.com AMSS，中国科学院，中国北京，100190，以及中国科学院大学数学科学学院，中国北京100049电子邮箱：wyuan@math.ac.cn